

# La hipótesis de expectativas en la curva cero cupón: un análisis por cointegración

Jaime Andrés Sarmiento Monroy \*

Directores: Pamela Cardozo y José E. Gómez

## Abstract

El cumplimiento de la hipótesis de expectativas (HE) ha sido contrastado en varios países por medio de diferentes métodos. En Colombia no se ha estudiado de manera conjunta las relaciones de largo plazo entre las tasas cero cupón. El presente trabajo busca contrastar el cumplimiento de la hipótesis de expectativas estimando un modelo multivariado con corrección de errores, de acuerdo a la metodología propuesta por Hall, Anderson y Granger (1992). La significancia de la prima por liquidez en las relaciones de largo plazo y las pruebas estadísticas del modelo favorecen el contraste de la HE. Sin embargo, la existencia de dos relaciones de cointegración y el rechazo de las relaciones teóricas esperadas indican el incumplimiento de la HE en Colombia.

## Abstract

The validity of the expectations hypothesis (HE) has been studied in several countries through different methods. In Colombia, the papers studies have not taken into account the long-term relationships between zero-coupon rates. This paper seeks to contrast the validity of the expectations hypothesis by estimating a vectorial error correction model, according the methodology proposed by Hall, Anderson and Granger (1992). The significance of the liquidity premium in long-term relationships and the statistics results of the model favor the contrast of the HE. However, the existence of two cointegration relations and the rejection of the expected theoretical relationships indicate the failure of the HE in Colombia.

**Keywords** Term structure, expectations hypothesis, cointegration.

**JEL Classification** E43, C32

---

\*Estudiante de Maestría. Facultad de Economía. Universidad del Rosario. Correo electrónico: [sarmientomo.jaime@ur.edu.co](mailto:sarmientomo.jaime@ur.edu.co)

# La hipótesis de expectativas en la curva cero cupón: un análisis por cointegración

## Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Marco teórico</b>	<b>4</b>
2.1	La hipótesis de expectativas . . . . .	4
2.1.1	La HE en Colombia . . . . .	8
2.2	Cointegración . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Metodología</b>	<b>11</b>
3.1	Datos . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>13</b>
4.1	Especificación . . . . .	13
4.1.1	Prueba de cointegración . . . . .	13
4.2	Pruebas de diagnóstico y propiedades estadísticas . . . . .	14
4.3	Representación MA . . . . .	15
4.3.1	Funciones impulso respuesta . . . . .	16
4.4	Contraste de la HE . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>Anexos</b>	<b>22</b>
7.1	Cointegración (Engle y Granger) . . . . .	22
7.2	Propiedades estadísticas . . . . .	23
7.2.1	Prueba de exclusión en la relación de largo plazo . . . . .	23
7.2.2	Prueba de estacionariedad . . . . .	23
7.2.3	Prueba de exogeneidad débil . . . . .	24
7.2.4	Prueba de vector unitario en las velocidades de ajuste . . . . .	24
7.3	Resultados . . . . .	24
7.4	La HE - Tasa de cambio . . . . .	33

# 1 Introducción

La curva de rendimientos cero cupón es la representación gráfica del conjunto de las tasas de interés de bonos cero cupón a diferentes fechas de vencimiento con una misma calidad crediticia. Generalmente es empleada para la valoración de portafolios, medición de riesgo y estimación del *spread* sobre la estructura a término. Igualmente sirve como insumo en modelos empleados para la valoración de derivados y en el desarrollo de modelos multifactoriales que expliquen su comportamiento y su relación con otras variables financieras y económicas.

Para explicar la forma de la estructura a plazo suele hablarse de tres hechos empíricos. El primero propone que las tasas de títulos con diferentes vencimientos suelen tener fluctuaciones comunes a lo largo del tiempo. El segundo plantea que es más probable que la curva de rendimientos tenga pendiente positiva cuando las tasas de interés de corto plazo son bajas y que la pendiente sea negativa cuando las tasas de corto plazo son altas. El tercero sugiere que la curva de rendimientos suele tener una pendiente positiva aún cuando los agentes esperan que las tasas permanezcan igual en el futuro.

El primer hecho es la motivación de este trabajo, comprobar la existencia de una relación de equilibrio entre las tasas cero cupón de largo plazo y las tasas de corto plazo. Respecto al segundo hecho, las expectativas del mercado sobre el nivel futuro de las tasas de interés de corto plazo determinan la forma de la curva de rendimientos por lo que una curva muy empinada puede ser vista como que el mercado espera una reducción de la tasa del Banco Central o descuenta un incremento en la inflación. El tercero corresponde al principio básico de las finanzas en que un activo con un mayor riesgo, debe generar una mayor rentabilidad. En el caso de los bonos, un mayor vencimiento implica mayor incertidumbre por lo que bonos con mayor madurez suelen tener tasas más altas.

La hipótesis de expectativas (HE, de ahora en adelante) plantea que las tasas de interés de largo plazo son iguales al promedio aritmético de la tasa de interés de corto plazo actual y de las tasas de corto plazo esperadas más una prima por liquidez. La HE supone en primer lugar que los agentes forman sus expectativas racionalmente por lo que su comportamiento responde a estimaciones insesgadas de la tasa de interés ajustadas por una prima de liquidez; es decir, los agentes no cometen errores sistemáticamente. En segundo lugar supone el cumplimiento de la hipótesis de eficiencia en el mercado: los precios reflejan toda la información disponible, tanto pública como privada.

A partir del cumplimiento de la hipótesis de expectativas en la curva cero cupón se puede afirmar la existencia del principio de no arbitraje y de una prima por liquidez de estado estacionario.

Aunque la hipótesis de expectativas ha sido contrastada en diferentes países y por medio de diferentes métodos, los resultados respecto a su cumplimiento no son concluyentes. Entre los métodos empleados, el análisis por cointegración ha ganado importancia ya que permite modelar relaciones de largo plazo entre vari-

ables económicas y financieras. En el caso de las tasas de interés, Engle y Granger (1987) proponen un modelo para estudiar las tendencias de largo plazo entre dos tasas. Posteriormente Hall et al. (1992) desarrollan un modelo multivariado que permite estimar conjuntamente las relaciones entre varias tasas.

En la literatura se ha evidenciado el cumplimiento de la HE en el tramo de corto plazo de la curva cero cupón. A medida que aumenta el plazo, el cumplimiento de la HE se hace más débil. Para Estados Unidos, Campbell (1991) prueba la relación entre tasas de largo y corto plazo enunciada por la hipótesis de expectativas. Posteriormente, Hall et al. (1992) muestra el cumplimiento de la HE para un conjunto de  $n$  tasas cero cupón de corto plazo al comprobar la existencia de una tendencia común estocástica.

Shea (1992) al emplear un conjunto de tasas entre un rango de 1 mes hasta 25 años, encuentra la existencia de tres tendencias comunes estocásticas en el tramo de largo plazo. Estos resultados son corroborados por Zhang (1993) en Estados Unidos y por Carstensen (2003) en Alemania quienes analizan las tendencias estocásticas comunes del modelo a través de la representación MA y las caracterizan por medio de modelos factoriales de la curva de rendimientos.

Según Litterman (1991), tres factores permiten explicar cambios en el nivel, la pendiente y la curvatura de la estructura a término por lo que la invalidez de la HE, entendido como la existencia de más de una tendencia estocástica, podría mostrar la importancia de los modelos factoriales en el comportamiento de las tasas.

Giese (2008) contrasta la hipótesis de expectativas en el mercado de derivados en Estados Unidos empleando tasas cero cupón de final de mes para 1, 3, 18, 48 y 120 meses. Por medio de un modelo multivariado con corrección de errores (VECM) encuentra la existencia de dos tendencias comunes estocásticas; y las relaciona empíricamente con el nivel y la pendiente de la curva.

Tabak (2009) muestra el cumplimiento de la hipótesis de expectativas en el mercado de *swaps* de tasas de interés para plazos de uno, tres, seis y doce meses para Brasil. Desde un enfoque de cointegración, sigue la metodología propuesta por Engle y Granger (1987), y encuentra que las tasas están cointegradas. Sin embargo, Tabak postula que la HE se cumple débilmente por la existencia de una prima por liquidez cambiante en el tiempo.

Finalmente, el objetivo de este trabajo es contrastar el cumplimiento de la hipótesis de expectativas bajo un análisis de cointegración.

## 2 Marco teórico

### 2.1 La hipótesis de expectativas

En la primera categoría de las teorías sobre la estructura a plazo se encuentra la teoría de las expectativas (Fisher, 1896) la cual plantea que las tasas *forward*

actuales son estimadores insesgados de las tasas cero cupón futuras ( $f_t = E(R_t)$ ).

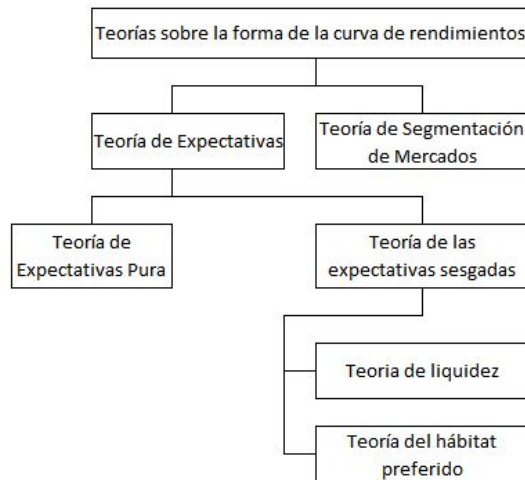


Figura 1: Teorías sobre la forma de la curva

De esta forma, la rentabilidad de un bono cero cupón en el periodo  $t$  con vencimiento en el periodo  $n$  debe ser equivalente a la rentabilidad de un bono cero cupón en el periodo  $t$  con vencimiento a un año comprado durante  $n$  periodos. Si lo anterior no se cumple, existirían oportunidades de arbitraje en las que un inversionista neutral al riesgo obtendría una ganancia en el periodo  $t$  al tomar una posición larga en el bono que ofrece mayor rentabilidad y una posición corta en el bono que ofrece menor retorno.

Como se observa en la Figura (1), una subcategoría de la teoría hace referencia a la teoría de expectativas pura la cual establece que las tasas interés de largo plazo son iguales al promedio aritmético de la tasa de interés de corto plazo actual y de las tasas de corto plazo esperadas. Esta teoría supone que los bonos son sustitutos perfectos por lo que un inversionista es indiferente entre bonos de uno u otro vencimiento. Debido a lo anterior, dos bonos con diferentes vencimientos deben ofrecer la misma rentabilidad.

Para contextualizar lo anterior, suponga un mundo en el que existen 2 períodos y se puede hacer una inversión de \$1. En el mercado existe un bono con vencimiento en el periodo 2 que paga  $R_{2t}$  por periodo y dos bonos con un periodo de vencimiento, uno de los cuales se puede comprar en el periodo 0 y se vence en el periodo 1 cuyo retorno es  $R_t$ , y el otro se puede comprar en el periodo 1 y se vence en el periodo 2 el cual se espera que tenga un retorno  $R_{t+1}^e$ .

Si el inversionista compra el bono que se vence en el segundo periodo, la rentabilidad esperada es  $(1 + R_{2t})(1 + R_{2t}) - 1 = 2R_{2t} + (R_{2t})^2 \approx 2R_{2t}$  donde  $(R_{2t})^2 \approx 0$ . Si el inversionista compra dos bonos con un periodo de vencimiento, la rentabilidad esperada es  $(1 + R_t)(1 + R_{t+1}^e) - 1 = R_t + R_{t+1}^e + R_t(R_{t+1}^e) \approx R_t + R_{t+1}^e$  donde  $R_t(R_{t+1}^e) \approx 0$ .

El cumplimiento de la hipótesis de expectativas implica que el retorno esperado de ambas estrategias sea equivalente para garantizar la no existencia de arbitraje. Entonces,  $2R_{2t} = R_t + R_{t+1}^e$  donde  $R_{2t} = (R_t + R_{t+1}^e)/2$ . Como plantea la HE pura, la tasa interés de largo plazo ( $R_{2t}$ ) es igual al promedio aritmético de la tasa de interés de corto plazo actual ( $R_t$ ) y de las tasas de corto plazo esperada (En este caso,  $R_{t+1}^e$ ).

Generalizando, si se suponen  $n$  periodos la tasa de largo plazo estaría expresada en términos de la tasa de corto plazo actual y las esperadas en cada uno de los  $n - 1$  periodos siguientes. Formalmente:

$$R_{nt} = \frac{R_t + R_{t+1}^e + R_{t+2}^e + \dots + R_{t+(n-1)}^e}{n} \quad (1)$$

Retomando los hechos empíricos, esta primera categoría de teorías explica el primer hecho debido a que las tasas de largo plazo corresponden a promedios de las tasas esperadas de corto plazo. Igualmente en el segundo caso, una estructura a término con pendiente positiva es causada por expectativas de incrementos en la tasa de interés de corto plazo.

El caso contrario también se evidencia, una estructura a término con pendiente negativa responde a un aumento en las expectativas de la tasas de corto plazo. Sin embargo, la HE no explica el tercer hecho ya que suele sugerir que la estructura a término es plana.

Debido a lo anterior, en la segunda categoría se encuentra la teoría de las expectativas sesgadas. La primera subcategoría hace referencia a la teoría del hábitat preferido (Modigliani, 1967) en la cual los inversionistas tienen una preferencia por bonos con maduraciones específicas de acuerdo al plazo de sus pasivos. Es decir, los inversionistas intentan cubrir los riesgos de reinversión y de principal replicando los vencimientos de sus deudas. Sin embargo, esta teoría rechaza una prima por riesgo creciente con la madurez ya que un inversionista pueden aumentar o reducir el plazo de sus pasivos, si recibe una prima que compense los riesgos de poseer activos y pasivos en diferentes plazos.

Una hipótesis alternativa sobre la forma de la curva es la teoría de segmentación de mercados (Cultberson, 1957) en la que existen mercados completamente independientes para cada vencimiento y los inversionistas no aprovecharían oportunidades de arbitraje que impliquen salir de su hábitat. La estructura a término suele tener una pendiente positiva porque en promedio existe una menor demanda por bonos de largo plazo lo cual genera un incremento en sus tasas y por lo tanto, una reducción en sus precios. Sin embargo, esta teoría no explica los dos primeros hechos empíricos debido a que los tramos de la curva corresponden a mercados segmentados, que no guardan relación alguna. En este caso, la forma de la curva se determina por la oferta y la demanda para cada vencimiento.

A diferencia de la HE, esta teoría no se supone perfecta sustituibilidad entre los bonos de distintos vencimientos y explica apropiadamente el tercer hecho estilizado. Respecto a la teoría del hábitat preferido, esta teoría difiere en que los

inversionistas no aprovecharían oportunidades de arbitraje que impliquen salir de su hábitat.

Debido a las limitaciones de las anteriores teorías al explicar los hechos empíricos, se genera una nueva teoría que combina la HE pura y la segmentación de mercados. Como se observa en la Figura 1, en la segunda subcategoría se encuentra la teoría de la liquidez (Hicks, 1939) la cual postula que las tasas interés de largo plazo son iguales al promedio aritmético de la tasa de interés de corto plazo actual y de las tasas de corto plazo esperadas más una prima por liquidez que compensa las condiciones del mercado por el lado de la oferta y de la demanda del bono.

La preferencia por liquidez supone que los bonos de diferentes vencimientos son sustitutos imperfectos: el inversionista tiene preferencias definidas sobre bonos de determinados vencimientos. Por ello, los inversionistas aversos al riesgo preferirán plazos más cortos por lo que se deberá pagar una mayor prima de riesgo para hacer atractivos los bonos de largo plazo.

Teniendo en cuenta lo anterior, los inversionistas con pasivos a corto plazo prefieren demandar bonos en el tramo corto de la estructura a término dada la naturaleza de sus obligaciones y el riesgo de tasa de interés. Los inversionistas deberían recibir una prima por liquidez para comprar bonos de largo plazo descrita como  $c_n = f_t - E(R_t)$ . En el periodo  $t$ , estos inversionistas comprarían títulos de largo plazo si la tasa *forward* es mayor al retorno esperado.

De manera similar a la ecuación (1) planteada en la hipótesis expectativas puras, si se suponen  $n$  periodos la tasa de largo plazo estaría expresada en términos de la tasa de corto plazo actual y las tasas esperadas en cada uno de los  $n - 1$  periodos siguientes. Se tiene:

$$R_{nt} = \frac{R_t + R_{t+1}^e + R_{t+2}^e + \dots + R_{t+(n-1)}^e}{n} + c_n \quad (2)$$

La tasa de interés para el periodo  $n$  corresponde al promedio de las tasas de corto plazo esperadas más una prima por liquidez.

Generalizando, el retorno esperado de una inversión con vencimiento en el periodo  $n$  corresponde al retorno esperado de una inversión con vencimiento en  $m$  durante  $n - m$  periodos más una prima por liquidez.

Si se resta la tasa de un año ( $R_{1t}$ ) en ambos lados de la ecuación, se tiene:

$$R_{kt} - R_{1t} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^i E_t [\Delta R_{1,t+j}] + c_k, \quad (3)$$

donde  $k = n/m$ . Si  $R_{kt}$  y  $R_{1t}$  son series I(1) entonces  $\Delta R_{kt}$  y  $\Delta R_{1t}$  serían estacionarias. Por definición, la prima por liquidez constante ( $c_k$ ) es una serie estacionaria. Si el término derecho de la ecuación (3) es estacionario, entonces el lado izquierdo ( $R_{kt} - R_{1t}$ ) también debe serlo.

De acuerdo a Hall et al.(1992) el cumplimiento de la HE implica la existencia de  $n - 1$  vectores de cointegración, para un conjunto de  $n$  tasas cero cupón de

diferentes vencimientos respecto a la tasa de corto plazo. Por lo anterior, estas tasas se pueden expresar en función de la tasa de un año:

$$R_{kt} = R_{1t} + C_k, \quad k = 3, 5, 10 \quad (4)$$

donde  $C_k$  es positiva y creciente con el vencimiento. Por lo anterior, la HE se cumple si la prima por liquidez es estacionaria y el *spread* es estacionario o, lo que es equivalente, existe un vector de cointegración  $(1, -1)$  entre las tasas.

En concordancia con las teorías sobre la forma de la curva, este trabajo se enfocará en contrastar la teoría de expectativas con prima de liquidez. Empíricamente, esta teoría cumple los dos primeros hechos estilizados que no abarca la teoría de segmentación de mercados, y el tercer hecho que no cumple la hipótesis de expectativas puras.

### 2.1.1 La HE en Colombia

En Colombia se han realizado estudios para contrastar la HE empleando curvas cero cupón calculadas con metodologías anteriores a la implementada actualmente por el sistema de Información de Valoración de la Bolsa de Valores de Colombia (Infoval). Además, los modelos econométricos estimados no han estudiado de manera conjunta las relaciones de largo plazo entre las tasas cero cupón. Entre estos trabajos tenemos:

Rey (2005) muestra el cumplimiento de la hipótesis de expectativas a corto plazo. Emplea las tasas diarias de cierre de los títulos de tesorería (TES) del Gobierno de Colombia, reportadas por el Sistema Electrónico de Negociación (SEN), de los títulos con vencimientos a 90, 180, 270, 360, 540, 720, 1080 y 1800 días. Rey estima la curva cero cupón bajo la metodología de *splines* cúbicos suavizados para el periodo comprendido de mayo de 2000 a noviembre de 2004.

El autor encuentra que la hipótesis de expectativas no se rechaza para plazos de 180 y 270 días, al establecer restricciones lineales de acuerdo a Shiller (1979). A causa de la traslapación de periodos de muestra<sup>1</sup>, Rey sigue la metodología de Campbell y Shiller (1991) la cual consiste en estimar un modelo de vectores autorregresivos (VAR) de 4 y 8 rezagos con los promedios mensuales de los retornos diarios, imponiendo restricciones no lineales en los coeficientes.

Julio (2007) estudia si el tramo corto de la estructura a plazos contiene las expectativas de mercado sobre la tasas de contado futura. Evaluar si la política monetaria futura está implícitamente en la curva cero cupón conlleva a probar la validez de la hipótesis de expectativas; es decir, las expectativas del mercado deben estar representadas en la curva *forward* y el término que representa la prima *forward* debe ser invariante en el tiempo.

De acuerdo a la metodología de Nelson y Siegel (1987), el autor calcula la curva cero cupón teniendo en cuenta las tasas cero cupón de un año hasta quince

---

<sup>1</sup>Genera problemas de autocorrelación entre las tasas.



años para el periodo de noviembre de 1999 a septiembre de 2006. Los datos tienen en cuenta tanto el SEN como el mercado electrónico colombiano (MEC). La frecuencia de las tasas es mensual y corresponden al quinceavo día de cada mes.

Siguiendo la metodología propuesta por Svensson (1994) y Soderlind y Svensson (1997), Julio compara las tasas de interés esperadas<sup>2</sup> con las tasas *forward* por medio de dos regresiones. La primera consiste en estimar la variación de las tasas cero cupón contra el *spread* entre la tasa *forward* y la tasa cero cupón. La segunda corresponde a la regresión de la diferencia entre el retorno *ex-post* de un bono con el vencimiento  $n$  mantenido durante un periodo y la tasa cero cupón con madurez de un periodo contra el *spread* entre la tasa *forward* y la tasa cero cupón.

Julio rechaza la validez de la hipótesis ya que se cumple solo para el tramo corto de la curva y durante periodos de muy corto plazo. Adicionalmente, encuentra que el término que denota la prima *forward* varía en el tiempo. Entre las posibles explicaciones planteadas de la invalidez de la HE, se encuentra la aversión al riesgo ante cambios en la tasa de interés y la existencia de una prima por liquidez variante en el tiempo.

Agudelo (2008) contrasta la hipótesis de expectativas y de la prima por liquidez en la curva cero cupón de los TES y en la curva de los certificados de depósito a término (CDT). Esta última se incluye para demostrar el cumplimiento de la HE a corto plazo ya que los CDT son los títulos más transados para fechas de vencimiento inferiores a 1 año. Se emplean datos correspondientes al último día de la semana para el periodo de enero de 2003 a febrero de 2007. Bajo el método de Nelson y Siegel (1987), se estiman tasas cero cupón con fechas de vencimiento de 180, 360, 540, 720, 900 y 1080 días.

En ese trabajo se prueba si las tasas contenidas en la estructura a plazo son estimadores insesgados sobre las tasas de interés futuras, ajustadas por una prima de liquidez. Agudelo no encuentra evidencia de la validez de la hipótesis de expectativas.

Entre los principales problemas se encuentra la no estacionariedad, la persistencia y la doble causalidad de las tasas cero cupón y las tasas *forward*. De la misma manera que Rey (2005), se sigue presentando problemas de traslapamiento entre los periodos de muestra. Debido a lo anterior, por medio de un modelo econométrico lineal se modela el cambio estructural, la tendencia, el efecto autorregresivo (AR) y la heteroscedasticidad temporal de las variables (GARCH).

Teniendo en cuenta los anteriores estudios, hay cuatro razones que justifican la importancia en retomar el contraste de la HE en el mercado de deuda pública colombiano. Primero, los trabajos que se han realizado emplearon bases de datos calculadas con metodologías pasadas. Segundo, los modelos estimados no estudian de manera conjunta las relaciones entre las tasas cero cupón. Tercero, los estudios

---

<sup>2</sup>Se calculan a partir de las expectativas del mercado sobre la tasa de contado futura.

fueron realizados en periodos con pocas emisiones de bonos de largo plazo lo cual es sinónimo de baja profundidad del mercado. Cuarto, algunos de los trabajos mencionados no tuvieron en cuenta todos los sistemas transaccionales.

En adelante al hacer mención a la hipótesis de expectativas (HE) se hará referencia a hipótesis de expectativas con prima de liquidez.

## 2.2 Cointegración

Se dice que dos variables están cointegradas si existe una relación de equilibrio entre ellas. En el caso bivariado<sup>3</sup>, hablar de cointegración implica la existencia de una combinación lineal entre dos variables no estacionarias, que se comporta de manera estacionaria. Es decir, una relación lineal entre dos variables que comparten una tendencia común, genera un término de error estacionario. Si las tasas de interés de largo y corto plazo son integradas de orden uno (I(1)), se dice que las variables están cointegradas si el término de error es un proceso I(0).

En el caso de series no estacionarias, la transformación natural sería tomar diferencias hasta que sean estacionarias. En el caso de variables integradas de primer orden solo se les tomaría la primera diferencia. Sin embargo, esta aproximación no permite obtener los valores de largo plazo de las variables debido a que en equilibrio la primera diferencia sería igual a cero. Para solucionar este inconveniente se emplea un modelo VEC donde se incluyen las variables tanto en niveles como diferencias.

Johansen (1988 y 1995) desarrolla un estimador de máxima verosimilitud que soluciona el problema de un solo vector de cointegración y de la imposibilidad de imponer restricciones en éste. De esta forma, comprobar la validez de la HE implica estimar un modelo VEC con un componente determinístico (intercepto) en las relaciones de cointegración (cimean, de ahora en adelante).

La especificación de un modelo VEC(1) corresponde a:

$$\Delta \underline{y}_t = \nu + \Pi \underline{y}_{t-1} + \Gamma_1 \Delta \underline{y}_{t-1} + \phi D_t + \varepsilon_t, \quad (5)$$

donde  $\underline{y}_t$  es un vector ( $K \times 1$ ) que contiene cada una de las  $k$  variables endógenas en el periodo  $t$  ( $k = 1, \dots, K$ ).  $\underline{y}_{t-1}$  es un vector ( $K \times 1$ ) que contiene el valor de cada una de las variables endógenas rezagadas un periodo.  $\Delta \underline{y}_{t-1}$  es un vector ( $K \times 1$ ) que contiene la primera diferencia de las variables rezagadas un periodo.

$\Pi$  es una matriz ( $K \times r$ )<sup>4</sup> que corresponde a la interacción de las velocidades de ajuste al equilibrio ( $\alpha$ ) y las relaciones de cointegración ( $\beta$ ) en el mecanismo de corrección de errores ( $\Pi = \alpha\beta'$  cuando hay cointegración).

$\Gamma_1$  es una matriz ( $K \times K$ ) que está compuesta de parámetros de la primera diferencia de las variables rezagadas un periodo.  $\nu$  es un vector ( $K \times 1$ ) que corresponde a los interceptos relacionados con la dinámica de corto plazo.  $D_t$  es una

<sup>3</sup>Para descripción más formal de la metodología de Engle y Granger, Ver Anexo (7.1)

<sup>4</sup> $r$  denota el número de vectores de cointegración.

matriz  $(d \times K)^5$  que contiene el valor de cada una de las variables *dummy*<sup>6</sup> en el periodo  $t$ .  $\phi$  es una matriz  $(K \times d)$  que contiene los coeficientes asociados a las variables *dummy*.  $\varepsilon_t$  es un vector  $(K \times 1)$  que contiene el valor del error de cada una de las variables y corresponde a un proceso ruido blanco con una distribución normal multivariada.

### 3 Metodología

Brooks (2008) afirma que la cointegración entre tasas es una condición necesaria pero no suficiente para la validez de la HE. Por lo anterior podemos afirmar que la no cointegración entre las tasas implica el incumplimiento de la hipótesis de expectativas. Por el contrario, la existencia de relaciones de cointegración entre las tasas no garantiza el cumplimiento de la HE.

Para contrastar la HE en la curva cero cupón se tendrán en cuenta tres artículos. En primer lugar, a partir de Juselius (2006) y Dennis (2006) se estima un modelo VEC (cimean) y se revisan las propiedades estadísticas y las pruebas de diagnóstico.

En segundo lugar, de acuerdo a Hall et al.(1992)<sup>7</sup>, y Pesaran y Wright (1995) se imponen restricciones para estimar las relaciones de cointegración bajo la HE mediante pruebas de identificación y sobre-identificación en los vectores de cointegración. La relación entre dos tasas se modela de acuerdo a la ecuación (4). Sin embargo, al estudiar las tasas de uno, tres, cinco y diez años, se debe realizar una prueba de identificación la cual implica la existencia de tres relaciones de cointegración (3 filas) entre las cuatro tasas y la prima por liquidez (5 columnas):

$$\begin{bmatrix} b_{11} & -1 & 0 & 0 & C_3 \\ b_{21} & 0 & -1 & 0 & C_5 \\ b_{31} & 0 & 0 & -1 & C_{10} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

mientras que la prueba de sobre-identificación, correspondiente a la HE, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & C_3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & C_5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & C_{10} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Por ejemplo, la tercera fila de la matriz denota la relación de cointegración entre la tasa de uno y diez años. Es decir, el *spread* entre la tasa de largo y corto plazo debe ser estacionario e igual a la prima por liquidez para un título con vencimiento a diez años ( $C_{10}$ ).

<sup>5</sup> $d$  corresponde al número de variables *dummy*.

<sup>6</sup>Las variables *dummy* se definen en la sección de datos.

<sup>7</sup>Para realizar las pruebas de identificación, los coeficientes de los vectores de cointegración se ponen con el signo contrario (Pesaran y Pesaran (2009)).

### 3.1 Datos

Los datos corresponden a promedios mensuales de tasas diarias anualizadas. La muestra comprende el periodo de enero de 2003 a septiembre de 2010<sup>8</sup>. Las tasas son calculadas para fechas de vencimiento de uno, tres, cinco y diez años; a partir de los parámetros  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)$  calculados diariamente por Infoval.

Nelson y Siegel (1987) proponen una aproximación exponencial por medio de un modelo de tres factores donde el comportamiento de la curva cero cupón se explica por movimientos paralelos, cambios en la pendiente y variaciones de la curvatura. Diebold y Li (2006) plantean una reparametrización del modelo en la que se puede distinguir factores de largo, mediano y corto plazo:

$$R_t(m) = \beta_{0t} + \beta_{1t} \left( \frac{1 - \exp(-m/\tau_t)}{m/\tau_t} \right) + \beta_{2t} \left( \frac{1 - \exp(-m/\tau_t)}{m/\tau_t} - \exp(-m/\tau_t) \right) \quad (8)$$

El parámetro  $\beta_{0t}$  corresponde al factor de largo plazo en el periodo  $t$ , y determina el nivel de la curva. El término  $\beta_{1t}$  se relaciona con el negativo de la pendiente en el periodo  $t$ , y hace referencia al factor de corto plazo. El parámetro  $\beta_{2t}$  explica cambios en la curvatura en el periodo  $t$ , y representa el factor de mediano plazo. La variable  $\tau$  corresponde al inverso de un parámetro de decaimiento,  $m$  a la fecha de vencimiento (expresada en términos de años) y  $R_t(m)$  denota la tasa cero cupón. En la Tabla (1) se incluyen las estadísticas descriptivas de las variables. Se observa que el retorno promedio, la volatilidad y las observaciones extremas de las tasas son proporcionales a su fecha de vencimiento. Por ejemplo, la tasa de diez años presenta las estadísticas más altas respecto a las tasas de uno, tres y cinco años<sup>9</sup>

Tasas	Obs.	Media	Des. Est.	Mínimo	Máximo
R01	93	7.94	2.25	3.49	10.92
R03	93	9.83	2.30	5.76	14.71
R05	93	10.74	2.38	6.80	15.93
R10	93	11.51	2.62	7.61	16.81

Tabla 1: Estadísticas descriptivas

La Figura (3) sugiere que las tasas son altamente persistentes, por lo que podrían llegar a caracterizarse como un proceso I(1). Por lo anterior, se realizaron las pruebas de raíz unitaria de Dickey Fuller aumentada (ADF) y Phillips-Perron

<sup>8</sup>El periodo corresponde a la base de datos disponible, luego de la implementación de la nueva metodología de Infoval.

<sup>9</sup>Se escogieron cuatro tasas que describieran el comportamiento del tramo de corto, mediano y largo plazo de la curva. Al estimar modelos entre pares y tríos de tasas, se encontró un débil cumplimiento de la HE entre las tasas de corto plazo. Sin embargo, se rechazó el cumplimiento de la HE entre las tasas de mediano y largo plazo.

(PP). Los resultados indican que no se rechaza la existencia de raíz unitaria para las cuatro tasas (Tabla (3)). Posterior a la estimación del modelo, se contrasta la estacionariedad de las series dado el vector de cointegración (incluyendo la constante).

Se incluyen dos variables *dummy*<sup>10</sup> para capturar el efecto de observaciones extremas. Los *outliers* positivos y negativos se obtienen por medio del procedimiento *DFFITs*<sup>11</sup>, descrito en Krasker y Welch (1982), bajo el criterio de que el valor absoluto de los residuales estudentizados de las observaciones fueran mayores a 2.

## 4 Resultados

### 4.1 Especificación

La prueba para la determinación del orden de rezago es:

$$\mathcal{H}_{ij} : \mathcal{H}(k = i) \text{ contra } \mathcal{H}(k = j)$$

donde  $j = 2, \dots, k_{\max}$  y  $i = 1, \dots, j - 1$ . El contraste corresponde a una prueba LR distribuida  $\chi^2((j - i)p^2)$ . Los resultados señalan un modelo en niveles con dos rezagos (Tabla (4)). Lo anterior implica la estimación de una matriz de corto plazo ( $\Gamma_1$ ) del modelo en diferencias (Ver Dennis (2006)). Es importante resaltar que el aumento del número de rezagos<sup>12</sup> no mejoraran los resultados de las pruebas de diagnóstico (Tabla (5)).

#### 4.1.1 Prueba de cointegración

Para la elección del rango de  $\Pi$  se realizan varios análisis que se muestran a continuación.

En primer lugar, la hipótesis de cointegración está definida como:

$$\mathcal{H}_0(r) : \Pi = \alpha\beta' \tag{9}$$

donde el proceso de corrección de errores corresponde a la interacción de las velocidades de ajuste ( $\alpha$ ) y las relaciones de cointegración ( $\beta$ ). La hipótesis nula contrasta hasta la existencia de  $r$  vectores de cointegración. El estadístico de la

---

<sup>10</sup>Son variables exógenas e  $I(0)$ .

<sup>11</sup>Las variables *dummy* para los choques positivos corresponden a los siguientes periodos: 2004-05, 2006-05, 2008-06, 2008-10, 2009-08 y 2010-01. Las variables *dummy* para los choques negativos corresponden a: 2005-06, 2005-07, 2008-08, 2008-12, 2009-03 y 2009-07. A parte del modelamiento de *outliers*, otras explicaciones para la inclusión de estos periodos se encuentran momentos de baja liquidez del mercado, aumento de las expectativas implícitas de inflación en los TES y cambios en la política monetaria (Ver Anexos, Gráfico (3)).

<sup>12</sup>Debido al tamaño de la muestra, se contrastó hasta un modelo con tres rezagos.

prueba corresponde a una prueba de razón de verosimilitud (prueba de la traza) definida como:

$$\lambda_{traza} = -2 \log Q(\mathcal{H}(r) | \mathcal{H}(p)) = -T \sum_{i=r+1}^p \log(1 - \hat{\lambda}_i) \quad (10)$$

donde  $i$  denota las diferentes estructuras de  $\beta$  (número de vectores de cointegración) y  $\lambda_i$  es el valor propio máximo. La primera hipótesis de la prueba considera la existencia de  $p$  raíces unitarias. Si la hipótesis es rechazada ( $\lambda_1 > 0$ ), se continúa la prueba secuencialmente ( $p - 1$  raíces) hasta que no se rechace la  $\mathcal{H}_0$ .

Por ejemplo, probar que el rango de  $\Pi$  es cero ( $r = 0$ ), equivale a contrastar que no existen relaciones de largo plazo ya que  $\Delta \underline{y}_t$  depende de  $\Delta \underline{y}_{t-1}$  y no de  $\underline{y}_{t-1}$ . El caso extremo corresponde a evaluar que el rango de  $\Pi$  es  $p$  lo cual implicaría que todas las variables son  $I(0)$ .

En la Tabla (6) se presenta el valor del estadístico y el P-Valor de la prueba de traza con la corrección de Barlett para muestra pequeña (Traza\* y P-Valor\*). Los resultados señalan que la prueba no se rechaza al considerar dos raíces unitarias ( $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ ) por lo que el sistema tiene dos tendencias comunes y existen dos relaciones de cointegración.

En segundo lugar, se analiza el módulo de las raíces del polinomio característico para diferentes valores de  $r$ . Según la Tabla (7), en cada caso las dos primeras raíces son cercanas a uno, lo cual sugiere que  $r = 2$ . Si se observa las siguientes tres raíces en cada modelo, éstas presentan valores que distan de la unidad. De esta forma, estos criterios corroboran la existencia de dos relaciones de cointegración en el modelo.

## 4.2 Pruebas de diagnóstico y propiedades estadísticas

Las pruebas de diagnóstico sobre las variables en diferencias indican heteroscedasticidad y no efecto arch. Para estas pruebas se empleó el estadístico NM de Doornick y Hansen, y un multiplicador de Lagrange, respectivamente (Ver Tabla (16) y Figura(4)).

En la Tabla (15) se presentan las pruebas sobre el modelo las cuales arrojan no autocorrelación, efecto arch y no normalidad. Estos resultados son similares a los obtenidos por estudios similares. En particular, Giese (2008) señala este problema, y cita a Gonzalo (1994) para afirmar que las pruebas de cointegración son robustas a excesos de curtosis moderados.

A pesar de adicionar las variables *dummy* en el modelo, estos resultados se deben en parte a la alta curtosis que continúa presentando la primera diferencia de la tasa de un año (Ver Anexos, Tabla (14)). Para contrastar la normalidad multivariada de los residuales se utilizó el estadístico NM de Doornick y Hansen

mientras que para verificar no autocorrelación y no efecto arch se emplearon multiplicadores de Lagrange.

Tasas	Exclusión	Estacionariedad	Exogeneidad	Vector unitario
R01	IVC	I(1)	END	No ITC
R03	IVC	I(1)	END	ITC
R05	IVC	I(1)	END	ITC
R10	IVC	I(1)	END	No ITC
Constante	IVC	-	-	-

Estas pruebas corresponden al VECM (cimean) con  $r=2$ .

IVC : Incluida en el vector de cointegración

I(1) : Variable cointegrada de grado 1

END: Variable endógena

ITC : Tiene impacto en las tendencias comunes

Tabla 2: Propiedades estadísticas

En la segunda parte de esta sección se presenta un resumen de las pruebas multivariadas que permiten contrastar las propiedades estadísticas del modelo. Antes de contrastar la HE, se requiere que las tasas no sean excluidas del vector de cointegración, sean procesos I(1) y no sean débilmente exógenas (Ver Tabla (2)). Para un reporte más detallado de los resultados, ver sección (7.3).

### 4.3 Representación MA

Hasta ahora se ha analizado la estructura de las relaciones de cointegración y el proceso de corrección de errores. No obstante, las tendencias estocásticas comunes introducen el comportamiento no estacionario al desviar del equilibrio de largo plazo al sistema. De esta forma, para interpretar la estructura de estas tendencias se obtiene la representación de media móvil (MA) o de Granger y Johansen:

$$\underline{y}_t = C \sum_{i=1}^t (\varepsilon_i + \phi D_i) + C^*(L)(\varepsilon_t + \phi D_t) + A \quad (11)$$

donde la matriz de impacto se define como  $C = \beta_{\perp}(\alpha'_{\perp} \Gamma \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp} = \tilde{\beta}' \alpha'_{\perp}$ . Las tendencias estocásticas comunes se definen como  $\alpha'_{\perp} \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$  y sus ponderadores como  $\tilde{\beta}_{\perp}$ . El componente estacionario de la representación está dado por  $C^*(L)\varepsilon_t$ .

$C^*(L)$  es un polinomio dado por los parámetros del modelo VEC,  $A$  contiene las condiciones iniciales del sistema (satisface  $\beta' A = 0$ ) y el parámetro  $\Gamma = I_p - \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i$ .

En la sección (3), se señaló la relación entre los modelos factoriales de la curva cero cupón y las tendencias comunes estocásticas. De acuerdo a Giese (2008), las tendencias estocásticas comunes (Ver Tabla (22)) se relacionan con los factores

de la curva mientras que los ponderadores de las tendencias comunes (Ver Tabla (23)) corresponden a los ponderadores de los factores de la curva.

La primera tendencia estocástica señala una mayor importancia de las tasas de largo plazo cuyos ponderadores aumentan a medida que aumenta el plazo. Lo anterior sugiere que ante un choque, las tasas de largo plazo responden en mayor proporción que las tasas de corto plazo por lo que esta tendencia presenta un comportamiento diferente al esperado por parte del nivel de la curva (ante un choque, todas las tasas responden en proporciones similares).

Por el contrario, la segunda tendencia estocástica da una mayor valor a las tasas de corto plazo cuyos ponderadores decrecen a medida que aumenta el vencimiento. Esto indica que ante perturbaciones en el *spread* de las tasas de corto plazo responden en mayor proporción. Esta caracterización es débilmente consistente con el factor relacionado con la pendiente de la curva ya que también se esperaría que en el tramo corto los ponderadores fueran negativos.

De esta forma, las relaciones obtenidas entre el nivel y la pendiente de la curva, y las tendencias comunes estocásticas no fueron significativas. Igualmente, el vínculo entre los ponderadores de las tendencias comunes y los ponderadores de los factores de la curva es empírico. Hasta el momento, estos vínculos no están claramente definidos en la literatura.

### 4.3.1 Funciones impulso respuesta

La Figura (6) muestra que un choque de una desviación estándar sobre los residuales estandarizados de la tasa de un año genera un efecto transitorio en los residuales estandarizados de las tasas aunque la respuesta ante éste varía según el vencimiento. El análisis contrario, la respuesta de los residuales estandarizados de la tasa de diez años ante choques en los residuales estandarizados de las tasas, también señalan un efecto transitorio en las tasas. De esta forma, las tasas de corto y largo plazo presentan una relación bidireccional ante perturbaciones. Lo anterior es consistente con el planteamiento de la HE.

De acuerdo a la HE, los choques de las tasas de corto plazo deben tener un efecto transitorio sobre las tasas de largo plazo. En la primera fila de la Figura (6) se observa que un choque en la tasa de un año tiene un efecto transitorio sobre las tasas de tres, cinco y diez años. En los últimos dos casos las tasas tienen un leve aumento al inicio del periodo, pero posteriormente se descuenta el choque (aproximadamente en seis meses). Las funciones impulso respuesta que no resultan ser significativas son un choque en la tasa de cinco años y su respuesta en la tasa de tres años, y un choque en la tasa de diez años y la respuesta en esta tasa.



## 4.4 Contraste de la HE

Los resultados de la prueba de la traza sugieren la existencia dos relaciones de cointegración<sup>13</sup>:

$$\hat{\beta}'_1 x_t = R01 - 7.707R03 + 11.052R05 - 4.086R10 - 3.619 \quad (12)$$

$$\hat{\beta}'_2 x_t = R01 - 4.187R03 + 4.366R05 - 1.163R10 - 0.273 \quad (13)$$

Se puede observar que las tasas de uno y cinco años tienen un efecto contrario respecto a la constante y a las tasas de tres y cinco años, en ambos vectores de cointegración. Igualmente, la tasa de cinco años tiene el mayor efecto entre las tasas en las dos relaciones de largo plazo.

La existencia de dos relaciones de cointegración dificulta la interpretación de las relaciones de equilibrio de largo plazo ya que cualquier combinación lineal de estos vectores es estacionaria (Ver Figuras (5)). Resulta importante resaltar que este problema de identificación es característico en modelos VEC cuyo rango de  $\Pi$  es mayor a uno.

Debido a lo anterior, el contraste el cumplimiento de la HE se realizará mediante la formulación de hipótesis estructurales sobre el espacio de cointegración, las cuales corresponden a las pruebas de identificación y sobre-identificación mencionadas en la sección (3).

En nuestro caso, la validez de la HE implica la existencia de 3 vectores de cointegración. Al realizar la prueba de identificación (Ver Tabla (25)) y de sobre-identificación (Ver Tabla (26)) se observa el incumplimiento de la HE. El estadístico LR de la prueba de sobre-identificación está dado por  $\chi^2(3) = 9.2905$  mientras que los valores críticos al 95% y al 90% son 13.50 y 10.85, por lo que las restricciones impuestas son rechazadas.

## 5 Conclusiones

El contraste de la hipótesis de expectativas (HE) en Colombia se había realizado empleando bases de datos calculadas con metodologías pasadas, no había tenido en cuenta todos los sistemas transaccionales ni había estudiado de manera conjunta las relaciones de equilibrio entre las tasas. En este documento se estimó un modelo multivariado con corrección de errores (VEC) que permitió corregir estos inconvenientes y a la vez, hallar las relaciones de largo plazo entre las tasas. Es importante recordar que la cointegración entre tasas es una condición necesaria, pero no suficiente para la validez de la HE.

El modelo cumple las propiedades estadísticas deseables para el contraste de la HE. Se obtiene que las tasas no son excluidas del vector de cointegración, son

---

<sup>13</sup>Como resultado de la estimación, los coeficientes de los vectores de cointegración aparecen con el signo contrario. Para información más detallada, ver sección (7.3).

procesos  $I(1)$  y no son débilmente exógenas. Igualmente, la significancia de la prima por liquidez en las relaciones de largo plazo entre las tasas y el efecto transitorio de choques en la tasa de corto plazo sobre la tasa de largo plazo dan indicios sobre la validez de la HE en Colombia.

Sin embargo, la existencia de dos relaciones de cointegración y el rechazo de la prueba de sobre-identificación indican el incumplimiento de la HE en Colombia. De esta forma, no hay evidencia de la HE en Colombia, lo cual está en línea con la literatura internacional.

Las relaciones obtenidas entre el nivel y la pendiente de la curva, y las tendencias comunes estocásticas no fueron significativas. Igualmente, el vínculo entre los ponderadores de las tendencias comunes y los ponderadores de los factores de la curva resultó ser empírico y no significativo. Hasta el momento, estos vínculos no están claramente definidos en la literatura.

Teóricamente, una hipótesis sobre el incumplimiento de la HE puede ser causado por una prima de liquidez que cambia en el tiempo (Tabak (2009) y Julio (2007)). Es decir, la compensación que exige un inversionista al comprar un título de un mayor plazo respecto a uno de menor plazo varía conforme cambia la rentabilidad de los títulos. Otra hipótesis consiste en la falta de variables<sup>14</sup> que capturen los impactos de coyunturas internacionales, permitiendo controlar el efecto de factores externos en la prima de liquidez.

Otras hipótesis se relacionan con las características propias del mercado de deuda pública colombiano. En primer lugar, se observa una concentración de agentes institucionales en diferentes tramos de la estructura a término. Los agentes institucionales tienen una preferencia por bonos con maduraciones específicas de acuerdo al plazo de sus pasivos: los fondos de pensiones se sitúan en el tramo de largo plazo mientras que los bancos se ubican en el tramo de corto plazo.

En segundo lugar, el mercado de deuda pública enfrenta restricciones de tipo impositivo, en los sistemas transaccionales y en el programa de creadores de mercado. Debido a la segmentación del mercado, los títulos de la parte larga se negocian en el MEC (mayor participación de operaciones en simultáneas), y los títulos de la parte media y corta de la curva se transan en el SEN.

Respecto a las restricciones impositivas, los títulos al descuento cobran retención en la fuente como si fuera un interés pagado anticipadamente lo cual genera problemas en el mercado secundario debido a que no es transparente el trato de exenciones (por ejemplo, las otorgadas a los fondos de pensiones). En el caso de los creadores de mercado, la puntuación del esquema se da esencialmente en el SEN (puntas en el mercado secundario) con lo cual no hay formación de precios para no participantes del esquema (por ejemplo, los participantes del MEC).

---

<sup>14</sup>En la sección (7.4) se estima el modelo incluyendo las variaciones en la tasa de cambio como variable exógena. Los resultados en cuanto a especificación, pruebas de diagnóstico y propiedades estadísticas son los mismos. Se concluye que la HE no cumple.

En tercer lugar, el mecanismo para la formación de precios de las tasas con vencimientos menores a un año es incipiente y genera poca liquidez para estos títulos.

De esta forma, la prueba de la prima variante en el tiempo sería la extensión del trabajo. Al implementar el modelo ARCH-M propuesto en Engle (1987), el periodo de la muestra de los parámetros (2003-2010) solo permite realizar estimaciones apropiadas de la prima por liquidez para las tasas del tramo de corto plazo (tasas inferiores a un año). Lo anterior sesgaría la muestra a tasas poco representativas en la dinámica de la curva cero cupón y dejaría de lado a las tasas estudiadas en el modelo VEC.

## 6 Bibliografía

Agudelo, D. y Agudelo, M. (2008). La curva de rendimientos a plazo y las expectativas de tasas de interés en los mercados colombianos de renta fija 2002-2007. *Lecturas de Economía*. Universidad de Antioquía.

Brooks, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance*. Second edition. Cambridge University Press.

Campbell, J. Y. y Shiller, R. J. (1991). Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View, *Review of Economic Studies* 58, 495-514.

Carstensen, K. (2003). Nonstationary term premia and cointegration of the term structure. *Economic Letters* 80, 409-413.

Cultberson, J. M. (1957). The term structure of interest rates. *Quarterly Journal of Economics*, 71, 481-517.

Dennis, J. G. (2006). CATS in RATS - Cointegration Analysis of Time Series, Version 2. Evanston, Illinois: Estima.

Engle, R. F. y C. W. J. Granger (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica* 55, 251-276.

Engle, R. F., Lilien, D. y Robins, R. (1987). Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model. *Econometrica* 55, 391-407

Fabozzi, F. (2007) *Bond markets, analysis and strategies*. Prentice Hall.

Fisher, I. (1896). *Appreciation and Interest*. New York. Macmillan, 1896. Reprinted in Fisher, 1997, Vol. 1.

Giese, J. V. (2008). Level, Slope, Curvature: Characterising the Yield Curve in a Cointegrated VAR Model. *Economics Discussion Papers 2008-13*, Kiel Institute for the World Economy.

Gonzalo, J. (1994) Five alternative methods of estimating long-run equilibrium relationships. *Journal of Econometrics* 60, 203-233.

Hall, A. D., H. M. Anderson, and C. W. Granger (1992). A cointegration analysis of Treasury bill yields. *The Review of Economics and Statistics* 74, 117-126.

- Hicks, J. (1939). Mr Hawtrey on Bank Rate and the Long Term Rate of Interest. Manchester School.
- Hull, J. (2006). Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall.
- Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12 , 231-254. Reprinted in Engle & Granger 1991.
- Johansen, S. J. (1995) Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregression Models, Oxford University Press, Oxford.
- Julio, J. (2007) Does the Spot Curve Contain Information on Future Monetary Policy in Colombia? Banco de la República, Borradores de Economía No. 463.
- Juselius, K. (2006). The Cointegrated VAR Model: Econometric Methodology and Macroeconomic Applications. Oxford University Press, Oxford.
- Krasker, W. and Welch R. (1982). Efficient Bounded Influence Regression Estimation. *Journal of the American statistical Association*, 77, 595-604, 1982.
- Litterman, R. and Scheinkman, J. A. (1991). Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income* 1, 51-61.
- Modigliani, F. y Sutch, R. (1967). Debt management and the term structure of interest rates: an empirical analysis of recent experience. *Journal of Political Economy*, 75, 569-89.
- Nelson, C. R. and Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modelling of yield curves. *Journal of Business*, 60, 473-489.
- Pesaran, B. and Wright, G. (1996). The Use Of Spreads In Forecasting Medium Term U.K Interest Rates. Working Paper no. 6 UK: Department of Economics, University of East London.
- Pesaran, B. y Pesaran, M. H. (2009). *Time Series Econometrics Using Microfit* 5. 0. Oxford University Press, USA.
- Rey, M. (2005). La hipótesis de expectativas en la estructura a plazo de las tasas de interés: una estimación para Colombia. Mimeo. Universidad del Rosario.
- Shea, G. S. (1992). Benchmarking the expectations hypothesis of the interest-rate term structure: an analysis of cointegration vectors. *Journal of Business and Economic Statistics* 10, 347-366.
- Shiller, R. J, 1979. The Volatility of Long-Term Interest Rates and Expectations Models of the Term Structure, *Journal of Political Economy*, University of Chicago Press, vol. 87(6), pages 1190-1219, December.
- Svensson, L. (1994). Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994, NBER Working Paper, no. 4871.
- Soderlind P. and Svensson L. (1997). New techniques to extract market expectations from financial instruments, NBER Working Paper, no. 5877.
- Tabak, B. (2009). Testing the expectations hypothesis in the Brazilian term structure of interest rates: a cointegration analysis, *Applied Economics*, 41: 21, 2681-2689.
- Zhang, H. (1993). Treasury yield curves and cointegration. *Applied Economics* 25, 361367.

## 7 Anexos

### 7.1 Cointegración (Engle y Granger)

En primer lugar, se presenta la definición formal de cointegración de Engle y Granger (1987):

“DEFINITION: The components of the vector  $x_t$  are said to be *co-integrated of orden  $d, b$* , denoted  $x_t \sim CI(d, b)$ , if (i) all components of  $x_t$  are  $I(d)$ ; (ii) there exists a vector  $\alpha (\neq 0)$  so that  $z_t = \alpha' x_t \sim I(d - b)$ ,  $b > 0$ . The vector  $\alpha$  is called the *co-integrated vector*.”

De esta forma, si  $R_t^n$  y  $R_t^m \sim CI(d, b)$ , entonces  $(d_1 R_t^m + d_2 R_t^n) \sim I(d - b)$  donde  $d_1 \neq 0$  y  $d_2 \neq 0$ . Por ejemplo, si  $R_t^n, R_t^m \sim I(1, 1)$  entonces  $R_t^n = \alpha_1 w_t + C_1 + u_{1t}$  y  $R_t^m = \alpha_2 w_t + C_2 + u_{2t}$  donde  $w_t \sim I(1)$ ,  $u_{1t} \sim I(0)$ ,  $u_{2t} \sim I(0)$ ; y  $C_1$  y  $C_2$  son constantes. Se tiene que  $z_t = R_t^m - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} R_t^n$ , entonces  $z_t \sim I(0)$ .

En segundo lugar, Engle y Granger (1987) proponen una metodología en la que se prueba que las variables son  $I(1)$  por medio de una prueba de raíz unitaria, se estima  $R_t^n = c + \beta R_t^m + \epsilon_{t0}$  o  $R_t^m = c + \beta R_t^n + \epsilon_t$  (dado la relación de largo plazo debe ser bidireccional) y se regresa  $\tilde{\epsilon}_t$ . Posteriormente se prueba si los residuales estimados son estacionarios, por medio de pruebas de raíz unitaria (media  $(\tau)$ ), empleando los valores tabulados por Engle y Granger. En esta prueba la hipótesis nula es que no hay cointegración, por lo que la hipótesis alternativa es que hay cointegración. Si  $R_t^n$  y  $R_t^m$  están cointegradas, por el teorema de representación de Granger, existe un modelo de corrección de errores.

El teorema de representación de Granger plantea que si  $R_t^n$  y  $R_t^m$  están cointegradas el modelo resultante, en el caso de la hipótesis de expectativas, debe modelar la relación de equilibrio entre las tasas de largo y corto plazo:

$$\text{Etapa a) } \Delta R_t^n = D_1(t) + \gamma_1 \hat{\epsilon}_{1,t-1} + \sum_{i=1}^p \rho_{1,i} \Delta R_{t-i}^n + \sum_{j=1}^q \rho_{2,j} \Delta R_{t-i}^m + \epsilon_{1,t} \quad (14)$$

$$\text{Etapa b) } \Delta R_t^m = D_2(t) + \gamma_2 \hat{\epsilon}_{2,t-1} + \sum_{i=1}^p \rho_{3,i} \Delta R_{t-i}^n + \sum_{j=1}^q \rho_{4,i} \Delta R_{t-i}^m + \epsilon_{2,t} \quad (15)$$

donde  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son las velocidades de ajuste (una es menor a cero) son  $\pi_1$  y  $\pi_2$ . El término de corrección de errores es un proceso ruido blanco  $\tilde{\epsilon}_t \sim I(0)$  ya que se ha modelado las correlaciones de los errores. Notacionalmente,

$$\tilde{\epsilon}_t = R_t^m - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 R_t^n - \hat{\beta}_3 t,$$

donde el último término correspondería al modelo que incluiría tendencia (etapa b). De esta forma,  $\Delta R_t^n$  y  $\Delta R_t^m$  dependerían del desequilibrio dada su

velocidad de ajuste. Aunque  $R_t^n$  y  $R_t^m$  no sean estacionarias, su relación de cointegración es estacionaria.

Las principales críticas de esta metodología son: muestra pequeña, los  $\beta_i$  son independientes de los  $D_i$  y los  $\gamma_i$  y los estadísticos de la etapa b son sesgados e inconsistentes por lo que no se puede hacer inferencia en términos de los  $\beta_i$  (no son totalmente eficientes).

Estas críticas se relacionan con el tipo de técnica empleada. Las técnicas uniecuacionales resultan ser estables y de fácil estimación, pero son poco realistas y no permiten probar la presencia de múltiples vectores de cointegración.

## 7.2 Propiedades estadísticas

Basado en Dennis (2006), se presenta una descripción de las pruebas realizadas.

### 7.2.1 Prueba de exclusión en la relación de largo plazo

Para una variable  $X_i$ , la hipótesis de exclusión de la relación de largo plazo corresponde a:

$$\mathcal{H}_0 : R_i' \beta = 0 \quad (16)$$

donde  $R_i = \mathbf{e}_i$  y  $1 \leq i \leq p$ . La prueba es realizada para cada  $i = 1, \dots, p$  y  $r = 1, \dots, p - 1$  y provee información sobre que variables pueden o no ser excluidas del espacio de cointegración. Bajo la hipótesis nula, el estadístico de prueba está asintóticamente distribuido  $\chi^2(r)$ .

En la Tabla (17) se observa que las cuatro tasas son estadísticamente significativas a un nivel del 1% por lo que éstas deben ser incluidas en los dos vectores de cointegración.

### 7.2.2 Prueba de estacionariedad

Para una variable  $X_i$ , la hipótesis de estacionariedad puede ser formulada como:

$$\mathcal{H}_0 : \beta = (\beta_1^0, \beta_2) \quad (17)$$

donde  $\beta_1^0 = \mathbf{e}_i$  y  $\beta_2$  es una matriz  $(p_1 \times (r - 1))$  de coeficientes no restringidos. La hipótesis nula es estacionariedad dado el espacio de cointegración. En esta prueba, la constante es incluida en las relaciones de cointegración. Bajo la hipótesis nula, el estadístico de prueba está asintóticamente distribuido  $\chi^2(p_1 - r)$ .

Como se observa en la Tabla (18) se rechaza la hipótesis nula para las cuatro tasas. Las variables endógenas en el vector de cointegración son procesos I(1). De igual forma, esta prueba muestra la significancia de la constante (prima por liquidez) en las relaciones de largo plazo entre las tasas.

### 7.2.3 Prueba de exogeneidad débil

La hipótesis de exogeneidad débil es:

$$\mathcal{H}_0 : R_i' \alpha = 0 \quad (18)$$

donde  $R_i = \mathbf{e}_i$ <sup>15</sup> y  $1 \leq i \leq p$ . La prueba es realizada para cada  $i = 1, \dots, p$  y  $r = 1, \dots, p - 1$  y contrasta si la variable  $X_i$  no contiene información sobre los coeficientes de largo plazo en la relación de cointegración. Bajo la hipótesis nula, el estadístico de prueba está asintóticamente distribuido  $\chi^2(r)$ .

De acuerdo a la Tabla (41), se rechaza la hipótesis nula para las cuatro tasas. Es decir, cada una de las filas de la matriz  $\alpha$  contiene información sobre las relaciones de cointegración ( $\beta$ ).

### 7.2.4 Prueba de vector unitario en las velocidades de ajuste

La hipótesis de vector unitario en alfa corresponde a:

$$\mathcal{H}_0 : \alpha = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \perp \varphi) \quad (19)$$

donde  $\varphi$  es una matriz  $((p - 1) \times (r - 1))$  de coeficientes no restringidos. La prueba contrasta si choques en  $X_i$  no tienen un impacto de largo plazo en cualquiera de las variables, incluyendo  $X_i$ . Bajo la hipótesis nula, el estadístico de prueba está asintóticamente distribuido  $\chi^2(p - r)$ .

Según la Tabla (42), no se puede rechazar que choques en la tasa de tres y cinco años no tengan efecto permanente en las tendencias comunes.

## 7.3 Resultados

Los resultados fueron obtenidos con CATS en RATS, versión 2, desarrollado por J.G. Dennis, H. Hansen, S. Johansen y K. Juselius, Estima 2005. Las funciones impulso respuesta fueron calculados en el complemento CATS *Utilities* creado por Diego Vásquez. El contraste de la hipótesis de expectativas se realizó en Microfit 5.0, desarrollado por Bahram Pesaran y Hashem Pesaran.

En paréntesis angulares se reportan los estadísticos t, a menos que se señale lo contrario (P-valores).

---

<sup>15</sup>Corresponde al i-ésimo vector unitario.

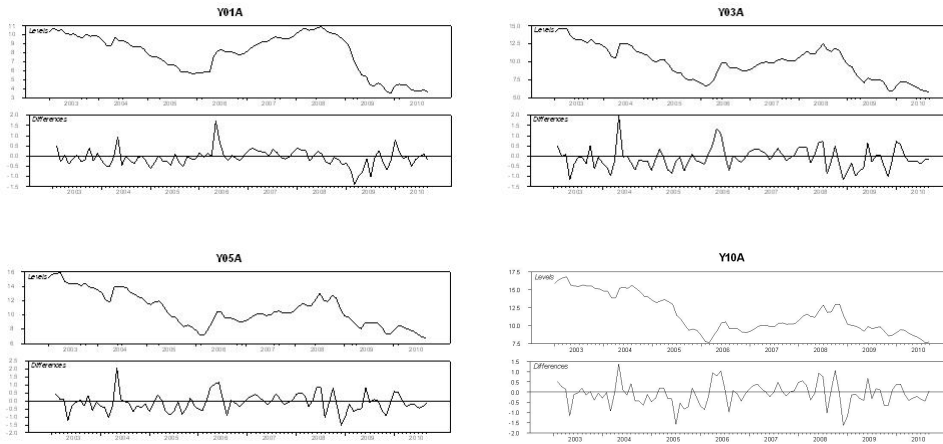


Figura 2: Series en niveles y diferencias

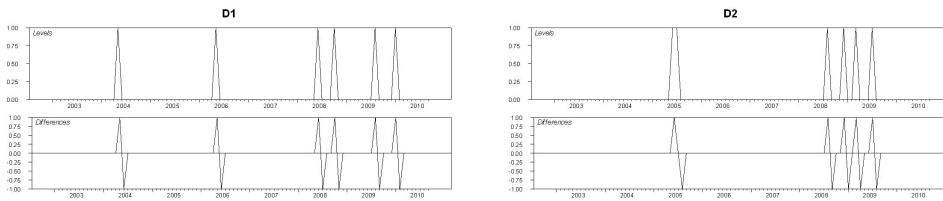


Figura 3: Variables *Dummy*

	ADF		PP	
	Estadístico t	Prob.*	Est. t ajust.	Prob.*
R01	-0.9574	0.77	-0.7969	0.82
R03	-1.8736	0.34	-1.1930	0.67
R05	-1.7037	0.43	-1.4737	0.54
R10	-1.5386	0.51	-1.2680	0.64

\* P-Valores a una cola de MacKinnon (1996)

Todas las pruebas se realizaron con constante

En ADF, la selección de rezagos se empleó el criterio SIC

(Un rezago: R01 y R03. Dos rezagos: R05 y R10.)

Tabla 3: Pruebas de raíz unitaria



Detección de rezago	Estadístico	P-Valor
VAR(2) < - VAR(3)	$\chi^2(16) = 22,45$	0.129
VAR(1) < - VAR(3)	$\chi^2(32) = 100,33$	0.000
VAR(1) < - VAR(2)	$\chi^2(16) = 77,87$	0.000

Tabla 4: Orden del rezago

<i>Resumen del modelo</i>								
Modelo	k	T	Regr	Log-Lik	SC	H-Q	LM(1)	LM(k)
VAR(3)	3	90	15	716.28	-12.92	-13.91	0.004	0.922
VAR(2)	2	90	11	705.05	-13.47	-14.2	0.03	0.697
VAR(1)	1	90	7	666.11	-13.4	-13.87	0	0

SC : Criterio de Schwarz

H-Q : Criterio de Hannan-Quinn

LM(k) : Prueba LM para autocorrelación de orden k

Tabla 5: Criterios de información

p-r	r	Eig.Valor	Traza	Traza*	V.C. (5%)	P-Valor	P-Valor*
4	0	0.349	81.650	74.921	53.945	0.000	0.000
3	1	0.282	42.566	39.390	35.070	0.006	0.015
2	2	0.105	12.366	11.444	20.164	0.425	0.508
1	3	0.025	2.322	1.673	9.142	0.714	0.833

Tabla 6: Prueba de la traza

	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$
Raíz 1	1.000	1.000	1.000	1.000	0.970
Raíz 2	1.000	1.000	1.000	0.961	0.970
Raíz 3	1.000	1.000	0.780	0.823	0.810
Raíz 4	1.000	0.544	0.541	0.564	0.565
Raíz 5	0.376	0.529	0.541	0.564	0.565

Tabla 7: Módulos de las primeras 5 raíces

LOS EIGENVECTORES (transpuestos)					
	R01	R03	R05	R10	CONSTANTE
$\beta(1)$	-1.195	9.211	-13.210	4.884	4.326
$\beta(2)$	-3.252	13.619	-14.200	3.783	0.887

Tabla 8: Vectores de cointegración

$\beta'$					
	R01	R03	R05	R10	CONSTANTE
$\beta(1)$	1.000	-7.707	11.052	-4.086	-3.619
$\beta(2)$	1.000	-4.187	4.366	-1.163	-0.273

Tabla 9: Vectores de cointegración (Normalizadas)

$\alpha$		
	$\alpha(1)$	$\alpha(2)$
DY01	-0.096 [-2.800]	0.082 [0.880]
DY03	-0.244 [-6.060]	0.079 [0.719]
DY05	-0.250 [-5.530]	-0.007 [-0.058]
DY10	-0.142 [-2.921]	-0.022 [-0.166]

Tabla 10: Velocidades de ajuste

$\Pi$					
	R01	R03	R05	R10	CONSTANTE
DY01	-0.014 [-0.140]	0.396 [0.839]	-0.703 [-1.263]	0.297 [1.674]	0.325 [2.566]
DY03	-0.165 [-1.416]	1.549 [2.800]	-2.350 [-3.602]	0.904 [4.351]	0.860 [5.792]
DY05	-0.258 [-1.962]	1.960 [3.146]	-2.799 [-3.809]	1.031 [4.407]	0.908 [5.429]
DY10	-0.164 [-1.164]	1.190 [1.774]	-1.670 [-2.111]	0.608 [2.411]	0.521 [2.895]

Tabla 11: Matriz Pi

$\Gamma_1$				
	DY0111	DY0311	DY0511	DY1011
DY01	0.964 [3.806]	-1.284 [-1.532]	0.654 [0.756]	0.254 [0.964]
DY03	1.162 [3.878]	-2.544 [-2.566]	2.463 [2.407]	-0.371 [-1.192]
DY05	1.201 [3.570]	-3.137 [-2.817]	3.277 [2.852]	-0.675 [-1.932]
DY10	1.089 [3.052]	-3.274 [-2.772]	3.379 [2.772]	-0.669 [-1.804]

Tabla 12: Matriz de corto plazo

VARIABLES DUMMY		
	D1	D2
DY01	0.768 [6.624]	-0.433 [-3.604]
DY03	1.047 [7.635]	-0.574 [-4.038]
DY05	1.093 [7.097]	-0.626 [-3.917]
DY10	0.889 [5.443]	-0.666 [-3.931]

Tabla 13: Matriz de corto plazo (*Dummy*)

	Media	Des. Est.	Asimetría	Curtosis	Mínimo	Máximo
$\Delta R01$	-0.04	0.27	0.13	3.57	-0.61	0.91
$\Delta R03$	-0.03	0.32	0.28	3.48	-0.82	0.87
$\Delta R05$	-0.03	0.36	0.19	3.46	-0.94	1.05
$\Delta R10$	-0.04	0.38	-0.12	2.80	-0.96	0.93

Tabla 14: Estadísticas descriptivas (series en diferencias y con variables *dummy*)

Estadísticos de prueba	P-Valor
Pruebas de no autocorrelación	
LM(1) : $\chi^2(16) = 16.024$	0.451
LM(2) : $\chi^2(16) = 11.579$	0.772
Pruebas de normalidad	
$\chi^2(8) = 33,19$	0.000
Pruebas LM para efecto ARCH	
$\chi^2(100) = 165,58$	0.000
$\chi^2(200) = 255,73$	0.005

Tabla 15: Pruebas de diagnóstico multivariadas

	ARCH(2)	Normalidad
DR01	0.311 [0.856]	3.077 [0.215]
DR03	0.94 [0.625]	2.728 [0.256]
DR05	0.797 [0.671]	2.464 [0.292]
DR10	0.624 [0.732]	0.259 [0.878]

Tabla 16: Pruebas de diagnóstico univariadas.  
(P-valores en paréntesis angulares)

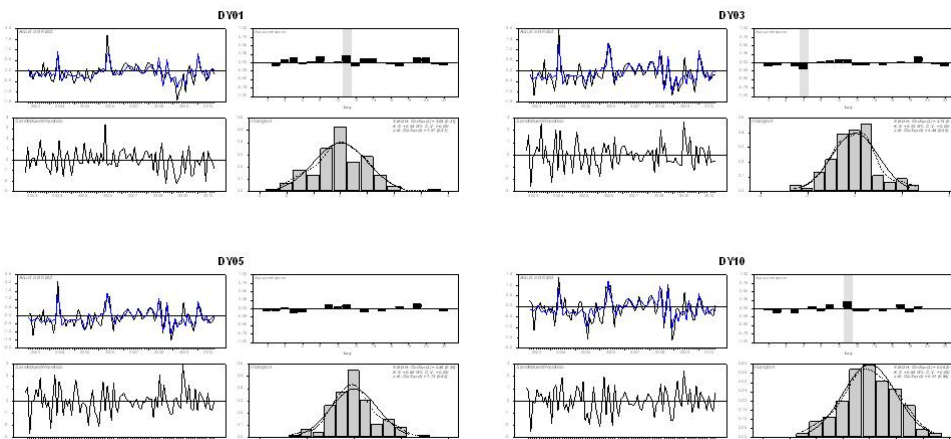


Figura 4: Gráficos de autocorrelación

El estadístico de cada prueba LR se distribuye  $\chi^2(2)$ . P-valores en paréntesis angulares.

PRUEBA DE EXCLUSIÓN EN BETA							
r	DGF	V.C. (5%)	R01	R03	R05	R10	CONSTANTE
2	2	5.991	21.173 [0.000]	22.982 [0.000]	24.097 [0.000]	24.364 [0.000]	17.823 [0.000]

Tabla 17: Exclusión en vectores de cointegración

PRUEBA DE ESTACIONARIEDAD						
r	DGF	V.C. (5%)	R01	R03	R05	R10
2	2	5.991	22.764 [0.000]	16.361 [0.000]	15.888 [0.000]	17.328 [0.000]

Tabla 18: Estacionariedad

PRUEBA DE EXOGENEIDAD DÉBIL						
r	DGF	V.C. (5%)	R01	R03	R05	R10
2	2	5.991	7.175 [0.028]	23.435 [0.000]	20.849 [0.000]	6.852 [0.033]

Tabla 19: Exogeneidad débil

PRUEBA DE VECTOR UNITARIO EN ALFA						
r	DGF	V.C. (5%)	R01	R03	R05	R10
2	2.000	5.991	8.586 [0.014]	0.841 [0.657]	0.574 [0.751]	5.123 [0.077]

Tabla 20: Vector unitario en velocidades de ajuste

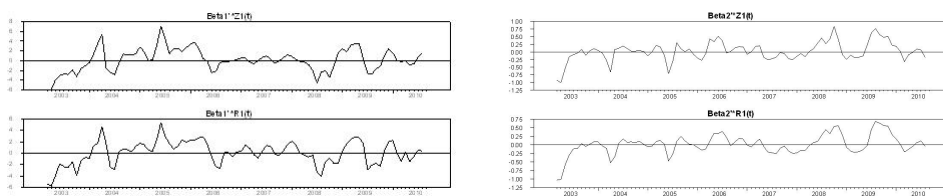


Figura 5: Relaciones de cointegración

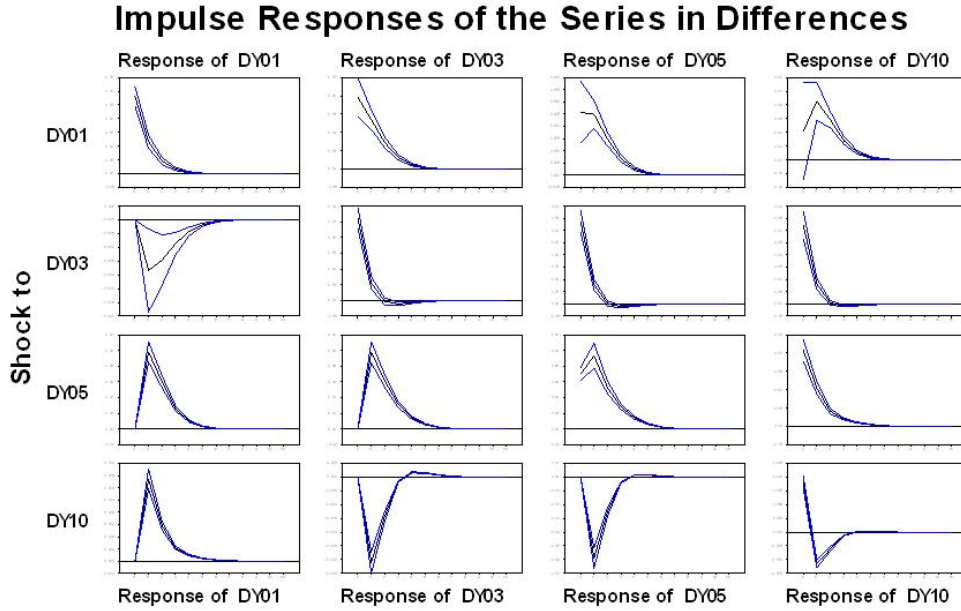


Figura 6: Funciones Impulso Respuesta  
(A doce meses / IC:95%)

Las tendencias comunes del modelo se denotan como TC.

$\alpha'_{\perp}$				
	R01	R03	R05	R10
TC(1)	0.235	-0.059	-0.504	0.829
TC(2)	0.656	-0.651	0.382	0.000

Tabla 21: Espacio de tendencias estocásticas comunes (transpuestas)

$\alpha'_{\perp}$				
	R01	R03	R05	R10
TC(1)	0.000 [NA]	0.210 [0.251]	-0.773 [-0.942]	1.000 [NA]
TC(2)	1.000 [NA]	-0.993 [-1.438]	0.582 [0.860]	0.000 [NA]

Tabla 22: Espacio de tendencias estocásticas comunes (normalizadas y transpuestas)

$\tilde{\beta}_\perp$		
	TC1	TC2
R01	0.644 [0.650]	2.776 [3.797]
R03	1.317 [1.570]	1.921 [3.106]
R05	1.774 [2.005]	1.511 [2.316]
R10	2.472 [2.257]	1.144 [1.416]

Tabla 23: Ponderadores de las tendencias estocásticas comunes

$C$				
	R01	R03	R05	R10
R01	2.776 [3.797]	-2.621 [-0.947]	1.118 [0.374]	0.644 [0.650]
R03	1.921 [3.106]	-1.630 [-0.697]	0.100 [0.039]	1.317 [1.570]
R05	1.511 [2.316]	-1.127 [-0.457]	-0.492 [-0.185]	1.774 [2.005]
R10	1.144 [1.416]	-0.615 [-0.201]	-1.246 [-0.377]	2.472 [2.257]

Tabla 24: Matriz de impacto de largo plazo

PRUEBA DE IDENTIFICACIÓN EXACTA			
	Vector 1	Vector 2	Vector 3
R01	0.7191	0.57773	0.46857
e.e.	(0.1869)	(0.2924)	(0.4293)
R03	-1.0000	0	0
e.e.	(NA)	(NA)	(NA)
R05	0	-1.0000	0
e.e.	(NA)	(NA)	(NA)
R10	0	0	-1.0000
e.e.	(NA)	(NA)	(NA)
Constante	3.5758	5.3353	6.6054
e.e.	(1.4978)	(2.3418)	(3.4365)
LL sujeto a restricciones de identificación exacta = 31.65			

Tabla 25: Prueba de identificación exacta

PRUEBA DE SOBRE-IDENTIFICACIÓN			
	Vector 1	Vector 2	Vector 3
R01	1.0000	1.0000	1.0000
e.e.	(NA)	(NA)	(NA)
R03	-1.0000	0	0
e.e.	(NA)	(NA)	(NA)
R05	0	-1.0000	0
e.e.	(NA)	(NA)	(NA)
R10	0	0	-1.0000
e.e.	(NA)	(NA)	(NA)
Constante	1.2972	1.9132	2.3106
e.e.	(0.4943)	(0.7707)	(1.0951)
Prueba LR de restricciones [P-Valor] $\chi^2(3) = 9.2905$ [0.026]			
Valores críticos 95% ( <i>Bootstrap</i> ) = 13.5041			
Valores críticos 90% ( <i>Bootstrap</i> ) = 10.8473			
Simulaciones ( <i>Bootstrap</i> ) : 1000			
DF=3 (Total restricciones - R. no sobre-identificadas)			
LL sujeto a restricciones de identificación exacta = 31.6522			
LL sujeto a restricciones de sobre-identificación = 27.0069			

Tabla 26: Prueba de sobre-identificación

## 7.4 La HE - Tasa de cambio

En esta sección se estima el modelo VEC con las variaciones en la tasa de cambio como variable exógena<sup>16</sup>.

Al igual que el modelo desarrollado en el trabajo, el modelo VEC tiene dos rezagos y dos vectores de cointegración. Las pruebas de diagnóstico sobre las variables en diferencias indican heteroscedasticidad y no efecto arch. Las pruebas multivariadas señalan no autocorrelación, efecto arch y no normalidad. Las propiedades estadísticas deseables para el modelo se cumplen: las tasas no sean excluidas del vector de cointegración, sean procesos I(1) y no sean débilmente exógenas.

No obstante, la existencia de dos vectores de cointegración sugiere que la hipótesis de expectativas en Colombia se sigue rechazando a pesar de incluir las variaciones en la tasa de cambio. A continuación se presentan los resultados:

<sup>16</sup>Se construye como el promedio mensual de la TRM diaria, buscando mantener consistencia con construcción de las tasas cero cupón (promedios mensuales de tasas diarias anualizadas)



Detección de rezago	Estadístico	P-Valor
VAR(2) < - VAR(3)	$\chi^2(16) = 25.29$	0.065
VAR(1) < - VAR(3)	$\chi^2(32) = 106.36$	0.000
VAR(1) < - VAR(2)	$\chi^2(16) = 81.07$	0.000

Tabla 27: Orden del rezago

<i>Resumen del modelo</i>								
Modelo	k	T	Regr	Log-Lik	SC	H-Q	LM(1)	LM(k)
VAR(3)	3	88	16	717.695	-13.055	-14.131	0.554	0.584
VAR(2)	2	88	12	705.048	-13.582	-14.389	0.255	0.618
VAR(1)	1	88	8	664.513	-13.474	-14.012	0	0

SC : Criterio de Schwarz

H-Q : Criterio de Hannan-Quinn

LM(k) : Prueba LM para autocorrelación de orden k

Tabla 28: Criterios de información

p-r	r	Eig.Valor	Traza	Traza*	V.C. (5%)	P-Valor	P-Valor*
4	0	0.361	83.212	76.287	53.945	0.000	0.000
3	1	0.292	42.430	39.425	35.070	0.006	0.015
2	2	0.092	10.963	10.170	20.164	0.553	0.629
1	3	0.023	2.158	1.418	9.142	0.745	0.876

Tabla 29: Prueba de la traza

LOS EIGENVECTORES (transpuestos)					
	R01	R03	R05	R10	CONSTANTE
Beta(1)	-1.757	11.518	-15.660	5.569	4.628
Beta(2)	3.058	-12.127	12.165	-3.079	-0.385

Tabla 30: Vectores de cointegración

$\beta'$					
	R01	R03	R05	R10	CONSTANTE
$\beta(1)$	1.000	-6.556	8.914	-3.170	-2.634
$\beta(2)$	1.000	-3.966	3.978	-1.007	-0.126

Tabla 31: Vectores de cointegración (Normalizadas)

$\alpha$		
	$\alpha(1)$	$\alpha(2)$
DR01	-0.125 [-2.480]	0.129 [1.472]
DR03	-0.346 [-5.933]	0.183 [1.803]
DR05	-0.366 [-5.662]	0.106 [0.941]
DR10	-0.210 [-3.036]	0.051 [0.427]

Tabla 32: Velocidades de ajuste

$\Pi$					
	R01	R03	R05	R10	CONSTANTE
DR01	0.004 [0.041]	0.308 [0.641]	-0.602 [-1.056]	0.267 [1.458]	0.314 [2.349]
DR03	-0.163 [-1.392]	1.543 [2.778]	-2.357 [-3.579]	0.913 [4.320]	0.889 [5.763]
DR05	-0.260 [-2.005]	1.979 [3.217]	-2.841 [-3.894]	1.053 [4.500]	0.951 [5.565]
DR10	-0.158 [-1.142]	1.172 [1.781]	-1.666 [-2.136]	0.613 [2.450]	0.546 [2.990]

Tabla 33: Matriz Pi

$\Gamma_1$				
	DY0111	DY0311	DY0511	DY1011
DR01	0.921 [3.556]	-1.106 [-1.294]	0.498 [0.564]	0.303 [1.130]
DR03	1.071 [3.578]	-2.311 [-2.341]	2.257 [2.213]	-0.276 [-0.890]
DR05	1.084 [3.268]	-2.859 [-2.614]	3.032 [2.682]	-0.551 [-1.604]
DR10	0.972 [2.742]	-2.970 [-2.540]	3.109 [2.573]	-0.527 [-1.434]

Tabla 34: Matriz de corto plazo

VARIABLES DUMMY			
	D1	D2	DTC
DR01	0.726 [6.123]	-0.513 [-4.390]	-0.003 [-0.271]
DR03	0.952 [6.950]	-0.644 [-4.774]	0.019 [1.814]
DR05	0.966 [6.367]	-0.699 [-4.675]	0.031 [2.581]
DR10	0.746 [4.599]	-0.751 [-4.698]	0.035 [2.776]

Tabla 35: Matriz de corto plazo (*Dummy*)

	Media	Des. Est.	Asimetría	Curtosis	Mínimo	Máximo
$\Delta R01$	0.0	0.27	0.20	3.67	-0.61	0.93
$\Delta R03$	0.0	0.32	0.27	3.62	-0.81	0.93
$\Delta R05$	0.0	0.35	0.21	3.77	-0.91	1.15
$\Delta R10$	0.0	0.37	-0.06	3.00	-0.93	1.03

Tabla 36: Estadísticas descriptivas (series en diferencias y con variables *dummy*)

Estadísticos de prueba	P-Valor
Pruebas de no autocorrelación	
LM(1) : $\chi^2(16) = 15.288$	0.504
LM(2) : $\chi^2(16) = 11.746$	0.761
Pruebas de normalidad	
$\chi^2(8) = 36.63$	0.000
Pruebas LM para efecto ARCH	
$\chi^2(100) = 174.11$	0.000
$\chi^2(200) = 278.69$	0.000

Tabla 37: Pruebas de diagnóstico multivariadas

	ARCH(2)	Normalidad
DR01	0.464 [0.793]	3.699 [0.157]
DR03	0.687 [0.709]	3.413 [0.182]
DR05	0.096 [0.953]	4.38 [0.112]
DR10	0.047 [0.977]	0.365 [0.833]

Tabla 38: Pruebas de diagnóstico univariadas.  
(P-valores en paréntesis angulares)

El estadístico de cada prueba LR se distribuye  $\chi^2(2)$ . P-valores en paréntesis angulares.

PRUEBA DE EXCLUSIÓN EN BETA							
r	DGF	V.C. (5%)	R01	R03	R05	R10	CONSTANTE
2	2	5.991	23.779 [0.000]	26.926 [0.000]	28.561 [0.000]	29.195 [0.000]	20.090 [0.000]

Tabla 39: Exclusión en vectores de cointegración

PRUEBA DE ESTACIONARIEDAD						
r	DGF	V.C. (5%)	R01	R03	R05	R10
2	2	5.991	22.894 [0.000]	16.284 [0.000]	15.690 [0.000]	17.280 [0.000]

Tabla 40: Estacionariedad

PRUEBA DE EXOGENEIDAD DÉBIL						
r	DGF	V.C. (5%)	R01	R03	R05	R10
2	2	5.991	6.834 [0.033]	25.294 [0.000]	23.592 [0.000]	7.947 [0.019]

Tabla 41: Exogeneidad débil

PRUEBA DE VECTOR UNITARIO EN ALFA						
r	DGF	V.C. (5%)	R01	R03	R05	R10
2	2.000	5.991	9.584 [0.008]	1.163 [0.559]	0.742 [0.690]	5.867 [0.053]

Tabla 42: Vector unitario en velocidades de ajuste