Universidad del Rosario

Economía matemática - Examen final
25 de mayo de 2017

Profesores: Andrés Cárdenas Torres, Juan Carlos Zambrano.

1. **(20 puntos)** Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) Si las preferencias de un individuo son convexas, la función de utilidad (u) que las representa es cuasicóncava. Ayuda: recuerde que el supuesto de preferencias convexas implica que el contorno superior de la función de utilidad para todo y del rango de la función es un conjunto convexo.

   b) La función $f(L, K) = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ es siempre cuasicóncava, y es cóncava si el grado de homogeneidad es menor o igual a 1.

2. **(30 puntos)** Suponga que el objetivo de un consumidor es maximizar su utilidad intertemporal sobre un tiempo definido por el intervalo [0,1]. Este preoblema se define de la siguiente forma:

$$\max V = \int_0^1 \ln[4c(t)s(t)]dt$$

   teniendo en cuenta la restricción relacionada a la variación de su nivel de ahorro s y su consumo c

$$s'(t) = 4s(t)(1 - c(t))$$

   Las restricciones en sus fronteras son $s(0) = 1$ y $s(1) = e^2$

   (a) Resuelva el problema de optimización que permita encontrar senda de ahorro y consumo óptimas.

   (b) Resuelva el problema si $s(1) = libre$

3. **(20 puntos)** Calcule la trayectoria de producción óptima $x(t)$ en el periodo $[0, 1]$, para una empresa que vende su producto a un precio fijo e igual a 4, descuenta el futuro a una tasa de 0.1, y su función de costos está dada por:

$$c(x, x') = (x')^2 + x^2$$

   La producción inicial es $x(0) = 0$ y la producción al final del periodo es $x(1) = 10$.

$$\max \int_0^1 [4x - (x')^2 - x^2]e^{-0.1t}dt$$
$$x(0) = 0$$
$$x(1) = 10$$

4. **(30 puntos)** Considere una economía cerrada cuyo agente representativo maximiza la utilidad de toda su vida descontada a una tasa β:

$$\max \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln(c_t)$$

   Este agente también es productor, y con k_t unidades de capital produce $y_t = k_t^{\alpha}$ unidades de producto en el momento t. Donde $\alpha \in (0, 1)$.

   En cada momento del tiempo, el agente puede consumir parte de las unidades que produce e invertir el resto para acumular capital para el futuro. Por consiguiente, la condición de clarificación del mercado es: $y_t = i_t + c_t$; y teniendo en cuenta que el capital se deprecia a una tasa δ, la restricción de acumulación de capital es:

$$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta)k_t \qquad \text{con} \quad k_0 > 0 \text{ y } k_{t+1} \geq 0 \text{ dado}$$

a) (8 puntos) Formule el problema que enfrenta el agente representativo de la economía descrita arriba, como un problema de programación dinámica. Especifique la ecuación de Bellman, e identifique las variables de control y las variables de estado.

b) (9 puntos) Caracterice las condiciones de optimalidad de este problema (ecuación de Euler). Explique sus resultados.

c) (8 puntos) Encuentre la ecuación de Bellman asumiendo que $V(k_t) = A + Bln(k_t)$ y $\delta = 1$. Resuelva para los coeficientes A y B como función únicamente de los parámetros del modelo.

d) (5 puntos) Encuentre las funciones de política para k_{t+1} y c_t, nuevamente asumiendo que $\delta = 1$.