

*Dinámica del Default en los
CDS soberanos de Colombia*

Presentado por:
Gerson Fabian Ruge Rodriguez

Supervisores de tesis:
Rafael Serrano
Carlos Castro

Maestría en Finanzas Cuantitativas
Universidad Del Rosario
Facultad de Economía
Enero 2017

Índice

Introducción	3
Resumen	4
1. Capítulo 1	5
1.1. SWAPS	5
1.2. CREDIT DEFAULT SWAP	5
1.3. Preliminares para el Pricing de los CDS	6
1.4. Formula cerrada para el spread del CDS	7
2. Capítulo 2	8
2.1. Modelo de valoración y estimación de parámetros	8
2.2. Filtro de Kalman	10
2.3. Algoritmo Recursivo de Kalman	10
2.4. Unscented Kalman Filter	12
2.5. Estimación de parámetros usando el UKF	13
2.6. Consideraciones para implementar el UKF	15
3. Capítulo 3	17
3.1. Resultados y conclusiones	17
3.2. Contrastando nuestra hipótesis	17
3.3. Descripción de los demás parámetros	18
3.4. Intensidad de Default	19
3.5. Valoración de los Spreads CDS soberanos	20
3.6. Un pequeño ejercicio de Forecast	20
3.7. Extensiones y variantes de este trabajo	22
Bibliografía	23

Introducción

En el mercado over the counter, los credit Default swaps (CDS) tiene una participación significativa, cerca del 7% de los instrumentos que se negocian en este mercado paralelo corresponden a este derivado de crédito [Bank, 2009], esto no debería sorprendernos teniendo en cuenta que es una herramienta para ceder la exposición de títulos tan líquidos como los bonos. En mercados emergentes como el colombiano los CDS soberanos acaparan buena parte del mercado entre otras razones porque la base de la economía nacional esta en bonos del tesoro, mejor conocidos como TES.

Los spreads de los CDS se cotizan en puntos básicos y corresponden a la protección que paga el comprador de un bono (aunque a veces no es necesario tener un bono para poseer este seguro) para cubrirse en el evento de default del emisor del título; generalmente se asocia el spread de estos bonos con la probabilidad de default de un país. Teniendo esto en mente el mercado de los CDS soberanos se trata con tanta delicadeza dadas las posibilidades de especulación sobre una nación.

Particularmente en Colombia desde el año 2014 y hasta finales de 2015 se ha registrado una fuerte alza de estos spreads, especialmente para CDS a 5 y 10 años, Posiblemente por la caída en el precio del petróleo, la devaluación del peso entre otras razones.

Es particularmente llamativa la relación entre la volatilidad de la tasa de cambio con el aumento en los spreads de los CDS, evidencia de esto queda registrada en estudios publicados por la revista dinero que muestran correlaciones de hasta un 80% [Revista-Dinero, 2015b]. Esto se debe principalmente a que buena parte de la deuda del país, 34,2% [de Hacienda, 2016] esta en dolares, por lo cual entre mas se devalúa el peso frente a esta moneda es mas difícil pagar la deuda. la caída del precio del crudo genera incertidumbre en como va a hacer la nación para conseguir los recursos para solventar sus obligaciones, lo cual a su vez explica parcialmente el alza en los rendimientos de los TES en el periodo de muestra (2013-2015) ya que el emisor necesita ofrecer mayores rendimientos para atraer inversores que adquieren estos títulos soberanos .[Revista-Dinero, 2015a]

Para el modelo que presentaremos en el capítulo 2 tomaremos como muestra los spreads de los CDS soberanos de Colombia entre el 4 de enero de 2013 y el 25 de diciembre de 2015, los datos tienen una frecuencia semanal y vencimientos de 1,3 y 5 años.

Modelaremos la intensidad de default a través de dos procesos estocásticos de Cox, Utilizaremos los resultados de [Duffie et al., 2000] para la valoración de derivados cuya dinámica esta regida por este tipo de procesos de difusión y estimaremos los parámetros del modelo usando el Unscented Kalman filter

(UKF) y máxima verosimilitud que es una herramienta ideal para modelos de estado espacio donde la función de medición(en este caso la de pricing) no es lineal.

Al final presentamos los resultados de la estimación, resaltamos la dificultad, como metodo numerico, concerniente a implemetar un filtro como el UKF y hacemos un pequeño ejercicio de pronostico con los CDS que tiene vencimiento de un año;extensiones y variantes de estos ejercicios tambien son dadas a conocer al lector.

Resumen

Tomando los datos de los CDS soberanos de Colombia entre 2013 y 2015,desarrollamos un modelo de valoración para estos derivados de crédito, que aprovecha la dinámica de la intensidad de default propuesta de un proceso bivariado de difusión.Esta es una versión mas sencilla de [Carr and Wu, 2007] que estima la volatilidad de los retornos usando la relación intrínseca que existe entre esta y la intensidad de Default.La estimación de los parámetros es es alcanzada vía UKF y máxima verosimilitud, producto de esto obtenemos la dinámica de la intensidad de default para los spreads de los CDS soberanos de Colombia en el periodo de muestra y cuantificamos la relación que esta tiene con la volatilidad de los retornos de la tasa de cambio.Realizamos también un pequeño ejercicio de forecast para darnos cuenta que tan bueno seria un pronostico con este modelo,en que vencimientos se comportaría mejor y que tan a menudo deberíamos recalibrar nuestro modelo.

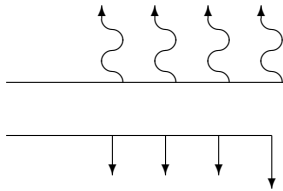
1. Capitulo 1

1.1. SWAPS

Un *swap* es un contrato en el cual dos partes acuerdan hacerse pagos periódicos (intercambiar flujos) sobre una moneda/monedas definidas y a una tasa o tasas de interés pactadas .

Ejemplo: Pedro Martínez le paga al banco ABC intereses indexados a la IBR sobre un nominal de 1,000,000.

El banco ABC le paga a Pedro Martínez intereses a una tasa fija del 5% sobre el nominal de 1,000,000.



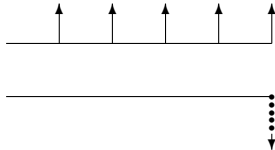
En este ejemplo observamos el intercambio de flujos de caja del banco hacia Pedro (a una tasa fija) y de Pedro hacia el banco (a una tasa variable). Este tipo de swap es conocido como *swap de tasa de interés*

1.2. CREDIT DEFAULT SWAP

Un credit default swap (CDS) es un tipo especial de swap en donde el comprador recibe un flujo de dinero en caso de que un tercero (que tiene un contrato con el comprador) entre en default y no cumpla con su obligación de pago.

Ejemplo: Pedro Martínez tiene un bono de la República de Colombia (TES). Pedro le paga al Banco ABC una prima periódica (spread) para que lo proteja en caso de que Colombia entre en default.

El Banco ABC le debe pagar el nominal del bono que tiene Pedro en caso de que Colombia entre en default y no cumpla con la obligación en el tiempo pactado.



Un CDS se puede interpretar como un seguro en el cual el comprador sede el riesgo a un tercero.

1.3. Preliminares para el Pricing de los CDS

Los spreads de los CDS (prima que paga el comprador) se cotizan en puntos básicos y corresponden al porcentaje que se debe pagar sobre el nominal para tener el seguro.

Supongamos por ejemplo una persona adquiere un CDS sobre un nominal de 1, el comprador espera pagar s (s : spread CDS) y recibir $(1 - R)P$ en caso de que la nación entre en Default y no cumpla con su obligación (R : tasa de recuperación), (P : probabilidad de default).Bajo el principio de no arbitraje

$$S = (1 - R)P \iff \frac{S}{1 - R} = P \quad (1)$$

si por ejemplo $R = 25\%$ y tenemos un spread de 300 puntos basicos

$$\Rightarrow P = 6,6\%$$

si $R = 0 \Rightarrow S = P = 5\%$.

Un sencillo ejemplo de la dinámica del pricing

- Entramos en un CDS con vencimiento N años
- Entenderemos como Premium el valor presente de lo que esperamos pagar como compradores del CDS, por convención pagado por cuotas d_i (ejemplo: $d_i = 0,25$ significa pagos trimestrales)
- Traemos los pagos a valor presente con una curva de factores de descuento $B(t_i)$, $q = 1 - p$ probabilidad de no default. Así el valor presente del que se protege es

$$PV[premium] = \underbrace{\sum_{i=1}^N B(t_i)q(t_i)Sd_i}_{\text{premium si no hay default}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N B(t_i)(q(t_{i-1}) - q(t_i))S\frac{d_i}{2}}_{\text{lo que alcanza a pagar en caso de que el default ocurra entre periodos de pago}} \quad (2)$$

- Para el caso del vendedor del contrato tenemos

$$PV[protection] = \underbrace{(1 - R)}_{\text{pago de compensación}} \underbrace{\sum_{i=1}^N B(t_i)}_{\text{probabilidad de default en el periodo } t_i} \underbrace{(q(t_{i-1}) - q(t_i))}_{\text{probabilidad de default en el periodo } t_i} \quad (3)$$

$1 - R$ corresponde al supuesto de que aunque al comprador no le pagaran en el momento pactado puede recuperar una tasa R del nominal.

1.4. Formula cerrada para el spread del CDS

Definición: Sea $s(t, T)$ el spread fijo pagado por el comprador de un CDS soberano donde t denota el tiempo de inicio y T en vencimiento del contrato.

Si suponemos que los pagos se pueden hacer de forma continua, sobre un nominal de 1, el valor presente correspondiente al comprador Carr and Wu [2007]

$$premium(t, T) = s(t, T) \mathbb{E}_t \left[\int_t^T \exp \left(- \int_t^s (r(u) + \lambda(u)) du \right) ds \right] \quad (4)$$

Donde $r(t)$ y $\lambda(t)$ denotan la tasa de interés local y la intensidad de default respectivamente.

Si miramos esta ecuación un momento podemos darle un sentido, por lo menos intuitivo con lo que hemos visto. el termino $e^{-\int_0^t \lambda(u) ds}$ corresponde a la probabilidad de default antes de un tiempo s ; $e^{-\int_0^t r(u) ds}$ descontara los pagos a valor presente, la otra integral computa la suma de los pagos de forma continua y el $S(t, T)$ es el spread pactado.

Para el vendedor del contrato que ofrece la protección, el valor presente de sus flujos es

$$protection(t, T) = w \mathbb{E}_t \left[\int_t^T \lambda(s) \exp \left(- \int_t^s (r(u) + \lambda(u)) du \right) ds \right] \quad (5)$$

donde $(1 - w)$ denota la tasa de recuperación, que tomaremos como el 40%. r corresponde a la tasa de interés (IBR y esta a su vez corresponde con el vencimiento del CDS 1, 3 o 5 años.

De esta forma tenemos que el spread justo para el CDS soberanos es:

$$s(t, T) = w \frac{\mathbb{E}_t \left[\int_t^T \lambda(s) \exp \left(- \int_t^s (r(u) + \lambda(u)) du \right) ds \right]}{\mathbb{E}_t \left[\int_t^T \exp \left(- \int_t^s (r(u) + \lambda(u)) du \right) ds \right]} \quad (6)$$

2. Capitulo 2

2.1. Modelo de valoración y estimación de parámetros

Para la valoración de nuestro derivado de crédito, el CDS soberano, proponemos un modelo estocástico; Recordemos que el spread de un CDS viene dado por la ecuación [Carr and Wu, 2007]

$$s(t, T) = w \frac{\mathbb{E}_t \left[\int_t^T \lambda(s) \exp \left(- \int_t^s (r(u) + \lambda(u)) du \right) ds \right]}{\mathbb{E}_t \left[\int_t^T \exp \left(- \int_t^s (r(u) + \lambda(u)) du \right) ds \right]} \quad (7)$$

donde λ es la intensidad de default cuya dinámica sera modelada con las siguientes procesos de difusión de Cox

$$dv(t) = (\theta_v - \kappa_v v(t)) dt + \varphi_v \sqrt{v(t)} dw_t^v \quad (8)$$

$$dz(t) = (\theta_z - \kappa_z z(t)) dt + \varphi_z \sqrt{z(t)} dw_t^z \quad (9)$$

$$\lambda(t) = \beta v(t) + z(t) \quad (10)$$

con $p^{zu} = E[dw^z dw] = 0$

Para nosotros la ecuación (8) describe la volatilidad de los retornos de la tasa de cambio, la cual esta ampliamente documentada que tiene comportamiento estocástico.[Carr and Wu, 2009]

Como hemos mencionado estos retornos tienen relación directa con la intensidad de default (ver seccion CDS en Colombia) esta relación queda cuantificada por el termino β de la ecuación 10, pero esta intensidad de default no proviene únicamente de estos retornos como explicábamos antes, por eso adicionamos otra fuente de riesgo, también modelada por un proceso de difusión de Cox pero independiente de la de la volatilidad.

Con la dinámica que especificamos para λ (nuestra intensidad de default) la transformada de Fourier que aparece como ayuda para solucionar estos valores esperados es exponencialmente afin [Duffie et al., 2000] lo que nos lleva a tener una formula cerrada para la valoración de los spreads de los CDS después de solucionar un sistema de ecuaciones de Ricatti en varias dimensiones [Carr and Wu, 2007]

$$premium(t, T) = s(t, T) \int_t^T B(t, s) \exp(-a_\lambda(s-t) - b_\lambda(s-t)^T x_t) ds \quad (11)$$

donde

$$a'_\lambda(t) = b_\lambda(t)^T \theta \quad (12)$$

$$b'_\lambda(t) = \beta_\lambda - \kappa^T b_\lambda(t) - \frac{1}{2} \sum (b_\lambda(t) \odot b_\lambda(t)) \quad (13)$$

con condiciones de frontera $a_\lambda(0) = 0$, $b_\lambda(0) = 0$ y $\beta_\lambda = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_v & 0 \\ 0 & \kappa_z \end{bmatrix}$$

De forma análoga para el vendedor tenemos.

$$protection = w \int_t^T B(t, s) (c(s-t) + d(s-t)^T x_t) \exp(-a_\lambda(s-t) - b_\lambda(s-t)x_t) \quad (14)$$

donde $B(t, T)$ corresponde a los factores de descuento y los coeficientes c y d satisfacen

$$c'(t) = d(t)\theta \quad (15)$$

$$d'(t) = -\kappa^t d(t) - \sum (b_\lambda(t) \odot d_\lambda(t)) \quad (16)$$

con condiciones de frontera $c(0) = 0$ y $d(0) = \beta_\lambda \cdot y \odot$ denotando el producto de Hadamard Aquí presentamos los coeficientes solución de este sistema de ecuaciones diferenciales, para un mayor detalle de como derivar estas soluciones consultar [Carr and Wu, 2009] Se puede demostrar que los coeficientes $a(t)$ y $b(t)$ están dados por

$$a_\lambda(t) = \frac{\theta_\vartheta}{\varphi_\vartheta^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{\eta_\vartheta - \kappa_\vartheta}{2\eta_\vartheta} (1 - e^{-\eta_\vartheta t}) \right) + (\eta_\vartheta - \kappa_\vartheta)t \right] \\ + \frac{\theta_2}{\varphi_\vartheta^2} \left[2 \ln \left(1 - \frac{\eta_z - \kappa_z}{2\eta_z} (1 - e^{-\eta_z t}) \right) + (\eta_z - \kappa_z)t \right] \quad (17)$$

$$b_\lambda(t) = \left[\frac{2\beta(1 - e^{\eta_\vartheta t})}{2\eta_\vartheta - (\eta - \kappa_\vartheta)(1 - e^{-\eta_\vartheta t})}, \frac{2(1 - e^{\eta_z t})}{2\eta_z - (\eta_z - \kappa_z)(1 - e^{-\eta_z t})} \right] \quad (18)$$

con $\eta_\vartheta = \sqrt{(\kappa_\vartheta)^2 + 2\varphi_\vartheta^2\beta}$ y $\eta_z = \sqrt{(\kappa_z)^2 + 2\varphi_z^2\beta}$, finalmente se puede obtener $c_\lambda(t)$ y $d_\lambda(t)$ derivando parcialmente respecto a t

$$c_\lambda(t) = \frac{\partial a_\lambda}{\partial t}, \quad d_\lambda(t) = \frac{\partial b_\lambda}{\partial t} \quad (19)$$

2.2. Filtro de Kalman

En finanzas frecuentemente vemos datos que dependen de un estado “no observable” ,(por ejemplo podemos ver los datos de las acciones pero no su volatilidad, que es un derivador de su precio) que nos gustaría estimar, ya sea para conocer la dinámica de estos o para hacer pronósticos sobre nuestros datos observados.

El filtro de Kalman ideado por Rudolph Kalman y presentado en 1960 es un algoritmo recursivo que con cada dato observable nuevo actualiza la estimación del estado previo y hace un nuevo pronóstico del siguiente estado [Wan and van der Merwe, 2001]

Ampliamente usado en problemas como el procesamiento de señales, la navegación, econometría, esta herramienta se convierte en una buena elección cuando tratamos de estimar la dinámica de un sistema lineal que esta conectado a una ecuación de medida (o función simplemente) que tiene como input unos parámetros y el estado no observable.

Sistemas estado espacio

Sean x_t y y_t dos series de tiempo definidas por

$$x_{t+1} = Ax_t + w_t \quad \text{con } w_t \sim N(0, W) \quad (20)$$

$$y_t = Hx_t + v_t \quad v_t \sim N(0, V) \quad (21)$$

donde la variable observada es y_t , el estado no observado es x_t , los errores de estado y medición son w_t y v_t respectivamente , A y H son matrices de dimensión finita. Este sistema se conoce como sistema de estado-espacio

2.3. Algoritmo Recursivo de Kalman

Del sistema de estado-espacio definido arriba podemos calcular la media y la covarianza de nuestro vector de estados como

$$\bar{x}_t = A\hat{x}_{t-1}, \quad \overline{\sum_{xx,t}} = A\widehat{\sum_{xx,t-1}}A^T + W \quad (22)$$

donde \bar{x}_t , $\overline{\sum_{xx,t}}$ corresponden al pronóstico de nuestro estado y de su covarianza, $\hat{x}_{xx,t-1}$ y $\widehat{\sum}_{t-1}$ son las actualizaciones de nuestros estados ante la llegada de nueva información, es decir

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \mathbb{E}(x_0) \\ \widehat{\sum}_{xx,0} &= \mathbb{E}[(x - \hat{x}_0)(x - \hat{x}_0)^T] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\widehat{x}_{t-1} = \mathbb{E}(x_t | y_0, y_1 \dots y_{t-1}) \quad (24)$$

$$\widehat{\sum}_{xx,t-1} = \mathbb{E}(x_{t-1} - \widehat{x}_{t-1})(x_{t-1} - \widehat{x}_{t-1})^T \quad (25)$$

Los pronósticos para nuestro estado de medida o estado no observable corresponden a

$$\bar{y}_t = H\bar{x}_t, \quad \overline{\sum}_{yy,t} = H \overline{\sum}_{xx,t} H^T + V \quad (26)$$

Que se derivan directamente de la linealidad de H

$$\overline{\sum}_{xy,t} = \overline{\sum}_{xx,t} H^T \quad (27)$$

Con las nuevas observaciones y_t actualizamos la media covarianza del vector de estado.

$$\widehat{x}_t = \bar{x}_t + \kappa_t(y_t - \bar{y}_t), \quad \widehat{\sum}_{xx,t} = \overline{\sum}_{xx,t} - \kappa_t \overline{\sum}_{yy} \kappa_t^T \quad (28)$$

Donde

$$\kappa_t = \overline{\sum}_{xy} (\overline{\sum}_{yy,t})^{-1}$$

es el conocido **Kalman gain**.

Con las nuevas actualizaciones de nuestros estados volvemos al paso 1 del algoritmo pero ahora con $t = t + 1$.

¿Como Interpretamos el Kalman Gain?

Este termino como lo presentamos aquí aparentemente sencillo, juega un rol muy importante en la consecución de este algoritmo; Es el método que iteracion a iteracion (cada observación nueva determina una iteracion) pondera el error entre la estimación y el estado real de nuestra variable observable (Esto no es nada trivial, por eso este filtro tiene nombre propio) es decir si el error es grande le da una ponderación pequeña y viceversa (ver ec 15)

El lector podrá encontrar expresado el kalman gain en formas equivalentes aquí lo pusimos en la forma mas sintética posible y sin entrar en detalles en como se obtiene este. Encontrara información completa de esto en [Wan and van der Merwe, 2001] queremos resaltar que el kalman gain se produce en gran medida de las propiedades de las distribuciones normales, es decir aprovecha fuertemente el hecho de que la distribución marginal de una distribución normal es normal, y que la distribución condicional de una variable aleatoria normal es normal.

Ventajas y desventajas del Filtro de Kalman

- Es un algoritmo fácil de implementar en programas como R y Matlab ya viene listo para usar.
- Al ser un algoritmo recursivo su costo computacional es alto.
- La velocidad en la convergencia depende de la elección de una buena semilla [Wan and van der Merwe, 2001]
- Aunque es un algoritmo con un buen sustento matemático en la práctica algunas veces tiene dificultades de uso. Por ejemplo la medición del error debe estar cerca a la realidad o sino puede derivar en problemas de invertibilidad ecuación (15)

2.4. Unscented Kalman Filter

Es muy conocido el amplio uso del filtro de Kalman en diversos problemas prácticos (ejemplo: procesamiento de señales, econometría) pero también se sabe que la mayoría de casos de la vida real, la ecuación de medición no es lineal, situación en la cual el filtro de Kalman se queda corto.

Frente a este problema tenemos dos soluciones (si queremos un filtro que tenga como base el de Kalman).

La primera es el EKF (Extended Kalman Filter) el cual a través de una serie de Taylor consigue una aproximación de la función que modela el comportamiento de las variables no observables. Esta aproximación tiene una precisión de orden uno y requiere cálculo de Jacobianos, Hessianos que pueden ser muy complejos (o simplemente las funciones pueden ser no diferenciables).

La segunda opción es usar el UKF (**unscental Kalman Filter**) que como dato interesante para el lector no requiere calculo de Jacobianos ni Hessianos y tiene una precisión de orden dos.¹

Hipótesis para el UKF

Cuando tenemos sistemas de estado espacio uno de nuestros mayores intereses es conocer la dinámica del estado no observable, esto incluye saber en promedio cuanto es y cual es su varianza. Rigurosamente hablando, acercarnos a su media y a su covarianza real. Queremos usar el filtro de kalman para recalibrar en cada iteracion los estados no observables, el problema es que hacer para transformarlos a través de nuestra función no lineal de medición.

¹El orden en la precisión se refiere al grado del polinomio con que aproximamos con una serie de Taylor

La solución del UKF es hacer en cada iteración (o con la llegada de nueva información) un re muestreo de los estados y transformarlos en una estimación de y_t a través de la función no lineal. La diferencia radical con un algoritmo como **Montecarlo** es que el remuestreo que hacemos no es aleatorio es determinístico.

Condiciones para la transformación Unscented (UT)

La transformación Unscented la relacionaremos con la matriz χ que con vierte un estado en conjunto de estados (**sigma points**), $2p+1$ para ser exacto, donde p es el número de entradas del vector de estados

- $\chi^{[0]} = \mu$
- $\chi^{[i]} = \mu + (\sqrt{p + \delta \sum_i})$ con $i = 1, 2, \dots, p$
- $\chi^{[i]} = \mu - (\sqrt{p + \delta \sum_i})$ con $i = n + 1, \dots, 2p$

cada estado lo transformaremos en conjunto de puntos con la condición de que tenga la misma media y varianza original

- $\sum w_i = 1$ (w_i son las ponderaciones de la UT)
- $\mu = \sum w_i \chi_i$
- $\Sigma = \sum w_i (\chi - \mu)(\chi - \mu)^T$

δ es un parámetro de control que escojamos nosotros y nos indicara que tanto se mueven los sigma points del estado original

2.5. Estimación de parámetros usando el UKF

Observando nuestra ecuación de precios podemos ver fácilmente que no es lineal y difícilmente diferenciable en el sentido clásico. Es por esto que para estimar nuestros parámetros recurrimos a una herramienta ampliamente utilizada que es el Unscented Kalman Filter (UKF) que es una extensión del filtro de Kalman (que se utiliza en el caso en que la función de medición es lineal) y es una mejora a nivel de precisión del extended Kalman Filter (EKF). UKF es de orden 2 mientras que EKF es de orden 1.

Dicho esto el primer paso consiste en poner nuestras variables no observables y observables en la forma canónica de un modelo de estado espacio. Aquí nuestras variables no observables son las fuentes de riesgo $x_t = [v_t, z_t]$ que determinan la intensidad de default y nuestras variables observadas y_t son los spreads de los CDS

$$x_t = A + \Phi x_{t-1} + \sqrt{Q_{t-1}} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, I), \quad (29)$$

$$y_t = h(x_t) + e_t, \quad e_t \sim N(0, R). \quad (30)$$

$$\text{con } Q_{t-1} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 v_{t-1} \Delta t & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 z_{t-1} \Delta t \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 - kv\Delta t & 0 \\ 0 & 1 - kz\Delta t \end{bmatrix}$$

Donde la descomposición de x_t corresponde simplemente a usar una discretización Euler-Maruyama y ponerla en forma vectorial para nuestro factor de riesgo x_t definido como $x_t = [v_t, z_t]$.

$h(x_t)$ es la función de precios, y R al error de medición.

El algoritmo queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\bar{x}_t = A + \Phi \hat{x}_{t-1}, \quad \overline{\sum_{xx,t}} = \Phi \widehat{\sum_{xx,t-1}} \Phi^T + Q_{t-1} \quad (31)$$

donde \bar{x}_t , $\overline{\sum_{xx,t}}$ corresponden al pronóstico de nuestro estado y de su covarianza, \hat{x}_{t-1} y $\widehat{\sum_{xx,t-1}}$ son las actualizaciones de nuestros estados ante la llegada de nueva información, es decir

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \mathbb{E}(x_0) \\ \widehat{\sum}_0 &= \mathbb{E}[(x - \hat{x}_0)(x - \hat{x}_0)^T] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\hat{x}_{t-1} = \mathbb{E}(x_t | y_0, y_1 \dots y_{t-1}) \quad (33)$$

$$\widehat{\sum}_{t-1} = \mathbb{E}(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1})(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1})^T \quad (34)$$

Ahora y como mencionamos antes usamos la transformación unscented para conseguir nuestros sigma points, de cada vector de estado actualizado en cada iteración obtenemos $2p + 1$ sigma points (en te caso $p = 2$)

$$\chi_{t,0} = \bar{x}_t, \quad \chi_{t,i} = \bar{x}_t \pm \sqrt{(p + \delta)(\overline{\sum_{xx,t}})_j}, \quad j = 1, \dots, p; \quad i = 1, \dots, 2p \quad (35)$$

Las w denotaran las ponderación de nuestros sigma points

$$w_0 = \delta / (p + \delta), \quad w_i = 1 / [2(p + \delta)], \quad j = 1, \dots, 2p \quad (36)$$

Hecho esto vamos a obtener el valor estimado de nuestros precios como un promedio ponderado de la función de precios aplicada a los sigma points

$$\bar{y}_t = \sum_{i=0}^{2p} w_i h(\chi_{t,i}; \Theta), \quad (37)$$

La covarianza de nuestra estimación también se ponderara por los pesos w

$$\overline{\sum}_{yy,t} = \sum_{i=0}^{2p} w_i [h(\chi_{t,i}; \Theta) - \bar{y}_t][h(\chi_{t,i}; \Theta) - \bar{y}_t]^T + R \quad (38)$$

De forma análoga para la covarianza entre nuestros estados y nuestras estimaciones de los precios

$$\overline{\sum}_{xy,t} = \sum_{i=0}^{2p} w_i [\chi_{t,i} - \bar{x}_t][h(\chi_{t,i}; \Theta) - \bar{y}_t]^T \quad (39)$$

Después de hecho esto podemos volver a utilizar el kalman gain,asi nos queda

$$\hat{x}_t = \bar{x}_t + \kappa_t (y_t - \bar{y}_t), \quad \widehat{\sum}_{xx,t} = \overline{\sum}_{xx,t} - \kappa_t \widehat{\sum}_{yy} \kappa_t^T \quad (40)$$

Donde

$$\kappa_t = \overline{\sum}_{xy} (\overline{\sum}_{yy,t})^{-1}$$

y el algoritmo pasa a la siguiente iteracion para un conjunto de parámetros dado.

Descrito de esta forma el algoritmo, lo que queda es buscar los parámetros óptimos de nuestra estimación. Esto se hace vía máxima verosimilitud, maximizando la siguiente función:

$$l_t(\Theta) = -\frac{1}{2} \log |\overline{\sum}_{yy,t}| - \frac{1}{2} (y_t - \bar{y}_t)^T (\overline{\sum}_{yy,t})^{-1} (y_t - \bar{y}_t) \quad (41)$$

2.6. Consideraciones para implementar el UKF

Como mencionábamos antes el UKF es una buena herramienta pero se debe tener cuidado al utilizarla. A continuación mencionamos algunos hechos que debe tener en cuenta el lector si quiere usarla

- Por ser un algoritmo recursivo es costoso numéricamente. Además de debe ser monitoreado para considerar las dificultades que mencionamos en los siguientes puntos.
- El dominio de la función de precios h . En lo posible restringir la función para que solo pueda tomar valores en los que pueda ser evaluada; Esto puede ser complejo lo que hicimos nosotros en el momento de usar el optimizador fue que si encontraba un valor que no estaba en el dominio, devolviera inmediatamente un valor para la función de verosimilitud (apropiadamente escogido).

- Cuando sacamos la raíz cuadrada a $\widehat{\Sigma}_{xx,t-1}$ lo que se recomienda usar, es descomposición de Cholesky porque es mas estable computacionalmente y no va a devolver números complejos como si podría pasar sacando raíz cuadrada a una matriz en forma natural. Ahora, no siempre una matriz tiene descomposición de Cholesky, esto nos puede ocurrir si la matriz no es definida positivamente, para esto recomendamos ver el algoritmo de [Rebonato and Jackel, 1999] pero poniendo un limite al numero de iteraciones para "corregir" la matriz de correlacion. Nosotros usamos 10000 iteraciones como limite, si no lograba despues de este numero automáticamente cuando usamos el optimizador devolvíamos un valor para la funcion de verosimilitud (apropiadamente escogido).
- En el ultimo paso de la iteracion es necesario sacar una matriz inversa que podria no existir, o no ser computable numéricamente ,si este es el caso el algoritmo debe devolver un valor para la función de verosimilitud (apropiadamente escogido).
- En los items anteriores nos referimos a un valor apropiadamente escogido cuando un vector de parámetros no nos sirve para ser tenido en cuenta en la optimizacion. Este valor debe ser un valor mas grande del promedio que nos arroja el optimizador para que este sepa que no debe buscar la solución en valores cercanos a este.
- Si el lector necesita un algoritmo mas eficiente numéricamente , puede consultar el Unscented kalman Filter square root que hace uso de otras descomposiciones con matrices para hacer mas eficiente la descomposición de Cholesky y la inversion de matrices, es importante advertir que este puede presentar los mismo problemas mencionados aquí, pero este es mas rapido que el UKF.

3. Capitulo 3

3.1. Resultados y conclusiones

Los datos que usamos corresponden a los CDS soberanos de Colombia entre el 4 de enero de 2013 y el 25 de diciembre de 2015 con frecuencia semanal y vencimientos de 1,3 y 5 años.

En la tabla 1 vemos el resultado de la estimación usando máxima verosimilitud en el Unscented Kalman Filter. Observamos por ejemplo que el parámetro β es 0,47 lo cual quiere decir que cuantificamos la relación entre los retornos de volatilidad de la tasa de cambio y la intensidad de default en casi 50 % ;Esto va acorde a lo que observamos en el mercado de los CDS soberanos de Colombia en los últimos años, donde movimientos en la tasa de cambio repercutían inmediatamente en las cotizaciones de los spreads. [Revista-Dinero, 2015a]

3.2. Contrastando nuestra hipótesis

Como ejercicio adicional quisimos ver cual era la diferencia entre nuestra serie de tiempo $v(t)$ y la volatilidad de la tasa de cambio estimada a partir de un modelo GARCH (1,1) (que en la practica es una buena herramienta para modelar series financieras [Bollerslev, 1986] Es decir, la dinámica de los retornos de la tasa de cambio, para este modelo queda descrita por las siguientes ecuaciones

$$y_t = \mu + \sigma_t e_t, \quad e_t \sim N(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Donde y_t corresponde a los log-retornos de la tasa de cambio peso-dolar, en el tiempo t .

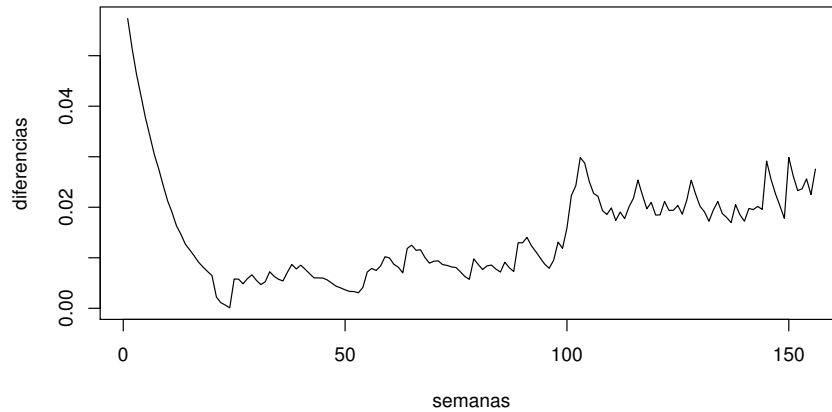
Los resultados de la estimación se muestran en la tabla de abajo

Parámetros	Estimación
μ	0,002711
ω	0,000008
α_1	0,213980
β	0,785020

Con los parámetros obtenidos el siguiente paso es examinar la diferencia entre las dos series (ver grafica de abajo)

Vemos que al comienzo se presenta la diferencia mas grande,esto sencillamente obedece al factor de riesgo con el que inicializamos nuestra estimación. Después vemos que hasta el día numero 100, la diferencia se mantiene en promedio en 0,01,luego para los dos días restantes crece a un 0,03 aproximadamente.

Con esto evidenciamos la cercanía que hay entre la volatilidad extraída directamente de los retornos de la tasa de cambio y la volatilidad inferida a partir de las cotizaciones de los spreads de los CDS.



3.3. Descripción de los demás parámetros

la volatilidad de la volatilidad σ_v , es 0,0076 la cual es baja y la reversión a la media es 0,0038. $(\frac{\theta_v}{k_v})$

Parámetros	Estimación
k_v	5,2096231
σ_v	0,00763217
Θ_v	0,02021167
Θ_z	0.098683535
σ_v	0,00368568
K_v	0,00313437
β	0,47061212

Para la otra fuente de riesgo encontramos que la volatilidad de la volatilidad σ_z , es 0,003 y la reversión a la media es muy grande 31,4 $(\frac{\theta_z}{k_z})$.Recordemos

que esta fuente es independiente de la volatilidad y puede estar relacionada por ejemplo con las cotizaciones del precio del crudo, percepciones de estabilidad económica del país entre otras.

La tabla error promedio ajuste UKF nos describe la diferencia entre la estimación y los datos observados para los estados pronosticados y ajustados iteración a iteración con los parámetros óptimos obtenidos para las 3 series de cds. Podemos observar que el error promedio en todos los casos es numéricamente pequeño y el más bajo se presenta en la serie de CDS con vencimiento un año. Es importante tener en cuenta que este error puede considerarse grande en los CDS a 5 años, por ejemplo, si tenemos en cuenta que los spreads se cotizan en puntos básicos, 30 de estos podrían considerarse como un error grande.

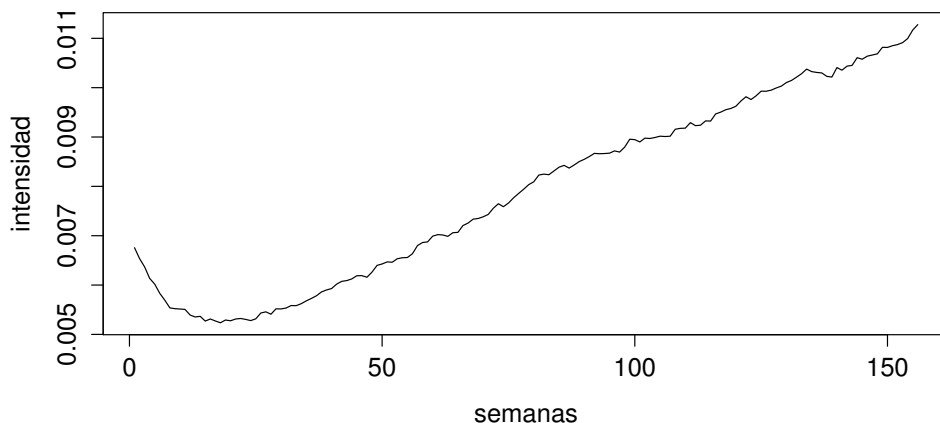
Error promedio ajuste UKF			
número	0,0023311	0,00259072	0,00447864
en puntos básicos	23,31069	25,90723	44,78639

la covarianza entre los estados es muy pequeña lo cual tiene sentido si recordamos que cuando presentamos las hipótesis las dos fuentes de riesgo que derivan la intensidad de default eran independientes.

covarianza estimada UKF	
$-4,67E - 09$	$-8,73E - 08$
$-8,73E - 08$	$1,72E - 05$

3.4. Intensidad de Default

En la gráfica de la siguiente página observamos las intensidades de default en cada tiempo correspondiente a los parámetros estimados, vemos que después de las primeras observaciones se mantiene una tendencia de crecimiento al igual que los spreads de los CDS en la mayoría de la muestra, lo cual evidencia lo que intuitivamente esperábamos, la intensidad de default está relacionada con las cotizaciones de los spreads



3.5. Valoración de los Spreads CDS soberanos

Con los parámetros estimados podemos hacer el pricing de nuestro derivado de crédito, lo haremos a partir de simulaciones de Montecarlo. Para calcular el spread $S(t, T)$ del contrato con fecha de inicio t y vencimiento T es necesario computar las siguientes integrales

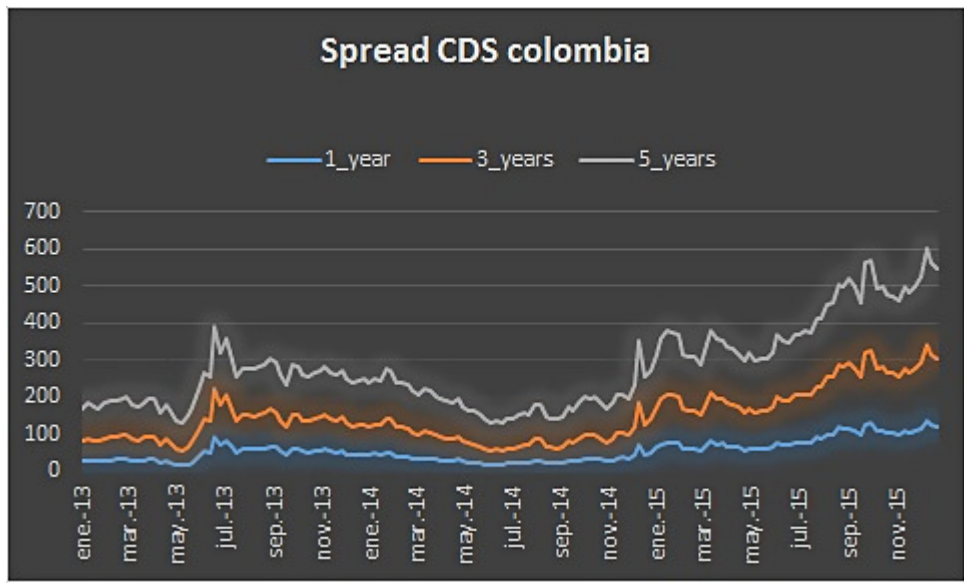
$$\int_t^T B(t, s) \exp(-a_\lambda(s-t) - b_\lambda(s-t)^T x_t) ds \quad (42)$$

$$w \int_t^T \beta(t, s)(c(s-t) + d(s-t)^T x_t) \exp(-a_\lambda(s-t) - b_\lambda(s-t)^T x_t) ds \quad (43)$$

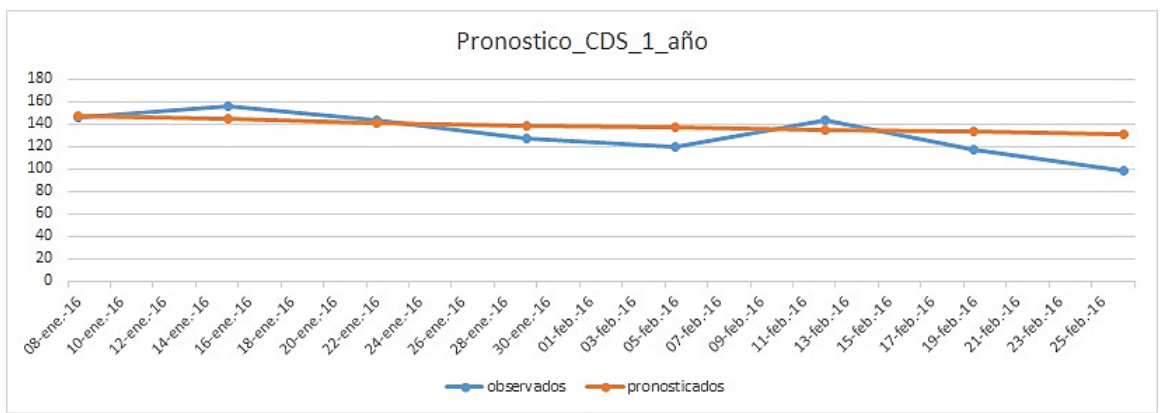
Es importante que el lector note que el factor de riesgo es un termino fijo en la integral una vez se pacta la fecha de inicio del contrato t , las trayectorias que nosotros simulamos para aplicar Montecarlo corresponden a como va a hacer este estado en el tiempo t iniciando en x_0

3.6. Un pequeño ejercicio de Forecast

Realizamos un pronostico de los spreads de los CDS a un año, los resultados se muestran en la tabla 3. vemos que para las primeras semanas nuestra proyección es buena pero después se aleja del spread real, esto nos lleva a pensar en cada cuanto debemos recalibrar el modelo y a la dificultad considerable que supone pronosticar la intensidad de default ya que hay varios factores externos que la afectan sobre todo para vencimientos largos.



fecha	observados	pronosticados	error
08-ene-16	145,869	147,4526	1,5836
15-ene-16	156,359	144,5327	11,8263
22-ene-16	143,243	141,5461	1,6969
29-ene-16	126,811	139,2553	12,4443
05-feb-16	119,458	136,877	17,419
12-feb-16	143,177	134,8008	8,3762
19-feb-16	117,372	133,2469	15,8749
26-feb-16	98,524	131,5696	33,0456



3.7. Extensiones y variantes de este trabajo

- Una opción para modelar las fuentes de riesgo son los procesos de difusión con saltos, su implementación es más compleja pero se ajusta mejor a lo que pasa en la realidad con este tipo de variables.
- Modelo de valoración conjunta para CDS corporativos y opciones sobre acciones. El default en este caso podría interpretarse como la caída a un valor cercano a cero del precio de la acción y su dinámica puede ser modelada con procesos controlados de Cox [Carr and Wu, 2009]

Bibliografía

- European Central Bank. Credit default swaps and counterparty risk. 2009.
- Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, (31):307–327, 1986.
- Peter Carr and Liuren Wu. Theory and evidence on the dynamic interactions between sovereign credit default swaps and currency options. *Banking and Finance*, pages 2383–2403, 2007.
- Peter Carr and Liuren Wu. Stock options and credit default swaps: a joint framework for valuation and estimation. *Financial Econometrics*, pages 2383–2403, 2009.
- Ministerio de Hacienda. Informe trimestral seguimiento de deuda del gobierno nacional. 2016.
- Duffie, Pan, and Singleton. Transform analysis and asset pricing for affine jump diffusions. *Econometrica* 68, pages 1343–1376, 2000.
- Rebonato and Jackel. The most general methodology for creating a valid correlation matrix for risk management and option pricing purposes. 1999.
- Revista-Dinero. ¿por qué hoy es más riesgoso invertir en bonos colombianos y brasileños? Agosto 2015a.
- Revista-Dinero. ¿la calificación de Colombia puede estar amenazada por un menor precio del petróleo? noviembre 2015b.
- Eric A. Wan and Rudolph van der Merwe. Unscented kalman filter. In *Kalman filtering and Neural Networks*, 2001.