

UNIVERSIDAD COLEGIO MAYOR DE NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO



UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

LUISA FERNANDA PINZÓN MONSALVE

PAULA DANIELA RUIZ TRIANA

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA UN MODELO DE MEDICIÓN DE PERCEPCIÓN
DE MARCA BASADO EN SIMULACIÓN COMPUTACIONAL POR AGENTES.

TRABAJO DE GRADO

BOGOTÁ D.C

2014

UNIVERSIDAD COLEGIO MAYOR DE NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO



UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

LUISA FERNANDA PINZÓN MONSALVE

PAULA DANIELA RUIZ TRIANA

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA UN MODELO DE MEDICIÓN DE PERCEPCIÓN
DE MARCA BASADO EN SIMULACIÓN COMPUTACIONAL POR AGENTES.

TRABAJO DE GRADO

TUTOR: IVÁN ALFREDO MENDOZA PULIDO

PROGRAMA DE ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS Y PROGRAMA DE
ADMINISTRACION DE NEGOCIOS INTERNACIONALES

BOGOTÁ D.C

2014

2

A Dios por acompañarnos y guiarnos a lo largo de nuestras carreras, por ser nuestra fortaleza en los momentos de debilidad.

AGRADECIMIENTOS

La culminación de este trabajo de grado, simboliza el largo camino de aprendizaje que durante los últimos cinco años hemos recorrido bajo la guía de los profesores de la Universidad del Rosario y el apoyo incondicional de nuestros seres queridos.

Luisa

Mis más sinceros agradecimientos a mi madre, Jeannette Monsalve Sogamoso, por todo su esfuerzo y compromiso estos cinco años, por estar siempre presente en todas las etapas de mi vida, confiando en mis capacidades y alentándome a ser una excelente persona, hija y estudiante. Adicionalmente, por darme la oportunidad de llegar hasta donde estoy en este momento, sin su apoyo esto no habría sido posible.

Agradezco especialmente a mi tío Omar Monsalve, por ser mi modelo a seguir y la luz que siempre ha guiado mi vida, gracias por sus consejos y apoyo incondicional.

A Carolina, muchas gracias por brindarme su amor, apoyo y esa voz de aliento en este último año para no desfallecer, un año lleno de retos y nuevas experiencias enriquecedoras que son el inicio de una vida profesional.

Finalmente, agradezco a mis amigos, profesores y todas aquellas personas que de una u otra manera han formado parte de este logro, quienes con su guía, ejemplo y compañía han hecho de la Universidad una experiencia enriquecedora.

Paula

Agradezco especialmente a mis padres, Claudia Patricia Triana y José María Ruiz, por todo el amor, la colaboración, comprensión y el apoyo brindado a lo largo de estos años, ya que sin ello nada de esto habría sido posible. Además, les agradezco por brindarme la mejor educación y por enseñarme constantemente a ser una mejor hija, madre, estudiante y profesional. Son un gran ejemplo de vida.

A mi hija Ana María, por todo el amor y la compañía que me has brindado durante estos cinco años. Gracias por ser el motor de vida que me impulsa en todo momento.

Agradezco a Daniel por ser parte importante en mi vida, por apoyarme en todo momento, por todas las palabras de aliento y la confianza depositada en mi. Sobretudo su paciencia y por su amor incondicional.

Finalmente, agradezco a mis tías Magnolia y Liliana, a mi hermana Valeria, amigos, profesores y demás personas que han aportado de alguna manera han aportado a la consecución de este logro, quienes con sus enseñanzas, ejemplo y compañía han hecho de la Universidad una experiencia enriquecedora.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS	8
GLOSARIO	9
PALABRAS CLAVES.....	11
ABSTRACT.....	12
1. INTRODUCCIÓN	13
Planteamiento del Problema	14
Justificación	15
Objetivos	16
<i>Objetivo General</i>	16
Objetivos Específicos.....	16
Alcance y vinculación con el proyecto del profesor	17
2. MARCO TEÓRICO O METODOLÓGICO	18
2.1 Acerca del concepto de modelo	19
2.2 Categorización de los modelos	21
2.3 Los modelos matemáticos y el análisis de sensibilidad	23
2.4 La incertidumbre y los modelos.....	24
2.5 Evaluaciones empíricas vs. El análisis de sensibilidad	25
2.6 Contexto histórico del análisis de sensibilidad	26
2.7 Aproximaciones al análisis de sensibilidad.....	26
2.8 Propósitos del análisis de sensibilidad	28
2.9 La simulación computacional y el análisis de sensibilidad	30
2.10 Análisis Local vs. Global	31
3. ACERCA DEL MODELO (ANÁLISIS - PRESENTACIÓN DE RESULTADOS).....	33
3.1 Análisis de sensibilidad de una instancia simple del modelo	33
3.2 Modificación de la interpretación del modelo	41
4. DISCUSIÓN	44
4.1 Relación entre los errores en el modelo y el análisis de incertidumbre	44
4.2 Los errores y las incertidumbres en múltiples mediciones directas.....	47

CONCLUSIONES.....	50
BIBLIOGRAFÍA.....	52

TABLA DE FIGURAS

Figura 1: El modelamiento de acuerdo con Robert Rosen.	20
Figura 2: Inicialización de parámetros para los análisis de sensibilidad e incertidumbre.	22
Figura 3: Diagrama de dispersión de Y vs. P_i	39

GLOSARIO

Derivada: en metrología y análisis numérico, es una variación lenta en el tiempo de la salida de un instrumento de medida, independientemente del estímulo respectivo.

Error (de una medición): es la desviación del resultado de una medición del valor verdadero de la cantidad medida; el error se expresa en forma absoluta o relativa.

Error absoluto (de un instrumento de medición): es la diferencia entre el valor de la cantidad medida obtenida mediante el uso de un instrumento de medición y el valor real (todavía desconocido) de la cantidad medida.

Error condicional constante elemental (de una medición): es un error elemental, que tiene límites definidos y que varía en mediciones repetidas realizadas en las mismas condiciones o con diferentes instrumentos de medición del mismo tipo. Estos límites pueden ser calculados o estimados.

Error elemental constante: es un error que conserva el mismo valor en repetidas mediciones realizadas en las mismas condiciones. El valor de un error constante es desconocido, pero sus límites pueden ser estimados.

Error intrínseco: El error de un instrumento de medida, determinado en condiciones de referencia.

Error Primario (de una medición): es un componente de error o incertidumbre de una medición asociado con una única fuente de inexactitud de la medición.

Inexactitud (de una medición): es una característica cualitativa de la desviación de un resultado de la medición del valor verdadero de la cantidad medida.

Instrumento de medición: es un producto técnico con características metrológicas estandarizadas.

Medición combinada: Medición de varias cantidades de la misma clase, utilizando los resultados de combinaciones de mediciones directas.

Medición indirecta: una medición en la que el valor de la cantidad medida se calcula mediante el uso de mediciones de otras magnitudes que están conectadas a la cantidad medida por una relación conocida.

Medición: Es el conjunto de operaciones experimentales que se realizan con productos técnicos (instrumentos de medida) con el fin de encontrar el valor de una magnitud física.

Precisión de medida: Una expresión cualitativa de la cercanía del resultado de una medición y el valor real de la magnitud medida.

Precisión de un instrumento de medida: La capacidad de un instrumento de medición para producir mediciones cuyos resultados están cerca del valor real de la magnitud medida.

RESUMEN

Se presenta el análisis de sensibilidad de un modelo de percepción de marca y ajuste de la inversión en marketing desarrollado en el Laboratorio de Simulación de la Universidad del Rosario. Este trabajo de grado consta de una introducción al tema de análisis de sensibilidad y su complementario el análisis de incertidumbre. Se pasa a mostrar ambos análisis usando un ejemplo simple de aplicación del modelo mediante la aplicación exhaustiva y rigurosa de los pasos descritos en la primera parte. Luego se hace una discusión de la problemática de medición de magnitudes que prueba ser el factor más complejo de la aplicación del modelo en el contexto práctico y finalmente se dan conclusiones sobre los resultados de los análisis.

PALABRAS CLAVES

Análisis de Sensibilidad, Modelos Matemáticos, Análisis de Incertidumbre, Medición de Percepción, Percepción de Marca, Error, Simulación, Comportamiento.

ABSTRACT

A vity analysis of a brand perception and marketing investment adjustment model is presented. This model was developed in the Simulation Laboratory at the Rosario University. This work consists of an introduction to the topic of vity analysis and the complementary uncertainty analysis. It carries on to show the development of analyzes using a simple example of application of the model through comprehensive and rigorous implementation of the steps presented in the previous section. A discussion on the issue of measuring magnitudes, which was the most complex factor in the application of the model in the practical context. Finally, conclusions on the results of the analysis are given.

KEY WORDS

Sensitivity Analysis, Mathematical Models, Uncertainty Analysis, Measuring Perception, Brand Perception, Mistake, Simulation, Behavior.

1. INTRODUCCIÓN

En pocas palabras, un análisis de sensibilidad evalúa la importancia relativa de los factores de entrada de un modelo matemático. El análisis de sensibilidad fue desarrollado por los matemáticos con el objeto de medir y dar un significado a las tasas de cambio. Por ejemplo, para evaluar un portafolio de pensiones se necesita plantear un equilibrio entre los activos actuales y los pasivos futuros. Incluso si los activos y pasivos están balanceados a una tasa de interés específica, un pequeño cambio futuro introducido en la tasa puede modificar radicalmente la situación. Otros ejemplos de esta sensibilidad incluyen las cifras de desempleo, las cuales son modificadas por infinidad de variables de ámbitos muy variados; los modelos climáticos de una región particular que reciben influencias tanto de la misma región como de otras muy alejadas, y las redes de reacciones químicas como las que ocurren al interior de una célula.

Cuanto más grande es la derivada de una función matemática, más rápidamente crece la tasa de cambio asociada, pero un cambio significativo producido sobre una cantidad muy grande puede ser menos importante que un cambio insignificante sobre una cantidad muy pequeña. Así que una evaluación adecuada del problema que se está estudiando lleva al investigador a considerar tanto la derivada de la función como su valor. Una forma de hacer esta evaluación es usar la *duración modificada* de una función, que es el cambio relativo en su valor debido a un pequeño cambio de un valor actual. Este concepto está relacionado con la elasticidad de la función que describe cómo la pendiente varía en comparación con la pendiente de una función lineal.

Planteamiento del Problema

Debido a ajustes temporales que deben realizarse en la facultad para facilitar la realización de proyectos con entidades externas como las organizaciones en las que se podría aplicar la metodología que abordaría el presente trabajo, el problema de investigación se constituye en colaborar con una validación teórica del modelo con el objetivo de robustecerlo para el eventual caso de su aplicación en organizaciones del mundo real que se comprometan a retribuir económicamente por los resultados. De las pruebas que pueden hacerse al modelo y a su implementación se escogieron las de concepto para la metodología en sí, el análisis de sensibilidad para la experimentación y las pruebas de unidad para la simulación como herramienta de software.

Justificación

La justificación para realizar este trabajo se plantea a continuación: dada la imposibilidad del acercamiento a los potenciales sujetos de prueba para realizar pruebas prácticas y afinar las condiciones iniciales de la simulación que implementa la metodología de medición de percepción de marca se plantea una serie de pruebas teóricas que aunque no validan de manera completa el modelo, contribuyen a aumentar la confianza en el mismo a la hora de presentarlo como una alternativa viable para la consultoría dentro de la facultad.

Objetivos

Objetivo General

Desarrollar un marco de referencia para la realización de una serie de pruebas para el modelo de medición de percepción de marca desarrollado por el Laboratorio de Modelamiento y Simulación, medición que fue diseñada para desagregar los esfuerzos en marketing que emprende una empresa. Las pruebas que deben prepararse y llevarse a cabo son las pruebas de concepto y pruebas de unidad de los módulos del simulador que implementa el modelo. La prueba de concepto simplemente verifica el potencial de la metodología para usarse en consultoría. Las pruebas de unidad verifican una funcionalidad determinística y coherente para el software desarrollado.

Objetivos Específicos

- Desarrollar un análisis de sensibilidad para la simulación.
- Desarrollar un conjunto de situaciones y sus supuestos resultados para realizar una prueba de concepto.
- Redactar la documentación de la prueba de concepto.
- Descomponer el simulador que implementa el modelo en unidades que se pueden someter a pruebas.
- Desarrollar y documentar de las pruebas de unidad del software.

Alcance y vinculación con el proyecto del profesor

La investigación se realizó con el Laboratorio de Simulación de la Escuela de Administración con el fin de llevar a cabo un análisis de sensibilidad para un modelo de medición de percepción de marca basado en simulación computacional por agentes en dos puntos que se presentarán a continuación.

En primer lugar, debido a la falta de instancias empresariales en las cuales probar el modelo de manera oficial (con vigilancia y pleno conocimiento), se realizó una prueba teórica sobre la cual es posible justificar valores de confianza para los resultados del modelo.

En segundo lugar, con el respectivo análisis de la prueba teórica se abordan las pruebas de concepto (para el modelo en sí mismo) y las pruebas de unidad (para el software de simulación). Estas pruebas harán parte de la validación general del modelo y se espera que sirvan como insumo para las publicaciones relacionadas con el tema.

2. MARCO TEÓRICO O METODOLÓGICO

Con cierta frecuencia, en la práctica, los científicos e ingenieros se enfrentan a preguntas como: ¿Qué tan bien el modelo desarrollado representa los fenómenos subyacentes del mundo real? ¿Qué confianza proporcionan los resultados numéricos producidos por el modelo? ¿Son correctos estos resultados? ¿Hasta qué punto se pueden hacer predicciones (extrapolar) basadas en los resultados obtenidos?, y una vez encontrada esta respuesta, ¿Cómo podrían estos límites de predictibilidad y extrapolación ampliarse o mejorar? Tales preguntas son lógicas desde la perspectiva de un evaluador y fáciles de formular, pero resultan de cierta forma difíciles de responder cuantitativamente, es decir, de manera estricta desde el punto de vista matemático y desde la disciplina que estudia los fenómenos modelados.

Las respuestas a estas preguntas las proporciona el análisis de sensibilidad y el análisis de incertidumbre. Como el modelamiento y análisis de los procesos de una disciplina, en este caso del marketing, asistidos por computador han seguido creciendo y diversificándose, el análisis de sensibilidad se ha convertido en una herramienta científica de investigación indispensable.

Como los computadores ejecutan programas que representan modelos matemáticos de la realidad de una disciplina, los resultados calculados deben compararse con mediciones experimentales siempre que sea posible. Además de los costos asociados con esta labor, estas comparaciones invariablemente revelan discrepancias entre los resultados calculados y aquellos medidos. Las fuentes de tales discrepancias son errores de naturaleza inevitable, por un lado y por otro, las incertidumbres introducidas por las mediciones experimentales y por los respectivos modelos matemáticos. En la práctica, las formas *exactas* de los modelos matemáticos y los respectivos valores *exactos* de los datos no pueden ser conocidos, por lo cual su forma matemática debe ser estimada.

El uso de observaciones para estimar las características subyacentes a los modelos es uno de los objetivos de la estadística. Esta rama de las matemáticas abarca tanto el razonamiento inductivo como el deductivo (Witte & Witte, 2009), y a partir de ésta se dispone de procedimientos para la estimación de parámetros para un modelo para el cual se tiene un

conocimiento incompleto de la situación real y otros por medio de los cuales se puede refinar un conocimiento previo incorporando de manera sistemática información adicional. Por lo tanto, la evaluación y la posterior reducción de la incertidumbre en los modelos y los datos requieren el uso combinado de la estadística.

2.1 Acerca del concepto de modelo

Una perspectiva de la actividad llamada modelamiento que puede ayudar a ilustrar el papel del análisis de sensibilidad en el proceso científico se ofrece en la Figura 1. En el lado izquierdo del diagrama de Rosen se visualiza el ‘mundo real’ (N), que es el sistema que constituye el objeto de estudio una cierta investigación. El investigador tiene razones para creer que el sistema, ya sea natural o artificial, se rige por ciertas reglas, las cuales quieren descubrirse, para ser utilizadas en este u otros contextos. Para este propósito se plantea una hipótesis o se construye un conjunto de estructuras que van a ser el modelo (representado en el lado derecho de la figura: F). Por ejemplo, un hipotético mecanismo de crecimiento para una especie contenida en el mundo puede interpretarse como una ecuación diferencial de un modelo. Mientras que la población de la especie siga creciendo y muriendo de manera ordenada en el mundo, a causa de las leyes que rigen su propia causalidad sistémica (que la ciencia aspira a entender), la ecuación diferencial se puede resolver utilizando las reglas del cálculo infinitesimal. La intuición de Rosen es que mientras que las especies del mundo obedezcan las reglas, y que la ecuación diferencial en el modelo se rija por otras ‘reglas’, ya sean éstas formales o matemáticas, no existe ningún mecanismo que obligue a la ciencia a conducirse en cómo debe asignar las hipotéticas reglas del mundo sobre aquellas del modelo (Rosen, 1991).

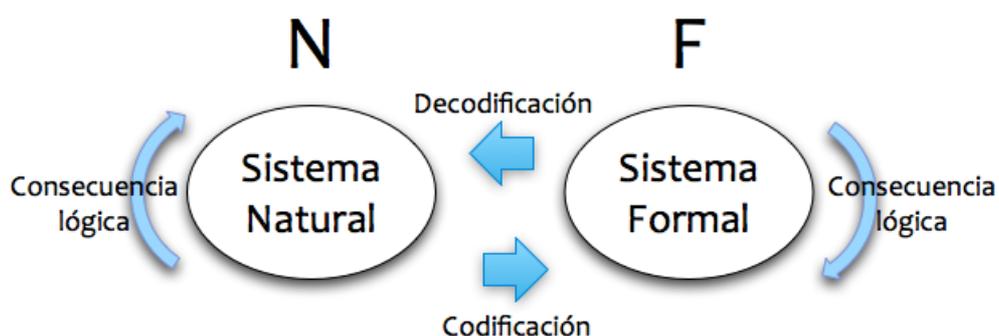


Figura 1: El modelamiento de acuerdo con Robert Rosen.

Fuente: reproducción de las autoras basada en (Rosen, 1991).

Según Rosen, mientras que el mundo y el modelo están cada uno, internamente supeditados a sus propias consecuencias lógicas (entailment), no existe ningún vínculo lógico entre el mundo y el modelo. Entre las razones que desembocan en esta paradoja está el hecho de que aquella parte del mundo representada por el modelo es un 'contenedor' arbitrario y cerrado de un sistema de otro modo natural y abierto, más aún, interconectado aunque el propósito del modelo sea aprender sobre las partes no observables del sistema.

Este es el caso en que el mundo es parte de un sistema natural, la principal preocupación de la investigación de Rosen. Sin embargo, la experiencia ha demostrado que, incluso cuando el mundo es de hecho un sistema bien definido y cerrado, por ejemplo, un dispositivo, diferentes instancias de modelamiento pueden generar diferentes descripciones no equivalentes del mismo, es decir, modelos cuyas salidas son compatibles con el mismo conjunto de observaciones, pero cuyas estructuras no son conciliables entre sí (Rosen, 1991).

Si bien esto puede ser molesto para una estudiante acostumbrada a la belleza y la aparente inmediatez de la aplicación de las leyes de la física, los profesionales en modelamiento han tenido que aprender a lidiar con la realidad bastante desagradable de que más de un modelo puede ser compatible con el mismo conjunto de datos o evidencia. Algunos han ido tan lejos como para acuñar una palabra para esta paradoja: equifinalidad (equifinality) (Beven 1992, 2001), que significa que diferentes modelos pueden conducir a una misma finalidad. Otros se refieren a este fenómeno como *indeterminación de los modelos*.

Desde tiempos de Galileo los científicos han tenido que hacer frente a la limitada capacidad de la mente humana para crear correspondencias útiles (maps) entre el 'mundo' y los 'modelos'. La aparición de "leyes" se puede ver en este contexto como un proceso 'doloroso' de simplificación, separación e identificación que conduce una realidad hacia un modelo de inusual simplicidad y belleza.

2.2 Categorización de los modelos

Como se mencionó más arriba, el análisis de sensibilidad implica modelos, entradas y salidas. La entrada del modelo se debe relacionar con la naturaleza y el propósito del modelo, así como con la escogencia de un tipo determinado de análisis de incertidumbre y de sensibilidad. En este sentido un modelo puede ser:

- De diagnóstico o pronóstico: En otras palabras, el investigador debe intentar distinguir entre modelos cuyo propósito es el de comprender una ley y aquellos utilizados para predecir el comportamiento de un sistema, dada una ley previamente entendida. Los modelos pueden por tanto variar desde aquellos que son puras especulaciones utilizados en juegos de 'qué pasaría si' (what-if games), como por ejemplo modelos propuestos en el contexto de la existencia de inteligencia extraterrestre; a modelos que pueden considerarse predictores exactos y confiables de un sistema (por ejemplo, un sistema de control para una planta química) o de una situación de misión crítica.
- Basados en Datos o basados en leyes: Un modelo basado en leyes intenta hacer encajar un conjunto de leyes previamente aceptado como válidas para un sistema, con el fin de predecir su comportamiento. Por ejemplo, un investigador puede usar las leyes de Darcy y Ficks para comprender el movimiento de un soluto en agua el cual fluye a través de un medio poroso.

En contraste, un modelo basado en datos intenta tratar el soluto como una señal y extraer de ésta sus propiedades usando la estadística. Los defensores de los modelos basados en datos prefieren señalar que éstos pueden ser contruidos para ser *parcos*, es decir, describen la realidad con un mínimo de parámetros de entrada (Young et al., 1996).

Los modelos basados en leyes, por el contrario, son habitualmente sobre parametrizados que pueden incluir una cantidad mayor de leyes relevantes al problema que aquella de datos disponibles. Por la misma razón, los modelos basados en leyes pueden tener una mayor capacidad para describir el sistema en circunstancias no observadas, mientras que los modelos basados en datos tienden a adherirse al

comportamiento asociado con los datos utilizados en su estimación. Los modelos estadísticos (como modelos jerárquicos o multinivel) son otro ejemplo de los modelos basados en datos.

Muchas otras categorizaciones de modelos son posibles, y la definición de entrada o parámetro depende de cada modelo en particular. Para el propósito de los análisis de sensibilidad y de incertidumbre se podría liberalmente clasificar como entrada todo aquello pueda conducir una variación en la salida del modelo. Puede considerarse el esquema de la figura 2. En ésta se visualizan observaciones (las cuales se asumen sin errores por simplicidad) para un modelo cuyos parámetros se estiman a partir de los datos. La estimación puede tomar diferentes cursos. Por lo general, ésta se logra minimizando (por ejemplo, por el método de *mínimos cuadrados*), una medida específica de distancia entre la predicción del modelo y los datos. Al final de la etapa de estimación, se conocen los ‘mejores’ valores para los parámetros, así como sus errores inherentes. En este punto se puede considerar el modelo como ‘apropiado’ y se procede a ejecutar un análisis de incertidumbre mediante la propagación de la incertidumbre en los parámetros a través de los cálculos que resuelven el modelo, hasta llegar a obtener las salidas.

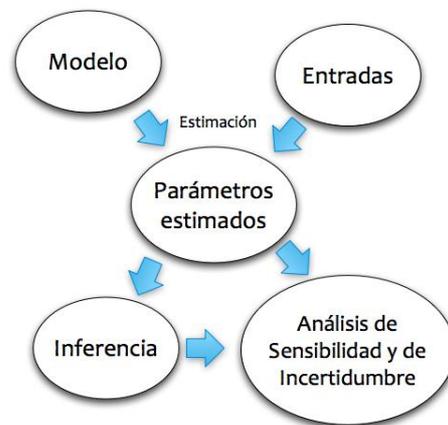


Figura 2: Inicialización de parámetros para los análisis de sensibilidad e incertidumbre.

Fuente: Reproducción y traducción de un original de Young et al. producido por las autoras.

2.3 Los modelos matemáticos y el análisis de sensibilidad

Un modelo matemático comprende desde cierto punto de vista, variables independientes, variables dependientes, y diversos tipos de relaciones entre estas cantidades, por ejemplo, ecuaciones, tablas de correspondencias entre valores, o aquellas relaciones temporales que se establecen entre los entes participantes en una simulación. Los modelos matemáticos también incluyen parámetros cuyos valores reales no se conocen con precisión, pero pueden variar dentro de unos rangos que reflejan nuestro conocimiento incompleto o incertidumbre con respecto a ellos. Estos parámetros van a determinar las condiciones iniciales que regirán el comportamiento de las demás variables una vez el modelo se desarrolla, como en el caso de una simulación, cuando esta se ejecuta en un computador.

Por otro lado, las sucesivas operaciones matemáticas necesarias para resolver el modelo y conocidas como *métodos numéricos* introducen errores numéricos al encontrar soluciones para las diversas ecuaciones o relaciones entre variables que componen el modelo. Los efectos de este tipo de errores y aquellos producidos por las variaciones de los parámetros deben ser cuantificados a fin de evaluar la validez y el alcance del modelo. Por otra parte, los efectos de la incertidumbre en los parámetros del modelo sobre la incertidumbre de los resultados calculados también deben ser cuantificados. En términos muy generales, el objetivo del análisis de sensibilidad es cuantificar los efectos de las variaciones de los parámetros en los resultados calculados. Del análisis de sensibilidad se pueden derivar conceptos relevantes a la hora de evaluar la pertinencia de un modelo tales como la influencia, la importancia relativa, los escalafones (rankings) y el *predominio* (dominance).

El objetivo de análisis de incertidumbre es evaluar los efectos de las incertidumbres de los parámetros sobre las incertidumbres en los resultados calculados o simulados. Los análisis de sensibilidad y de incertidumbre pueden ser considerados como los métodos formales con los cuales se realiza la evaluación de datos y de los modelos ya que están asociados con el cálculo de cantidades específicas que permiten evaluar la variabilidad en las cantidades de salida (los resultados de la solución del modelo) y la importancia relativa de las variables de entrada.

2.4 La incertidumbre y los modelos

Lo que hace ardua la actividad del modelamiento y en general, la investigación científica es la incertidumbre. Este fenómeno no es un accidente del método científico, sino que corresponde a su misma sustancia. Según Høeg: “Es precisamente esto lo que queremos decir con ‘ciencia’, que tanto las preguntas como las respuestas están ligadas a la incertidumbre, y que son actividades *dolorosas*. Pero no hay manera de evitarlo, que nada puede ocultarse, en cambio, todo es llevado a la luz” (Høeg, 1995).

Los científicos dedicados al modelamiento y los filósofos de la ciencia han debatido intensamente la cuestión de la equifinalidad o indeterminación de los modelos (Oreskes et al., 1994). La mayoría de estas personas probablemente estaría de acuerdo con que un modelo no se puede validar, en el sentido de su posibilidad de ‘ser tomado como verdadero’. Más bien, es menos debatible y correcto decir que un modelo ha sido corroborada ampliamente, significando con esto que el modelo ha sobrevivido a una serie de pruebas - ya sean formales, de consistencia interna, o en relación con la capacidad del mismo para explicar o predecir el ‘mundo’ de una manera convincente y parca (haciendo énfasis en el ahorro de cálculos y variables). Cuando un modelo fracasa públicamente, la controversia resultante puede ser devastadora para las partes científicas implicadas.

Los modelos se utilizan a menudo en contextos altamente polarizados y la incertidumbre puede resultar siendo usada de manera instrumental. Se puede decir que tanto los autores de un modelo como los que de algún modelo son árbitros de su veracidad deber referirse a la información del entorno, algunas veces de forma selectiva y otras incluso manipulándola. Una incertidumbre artificial es una preocupación común en relación con discusiones importantes en áreas como la salud o el medio ambiente (Michaels, 2005). En resumen, los modelos son parte del método científico y por lo tanto son sujetos de debate epistemológico.

Hay tres tipos de entornos para los cuales la producción científica puede diferenciarse en función de las incertidumbres del sistema y los intereses en juego. Aplicando esto al modelamiento, los diferentes entornos son:

- En la ciencia aplicada, cuando se construye y utiliza un modelo en el contexto de una organización cerrada de expertos que son los únicos usuarios del modelo, por

ejemplo, cuando se utiliza para resolver un problema de química en un laboratorio farmacéutico.

- En el contexto de la consultoría, cuando es más probable que el modelo sea juzgado, por ejemplo, como parte de un análisis de costo-beneficio para la construcción de una nueva carretera o un puente que afectará a una comunidad.
- Cuando la ciencia (y sus modelos) está llamada a aportar evidencia en circunstancias de conflictos de porcentajes o en el caso de desbancar o aportar pruebas en torno a una creencia.

Al igual que las teorías científicas, los modelos adquieren un historial que contribuye con los juicios sobre su calidad. Los historiales tienen en cuenta los contextos en los que se ha usado el modelo, la reputación de sus constructores y proponentes, el grado de aceptación por parte de pares y otros aspectos que puedan estar relacionados. En estos historiales, la calidad del modelo está más estrechamente asociada con una medida de ‘aptitud (fitness) para un propósito’, o con un propósito específico, más que con la estructura intrínseca al modelo.

2.5 Evaluaciones empíricas vs. El análisis de sensibilidad

Una de las formas de evaluar un modelo implica realizar los cálculos que resuelven el mismo con valores triviales para los parámetros, llamados valores nominales, también se realizan otros cálculos con combinaciones de parámetros para los que se espera se produzcan respuestas extremas en los valores de salida. Otros cálculos buscan diferencias en las salidas provenientes de diferencias en las entradas con el fin de obtener aproximaciones burdas de las derivadas de las variables de salida con respecto a los parámetros de entrada, y para producir *gráficas de dispersión* de las salidas vs las entradas.

Aunque estas tareas son útiles para la evaluación preliminar de un modelo, están lejos de ser adecuadas para proporcionar la comprensión integral necesaria para su uso en ambientes de producción en los cuales se requiere de un modelo fiable y lo más cercano posible a la realidad. La evaluación exhaustiva de un hipotético modelo y la revisión los datos asociados

se realizan usando manera sistemática análisis de sensibilidad de incertidumbre. Por lo tanto, el objetivo científico de estos análisis no es el de confirmar nociones preconcebidas, como sobre la importancia relativa de los parámetros de entrada, sino descubrir y cuantificar las características más importantes de los modelos que se estudian.

2.6 Contexto histórico del análisis de sensibilidad

Históricamente, ciertos aspectos limitados propios del análisis de sensibilidad aparecieron ya hace un siglo, en el contexto de estudios acerca de la influencia de los coeficientes de una ecuación diferencial en su solución. Durante mucho tiempo, sin embargo, estas consideraciones fueron simplemente de interés matemático. La primera metodología sistemática para la realización de análisis de sensibilidad fue formulada por Bode aplicada entonces en circuitos eléctricos lineales (Bode, 1945), (Iglesias, 2002). Posteriormente, el análisis de sensibilidad proporciona una motivación fundamental para el uso de la *retroalimentación*, lo que llevó al desarrollo de la teoría de control moderna, la que incluía los conceptos de optimización, síntesis, y adaptación. La introducción, a finales de los años 1950s de *métodos de estado-espacio* en la teoría de control, y el rápido desarrollo de los computadores digitales han creado las condiciones adecuadas para el establecimiento de una teoría de la sensibilidad como rama de la teoría de control y las *ciencias de la computación*. Paralelamente, y en su mayoría de forma independiente, las ideas del análisis de sensibilidad han permeado otros campos de actividades científicas y de ingeniería; avances notables en este sentido se han producido en las ciencias nucleares, atmosférica, geofísica, ciencias socio-económicas y biológicas.

2.7 Aproximaciones al análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad se puede realizar ya sea integral o parcialmente, considerando sólo un subconjunto de los parámetros. Dependiendo de las necesidades del usuario, existe diversidad de métodos para hacer análisis de sensibilidad, los cuales difieren en complejidad. Además, cada método tiene sus propias ventajas y desventajas específicas. Por lo tanto, el procedimiento más simple y común para evaluar los efectos de las variaciones de los

parámetros de un modelo se basa en volver a ejecutar el código (con parámetros distintos), y registrar los cambios correspondientes en los resultados o las salidas calculadas por el código. Los parámetros del modelo responsables de los mayores cambios relativos en una salida son considerados los más importantes para la salida respectiva. Para los modelos complejos, sin embargo, la gran cantidad de tiempo de cálculo necesario para realizar tales nuevos cálculos restringe severamente el alcance de este método de análisis de sensibilidad. En la práctica, por lo tanto, el usuario que utiliza este método puede investigar sólo unos pocos parámetros que defina como importantes *a priori*.

Otro método para el analizar las sensibilidades de las salidas con respecto a los parámetros es considerar modelos simplificados obtenidos mediante el desarrollo de aproximaciones de rápida ejecución de procesos complejos. Aunque este método hace que las sucesivas ejecuciones del modelo sean menos costosas, computacionalmente hablando. Los parámetros todavía tienen que ser seleccionados *a priori*, y, en consecuencia, ciertas sensibilidades importantes se pueden perder. Esta es una debilidad inherente a este método y además, es difícil demostrar que las respectivas sensibilidades de los modelos simplificados y aquellos complejos de los cuales provienen los primeros son las mismas.

Cuando las variaciones de los parámetros son pequeñas, es decir, si los intervalos en los cuales pueden variar son relativamente cortos, la manera tradicional para evaluar sus efectos en las respuestas calculadas es mediante el uso de la teoría de perturbaciones, pero un análisis de este tipo va más allá del alcance de este trabajo. Además, aunque la teoría de perturbaciones puede ser una herramienta valiosa en ciertos casos para realizar análisis de sensibilidad, debe tenerse en cuenta que los objetivos de la primera y aquellos del análisis de sensibilidad no coinciden, y ambos son disciplinas científicas distintas.

Para los modelos que implican un gran número de parámetros y comparativamente pocas respuestas, análisis de sensibilidad se puede realizar de manera muy eficiente mediante el uso de métodos *determinísticos* basados en funciones matemáticas llamadas *adjuntas*. El uso de estas funciones para analizar los efectos de las perturbaciones en un sistema lineal fue introducido por Wigner. Específicamente, se mostró que los efectos de perturbar las propiedades del material en un reactor nuclear de misión crítica pueden evaluarse de manera más eficiente utilizando una función adjunta que describía el flujo de neutrones. El trabajo original de Wigner con respecto a las ecuaciones de difusión y de transporte lineal de

neutrones sentó las bases para el desarrollo de una metodología determinística, integral y eficiente, para la realización de análisis de sensibilidad sistemáticos y análisis de incertidumbre de *valores propios* (Wigner, 1945).

A medida que la necesidad de análisis sistemáticos de sensibilidad e incertidumbre ganó reconocimiento, otros métodos adicionales fueron desarrollados, sobre todo los relacionados con aplicaciones en química, teoría de optimización, ciencias de la atmósfera, e ingeniería nuclear. Por ejemplo, los métodos de análisis de sensibilidad de llamado prueba de Sensibilidad de amplitud de Fourier (conocido como FAST por su nombre en inglés Fourier Amplitude vity Test) proporciona valores de medias estadísticas y las desviaciones estándar para las salidas de los modelos pero requiere de un gran número de cálculos (a pesar de sus siglas, no es una técnica muy rápida). En contraste con FAST, otros métodos como el llamado *método directo* y el de la función de Green son determinísticos, en lugar de estadísticos. El método directo es muy similar a los métodos de análisis de sensibilidad utilizados en teoría de control, e implica la derivación sucesiva de las ecuaciones que describen el modelo con respecto a un parámetro cada vez. El conjunto resultante de ecuaciones se resuelve para la derivada de todas las variables del modelo con respecto a cada parámetro. Por razones de la cantidad de cálculos involucrados, todos estos métodos implican un costo prohibitivo, computacionalmente hablando, para modelos no lineales de gran escala como el que se presenta más adelante, lo cual es poco apropiado para modelos con muchos parámetros, como son por lo general los encontrados en situaciones prácticas.

2.8 Propósitos del análisis de sensibilidad

Una vez se calculan, las sensibilidades se pueden usar para formular diversas conclusiones, como para establecer un ranking de los respectivos parámetros en orden de importancia en relación con la salida, para evaluar los cambios en las salidas debidos a las variaciones de los parámetros, para la realización de un análisis de incertidumbre, o para el ajuste de los datos internos o de entrada. Se hace necesario definir rigurosamente el concepto de sensibilidad y separar el cálculo de las sensibilidades de su posterior propósito, a fin de comparar claramente, para cada problema en particular, las ventajas y desventajas relativas de usar uno

u otro de los métodos determinísticos disponibles, métodos estadísticos, o los llamados *métodos de Monte Carlo*.

Aunque los cálculos numéricos que conducen a las sensibilidades se consideran generalmente como determinísticos, las salidas pueden ser consideradas como variables aleatorias, ya que las variables de entrada no son de conocidas de manera precisa o son inherentemente aleatorias. Por esta razón, además de los métodos determinísticos mencionados anteriormente para el análisis de sensibilidad, una variedad de técnicas estadísticas también se han desarrollado para la realización los análisis. La mayoría de estos métodos se conocen colectivamente como "métodos de respuesta de superficie" (Myers, 1971), y que implican los siguientes pasos básicos:

- (a) Seleccionar un pequeño número de parámetros del modelo que un experto puede juzgar como importantes;
- (b) Seleccionar "puntos de diseño", en el espacio generado por los parámetros del modelo. Para estos puntos se calculan las salidas de interés para el análisis de sensibilidad o de incertidumbre;
- (c) Se realizan nuevos cálculos de salidas utilizando valores alterados de los parámetros, en torno a los puntos de diseño seleccionados en (b) para los parámetros del modelo seleccionados en (a);
- (d) Usando las nuevas salidas obtenidas en (c) se construye una "superficie de respuesta", es decir, un modelo simplificado que representa aproximadamente el comportamiento de la respuesta como una función relativamente simple de los parámetros escogidos del modelo;
- (e) usando de la superficie de respuesta obtenida en (d) se reemplaza el modelo original para estudios estadísticos posteriores (por ejemplo, Monte Carlo) y para estimar las sensibilidades y distribuciones de probabilidad de las incertidumbre para las salidas (Myers, 1971).

2.9 La simulación computacional y el análisis de sensibilidad

La aplicación de métodos estadísticos para los análisis de sensibilidad e incertidumbre de los programas de computador que representan situaciones reales tiene la ventaja de ser conceptualmente sencilla y requiere relativamente poco trabajo de nuevo desarrollo de software. Sin embargo, a pesar de los progresos hacia la reducción del número de cálculos nuevos necesarios para construir las llamadas superficies de respuesta, los métodos estadísticos siguen siendo caros en términos de tiempos de ejecución en computador y relativamente limitados en su alcance, sobre todo debido a las siguientes consideraciones prácticas:

- (i) Cuando el número de parámetros del modelo es muy grande, sólo un pequeño subconjunto puede ser seleccionado para los análisis de sensibilidad y de incertidumbre;
- (ii) Se requiere de cierta información acerca de la importancia de los datos antes de iniciar el análisis, pero esta importancia de los datos es en gran parte desconocida, en realidad es parte de lo que se quiere conocer del modelo, por lo que existe una probabilidad considerable de que no se puedan observar efectos importantes;
- (iii) Las sensibilidades reales de los parámetros se pueden estimar, pero no se pueden calcular exactamente mediante el uso de superficies de respuesta.
- (iv) Por último, pero no menos importante, las sensibilidades y las incertidumbres de los parámetros no son entidades separadas, sino que actúan de manera conjunta en la producción de las superficies de respuesta. En consecuencia, si los rangos en los cuales se pueden mover las incertidumbres de los parámetros cambian por alguna razón, como en el caso de la obtención posterior de parámetros más precisos, la totalidad de la superficie de respuesta se debe calcular de nuevo, con todos los gastos computacionales que esta actividad implica. Del mismo modo, sería necesario calcular la superficie de respuesta que de nuevo si el modelo se mejora de alguna forma, puesto que los cambios en el modelo causarían que las salidas respectivas cambiaran.

2.10 Análisis Local vs. Global

El objetivo del análisis de sensibilidad *local* es descomponer el comportamiento de las salidas de un sistema a nivel local alrededor de un punto o trayectoria elegida en el llamado *espacio de fase* combinado de los parámetros y variables de estado del modelo. Las sensibilidades locales producen sólo los primeros momentos de la variación total de las salidas y éstos sólo serán válidos dentro de vecindades lo suficientemente pequeñas de los valores nominales de los parámetros de entrada respectivos.

Para el caso más simple, las sensibilidades locales son equivalentes a las derivadas parciales de primer orden de las ecuaciones que representan las salidas del sistema, siempre con respecto a los parámetros de entrada, calculadas sobre los valores nominales de los mismos. En principio, el ASAP (o Adjoint vity Analysis Procedure procedimiento adjunto de análisis de sensibilidad) podría extenderse para calcular la sensibilidad de segundo y otras de orden superior. Para problemas más prácticos, sin embargo, rara vez es computacionalmente eficiente calcular las sensibilidades de orden superior (por cualquier método), ya que las respectivas ecuaciones se vuelven cada vez más difíciles de resolver.

Dentro del procedimiento ASAP por ejemplo, el sistema complementario de cálculo de las derivadas necesario para calcular la sensibilidad de primer orden debe ser diseñado de manera independiente del valor de las perturbaciones de las entradas. De todas maneras, los sistemas adjuntos necesarios para calcular la sensibilidad de segundo y de orden superior dependen del valor de la perturbación y esta dependencia no se puede evitar. En consecuencia, el cálculo de las sensibilidades de segundo y de orden superior requeriría el diseño de cierto número de sistemas adjuntos.

Este hecho se pone en contraposición con las ventajas prácticas significativas de las que goza el ASAP para el cálculo de las sensibilidades de primer orden, en los que sólo un sistema adjunto debe ser resuelto para calcular cada respuesta. Además, incluso si todas las sensibilidades de segundo orden y de orden superior pudiesen ser calculadas, la información adicional obtenida durante el proceso, aquella que es proporcionada por las sensibilidades de primer orden sólo haría referencia a aspecto local de la función, en lugar del aspecto global que implicaría conocer el comportamiento de las salidas del sistema para la totalidad de los valores de los parámetros nominales. Esto es porque el respectivo operador de valor sólo

proporciona información local, más que global. En resumen, se puede observar que el cálculo de las sensibilidades de primer orden puede ofrecer un alto ratio de retribución por el esfuerzo del diseño del sistema adjunto y el cálculo computacional. Esta proporción se reduce drásticamente cuando se calculan sensibilidades de segundo orden y de orden superior.

En contraste, el objetivo del análisis de sensibilidad global se basa en el diseño de un marco conceptual y computacional para la totalidad de las posibles combinaciones de los parámetros de entrada utilizando un método global de derivación–integración (Wacker, 1978) para la determinación de características interesantes del problema representado por el modelo, características que de otro modo no serían obvias de observar, es decir, varios tipos de puntos críticos, sobre todo el espacio de las variaciones de los parámetros. Por otra parte, las dificultades de cálculo tales como la convergencia lenta, pequeños deltas o longitudes de paso, o incluso la falta de convergencia podrían ser eludidas mediante el uso de una “longitud del pseudo-arco” que no es más que la distancia a lo largo de una tangente local. El método emplea a una restricción escalar además a la aproximación a iteración básica, por lo que es posible “agrandar” el problema original en una dimensión superior.

Para calcular la ruta óptima de manera eficiente, es ventajoso utilizar el método de Rapson - Newton debido a su simplicidad y propiedades de convergencia superiores (cuadrática o, en el peor de los casos). Alternativamente, el delta o longitud de paso permanecerá constante en los puntos críticos si se usa el método de la secante lo cual garantizaría una convergencia rápida. Finalmente, el uso de otro algoritmo que determinase los puntos críticos y de primer orden de un modelo de parámetros no lineales y que use un paradigma agrupado que describa el comportamiento dinámico de un las ecuaciones del modelo puede ser una opción viable en entornos de computación por tiempo compartido o esquemas similares.

3. ACERCA DEL MODELO (ANÁLISIS - PRESENTACIÓN DE RESULTADOS)

3.1 Análisis de sensibilidad de una instancia simple del modelo

El modelo de percepción de marca (Mendoza et al., 2012) a estudiar se compone de un conjunto de núcleos de percepción o ejes temáticos de un tema o marca. Estos núcleos buscan influenciar a una población simulada de modo que se produzcan reacciones positivas hacia el tema o marca. Una forma de determinar la efectividad de los núcleos en generar estas acciones es determinando el nivel de afinidad que existe entre lo que se invierte de cada núcleo y su efecto sobre la población. En este sentido se puede plantear una simplificación del modelo original con el fin de estudiar esta inversión discriminada en los diferentes núcleos y llevada hacia los potenciales consumidores en el caso de una marca o por ejemplo a los votantes en el caso de un tema a introducir.

El modelo más simple se plantea como la sumatoria de las cardinalidades de las influencias de cada núcleo activo en el sistema asociadas con los costos individuales de producción y distribución de las mismas que no deben ser confundidos con aquellos propios de una hipotética empresa manufacturera:

$$Y = X_1P_1 + X_2P_2 + X_3P_3 \quad (3.1)$$

Donde Y es la inversión total en marketing de una empresa con tres núcleos de percepción diferentes dado en unidades monetarias que no especifica el modelo. X_1 , X_2 y X_3 son las cantidades de influencias generadas por cada núcleo, y P_1 , P_2 y P_3 las inversiones en unidades monetarias. Esto significa que cada P_i , $i = \{1, 2, 3\}$ se compone de más de un tipo de influencia, de forma que el valor medio de la permanencia de la inversión en el entorno de la simulación P_i es de cero unidades monetarias. Esta permanencia se define como el tiempo relativo que una influencia puede actuar sobre un agente perceptor. Por otro lado, la inversión en cada núcleo podría estar compuesta por sub inversiones más una cierta cantidad de gastos relacionados con la subyacente compensación por una hipotética exposición al riesgo de emitir un número inadecuado de influencias. Inicialmente se suponen X_1 , X_2 y X_3 como

constantes. También se suponen que un procedimiento de estimación por simulación de Monte Carlo ha generado las siguientes distribuciones para P_1 , P_2 y P_3 :

$$\begin{aligned} P_1 &\sim N(\bar{p}_1, \sigma_1), & \bar{p}_1 &= 0, & \sigma_1 &= 4 \\ P_2 &\sim N(\bar{p}_2, \sigma_2), & \bar{p}_2 &= 0, & \sigma_2 &= 2 \\ P_3 &\sim N(\bar{p}_3, \sigma_3), & \bar{p}_3 &= 0, & \sigma_3 &= 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Las inversiones P_i se suponen independientes por el momento. Como resultado de estos supuestos, Y también se distribuye normalmente con parámetros

$$\bar{y} = X_1\bar{p}_1 + X_2\bar{p}_2 + X_3\bar{p}_3 \quad (3.3)$$

$$\sigma_y = \sqrt{X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + X_3^2\sigma_3^2} \quad (3.4)$$

Se supone inicialmente que $X_1 < X_2 < X_3$, es decir, que se producen más de las influencias menos volátiles (pero esta suposición se puede cambiar más adelante). Un análisis de sensibilidad de este modelo debería mostrar resultados relacionados de la importancia relativa de los factores de incertidumbre de la Ecuación (3.1) en la determinación de la salida de interés Y , que es la inversión total en marketing.

Se debe hacer una primera aproximación al análisis de la misma forma que la mayoría de la literatura existente sobre análisis de sensibilidad, calculando las derivadas, es decir,

$$S_i^d = \frac{\partial Y}{\partial P_i} \text{ con } i \text{ en } \{1,2,3\} \quad (3.5)$$

donde se ha añadido el superíndice d para denotar que esta medida es, en principio, dimensionada. La derivada $\partial Y/\partial P_x$ no tiene de hecho dimensión, pero $\partial Y/\partial C_x$ estaría dada en unidades monetarias. Al calcular S_x^d para el modelo que se estudia, se obtiene:

$$S_i^d = X_i \text{ con } i \text{ en } \{1,2,3\} \quad (3.6)$$

Si se usa S_i^d como la medida canónica de sensibilidad, entonces el orden de importancia de los factores es $P_3 > P_2 > P_1$, basado en el supuesto de $X_1 < X_2 < X_3$. S_i^d proporciona pues el

aumento de la salida de interés Y por unidad de incremento en el factor P_i . En principio, podría surgir una falacia en este resultado: se tienen más elementos de inversión del tercer tipo (X_3) pero esta variable es la que tiene la menor volatilidad (tiene la menor desviación estándar, véase la ecuación (3.2)). Incluso si $\sigma_1 \gg \sigma_2$, ó σ_3 , la ecuación (3.6) aún indicaría P_3 como el factor más importante, dado que Y sería localmente más sensible a éste que a cualquiera de P_2 o P_1 .

En este momento las medidas locales de sensibilidad se deben normalizar por medio de una referencia o valor central. Si

$$y^0 = X_1 \bar{p}_1^0 + X_2 \bar{p}_2^0 + X_3 \bar{p}_3^0 \quad (3.7)$$

a continuación, se puede calcular

$$S_i^l = \frac{p_i^0}{y^0} \frac{\partial Y}{\partial P_i} \text{ con } i \text{ en } \{1,2,3\} \quad (3.8)$$

Aplicando esto al modelo, la ecuación (3.1), se obtiene:

$$S_i^l = X_i \frac{\partial Y}{\partial P_i} \quad (3.9)$$

En este caso, el orden de importancia de los factores depende del valor relativo de los valores C_i ponderados por los valores de referencia p_i^0 . El superíndice l en la ecuación anterior indica que este índice puede ser escrita como una relación logarítmica si la derivada se calcula en p_i^0 .

$$S_i^l = \frac{p_i^0}{y^0} \frac{\partial Y}{\partial P_i} \Big|_{y^0, p^i} = \frac{\partial \ln(Y)}{\partial \ln(P_i)} \Big|_{y^0, p^i} \quad (3.10)$$

S_i^l proporciona el aumento fraccional en Y que corresponde a un incremento fraccional unitario correspondiente en P_i . Se debe tener en cuenta que el punto de referencia P_1^0, P_2^0, P_3^0 podría hacerse coincidir con el vector de las medias $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$. De todas formas, aunque tal hecho no garantiza que $\bar{y} = Y(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$, a pesar de que este sea ahora el caso (Ecuación (3.3)). Como $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 = 0$ y $\bar{y} = 0$, S_i^l colapsa al ser idéntico a S_i^d .

De la misma forma, la magnitud S_i^l es insensible a las desviaciones estándar de los factores y definitivamente es una mejor medida de la importancia que aquella definida por S_x^d ya que carece de dimensión y está normalizada, pero ofrece poca orientación en cuanto a cómo la incertidumbre de Y depende de la incertidumbre de cada P_x .

Un primer paso en la dirección de caracterizar la incertidumbre de este modelo es hacer una normalización de las derivadas de las desviaciones estándar de los factores :

$$\begin{aligned}
 S_1^\sigma &= \frac{\sigma_s}{\sigma_y} \frac{\partial Y}{\partial P_1} = X_1 \frac{\sigma_1}{\sigma_y} \\
 S_2^\sigma &= \frac{\sigma_s}{\sigma_y} \frac{\partial Y}{\partial P_2} = X_2 \frac{\sigma_2}{\sigma_y} \\
 S_3^\sigma &= \frac{\sigma_s}{\sigma_y} \frac{\partial Y}{\partial P_3} = X_3 \frac{\sigma_3}{\sigma_y}
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

donde de nuevo los lados derechos de (3.11) se obtienen mediante la aplicación de la Ecuación (3.1). Debe tenerse en cuenta que S_i^d y S_i^l son verdaderamente de naturaleza local, ya que no necesitan ninguna suposición del rango de variación de cada factor. Ellos se pueden calcular numéricamente perturbando el factor de alrededor del valor base. A veces, estos valores se pueden calcular directamente a partir de la solución de una ecuación diferencial, o como en este caso mediante la introducción de conjuntos de instrucciones en una simulación existente que calcula Y de manera exclusiva. De manera contraria, S_i^σ necesita que se realicen supuestos sobre el rango de variación del factor, de modo que, aunque la derivada continúa siendo de naturaleza local, S_i^σ es una medida híbrida local y global.

Factor	$X_1, X_2, X_3 =$	$X_1, X_2, X_3 =$	$X_1, X_2, X_3 =$
	100, 500, 1000	300, 300, 300	500, 400, 1000
P_1	0,272	0,873	0,928
P_2	0,680	0,436	0,371
P_3	0,680	0,218	0,046

Tabla 1: Medidas de S_i^σ para el modelo de la ecuación 3.1 con valores distintos X_1, X_2 y X_3 .

También, cuando se usa S_i^σ , la importancia relativa de P_1 , P_2 , P_3 depende de las ponderaciones de X_1 , X_2 y X_3 (Tabla 1). Un resultado interesante relativo a los valores S_i^σ cuando se aplica al modelo de percepción viene de la propiedad del mismo expresada en $\sigma_y = \sqrt{X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + X_3^2 \sigma_3^2}$; al elevar ambos lados al cuadrado y dividiendo por σ_y^2 se obtiene:

$$1 = \frac{X_1^2 \sigma_1^2}{\sigma_y^2} + \frac{X_2^2 \sigma_2^2}{\sigma_y^2} + \frac{X_3^2 \sigma_3^2}{\sigma_y^2} \quad (3.12)$$

Comparando (3.12) con (3.11) se puede ver que para el modelo (3.1) el cuadrado de S_i^σ proporciona la cantidad en la que cada factor individual contribuye a la varianza de la salida de interés Y . Si se está tratando de evaluar qué tanto la incertidumbre en cada uno de los factores de entrada afectará la incertidumbre en la salida Y del modelo, y si se acepta que la varianza de Y es una buena medida de esta incertidumbre, entonces S_i^σ al cuadrado se constituye como una buena medida. Sin embargo se debe tener en cuenta que la relación mostrada no puede aplicarse de manera general; sólo es válida para este caso del modelo, y no para otros con una complejidad asociada con los ejes de percepción diferente.

Esto significa que se puede seguir utilizando S_i^σ si la estructura de los núcleos de percepción que ha de ser la entrada, tiene una estructura de dependencias (por ejemplo, en el caso en el que estén correlacionados dos o más componentes). Pero si el modelo se ajusta a una situación no lineal, ya no es cierto que S_i^σ cuadrado represente la fracción exacta de la varianza atribuible a cada factor.

Al usar S_i^σ se puede ver a partir de los datos de la Tabla 1 que para el caso de la igualdad de ponderaciones (= 300), el factor que más influye en la diferenciación de las inversiones en los distintos núcleos es el que tiene la más alta volatilidad, P_s . Esto reconcilia la medida de sensibilidad con las expectativas. Además, ahora se pone en práctica el análisis de sensibilidad. Por ejemplo, se puede utilizar la medida basada en S_i^σ para tomar decisiones acerca de la inversión por núcleo planteada en (3.1) de manera que la inversión Y es adecuadamente repartida entre los tres elementos que la componen.

Se plantea entonces que, a pesar de la simplicidad del modelo de percepción con los núcleos mencionados, se opta por hacer un experimento de Monte Carlo sobre el mismo, generando una matriz de muestras:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & p_3^{(1)} \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & p_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1^{(N)} & p_2^{(N)} & p_3^{(N)} \end{matrix} = [p_1, p_2, p_3] \quad (3.13)$$

\mathbf{M} se compone de N filas, cada fila pasa a ser un conjunto de prueba para el cálculo de Y . Los factores son independientes, así cada columna pueden generarse de forma independiente de las distribuciones marginales especificadas anteriormente en (3.2). Al hacer el cálculo de Y para cada fila de resultados en \mathbf{M} se obtiene el vector de salida \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \begin{matrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(N)} \end{matrix} \quad (3.14)$$

Un ejemplo de diagrama de dispersión (Y vs. P_i) obtenido con un experimento de Monte Carlo de 1000 puntos se muestra en la Figura 3. Al introducir tanto \mathbf{M} como \mathbf{y} en un software estadístico (en este caso R), se podría entonces obtener un análisis de regresión para Y . Este procedimiento devolverá un modelo de la forma

$$y^{(i)} = b_0 + b_1 p_1^{(i)} + b_2 p_2^{(i)} + b_3 p_3^{(i)} \quad (3.15)$$

donde las estimaciones de los valores de b_i del nuevo modelo se calculan en el software con un método numérico basado en mínimos cuadrados ordinarios. Al comparar (3.15) con (3.1) es fácil ver que si N es mayor que 3, el número de núcleos de percepción, entonces $b_0 = 0$, $b_i = X_i$, con i en $\{1,2,3\}$.

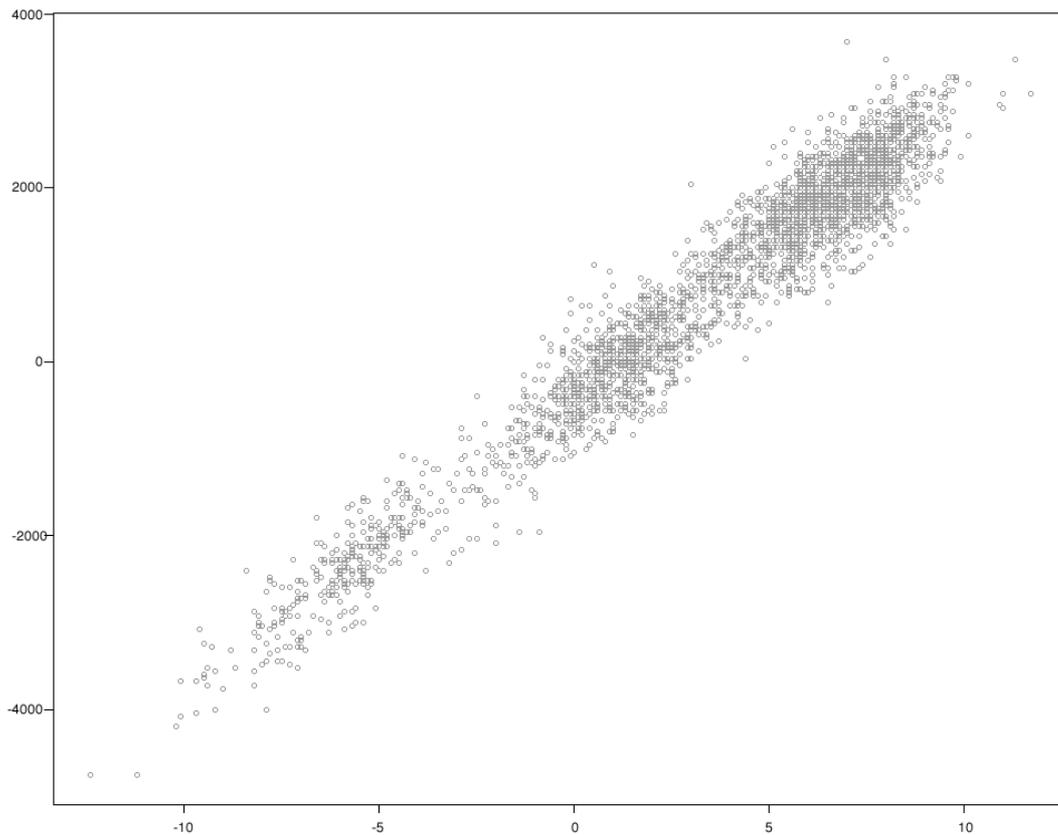


Figura 3: Diagrama de dispersión de Y vs. P_i

Para el modelo expresado en (3.1) con $X_1 = X_2 = X_3 = 300$. El gráfico de dispersión es de $N = 1000$ puntos. Fuente: las autoras.

Normalmente no se usan los coeficientes b_i para estos análisis de sensibilidad ya que estos poseen dimensión. La práctica común es calcular los coeficientes de regresión estandarizados (SRC), definidos como

$$\beta_i = b_i \sigma_i / \sigma_y \quad (3.16)$$

Estos proporcionan un modelo de regresión en términos de las variables estandarizadas

$$\tilde{y} = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad \tilde{p}_x = \frac{p_i - \bar{p}_i}{\sigma_i} \quad (3.17)$$

es decir

$$\tilde{y} = \frac{\hat{y} - \bar{y}}{\sigma_y} = \sum_{i=1,2,3} \beta_i \frac{\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}_i}{\sigma_i} = \sum_{i=1,2,3} \beta_i \tilde{\mathbf{p}}_i \quad (3.18)$$

donde \hat{y} es el vector de predicciones de los modelos de regresión. La ecuación (3.16) propone que los valores de β_i (coeficientes de regresión estandarizados) para el modelo de percepción son iguales a $X_i\sigma_i/\sigma_y$ y por lo tanto para los modelos lineales $\beta_i = S_i^\sigma$ debido a las implicaciones derivadas de (3.11). Como resultado, los valores distintos de β_i también se pueden observar en la Tabla 1.

Ahora se puede tratar de generalizar los resultados presentados de la siguiente manera: para los casos en los que el modelo posea relaciones lineales entre núcleos compuestos por factores independientes, los SRC al cuadrado y S_i^σ proporcionarán la fracción de la varianza del modelo debido a cada factor.

Para los coeficientes de regresión estandarizados, estos resultados se pueden extender aún más al caso de los modelo con entradas no lineales de la siguiente manera. La calidad de la regresión puede ser evaluada por el coeficiente modelo de determinación R_Y^2 . Este coeficiente puede escribirse como

$$R_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}^{(i)} - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^N (y^{(i)} - \bar{y})^2} \quad (3.19)$$

donde $\hat{y}^{(i)}$ es la predicción del modelo de regresión. $R_y^2 \in [0, 1]$ representa la fracción de la varianza de salida del modelo explicada por el modelo de regresión. Los valores β_i indican cómo esta fracción de la varianza de salida se puede descomponer según los factores de entrada, lo cual no explica el resto de modelo, que se relaciona con la parte no lineal del mismo. En el caso del modelo lineal (3.1), obviamente, $R_y^2 = 1$.

Los valores de β_i son un avance con respecto a aquellos que representan S_i^σ ; los primeros siempre pueden ser calculados, incluso para casos del modelo con entradas no lineales, o para el caso de la implementación del modelo sin representación analítica (por ejemplo, la simulación que calcula Y). Además, los β_i , a diferencia de la S_i^σ , ofrecen una medida de la sensibilidad que es promediada de forma multidimensional. Mientras que S_i^σ corresponde a

una variación del factor i y todos los demás factores se mantienen constantes, el cálculo a través de β_i ofrece una medida del efecto de i que es promediada sobre un conjunto de posibles valores de los otros factores, por ejemplo, este es el caso de la matriz de muestras (3.13). Esto no representa ninguna diferencia para un modelo lineal, pero sí lo hace para modelos no lineales.

Aunque que es computacionalmente simple calcular los coeficientes de regresión estandarizados, y que la descomponer la varianza de la salida de interés es una forma aceptada de hacer el análisis, no es viable utilizar definitivamente los β_i para la evaluación de la importancia relativa de las entradas. Esto se debe a que R^2_Y puede ser demasiado pequeño para calcularlo eficientemente con la simulación, como por ejemplo, en el caso de los modelos con entradas no monótonas.

3.2 Modificación de la interpretación del modelo

Si se asume que la salida de interés ya no es Y sino su valor absoluto, en el contexto del ejemplo de estudio, esto implicaría la desviación de la interpretación del modelo del concepto de la inversión al riesgo. Este es un ejemplo de un modelo no monótono, donde la relación funcional entre uno o todos factores de entrada y la salida es no monótona. Para este caso del modelo, el análisis de sensibilidad basado en SRC falla.

Una de las formas de rescatar el concepto de la descomposición de la varianza de Y en componentes que correspondan a los factores de entrada, incluso para modelos no monótonos se usa a continuación para utilizar los cálculos de la sección anterior. Se debe tener una idea a priori de la estabilidad del modelo en términos de la variación de las salidas frente a perturbaciones pequeñas en las entradas, siempre conociendo bien los rangos en los cuales éstas últimas se pueden mover de modo que sería útil tener una estrategia de descomposición de la varianza más robusta que funcione, sea cual fuere el grado de qué tan monótono es el modelo. Estas estrategias se refieren a veces como “independientes del modelo”.

Una de estas estrategias es computacionalmente viable de alcanzar. Se inicia con un planteamiento simple. Si se pudiese eliminar la incertidumbre en uno de los P_i , lo que lo

convertiría en una constante, cuál sería el efecto de esta reducción en la varianza de Y ? Pero para ciertos casos fijar un factor en realidad podría incrementar la varianza en lugar de reducirla. Depende del valor específico en el cual se fija P_i .

El problema se plantea de la siguiente forma: ¿cómo cambia la varianza $V_y = \sigma_y^2$ si se puede fijar un factor genérico P_i en su valor medio? Esto se mide por $V(Y|P_i = \bar{p}_i)$, teniendo en cuenta que el operador varianza significa en este caso que manteniendo, por ejemplo, P_3 fijo en el valor \bar{p}_3 se debe integrar sobre P_1 y P_2 .

$$V(Y|\bar{P}_3 = \bar{p}_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\bar{p}_1, \sigma_1) N(\bar{p}_2, \sigma_1) [(X_1 P_1 + X_2 P_2 + X_3 \bar{p}_3) - (X_1 \bar{p}_1 + X_2 \bar{p}_2 + X_3 \bar{p}_3)]^2 dP_1 dP_2 \quad (3.20)$$

En la práctica, junto al problema ya se ha mencionado en el que $V(Y|P_i = \bar{p}_i)$ puede ser más grande que V_y , existe el problema práctico que en la mayoría de los casos no se sabe cuál es el valor apropiado para fijar un factor. Este valor puede ser el valor de la situación verdadera, que es desconocido en la etapa de simulación.

Debe entonces promediarse la medida mencionada de $V(Y|P_i = \bar{p}_i)$ sobre todos los valores posibles de P_i , resultando $E(V(Y|P_i))$. Debe notarse que para el caso de por ejemplo, $i = 3$, se pudo haber escrito $E_3(V_{1,2}(Y|P_3))$ para dejar claro que el operador promedio es mayor que P_i y el operador de varianza es mayor que P_1 y que P_2 . Normalmente, para un modelo con k factores de entrada, se escribe $E(V(Y|W_k))$ entendiendo que V es mayor que \mathbf{X}_{-j} (que es el vector $a(k - 1)$ dimensional de todos los factores, excepto X_j).

$E(V(Y|P_i))$ es una buena medida a utilizar para decidir qué tan influyente es P_i . Cuanto menor es el $E(V(Y|P_i))$, el factor P_i es más influyente. Como se tiene que

$$V_y = E(V(Y|P_i)) + V(E(Y|P_i)) \quad (3.21)$$

es decir, los dos sumandos complementan la varianza total e incondicional. Por lo general $V(E(Y|P_i))$ se llama el “efecto principal” de P_i en Y , y $E(V(Y|P_i))$ el residual. Dado que

$V(E(Y|P_i))$ es una cantidad considerable si P_i es influyente, su proporción con respecto a V_y se utiliza como una medida de la sensibilidad, es decir,

$$S_x = V(E(Y|P_i))/V_y \quad (3.22)$$

S_x se escala en el intervalo $[0, 1]$ y se le conoce con diferentes nombres en la literatura: medida de importancia, índice de sensibilidad, radio de correlación o efecto de primer orden. Se puede siempre calcular, incluso para modelos no con alta variabilidad relativa, siempre y cuando existan las integrales asociadas. De hecho, si se tienen los recursos computacionales para calcular las integrales relativas en la ecuación (3.20) para el modelo de percepción, se encontrará que $S_x = (S_i^\sigma)^2 = \beta_i^2$, es decir, hay una correspondencia uno a uno entre el S_i^σ al cuadrado, los coeficientes de regresión estandarizados al cuadrado y S_x para los casos del modelo con entradas independientes lineales. Por lo tanto todo lo que se debe hacer para obtener los valores de S_x para el modelo de percepción planteado en (3.1) es elevar al cuadrado los valores de la Tabla 1.

Una propiedad de los valores S_x cuando se aplica al modelo de percepción es que, para cualquier combinación de X_1, X_2, X_3 , la suma de los tres índices S_1, S_2, S_3 es 1, como se puede comprobar fácilmente (Tabla 2). Esto es un resultado típico, ya que lo mismo puede decirse para β_i^2 cuando se aplica a este modelo tan simple. Sin embargo, la clase de modelos para los que esta propiedad de los valores S_x aplica es mucho más amplio (en la práctica, son todos aquellos modelos conocidos como aditivos). Un modelo $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ es aditivo si f se puede descomponer como una suma de k funciones f_i , cada una de las cuales es función sólo del factor relativo X_i .

Factor	$X_1, X_2, X_3 =$	$X_1, X_2, X_3 =$	$X_1, X_2, X_3 =$
	100, 500, 1000	300, 300, 300	500, 400, 1000
P_1	0,074	0,762	0,860
P_2	0,46	0,190	0,138
P_3	0,463	0,048	0,002

Tabla 1.2 Medidas de S_x para modelar Y y diferentes valores de X_1, X_2, X_3 (valores analíticos).

S_x es una buena medida de sensibilidad para estrategias independientes del modelo, y siempre proporcionan una esperada reducción en la varianza de la salida que se obtendría en otro caso únicamente si se pudiera modificar un factor individual.

4. DISCUSIÓN

Se aborda una discusión acerca de los errores en las estimaciones de los valores de las entradas.

4.1 Relación entre los errores en el modelo y el análisis de incertidumbre

La propagación de errores a lo largo del cálculo de un modelo constituye una forma sistemática de aparición de incertidumbres no solo en las salidas sino también a partir las incertidumbres o de las aproximaciones numéricas de las mediciones usadas como parámetros que entran en el respectivo modelo matemático o computacional. Las ecuaciones de “propagación de errores” combinan de manera sistemática y coherente los errores provenientes de los parámetros con la sensibilidad de las salidas correspondientes a los anteriores, proporcionando así un enlace que relaciona los objetivos del análisis de la incertidumbre con aquellos del análisis de sensibilidad.

Una *medición* es una propiedad de los fenómenos, cuerpos o sustancias que debe ser definida cualitativa y expresada cuantitativamente. Las mediciones también se llaman cantidades físicas. La término *cantidad* se utiliza tanto en un sentido general, cuando se refiere a las propiedades generales de los objetos (por ejemplo su longitud, masa, temperatura, capacitancia eléctrica, etc.), y en otro sentido particular, cuando se refiere a las propiedades de un objeto específico (por ejemplo, la longitud de una carretera dada, la resistencia eléctrica de un segmento dado de alambre, etc.).

Medir es el proceso de encontrar el valor de una magnitud física experimentalmente con la ayuda de dispositivos especiales llamados instrumentos de medición. El resultado de una medición es un valor numérico, junto con una unidad correspondiente, los cuales se asignan una cantidad física. Una medición tiene tres características:

- (1) El resultado de una medición debe ser siempre un número expresado en unidades de medición aprobadas o sancionadas. El propósito de una medición es representar una propiedad de un objeto a través de un número.
- (2) Una medición se realiza siempre con la ayuda de un instrumento de medida; esta acción es imposible de otro modo.
- (3) Una medición es siempre un procedimiento experimental.

Además, si el valor verdadero de una magnitud medible se conociera, reflejaría tanto cualitativa como cuantitativamente, una propiedad correspondiente al objeto. La teoría de la medición se basa en los siguientes postulados:

- (1) El valor verdadero de la cantidad a medir existe.
- (2) El valor verdadero de la cantidad mensurable es constante (con relación a las condiciones de la medición).
- (3) El valor verdadero no se puede encontrar.

Dado que los instrumentos de medida son imperfectos, y como cada acción de la cual se obtiene una medida es un procedimiento experimental, los resultados de las mediciones no pueden ser absolutamente precisos. Esta imperfección inevitable se conoce generalmente como imprecisión en la medición, y es cuantitativamente caracterizado por los diferentes tipos de errores que pueden aparecer en el proceso de medición. Por lo tanto, el resultado de cualquier medición siempre contiene un error, que se refleja por la desviación del resultado de la medición del valor verdadero de la cantidad mensurable.

La exactitud de cualquier medición particular está determinada no sólo por la precisión de los instrumentos empleados, sino también por el método de medición que se escogió y por la habilidad del experimentador. Sin embargo, ya que el verdadero valor de una magnitud es siempre desconocido, los errores de medición deben ser estimados teóricamente, a través de cálculos, usando una variedad de métodos, cada uno con su propio grado de precisión.

A priori, el error de una sola medición puede ser tanto sistemático como aleatorio; sin embargo, después de que la medición se ha realizado, el error de medición adquiere una naturaleza sistemática para esa medición particular. Esto se debe a que el resultado de una medición tiene un valor numérico definido, y la diferencia entre éste y el valor verdadero de la cantidad medida es una constante. Incluso si la totalidad del error en una medición tuviese un origen aleatorio, el error se congela después de que se obtiene el resultado de la medición. Por lo tanto, el error pierde su carácter aleatorio y se convierte en sistemático. Cada uno de los tres componentes de una medición, a saber, el método de medición, el instrumento de medida, y el experimentador pueden ser fuentes de errores sistemáticos.

Los errores sistemáticos *metodológicos* surgen de las imperfecciones en los métodos de medición y de la precisión limitada de las fórmulas utilizadas para modelar los fenómenos que se pretenden caracterizar. La influencia del instrumento de medida en el objeto cuya propiedad se está midiendo puede causar también un error metodológico. El error debido a la definición de un umbral de discrepancia entre un modelo y el objeto es también causa de un error metodológico. Los errores sistemáticos *instrumentales* son aquellos causados por las imperfecciones del instrumento de medida, por ejemplo la calibración imprecisa de la escala del instrumento.

Existen otros errores llamados de configuración que se producen por el orden en el cual se disponen los instrumentos de medición, y por los efectos de un instrumento sobre otro. Desde cierto punto de vista éstos son también errores instrumentales. Los errores humanos pueden ser sistemáticos si se relacionan con las características individuales del observador, como por ejemplo una forma particular de usar un instrumento.

Un error sistemático que se mantiene constante y por lo tanto se repite en cada observación o medición se denomina un error sistemático constante; por ejemplo, un error de este tipo estará presente en las mediciones realizadas utilizando balanzas, resistencias, etc. Los errores humanos causados por personal experimentado también pueden ser clasificados como constantes (sin embargo, los errores humanos causados por personal sin experiencia, se consideran aleatorios). Errores que aumentan o disminuyen en todo el tiempo de medición se llaman progresando errores. Los errores que varían en tiempos definidos se llaman errores periódicos.

Es muy difícil identificar los errores sistemáticos; por ejemplo, los errores sistemáticos *variables* pueden ser aislados mediante el uso de métodos estadísticos, correlación y análisis de regresión. También se pueden identificar mediante la medición de la misma cantidad usando dos instrumentos diferentes (métodos) o midiendo periódicamente una cantidad conocida (en lugar de una incógnita cada vez). Si se ha identificado un error sistemático, entonces puede generalmente ser estimado y eliminado. Sin embargo, la realización de una estimación racional de la magnitud de un error sistemático residual y, en particular, la asignación de niveles de confianza consistentes para estos errores residuales es una tarea extremadamente difícil. Por lo tanto, en la práctica, se supone que los errores sistemáticos residuales siguen una distribución uniforme continua, dentro de rangos que se estiman de forma conservadora con base en la experiencia y la opinión de expertos.

4.2 Los errores y las incertidumbres en múltiples mediciones directas

Suele ser necesario realizar múltiples mediciones directas para obtener un valor medio de algún parámetro de un modelo en las siguientes situaciones:

- Reducir los efectos de los errores aleatorios asociados con los instrumentos de medición.
- Investigar un fenómeno nuevo o determinar las relaciones entre las magnitudes que caracterizan un fenómeno y las conexiones con otras magnitudes físicas asociadas
- En el desarrollo de nuevos instrumentos de medición.

Bajo ciertas restricciones que se deben aplicar sobre los datos de medición, la estadística proporciona medios para analizar las observaciones y estimar errores de medición a partir de múltiples mediciones. Por lo tanto, múltiples mediciones directas que estén libres de errores sistemáticos (es decir, mediciones en las que sólo se producen errores aleatorios) pueden analizarse directamente por métodos estadísticos, sin consideraciones adicionales.

Sin embargo, en muchas situaciones prácticas, no se cumplen en su totalidad las restricciones matemáticas requeridas por la estadística, por lo tanto, a menudo es necesario desarrollar métodos prácticos para el análisis de tales situaciones individualmente. Cuando el carácter

aleatorio de los resultados de las observaciones es causado por errores de medición, se supone que las respectivas observaciones tienen una distribución normal.

Los pasos típicos que se requieren para la estimación de la incertidumbre en mediciones directas se resumen a continuación:

1. Analizar el problema para establecer el propósito de la medición y la precisión requerida. Construir un sub-modelo para el parámetro a medir, teniendo en cuenta las cantidades físicas que caracterizan el entorno y que podrían llegar a afectar la magnitud del parámetro medido. Luego se determina la forma en la cual las cantidades se van a medir si el procedimiento aún no se ha realizado (o cómo se midieron, si la medida ya se hizo); en particular, se estiman los valores nominales y un rango de variación.
2. Establecer las propiedades *metrológicas* importantes de los instrumentos de medición elegidos o utilizados para la medición.
3. Hacer una lista de todos los posibles errores que pudiesen surgir en la medida dada y estimar sus límites.
4. Siempre que sea posible, obtener estimaciones puntuales, en particular para los errores elementales, con el fin de corregirlos. Para cada corrección que así se introduzca, estimar sus límites de precisión y añadir estos límites a la lista de errores.
5. Evaluar las dependencias entre los errores. Por ejemplo, si dos errores δ_1 y δ_2 (que surgen de dos causas distintas), dependen de una tercera cantidad física, entonces δ_1 y δ_2 dependen el uno del otro. Para eliminar esta dependencia, a menudo es suficiente con introducir un nuevo error elemental que refleje el efecto de la tercera cantidad en el resultado de la medición. En consecuencia, los errores original dependientes, δ_1 y δ_2 , serán sustituidos por dos nuevos errores elementales, δ'_1 y δ'_2 que pueden ser considerados como independientes el uno del otro.
6. Dividir todos los errores elementales en errores constantes condicionales y absolutos, y destacar aquellos cuyos límites sean asimétricos con relación al resultado de la medición.

7. Para múltiples mediciones, determinar si el error correspondiente es aleatorio o pseudo aleatorio, y estimar los límites de confianza respectivos.
8. Estimar el cambio posible en el error intrínseco de los instrumentos durante el período de tiempo transcurrido desde la última calibración. Si hay razones para suponer que el error intrínseco pudo haber superado los valores permisibles, entonces los respectivos instrumentos deben ser verificados antes de realizar la medición y, si es necesario, deben ser ajustados o recalibrados.
9. El resultado de una única medición se obtiene a menudo directamente de una lectura del instrumento de medición. En otros casos, sin embargo, la lectura debe ser multiplicada por un factor de escala o corregida.
10. El resultado de las mediciones múltiples se obtiene de la media aritmética de los resultados de las mediciones de los componentes, a menos que la definición de la cantidad medida requiera que se utilice un algoritmo diferente.
11. Una estimación a priori de un error o de una incertidumbre se hace generalmente para el caso más desfavorable. Por ejemplo, si se planea una medición múltiple, entonces el valor de la desviación estándar se calcula a menudo con base en recomendaciones de los expertos.
12. Se realiza una estimación a posteriori del error o la incertidumbre, con el intervalo de confianza respectivo.
13. Presentar los resultados de la medición junto con sus incertidumbres o errores.

CONCLUSIONES

Como conclusiones del modelo planteado por la ecuación (3.1) se puede empezar por anotar la importancia del análisis matemático realizado para este caso específico y aunque se proporcionan los datos intermedios de las estrategias de cálculo para llegar a las medidas de S_i , S_i^t , es relativamente fácil entender cómo estos cálculos se pueden realizar en principio. Después de todo, una varianza es una integral. Por lo tanto, queda claro que bajo los supuestos mencionados en el planteamiento del modelo que:

1. El modelo no es tan excesivamente costoso en términos computacionales ya que puede asumir el tiempo empleado por las simulaciones de Monte Carlo incluidas.
2. Se tiene una función objetivo escalar Y con una varianza adecuada que es el descriptor de interés.

Entonces

3. El uso de medidas basadas en la varianza ofrecen una estrategia coherente para la descomposición de la varianza original de Y .
4. La estrategia es adecuada en el sentido en que se puede decidir si se agrupan los factores para el análisis y la forma de hacerlo.
5. Esta estrategia es independiente del modelo, es decir que también funciona para casos del modelo en los que la entrada sea no monótona, por resultados excepcionales no aditivos de Y . La estrategia converge a estadísticas que están dentro de los supuestos de un experto en marketing tales como la regresión cuadrática estandarizada con coeficientes β_x^2 para el modelo con entradas relacionadas linealmente.
6. La estrategia sigue siendo significativa para el caso en que los factores de entrada son no ortogonales.

7. La estrategia se puede prestar a interpretaciones intuitivas de análisis, como por ejemplo aquellas propuestas en términos de variaciones marginales de la inversión en rangos superiores e inferiores, o en términos de la priorización de los recursos de inversión en núcleos de percepción diferentes para reducir la incertidumbre de los componentes de núcleo más influyentes o en términos de fijación de los componentes no influyentes.

BIBLIOGRAFÍA

Beven, K. J. and Binley, A. M. (1992) The future of distributed models: model calibration and uncertainty prediction. *Hydrol. Process.* 6, 279–298.

Beven, K. J. (2001) *Rainfall-Runoff Modelling: The Primer*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester.

Bode, H. W. (1945). *Network analysis and feedback amplifier design*. Malabar, FL: R. E. Krieger Pub. Co.

Deif, A. (1986). *vity Analysis in Linear Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Dontchev, A. L. (1983). *Perturbations , Approximations and vity Analysis of Optimal Control Systems*. (E. A. V Balakrishnan & M. Thoma, Eds.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Gal, T., & Greenberg, H. J. (1997). *Advances in vity Analysis and Parametric Programming*. (T. Gal & H. J. Greenberg, Eds.). New York, NY: Springer Science+Business Media, LLC.

Høeg, P. (1995) *Borderliners*. McClelland-Bantam, Toronto. p. 19.

Iglesias, P. A. (2002). Logarithmic integrals and system dynamics: an analogue of Bode's vity integral for continuous-time, time-varying systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 343-344, 451–471.

Mendoza I. A., Moreno J., Peña J. I.(2012). *Medición de la Percepción de Marca con Dinámica de Sistemas*. X Congreso Latinoamericano de Dinámica de Sistemas. Buenos Aires, Argentina. ISBN: 978-987-519-148-8.

Michaels, D. (2005, June). Doubt is their product. *Scientific American* 292(6).

Myers, R. H. (1971). *Response surface methodology*. Boston, MA: Allyn & Bacon.

Oreskes, N., Shrader-Frechette, K. and Belitz, K. (1994) Verification, validation, and confirmation of numerical models in the earth sciences. *Science* 263, 641–646.

Ríos Insua, D. (1990). *vity Analysis in Multi-objective Decision Making* (Vol. 347). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Rosen, R. (1991). *Life Itself – a Comprehensive Inquiry into Nature, Origin, and Fabrication of Life*. Columbia University Press.

Saltelli, A., Tarantola, S., Campolongo, F., & Ratto, M. (2004). *vity Analysis in Practice (A Guide to Assessing Scientific Models)*. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd.

Stanley, L. G., & Stewart, D. L. (2002). *Design vity Analysis*. Philadelphia, PA: SIAM.

Wigner, E. P. (1945). Effects of Small Perturbations on Pile Period. In B. R. Judd, G. W. Mackey, & J. Mehra (Eds.), *The Collected Works of Eugene Paul Wigner* (pp. 540–552). Berlin, Heidelberg: Springer.

Wacker, H., Ed. (1978), *Continuation Methods*, Academic Press, New York, NY.

Witte, R. S., & Witte, J. S. (2009). *Statistics* (Ninth ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

Yeung, D. S., Cloete, I., Shi, D., & Ng, W. W. Y. (2010). *vity Analysis for Neural Networks*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Young, P. C., Parkinson, S. D. and Lees, M. (1996) Simplicity out of com-plexity: Occam’s razor revisited. *J. Appl. Stat.* 23, 165–210.