



El problema de Alhacén

0. Introducción

El presente documento es un estudio detallado del problema conocido bajo el título de *Problema de Alhacén*. Este problema fue formulado en el siglo X por el filósofo y matemático árabe conocido en occidente bajo el nombre de Alhacén. El documento hace una breve presentación del filósofo y una breve reseña de su trascendental tratado de óptica *Kitāb al-Manāzīr*. A continuación el documento se detiene a estudiar cuidadosamente los lemas requeridos para enfrentar el problema y se presentan las soluciones para el caso de los espejos esféricos (convexos y cóncavos), cilíndricos y cónicos. También se ofrece una conjetura que habría de explicar la lógica del descubrimiento implícita en la solución que ofreció Alhacén. Tanto los lemas como las soluciones se han modelado en los software de geometría dinámica *Cabri II-Plus* y *Cabri 3-D*. El lector interesado en seguir dichas modelaciones debe contar con los programas mencionados para adelantar la lectura de los archivos. En general, estas presentaciones constan de tres partes: (i) formulación del problema (se formula en forma concisa el problema); (ii) esquema general de la construcción (se presentan los pasos esenciales que conducen a la construcción solicitada y las construcciones auxiliares que demanda el problema), esta parte se puede seguir en los archivos de Cabri; y (iii) demostración (se ofrece la justificación detallada de la construcción requerida).

Los archivos en Cabri II plus cuentan con botones numerados que pueden activarse haciendo “Click” sobre ellos. La numeración corresponde a la numeración presente en el documento. El lector puede desplazar a su antojo los puntos libres que pueden reconocerse porque ellos se distinguen con la siguiente marca (°). Los puntos restantes no pueden modificarse pues son el resultado de construcciones adelantadas y ajustadas a los protocolos recomendados en el esquema general.

El problema de Alhacén

1. Notas biográficas

Alhacén es la abreviación que en occidente se le ha dado al nombre del filósofo árabe Abu ‘Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham; nombre que también se ha abreviado bajo una de las siguientes formas *Alhazen*, *Hacen*, *Alacen*, *Achen*, *Alhaycen*, *Alphacen*, *Allacen*. La presentación “Alhazen” fue sugerida por Friedrich Riesner para la edición del *Opticae thesaurus* en 1572.

Alhacén nació muy posiblemente en el año 965 en Basora (Al-Basra), ciudad localizada en lo que hoy se conoce como Irak. Basora es también el puerto de Simbad el Marino. Alhacén participó como estudiante en la *Casa de la Sabiduría*, una de las más grandes bibliotecas del mundo musulmán, fundada en el siglo IX con el objeto de promover el estudio y traducción de obras clásicas. Allí tuvo la oportunidad de familiarizarse con las obras de Platón, Aristóteles, Euclides, Ptolomeo y Galeno. Alhacén llegó a ocupar un cargo público en Basora, cargo que abandonó aduciendo, según algunos comentaristas, razones asociadas con algún tipo de enfermedad mental. El científico árabe se trasladó después (1010) al Cairo para trabajar bajo el gobierno de al-Hakim, quien ordenó la construcción de la biblioteca del Cairo. Todo parece indicar que la relación estaba fundada en un plan novedoso que Alhacén había concebido para controlar las devastadoras crecientes del Nilo. Ciertos desacuerdos con al-Hakim, posiblemente asociados con el fracaso del proyecto para controlar el Nilo, fueron tejiendo las condiciones para que Alhacén fuese condenado a arresto domiciliario por cerca de diez años. Es probable que durante ese tiempo se hubiese concebido y adelantado buena parte del proyecto de su tratado de óptica. Una vez terminó el arresto domiciliario, Alhacén se instaló en El Cairo para posteriormente desplazarse a Bagdad y Basora. El filósofo y científico árabe murió en el año 1040. Algunos comentaristas tienen dudas acerca del regreso del filósofo a su patria natal.

Alhacén escribió un influyente tratado cuyo título en árabe es *Kitāb al-Manāzir*. La traducción al latín se recoge bajo el título *De aspectibus*. Después del año 1250 varias copias manuscritas del *De aspectibus* llegaron a instalarse en puntos estratégicos de Europa.

El problema de Alhacén

La primera edición impresa apareció en 1572 con la excelente obra de Friedrich Risner *Opticae thesaurus*. La edición de Risner reúne, por un lado, una presentación de la obra de Alhacén elaborada a partir de algunas de las ediciones manuscritas existentes en Europa, y, por otro lado, la versión de Witelo sobre los principales aportes de Alhacén. La edición definitiva de 1572 permitió contar en Europa con una versión canónica del trabajo de Alhacén, versión que se constituyó en una de las fuentes de inspiración de Kepler, Descartes y Huygens. No obstante, la versión latina tiene algunas deficiencias. Los tres primeros capítulos del libro I en la versión original en árabe, allí donde se establecen algunos criterios metodológicos, no están presentes en la versión europea. Lagunas similares se encuentran en los libros restantes. En consecuencia, la versión en latín no es una réplica exacta de la versión árabe. La versión original en árabe ha sido traducida al inglés recientemente por Sabra, A. I. (1989) bajo el título *The Optics of Ibn al-Haytham books I-III on Direct Vision*, en tanto que la versión latina ha sido llevada al inglés por Mark Smith (2001) con el título *Alhacen's theory of visual perception* (libros I-III), Mark Smith (2006) *Alhacen on the principles of reflection* (libros IV, V) y Mark Smith (2008) *Alhacen on image-formation and distortion in mirrors*.

El *De Aspectibus* es un compendio de 7 libros. El libro I presenta un esbozo general de la teoría de la visión de Alhacén. El libro II da cuenta de su forma peculiar de concebir la psicología de la percepción. Este libro sienta las bases teóricas para que el libro III se ocupe de los errores inducidos en la percepción visual provocados por la percepción directa. Los libros IV y V se ocupan de la reflexión y formación de imágenes en espejos planos y en espejos esféricos. En estos libros se enuncia y se resuelve con todo lujo de detalles el famoso *Problema de Alhacén*. El libro VI –complemento del III– se ocupa de los errores en la percepción visual ocasionados por rayos reflejados. Por último, el libro VII se detiene en la refracción de la luz. Allí Alhacén aprovecha la oportunidad para discutir la solución que Ptolomeo le había dado al problema de la *ilusión de la luna*. Esto es, al hecho de que la Luna ofrece un aspecto de mayor tamaño cuando se contempla en el horizonte comparado con el aspecto que ofrece cuando ella se encuentra en el zenit.

No es difícil establecer con claridad las principales influencias en la obra de Alhacén. Aristóteles contribuye para establecer una actitud y, quizá, un método para la investigación científica en general. Euclides y Apolonio, aun cuando este último con un protagonismo menor, aportan el trasfondo geométrico. La obra de Ptolomeo sugiere problemas y aporta la dirección específica en la que han de enfrentarse. En muchos casos Alhacén se limita a servir de correa de transmisión de las ideas de Ptolomeo. Por último, la anatomía del ojo se toma casi directamente de los trabajos de Galeno. En el contexto árabe, Ya ‘qūb al-Kindi

(801-866) contribuyó a la asimilación del pensamiento griego e inició la osadía de participar en dicha empresa con una mirada crítica. Si bien Aristóteles se había sentido inclinado a pensar que el corazón podía ser el asiento del alma, Galeno se atrevió a sostener que las funciones más importantes asociadas al alma debían tener su asiento en el cerebro. Los pensadores árabes quisieron ofrecer una descripción galenizada de la psicología de Aristóteles. Ellos quisieron asignar ciertas facultades psicológicas a regiones específicas del cerebro. Una buena parte de esta síntesis, sin duda estudiada por Alhacén, se encuentra en *Los diez tratados del ojo* atribuido a Hunayn ibn Ishāq (809-873). En general la óptica temprana árabe estaba concentrada en la recepción de la obra de Euclides. Alhacén es, sin duda, el primer pensador árabe en ocuparse seriamente de los aportes de Ptolomeo.

Sin el ánimo de ser exhaustivos, podemos reducir a seis los aportes básicos de Alhacén en el *De Aspectibus*:

(i) *Ofrecer argumentos definitivos en favor del intramisionismo.* A propósito de los fenómenos asociados con la percepción visual, los griegos se debatían entre, por un lado, concepciones extramisionistas (Platón, Euclides, Ptolomeo) que asumen que un cierto efluvio que emana del ojo sale al encuentro del objeto hasta entrar en contacto directo con él, provocando después la aparición de una imagen o fantasma del objeto contemplado; y, por otro lado, concepciones intramisionistas (Aristóteles, atomistas) que abogan porque alguna modificación del objeto sobre el medio sea la responsable de que el ojo reciba la forma sensible del objeto correspondiente. Alhacén, por su parte, ofreció argumentos poderosos en favor del intramisionismo y mostró cómo podía usarse en este caso el modelo de la pirámide euclidiana, concebida inicialmente para esquemas extramisionistas. En efecto, si pensamos que es a partir del ojo que emana cierto efluvio visual, conviene preguntar si hay algo que regresa al ojo o nada retorna. En el segundo caso nada podría percibirse. En el primero nos vemos obligados a restituir la tesis intramisionista. También conviene preguntar si ese efluvio es o no corporal. Si es corporal, hemos de admitir algo absurdo; esto es que una sustancia corporal que emana del ojo puede llenar en un solo momento todo el espacio que tenemos al frente desde nuestros ojos hasta la inmensidad del cielo, sin que el ojo sienta mengua alguna en su constitución. Si no es corporal no hay espacio para hablar de sensación, toda vez que ella implica el reconocimiento de objetos físicos por la afección que ellos producen en nuestros órganos corporales (Alhacén, I, 6.56).

(ii) *Elucidar la naturaleza compleja del vértice en la pirámide visual euclidiana.* La pirámide visual de Euclides es un instrumento que, sin duda, simplifica el análisis de la visión. En el caso de Euclides lo fundamental es: (i) un observador reducido a un punto (el vértice de la pirámide); (ii) un objeto que ha de ser contemplado y que constituye la base de la pirámide; (iii) una mediación que ocurre en virtud de líneas rectas entre el objeto y el observador; y (iv) un observador que lee las claves geométricas de la mediación para inferir posiciones, tamaños y distancias del objeto percibido. Ahora bien, concebir el

observador como un punto geométrico es una simplificación que deja por fuera aspectos esenciales. Un punto, según Euclides, es aquello que no tiene partes. Concebir el ojo como un algo sin partes no nos permite abrazar la complejidad que en sí encierra la percepción. Alhacén, considerando la información anatómica aportada por Galeno, procuró establecer la funcionalidad geométrica de cada una de las partes del ojo.

(iii) *Aportar una descripción psicológica muy completa de los procesos de inferencia presentes en la percepción directa.* El ojo es una ventana abierta que permite instalar en la pared posterior del cristalino una imagen isomórfica del objeto contemplado. A continuación esta imagen es capturada, sentida y transportada por los *espíritus visuales* a través del nervio óptico hasta el nervio común y por éste hasta la parte frontal del cerebro sin pérdida del isomorfismo inicial. Allí el sensor central está en condiciones de percibir las propiedades visibles, algunas de ellas encarnadas –en el buen sentido aristotélico– en los objetos exteriores. Entre estas propiedades conviene asentar la siguiente distinción. De un lado se encuentran las propiedades que se perciben por la sensación bruta [*sensu solo*] y, de otro lado, las propiedades que son percibidas gracias a la intervención del juicio, del reconocimiento y de la diferenciación en conjunción con la sensación de las formas percibidas. Alhacén adelantó un juicioso estudio de las características de las inferencias presentes en la percepción visual.¹

(iv) *Advertir la importancia de métodos experimentales y modelos matemáticos para validar conjeturas en el estudio de la óptica.* Todas las superficies reflectantes desvían la luz, forma y color. Lo hacen ajustadas a dos principios centrales: (i) dado un punto de reflexión sobre la superficie ocurre que la línea de incidencia y la línea de reflexión se encuentran en el mismo plano con la normal trazada a la superficie en el punto de reflexión; y (ii) tales líneas forman con la normal ángulos equivalentes (Alhacén, IV, 3.2). El filósofo árabe no se limitó a sugerir plausibles argumentos especulativos o a apoyarse en la tradición (Aristóteles, Euclides, Ptolomeo) para soportar las mencionadas leyes, sino que intentó someterlas a una rigurosa verificación empírica. Para ello dispuso de un cilindro macizo, sellado completamente, cuya base inferior contenía el dibujo de rectas de guía convergentes en el centro de la base del cilindro prefigurando el paso de la luz. Las paredes del cilindro poseían orificios justo en los puntos de intersección de las líneas de guía de la base y las paredes del cilindro. Estos agujeros se sellaban con bloques de madera fácilmente removibles. En la base se podía disponer un espejo en una posición controlada por el experimentador. Alhacén destapaba un agujero para permitir la entrada controlada de la luz y, después, retirando uno a uno cada tapón, buscaba la trayectoria de salida del rayo de luz reflejado.

¹ No carece de fundamento pensar en una anticipación a algunas claves fenomenológicas en la presentación de Alhacén. Cfr. EL-BIZRI, N., (2005), “A philosophical perspective on Alhazen’s optics”, *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 15 pp. 189-218.

De otra parte, Alhacén, siguiendo a Euclides y a Ptolomeo, se esmeró por hacer de la geometría el canon con el que debían presentarse los problemas y las soluciones asociadas con el estudio de los fenómenos ópticos. Así, la geometría logra encarnarse en el estudio de la percepción visual. No se trata de un instrumento adicional que pudiese hacernos la vida más cómoda. La geometría es el lenguaje en el que se puede formular significativamente las preguntas propias que atañen al estudio de la percepción visual.

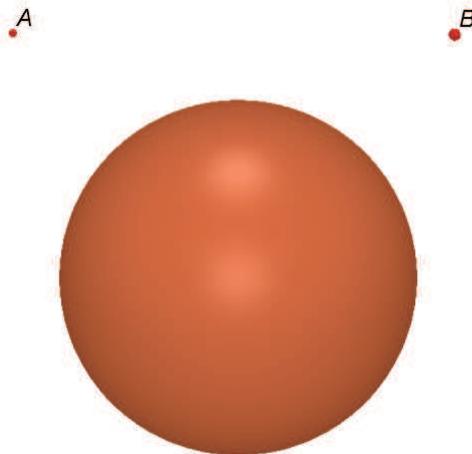
(v) *El problema de Alhacén.* El problema se trata con mayor extensión en el cuerpo del presente documento.

(vi) *Reiniciar los estudios cuidadosos de la refracción.* Alhacén intentó darle continuidad a los estudios que Ptolomeo había iniciado a propósito de las regularidades matemáticas implícitas en los fenómenos de refracción de la luz. Él advirtió los problemas de Ptolomeo en el momento de pretender explicar el aumento del tamaño aparente de la Luna cuando era contemplada en el horizonte. Cuando un observador en la Tierra dirige su mirada al cielo, asimila la superficie celeste a un plano que se extiende indefinidamente en todas las direcciones. Así las cosas, cuando contempla la Luna en el horizonte, la mente habrá grabado la expectativa que impone que la distancia a la Luna es bastante mayor comparada con la distancia recordada en el zenit. Si en los dos casos imaginamos objetos que poseen el mismo tamaño absoluto, ellos serán contemplados bajo conos visuales de la misma amplitud angular; en consecuencia, como en el horizonte la Luna parece más distante, la facultad visual aventurará la hipótesis según la cual, la Luna debe ser un objeto de mayor amplitud en su tamaño.

El problema de Alhacén

3.1 Formulación del problema

Después de ofrecer argumentos y evidencias experimentales en favor de las leyes de la reflexión,¹ y después de fortalecer la confianza en el principio de Ptolomeo,² Alhacén propone el famoso problema que lleva su nombre. Este problema reza así: ***si yo conozco la geometría del espejo y las ubicaciones del objeto y del observador, se pide hallar el punto de reflexión, en caso de existir, para que después se pueda establecer la ubicación precisa de la imagen correspondiente.*** Este problema se formuló en forma precisa inicialmente en la proposición 18 del libro V. Si el espejo es plano la solución es trivial. En los casos restantes, la solución exige una complejidad que no alcanza a advertirse en la simplicidad de la formulación del problema (Alhacén (2006), V, 2.137).



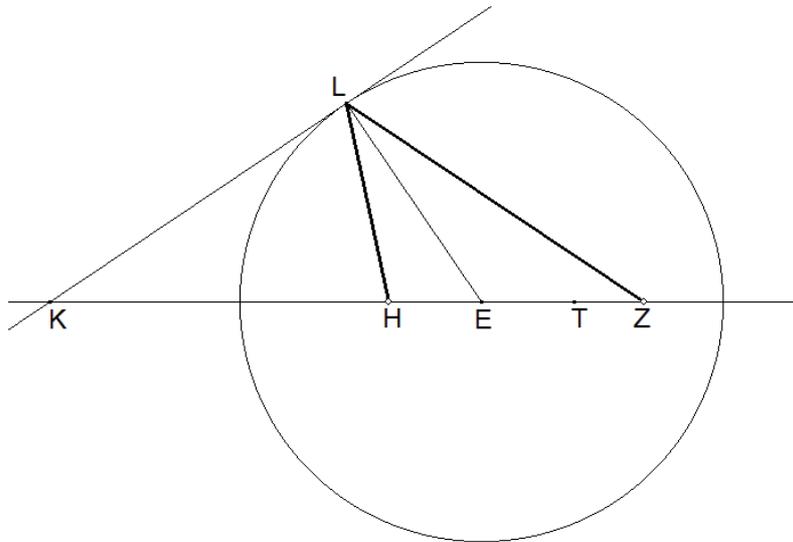
¹ Son dos las leyes de la reflexión: (i) el rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano; (ii) el ángulo de incidencia –formado por el rayo incidente y la normal– es congruente con el ángulo de reflexión –formado por el rayo reflejado y la normal–. Cfr. Alhacén, Libro IV, capítulo 3.

² Este principio, formulado en lenguaje intramisionista, asegura que la imagen que de un objeto contempla un observador en una posición conocida frente a un espejo, debe hallarse en la intersección de la prolongación del rayo visual que llega al observador y de la perpendicular trazada desde el objeto al plano tangente a la superficie del espejo en el punto de incidencia; cfr. SMITH, M., (1996), *Ptolemy's Theory of Visual Perception*, traducción al inglés de la *Óptica*, Philadelphia, The American Philosophical Society, III, §3. Cfr. Alhacén V, 2.1.

El problema de Alhacén

3.2 Antecedentes

El filósofo, matemático y geógrafo Claudio Ptolomeo (100-168) planteó en su tratado de Óptica algunos problemas emparentados con el problema de Alhacén. De hecho resolvió el caso para algunas situaciones muy simples. Por ejemplo, en el teorema 5 del libro IV, Ptolomeo pide hallar el punto de reflexión frente a un espejo cóncavo esférico cuando el objeto (H) y el observador (Z) se encuentran sobre un diámetro del espejo. Construye $ET \cong EH$ y pide hallar el punto K , sobre el diámetro, de tal manera que $ZT : ET = ZH : KH$. Finalmente traza la tangente a la circunferencia que pasa por K y obtiene el punto de corte L . Este punto, L , es el punto de reflexión. (Véase la modelación en Cabri).



Consultar archivo: *Problema de Alhacén (Ptolomeo-cóncavos)*
Requerimientos: Cabri II-plus

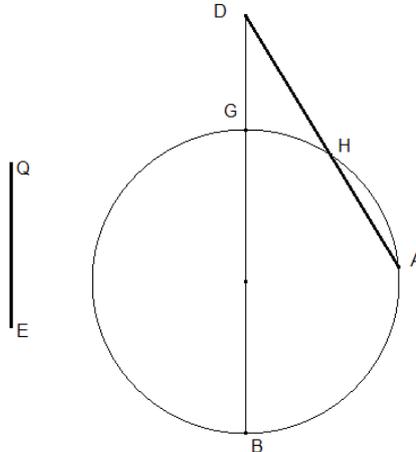
El problema de Alhacén

3.3 Lema 1

La solución final del Problema de Alhacén demanda la demostración de seis lemas independientes. Presentamos a continuación los seis lemas. Primero se formula cada lema, después se presenta el esquema general de la demostración o construcción. Este esquema se puede seguir en la modelación preparada en Cabri. Para este caso, el lector puede variar a su antojo los puntos señalados de la forma (°). Por último, se pueden consultar todos los pasos intermedios en la demostración completa.

(i) Formulación del lema 1

Dado un segmento de recta EQ y un punto A sobre una circunferencia BAG , se pide trazar una recta desde A que corte la prolongación de BG (diámetro de la circunferencia) en un punto D y a la circunferencia en un punto H , de tal manera que $DH \cong EQ$ (Alhacén (2006), V, 2.141–2.157).¹



Consultar archivo: *Lema 1*
Requerimientos: Cabri II-plus

¹ Alhacén distingue dos casos. En el primero (Alhacén (2006), V, 2.143 – 2.145) se asume que $AB \cong AG$, en tanto que en el segundo (Alhacén (2006), V, 2.146 – 2.156) se asume que ellos difieren en magnitud. La reseña que sigue presenta el segundo caso y asume que el primero es tan sólo una aplicación particular del segundo.

(ii) Esquema general de la construcción

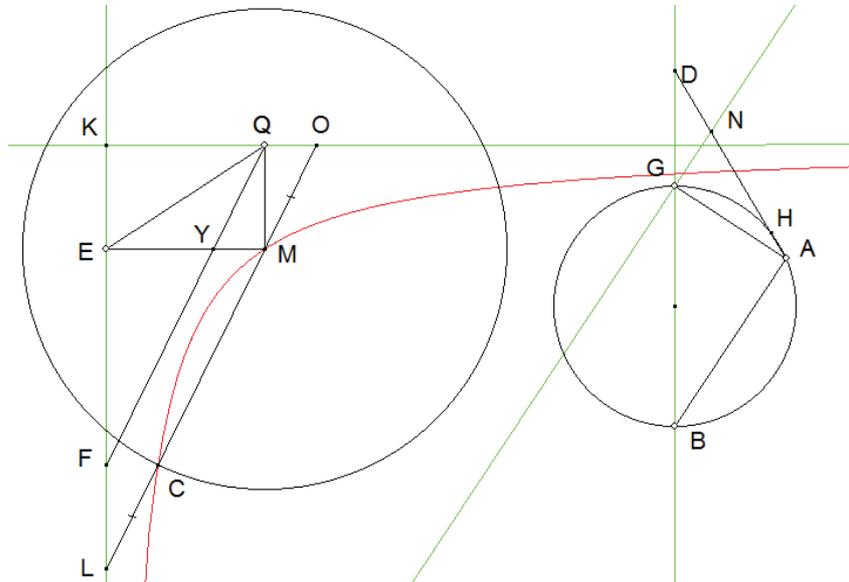
La solución exige las siguientes construcciones. Estas construcciones se pueden seguir en la modelación en Cabri activando los botones correspondientes a la numeración que aquí se presenta.

- (i) Trazar la recta GN paralela a AB por G .
- (ii) Construir el ángulo QEF congruente con ángulo AGD (D en la recta BG), trazar QM paralela a EF y construir el ángulo QEM congruente con el ángulo DGN . El ángulo FEM es, entonces, recto.
- (iii) Se traza la paralela a EM por Q y se determina el corte K con EF .
- (iv) Se construye la hipérbola que pasa por M y cuyas asíntotas son KQ y KF .
- (v) Se traza la circunferencia de centro M y radio equivalente a la longitud de BG , se determinan los cortes C y C' con la hipérbola, a continuación se traza la recta CM y se determinan los cortes O y L con KQ y KF respectivamente. (Ocurre que $OM \cong CL$ (ver Apolonio (1896) II, 8).¹)
- (vi) Ahora se traza QF paralela a CM . Sea Y el corte de QF y EM . Se construye el ángulo GAD congruente con el ángulo EFQ y se definen los cortes D, N, H de AD con BG, GN y la circunferencia.² Sean dichos cortes D, N, H respectivamente. El segmento DH resulta congruente con el segmento EQ (como se quería construir) (Alhacén (2006), V, 2.141 – 2.157).
- (vii) Se siguen los pasos (v) y (vi) para obtener la segunda solución correspondiente a C' .

¹ Esta proposición afirma que si se extiende una cuerda QQ' en una hipérbola esta cortará las asíntotas en puntos R y R' tales que $QR \cong Q'R'$. Son realmente dos los cruces con la hipérbola. El segundo cruce conduce igualmente a una solución del problema.

² Sin embargo, la recta AD puede ser tangente a la circunferencia o cortarla en un punto H diferente a A . A continuación se exhibe el segundo caso. No obstante, el análisis del primero sigue pasos completamente análogos. Alhacén hace esa distinción, pero en la presentación pueden obviarse esos matices que hacen la demostración aún más tediosa de lo que ya de por sí es.

(iii) Demostración



- (1) $\Delta FEY \approx \Delta AGN$ luego $\frac{AN}{AG} = \frac{FY}{FE}$ (a) $\angle GAN \cong \angle EFY$ por construcción
 (b) $\angle AGN \cong \angle FEY$ ambos son rectos
- (2) $\Delta AGD \approx \Delta FEQ$ luego $\frac{AG}{GD} = \frac{FE}{EQ}$ (a) $\angle AGD \cong \angle QEF$ por construcción
 (b) $\angle EFQ \cong \angle GAD$ por construcción
- (3) $\frac{AN}{GD} = \frac{FY}{EQ}$ (a) por (1) y (2)
- (4) $FY \cong BG$ (a) QM es paralelo a FL por construcción
 (b) FQ es paralelo a ML por construcción
 (c) $FQ \cong ML = MC + CL$ por (a) y (b) y por composición
 (d) $CL \cong MO$ Apolonio II-8
 (e) $FQ = MC + MO = CO$ por (c), (d) y por composición
 (f) $FQ = FY + YQ$ por composición
 (g) $YQ \cong OM$ pues $OQYM$ es un paralelogramo por construcción
 (h) $FY \cong MC$ por (e), (f) y (g)
 (i) $MC \cong BG$ por construcción

$$(5) \quad \frac{AN}{GD} = \frac{BG}{EQ}$$

La conclusión se sigue de (3) y (4)

$$(6) \quad \Delta HGD \approx \Delta NDG, \text{ luego } \frac{HD}{DG} = \frac{DG}{DN},$$

es decir $DG^2 = HD \cdot DN$

(a) $\angle AHG + \angle ABG = 180^\circ$ por Euclides III, 22

(b) $\angle NGD \cong \angle ABG$, pues NG y AB son paralelas

(c) $\angle AHG + \angle NGD = 180^\circ$ por (a) y (b)

(d) $\angle AHG + \angle NHG = 180^\circ$ por construcción

(e) $\angle NGD \cong \angle NHG$ por (c) y (d)

(h) $\angle HDG \cong \angle NDG$ se trata de dos etiquetas del mismo ángulo

$$(7) \quad DH \cdot DN + DH \cdot AN = BG \cdot GD + DG^2$$

(a) $AD \cdot DH = BD \cdot DG$ corolario de Euclides III, 37

(b) $AD = DN + NA$ por composición

(c) $AD \cdot DH = DN \cdot DH + AN \cdot DH$ por (b)

(d) $BD = BG + DG$ por composición

(e) $BD \cdot DG = BG \cdot DG + DG^2$ por (d)

La conclusión se sigue de (a), (c) y (e)

$$(8) \quad \frac{AN}{GD} = \frac{BG}{DH}$$

La conclusión se sigue de (6) y (7)

$$(9) \quad EQ \cong DH$$

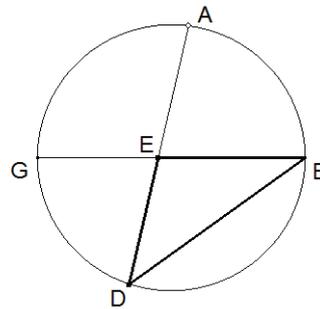
La conclusión se sigue de (5) y (8)

El problema de Alhacén

3.4 Lema 2

(i) Formulación del Lema 2

Dada una circunferencia GAB de diámetro GB y un segmento de recta HZ , se pide trazar una recta desde A que corte la circunferencia adicionalmente en D y al diámetro GB en E , de tal manera que $ED \cong HZ$ (Alhacén (2006) V, 2.158–2.166).¹



Consultar archivo: *Lema 2*
Requerimientos: Cabri II-plus

¹ Los griegos se referían a esta clase de problemas con el término *neusis*.

(ii) Esquema general de la construcción

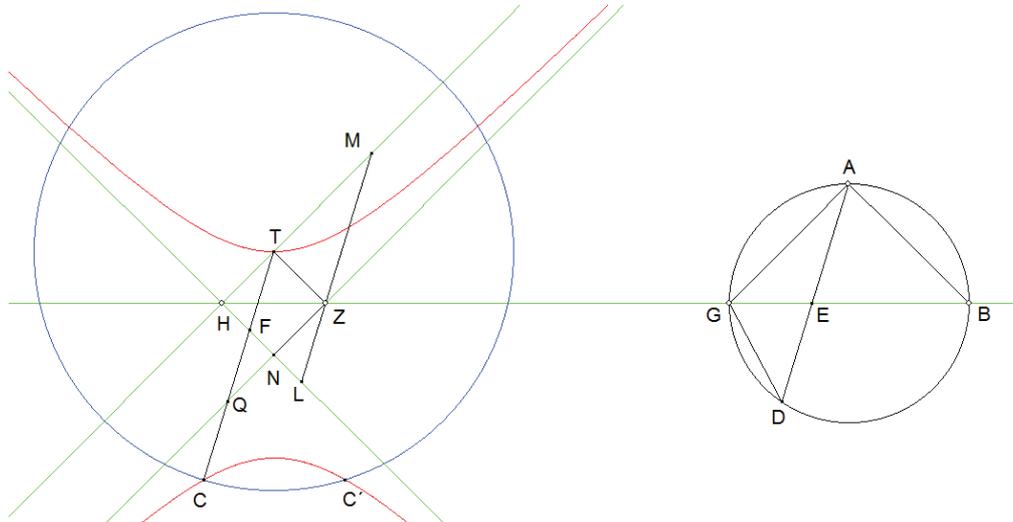
La solución exige las siguientes construcciones. Estas construcciones se pueden seguir en la modelación en Cabri activando los botones correspondientes a la numeración que aquí se presenta.

- (i) Trazar AB y AG . Se dispone HZ sobre la recta GB .
- (ii) Se traza HM paralelo a GA y el ángulo LHZ congruente con el ángulo ABG .¹
- (iii) Se proyecta ortogonalmente Z sobre HM (en T) y sobre HL (en N).
- (iv) Se construye la cónica (hipérbola) que pasa por T y tiene como asíntotas a ZN y HL .²
- (v) Se traza la circunferencia de centro T y radio BG (puede ocurrir que corte la otra rama en dos puntos, en un punto o en ninguno). Sean C y C' los cortes de dicha circunferencia con la otra rama de la hipérbola en caso de que existan los cortes o coincidan en uno solo (si no hay corte, no habrá solución).
- (vi) Se traza TC y se hallan los cortes F , Q con las asíntotas HL y ZN .
- (vii) Se traza la paralela a TC por Z y se definen los cortes M , L con HT y HN .
- (viii) Se construye el ángulo BGD (D sobre la circunferencia) de tal manera que $\angle BGD \cong \angle HLZ$ y se traza AD que corta a BG en E . En este caso $ED \cong HZ$, que es lo que se quería.
- (ix) Si en lugar de tomar C se hubiese tomado C' y se sigue el mismo procedimiento, el resultado conduce a otro punto D' que satisface también la condición impuesta.

¹ M y L se definirán con más precisión a continuación. Por lo pronto no requieren de una definición más precisa.

² Alhacén sugiere usar el método de Apolonio (Apolonio (2000), II, 4).

(iii) Demostración



- (1) $\Delta HML \approx \Delta GDB$, (a) $\angle MHZ \cong \angle AGB$ por construcción
 luego $\frac{GB}{BD} = \frac{LM}{MH}$ (b) $\angle ZHL \cong \angle ABG$ por construcción
 (c) $\angle MHL = \angle MHZ + \angle ZHL = \angle AGB + \angle ABG = \angle GDB = 90^\circ$
 (d) $\angle BGD \cong \angle HLZ$ por construcción
- (2) $\Delta HMZ \approx \Delta DEB$, (a) $\angle ADB \cong \angle BGA$ subtienen el mismo arco AB
 luego $\frac{BD}{DE} = \frac{MH}{HZ}$ (b) $\angle BGA \cong \angle MHZ$ por construcción
 (c) $\angle EDB \cong \angle ADB \cong \angle MHZ$, E está sobre DA y (a) y (b)
 (d) $\angle GBD \cong \angle HMZ$ por (1)
- (3) $\frac{BG}{DE} = \frac{LM}{HZ}$ (1) y (2)
- (4) $LM = TQ + QC = TC$ (a) $QC \cong TF$ (Apolonio II, 16)¹
 (b) $TF \cong LZ$ (TFLZ es un paralelogramo)

¹ Apolonio demuestra en II, 16 que si Q y Q' son puntos arbitrarios sobre ramas diferentes de una hipérbola y K y K' los cortes de QQ' con las asíntotas, ocurre que $QK \cong Q'K'$.

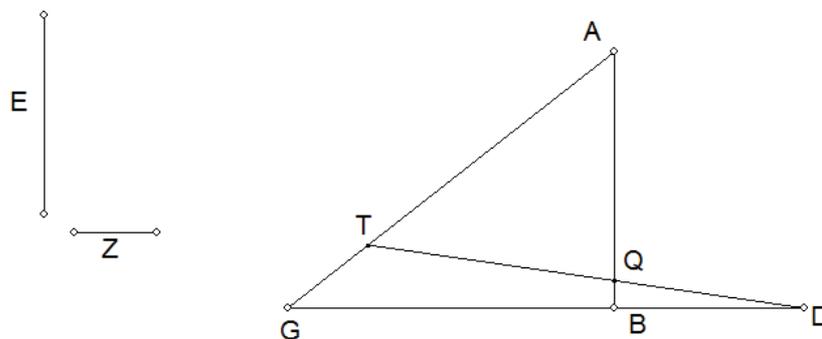
- (5) $\frac{BG}{DE} = \frac{TC}{HZ}$
- (6) $DE \cong HZ$
- (c) $QC \cong LZ$ de (a) y (b)
- (d) $TQ \cong ZM$ ($TQZM$ es un paralelogramo)
- (c) $LM = LZ + ZM$
- (3) y (4)
- (a) $BG \cong TC$ por construcción
- (b) (5)

El problema de Alhacén

3.5 Lema 3

(i) Formulación del Lema 3

Dado un triángulo rectángulo ABG (ABG recto) y un punto libre D sobre la recta BG . Dados también los segmentos libres E y Z . Se pide trazar una recta desde D que corte a AG (en T) y a AB (en Q) en una forma tal que $\frac{TQ}{TG} = \frac{E}{Z}$. Alhacén distingue dos casos: (i) cuando el punto D cae en el segmento y (ii) cuando el punto D está en la recta que contiene el segmento pero no cae en él. A continuación presentaré la solución del segundo caso. El primero sigue estrategias completamente análogas (Alhacén (2006), V, 2.167–2.173).



Consultar archivo: *Lema 3*
Requerimientos: Cabri II-plus

(ii) Esquema general de la construcción

La solución exige las siguientes construcciones. Estas construcciones se pueden seguir en la modelación en Cabri activando los botones correspondientes a la numeración que aquí se presenta.

- (i) Trazar una paralela a AB por D , determinar el punto de corte M con AG y trazar AD .
- (ii) Trazar el círculo por G, M y D .
- (iii) Construir el ángulo DMN (N sobre el círculo) congruente con el ángulo GAD .
- (iv) Construir el segmento H , de tal manera que $\frac{AD}{H} = \frac{E}{Z}$.
- (v) A partir de N se construye la recta NL que corta a GM en L y al círculo en C , de tal manera que $LC \cong H$. Esta construcción exige hacer uso del lema 1.
- (vi) Por último, se traza la recta DC y se busca las intersecciones Q (con AB) y T (con AG). La recta DC es la buscada (Alhacén (2006), V, 2.167 – 2.173).

$$(4) \quad \frac{TQ}{TG} = \frac{E}{Z}$$

(a) $CL \cong H$ por (Lema 1)

(b) $\frac{AD}{H} = \frac{E}{Z}$ por construcción

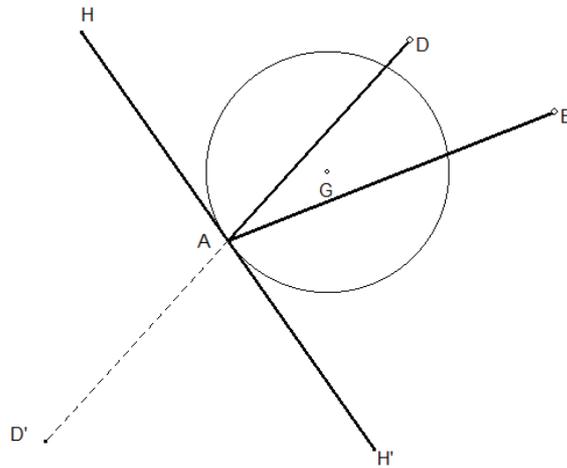
La conclusión se sigue de (3).

El problema de Alhacén

3.6 Lema 4

(i) Formulación del Lema 4

Dada una circunferencia de centro G y los puntos arbitrarios D y E . Se pide hallar un punto A sobre la circunferencia de tal manera que la tangente al círculo trazada en A bisece el ángulo formado por DA y EA (Alhacén (2006), V, 2.174–2.185).



Consultar archivo: *Lema 4*
Requerimientos: Cabri II-plus

(ii) Esquema general de la construcción

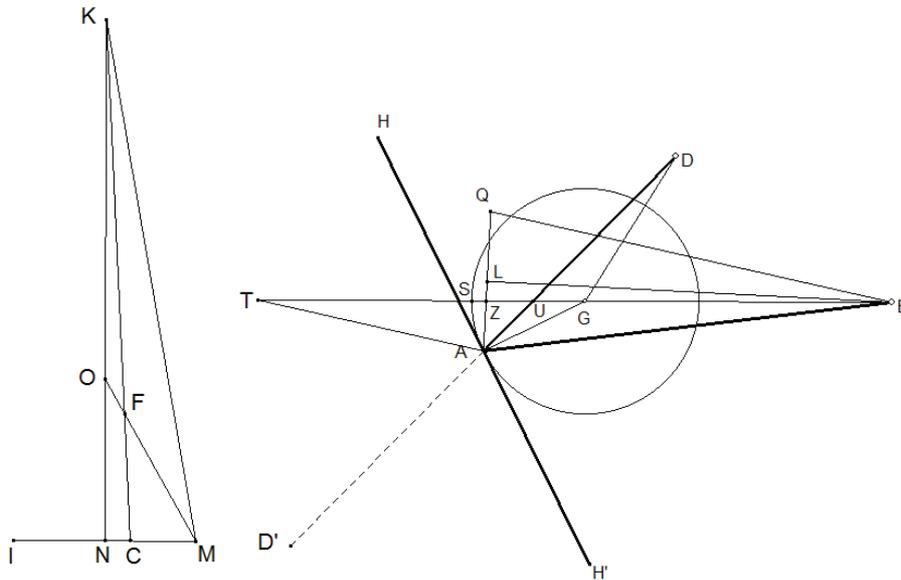
La solución exige las siguientes construcciones. Estas construcciones se pueden seguir en la modelación en Cabri activando los botones correspondientes a la numeración que aquí se presenta.

- (i) Se traza EG y se determina la intersección S con la circunferencia. También se traza GD .
- (ii) En una figura anexa se traza $IC \cong EG$ seguido de $CM \cong GD$ y se halla el punto medio N de IM y allí se traza la perpendicular a IM . Por M se traza el ángulo NMO igual a la mitad del ángulo SGD . O es la intersección con la perpendicular trazada en N .
- (iii) Se pide ahora trazar desde C una recta que corte la hipotenusa del triángulo ONM en F y el cateto restante en K de tal manera que $\frac{KF}{FM} = \frac{EG}{GS}$. Para adelantar esta tarea se requiere del Lema3.
- (iv) Por último se traza el ángulo EGA congruente con el ángulo MFK (A sobre la circunferencia). A es el punto buscado.

Construcciones auxiliares para la justificación:

- (a) Se traza el ángulo EAZ congruente con el ángulo NMK .
- (b) Se prolonga AZ hasta Q , de tal manera que $\frac{AZ}{ZQ} = \frac{MC}{CI}$.
- (c) Se traza una paralela a EQ por A y se define el corte T con EG .
- (d) Se traza una perpendicular a AZ por E y se define el corte L con AQ .
- (e) Se construye el ángulo GAU congruente con el ángulo GAE y se halla la intersección U de UA con EG .
- (f) Por último se traza la tangente AH al círculo en A . Se establece D' como el resultado de la simetría central de D con respecto a A .

(iii) Demostración



Por cuestiones de espacio, la figura de la izquierda se ha hecho con magnitudes reducidas.

(1) $\Delta AGE \approx \Delta MKF$

(a) $\angle MFK \cong \angle AGE$ por construcción

(b) $\frac{KF}{FM} = \frac{EG}{GS}$ por Lema 3 y como $GS \cong GA$, tenemos

$$\frac{KF}{FM} = \frac{EG}{GA}$$

(2) $\Delta AEL \approx \Delta NMK$

(a) $\angle ALE \cong \angle MNK$ ambos son rectos por construcción

(b) $\angle EAL \cong \angle NMK$ por construcción

(3) $\Delta ELZ \approx \Delta KNC$

(a) $\angle AEL = \angle LEZ + \angle AEG$

(b) $\angle NKM = \angle NKC + \angle MKF$

(c) $\angle LEZ = \angle NKC$ de (a), (b), (1) y (2)

(d) $\angle ELZ \cong \angle KNC$ ambos son rectos por construcción

(4) $\Delta EAZ \approx \Delta KMC$

(a) $\angle EZQ \cong \angle KCI$ por (3)

(b) $\angle EAZ \cong \angle CMK$ por construcción

- (5) $\triangle QLE \approx \triangle IKN$
- (c) $\angle AEZ \cong \angle MKC$ por (1)
- (a) $\frac{QZ}{ZA} = \frac{IC}{CM}$ por construcción
- (b) $\frac{AZ}{ZE} = \frac{MC}{CK}$ por (4)
- (c) $\frac{QZ}{ZE} = \frac{IC}{CK}$ por (a) y (b)
- (d) $\angle QZE \cong \angle ICK$ pues son suplementos de ángulos congruentes (4)
- (e) $\triangle QZE \approx \triangle ICK$ por (c) y (d)
- (f) $EL \perp AZ$
- (g) $KN \perp IC$
- (6) El triángulo AQE es isósceles, luego $EQ \cong EA$
- (a) $\frac{MN}{NI} = \frac{AL}{LQ}$ por (2), (5)
- (b) $MN \cong NI$ por construcción
- (c) $AL \cong LQ$ por (a) y (b)
- (d) $AQ \perp LE$ por construcción
- (7) $\triangle EZQ \approx \triangle ZAT$
- (a) $\angle EQZ \cong \angle LAT$ alternos internos entre paralelas
- (b) $\angle EZQ \cong \angle AZT$ opuestos por el vértice
- (8) $\frac{AE}{AT} = \frac{EG}{GD}$
- (a) $\frac{QZ}{ZA} = \frac{EQ}{AT}$ por (7)
- (b) $\frac{QZ}{ZA} = \frac{AE}{AT}$ por (6) y (a)
- (c) $\frac{QZ}{ZA} = \frac{IC}{CM}$ por construcción
- (d) $\frac{IC}{CM} = \frac{EG}{GD}$ por construcción

(9) $\angle UAT \cong \angle DGU$

(a) $\angle EAL \cong \angle EQZ$ por (6)

(b) $\angle EQZ \cong \angle QAT$ alternos internos entre paralelas

(c) $\angle EAL \cong \angle QAT \cong \angle LAT$ por (a) y (b)

(d) $\angle UAT = \angle UAL + \angle LAT = \angle UAL + \angle EAL$ por composición y por (c)

(e) $\angle UAT = \angle UAL + \angle EAU + \angle UAL$ por composición y por (d)

(f) $\angle UAT = 2\angle UAL + \angle EAU$ por (e)

(g) $\angle UAT = 2\angle UAL + 2\angle UAG$ por construcción

(h) $\angle UAT = 2(\angle UAL + \angle UAG)$ por (g)

(i) $\angle UAT = 2\angle LAG$ por composición

(j) $\angle LAG = \angle EAL - \angle EAG$ por composición

(k) $\angle OMN = \angle NMK - \angle FMK$ por composición

(l) $\angle EAL \cong \angle NMK$ por construcción

(m) $\angle EAG \cong \angle FMK$ (1)

(n) $\angle LAG \cong \angle OMN$ por (j), (k), (l), (m)

(o) $\angle DGU = 2\angle OMN$ por construcción

La conclusión se sigue de (i), (n) y (o)

(10) AU corta a GD en D

Supongamos que AU corta a GD en un punto X ,

(a) $\angle XUG \cong \angle TUA$ opuestos por el vértice

(b) $\angle UAT \cong \angle XGU$ por (9)

(c) $\triangle UGX \approx \triangle UAT$ por (a) y (b)

(d) $\frac{EA}{AU} = \frac{EG}{GU}$ por Euclides VI, 3, pues GA biseca el ángulo UAE (por construcción)

$$(e) \frac{EG}{GD} = \frac{AE}{AT} \text{ por (8)}$$

$$(f) \frac{AT}{AU} = \frac{GD}{DU} \text{ por (d) y (e)}$$

$$(g) \angle DGU \cong \angle UAT \text{ por (9)}$$

$$(h) \Delta UAT \approx \Delta UGD \text{ por (f) y (g)}$$

$$(i) \Delta UGX \approx \Delta UGD \text{ por (h) y (c)}$$

$$(k) GD \cong GX \text{ por (i), } UG \text{ es común}$$

$$(l) D = X \text{ por (k)}$$

$$(11) \quad \angle DGE = 2 \angle LAH$$

$$(a) \quad GAH \text{ es recto por construcción}$$

$$(b) \quad \angle GAL + \angle LAH = 90^\circ \text{ por composición y por (a)}$$

$$(c) \quad \angle DGU + \angle DGE = 180^\circ \text{ por composición y por construcción}$$

$$(d) \quad \angle GAL + \frac{\angle DGE}{2} = 90^\circ \text{ por (9-n), (9-o) y (c)}$$

La conclusión se deriva de (d) y (b)

$$(12) \quad \angle TAD' = 2 \angle LAH$$

$$(a) \quad \angle DGU \cong \angle UAT \cong \angle TAD \text{ por (9) y porque } U \text{ está en la recta } DA$$

$$(b) \quad \angle TAD' \cong \angle DGE \text{ porque son suplementos de ángulos congruentes (a) (aquí tomamos } D' \text{ simétrico a } D \text{ con respecto a } A \text{ porque } U \text{ cae entre } A \text{ y } D)$$

La conclusión se obtiene de (b) y (11)

$$(13) \quad \angle EAT = 2 \angle EAL$$

$$(a) \quad \angle TAZ \cong \angle ZQE \text{ alternos entre paralelas}$$

$$(b) \quad \angle ZQE \cong \angle EAL \text{ pues } \Delta QAE \text{ es isósceles (6)}$$

$$(c) \quad \angle TAZ \cong \angle EAL \text{ por (a) y (b)}$$

$$(d) \quad \angle EAT = \angle TAZ + \angle EAL \text{ por composición}$$

La conclusión se deriva de (d) y (c)

$$(14) \quad \angle EAH' = \frac{\angle EAD'}{2}$$

$$(a) \quad \angle EAH = \angle EAL + \angle LAH \text{ por composición}$$

$$(b) \quad \angle EAH' = 180^\circ - \angle EAH \text{ por construcción}$$

$$(c) \quad \angle EAH' = 180^\circ - (\angle EAL + \angle LAH) \text{ por composición y}$$

(b)

$$(d) \angle EAH' = 180^\circ - \left(\angle EAL + \frac{\angle TAD'}{2} \right) \text{ por (12) y (c)}$$

$$(e) 2\angle EAH' = 360^\circ - (2\angle EAL + \angle TAD') \text{ por (d)}$$

$$(f) 2\angle EAH' = 360^\circ - (\angle EAT + \angle TAD') \text{ por (e) y (13)}$$

$$(g) 2\angle EAH' = 360^\circ - (360^\circ - \angle EAD') \text{ por (f) y por composición}$$

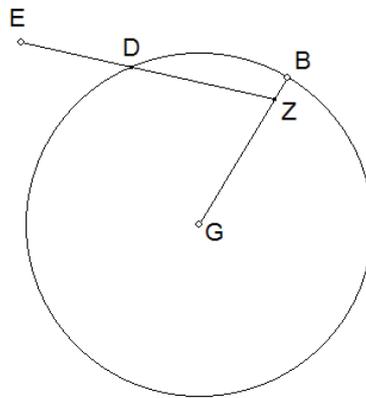
La conclusión se deriva de (g)

El problema de Alhacén

3.7 Lema 5

(i) Formulación del Lema 5

Dada una circunferencia de centro G y radio BG , y un punto E fuera del círculo, Se pide trazar una recta por E que interseca al círculo en D y al radio BG en Z de tal manera que $DZ \cong ZG$ (Alhacén (2006, V, 2.186–2.192)).



Consultar archivo: *Lema 5*
Requerimientos: Cabri II-plus

(ii) Esquema general de la construcción

La solución exige las siguientes construcciones. Estas construcciones se pueden seguir en la modelación en Cabri activando los botones correspondientes a la numeración que aquí se presenta.

- (i) Se traza EC perpendicular a BG .
- (ii) Se construye en forma auxiliar $QT \cong EC$ con L como punto medio y LF perpendicular a QT .
- (iii) A continuación se construye un arco de circunferencia QPT tal que cualquier punto X sobre el arco es tal que $\angle QXT \cong \angle EGB$ (Euclides (1956), III, 33).
- (iv) Desde Q se traza una recta que corta a FL en F y a la circunferencia en P de tal manera que $FP = \frac{BG}{2}$ (hacemos uso del Lema 2).
- (v) Se trazan PT y TF . Por P se traza una paralela a LF y se busca la intersección U con TF .
- (vi) Se construye el ángulo BGD congruente con el ángulo QPU (con D sobre la circunferencia).
- (vii) Por último se traza la recta ED y se determina el corte Z con BG . ED es la recta que buscamos.

Construcciones auxiliares para la justificación:

- (a) DI es perpendicular a BG .
- (b) DK es tangente a la circunferencia en D .
- (c) OU es perpendicular a UP (O sobre QP).
- (d) HU es perpendicular a QP ; ST perpendicular a HU ; TN es perpendicular a QP (Alhacén (2006), V, 2.186 – 2.192).

(i) $FP = \frac{BG}{2}$ por construcción

(j) $OP \cong BG \cong GD$ por (h) y (i), y, además, BG y GD son radios de la circunferencia

(k) $TQ \cong EC$ por construcción

$\triangle IG D \approx \triangle KGD$, luego

$$\frac{GD}{DI} = \frac{GK}{KD}$$

(a) $\angle DIG \cong \angle KDG$, ambos son rectos por construcción

(b) $\angle IGD \cong \angle KGD$, K está en la recta IG

$$\frac{EC}{DI} = \frac{TQ}{OU}$$

(a) $\angle KDG \cong \angle OUP$ ambos son rectos por construcción

(b) $\angle KGD \cong \angle OPU$ por construcción

(c) $\triangle KDG \approx \triangle OPU$ por (a) y (b)

(d) $\frac{GK}{KD} = \frac{OP}{OU}$ por (c)

(e) $\frac{GD}{OP} = \frac{DI}{OU}$ por (3) y (d)

(f) $\frac{GD}{OP} = \frac{EC}{TQ}$ por (2 - k) y (2 - j)

$$\frac{TF}{UF} = \frac{SH}{UH}$$

(a) $\triangle OFU \approx \triangle FQT$ por (1 - c)

(b) $\frac{TQ}{OU} = \frac{TF}{UF}$ por (a)

(c) $HU \perp FH$ por construcción

(d) $ST \perp US$ por construcción

(e) $\angle HUF \cong \angle SUT$ opuestos por el vértice

(g) $\triangle UST \approx \triangle UHF$ por (c), (d) y (e)

(h) $\frac{TU}{UF} = \frac{US}{UH}$ por (g)

(i) $\frac{TF}{UF} = \frac{TU}{UF} + 1$ por composición

$$\frac{EC}{DI} = \frac{TN}{UH}$$

- (j) $SH = SU + UH$ por composición
 (a) $TN \cong SH$ $TNSH$ es un paralelogramo
 (b) $\frac{TF}{UF} = \frac{TN}{UH}$ por (5) y (a)
 (c) $\frac{TQ}{OU} = \frac{TN}{UH}$ por (b) y (5 - b)
 (d) (4)

$$\frac{EC}{DG} = \frac{TN}{UP}$$

- (a) $GI \perp ID$ por construcción
 (b) $UH \perp HP$ por construcción
 (c) $\angle IGD \cong \angle HPU$ por construcción
 (d) $\triangle IGD \approx \triangle HPU$ por (a), (b), (c)
 (e) $\frac{DI}{DG} = \frac{HU}{UP}$ por (d)
 (f) (6)

$$\frac{GE}{GD} = \frac{PT}{UP}$$

- (a) $EC \perp CG$ por construcción
 (b) $PN \perp NT$ por construcción
 (c) $\angle CGE \cong \angle NPT$ por construcción
 (d) $\triangle CGE \approx \triangle NPT$ por (a), (b) y (c)
 (e) $\frac{GE}{EC} = \frac{PT}{NT}$ por (d)
 (f) (7)

$$\triangle DGE \approx \triangle UPT$$

- (a) $\angle BGE = \angle BGD + \angle DGE$ por composición
 (b) $\angle QPT = \angle QPU + \angle UPT$ por composición
 (c) $\angle BGE \cong \angle QPT$ por construcción
 (d) $\angle BGD \cong \angle HPU$ por construcción
 (e) $\angle DGE \cong \angle UPT$ por (a), (b), (c), (d)

(f) $\angle DEG \cong \angle PTU$

(g) $\angle DEG \cong \angle PTU$ porque EC, DI (paralelas entre sí y perpendiculares a BG) están en la misma proporción que TN, UH (6) (paralelas entre sí y perpendiculares a PQ)

$DZ \cong ZG$

(a) $\angle GDE \cong \angle PUT$ por (9)

(b) $\angle GDZ \cong \angle PUF$ por ser suplementos de ángulos congruentes (a)

(c) $\angle DGZ \cong \angle UPF$ por construcción

(d) $\angle GDZ \approx \angle UPF$ por (a), (b) y (c)

(e) (2 – e)

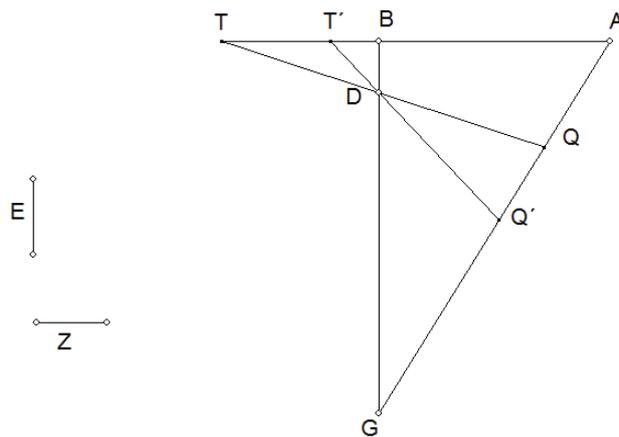
(f) El triángulo GDZ es isósceles, por (d) y (e)

El problema de Alhacén

3.8 Lema 6

(i) Formulación del Lema 6

Dado un triángulo rectángulo ABG (ABG recto) y un punto D sobre uno de los catetos (para el caso, BG); dados también los segmentos libres E y Z , se pide hallar la recta que pasa por D y corta a la hipotenusa AG en Q y al otro cateto AB en T , de tal manera que $\frac{TQ}{QG} = \frac{E}{Z}$ (Alhacén (2006), V, 2.193 – 2.197).



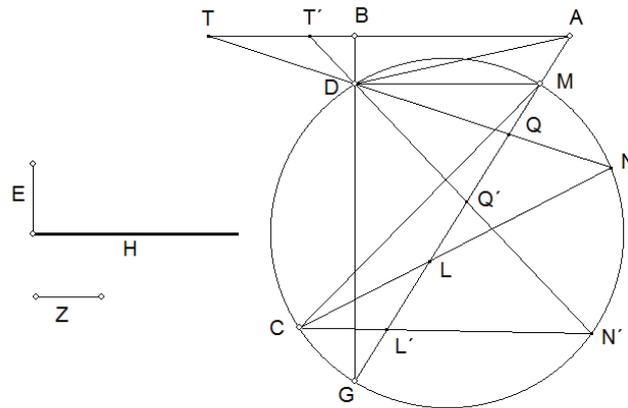
Consultar archivo: *Lema 6*
Requerimientos: Cabri II-plus

(ii) Esquema general de la construcción

La solución exige las siguientes construcciones. Estas construcciones se pueden seguir en la modelación en Cabri activando los botones correspondientes a la numeración que aquí se presenta.

- (i) Trazar AD . Trazar DM paralela a BA , M en el corte con GA .
- (ii) Construir la circunferencia que pasa por G , D y M .
- (iii) Construir $\angle DMC \cong \angle GAD$ con C sobre la circunferencia.
- (iv) Construir el segmento H de tal manera que $\frac{AD}{H} = \frac{E}{Z}$.
- (v) A partir de C se halla la recta que corta a GM en L y al círculo en N de tal manera que $LN \cong H$. Este procedimiento exige hacer uso del lema 2. Hay dos soluciones al problema planteado.
- (vi) Ahora se traza la recta ND y se obtienen los cortes Q y T con AG y AB . La recta ND es la recta buscada.

(iii) Demostración



(1) $\triangle NQL \approx \triangle DQA$, luego

$$\frac{AQ}{QN} = \frac{AD}{NL}$$

(a) $\angle NQL \cong \angle DQA$ (opuestos por el vértice)

(b) $\angle DMC \cong \angle DNC$ (ellos subtienen el mismo arco CD) (Euclides (1956), III, 21)

(c) $\angle DMC \cong \angle DAG$ (por construcción)

(d) $\angle QNL \cong \angle DNC \cong \angle DAG$ (por construcción y por (b) y (c))

(2) $\triangle TQA \approx \triangle NQG$, luego

$$\frac{AQ}{QN} = \frac{TQ}{QG}$$

(a) $\angle TQA \cong \angle GQN$ (opuestos por el vértice)

(b) $\angle DMG \cong \angle DNG$ (ellos subtienen el mismo arco DG)

(c) $\angle DMG \cong \angle TAQ$ (alternos entre paralelas)

(d) $\angle QNG \cong \angle DNG \cong \angle TAQ$ (por construcción y por (b) y (c))

(3) $\frac{TQ}{QG} = \frac{E}{Z}$

(a) $\frac{TQ}{QG} = \frac{AD}{NL}$ de (1) y (2)

(b) $NL \cong H$ por la construcción auxiliar 2

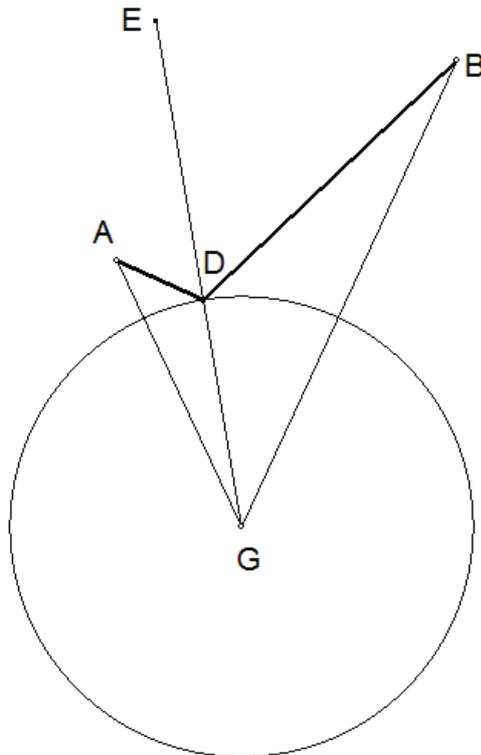
(c) $\frac{AD}{H} = \frac{E}{Z}$ por construcción

El problema de Alhacén

3.9 Espejos esféricos convexos

(i) Formulación del Problema

Si yo conozco la geometría del espejo esférico convexo y las ubicaciones del objeto y del observador, se pide hallar el punto de reflexión en la superficie del espejo. Es decir, un punto en la superficie del espejo en el cual ocurre que: (i) el rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano y (ii) el ángulo de incidencia es congruente con el ángulo de reflexión.

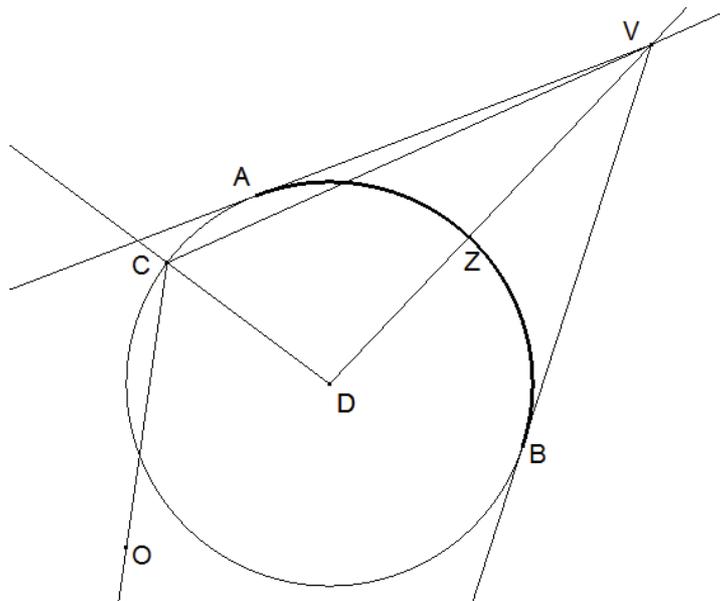


(ii) Esquema general de la construcción

El problema no tiene solución para todas las posibles ubicaciones de observador y objeto. Por eso, en la primera parte estudiamos las condiciones que definen el umbral de posibles soluciones. También exponemos las características generales de la formación de imágenes. En la segunda parte resolvemos el problema para una situación trivial. Por último enfrentamos el problema para un caso general.

(a) Sector de reflexión efectiva y formación de imágenes

Si V determina la ubicación del observador al frente del espejo esférico convexo de centro D , VZD es normal a la circunferencia en el punto Z y BZA define la intersección del espejo con el plano de observación,¹ el sector efectivo de reflexión ha de quedar comprendido en AZB siempre que AV y VB sean tangentes a la circunferencia AZB . Si el punto de reflexión cae por fuera de ese sector, digamos en C , el objeto tendría que hallarse en algún punto de la semirrecta CO a condición de que $\angle VCD \cong \angle OCD$. En este caso los rayos de luz OC y CV tendrían que atravesar el interior del espejo.



Consultar archivo: *Imágenes en espejos convexos*
Requerimientos: Cabri II-plus

¹ Es decir el plano en el que se encuentran el rayo incidente, el reflejado y la normal.

El comportamiento de la imagen varía de acuerdo con el hecho de que el punto de reflexión caiga sobre uno de dos puntos particulares H , o caiga entre los dos puntos H , o lo haga entre H y B o H y A . H es el punto peculiar en el que HK coincide en longitud con el radio de la esfera (K es el otro punto de intersección de la recta VH con la circunferencia del espejo).² El comportamiento de la imagen se puede seguir en la modelación en Cabri. El lector puede manipular tanto C (el punto de reflexión), como O (ubicación del objeto) para observar el comportamiento de la imagen I . Siguiendo el principio de Ptolomeo, esta imagen se obtiene en la intersección de la prolongación del rayo reflejado y la normal que contiene el objeto. Analicemos primero el caso en el que el punto de reflexión coincide con el punto H . Dado que el observador recibe el rayo en la dirección HV , el objeto sólo puede ubicarse sobre la recta OH de tal manera que el ángulo OHM sea congruente con el ángulo MHV .³ OH resulta paralelo a KD . Este último resultado se puede ver de la siguiente manera:⁴

$\angle OHM \cong \angle MHV$	Segunda ley de la reflexión
$\angle MHV \cong \angle KHD$	Son opuestos por el vértice
$\angle KHD \cong \angle HDK$	HDK es equilátero, toda vez que $KH \cong HD$ por construcción
$\angle OHM \cong \angle HDK$	Por transitividad

Dado que el objeto se puede ubicar en cualquier punto sobre la semirrecta HO , cuando este se acerca al punto H , su imagen I se pliega sobre H . Cuando O se aleja al infinito, I se pliega sobre K . En cualquier caso, la imagen se restringe a un punto sobre el segmento KH (en el interior de la esfera). Aclaro que no sigo fielmente el argumento de Alhacén aun cuando el resultado y la intención del análisis coinciden con los del filósofo árabe (Alhacén (2006), V, Proposición 9, caso 1, 2.82 – 2.84).

En el segundo caso, cuando el punto de reflexión cae entre H y H el análisis conduce a lo siguiente. Sea C el punto de reflexión, MCD normal a la esfera en

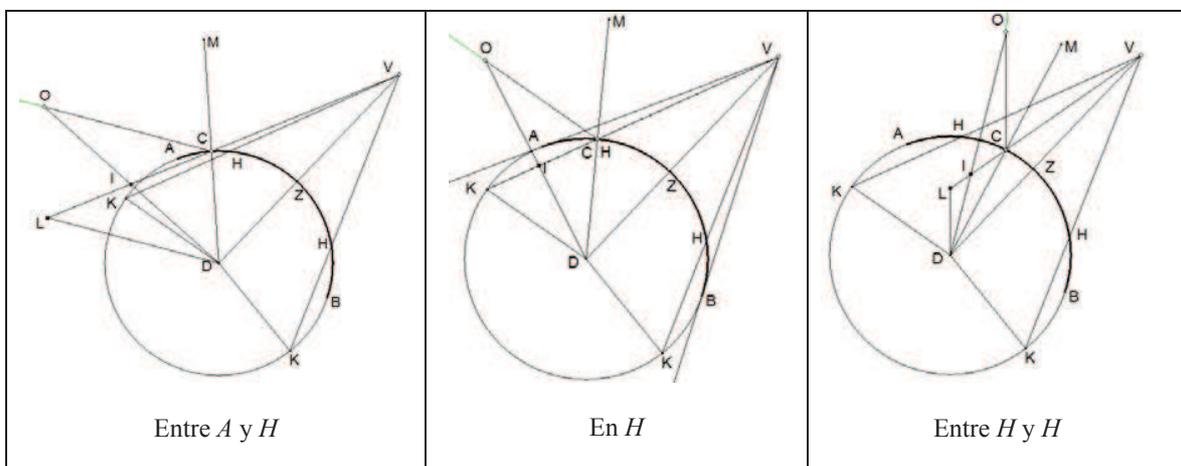
² La existencia del punto H queda garantizada por el siguiente argumento. Si hacemos girar en el plano la semirrecta VK en torno a V , el segmento de intersección con la circunferencia (cuando existe tal intersección) varía entre dos extremos: máximo, cuando la semirrecta cae ortogonalmente, en ese caso VK coincide con VZ y el segmento de intersección coincide con un diámetro ($2R$); y mínimo, cuando la semirrecta coincide con una tangente, ora VA , ora VB , en ese caso la longitud del segmento de intersección se hace cero. En ese orden de ideas, ha de existir una posición intermedia para la cual el segmento de intersección coincide con la longitud del radio de la circunferencia.

³ MD es la normal a la superficie trazada en H .

⁴ Sigo una argumentación ligeramente diferente a la exhibida por Alhacén aunque equivalente.

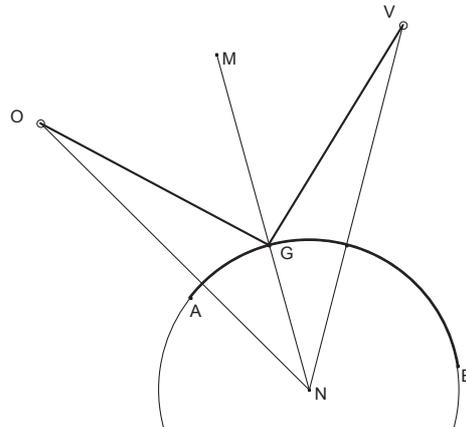
C , el objeto divisado ha de encontrarse en un lugar sobre la semirrecta CO de tal manera que el ángulo OCM sea congruente con el ángulo MCV . Sea DL paralelo a OC . Dado que D es el centro de la esfera, OD cae perpendicularmente sobre la superficie del espejo. La imagen del objeto ha de encontrarse en la intersección de OD y VC . Sea I tal intersección. Cuando O se desplaza desde la posición más cercana al espejo, a saber C , hasta la posición más distante, la imagen I se constriñe a desplazarse desde el punto C hasta el punto L .⁵ En el caso extremo, cuando C coincide con H , L coincide con K y la imagen ha de encontrarse en un punto del segmento HK . De cualquier manera, la imagen se encuentra en el interior de la esfera. El argumento que presento aquí tampoco coincide con el de Alhacén aun cuando respeta la intención y las conclusiones (Alhacén (2006), V, Proposición 9, caso 2, 2.85 – 2.87).

En el tercer caso, el punto de reflexión C se encuentra en el arco HB o en el arco HA . El análisis coincide con el del caso anterior, salvo que en este caso el segmento CL contiene una parte en el interior de la esfera y la otra parte en el exterior. En ese caso hay posiciones de O que generan imágenes en el interior y posiciones que generan la imagen en el exterior. La situación límite se obtiene cuando la normal OD corta la circunferencia en el mismo punto en donde lo hace CL . Como en los casos anteriores, el argumento no coincide con el de Alhacén aun cuando respeta la intención y las conclusiones (Alhacén (2006), V, Proposición 9, caso 3, 2.88 – 2.91).



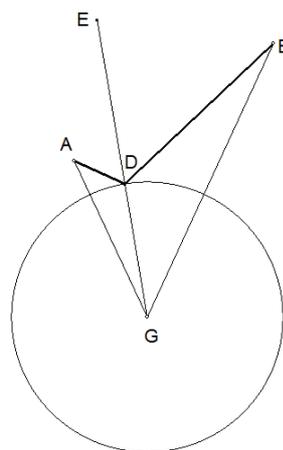
⁵ Cuando el objeto se aleja al infinito, la imagen converge al punto L . En ese caso $CI \cong ID$. Por eso Alhacén concluye que no se puede ubicar el objeto en una posición tal que la distancia de la imagen al centro de la esfera coincida con la distancia de la imagen al punto de reflexión (Alhacén (2006), V, proposición 10, 2.96 – 2.102).

ortogonalmente la circunferencia en G . Los triángulos OGN y VGN son obviamente congruentes y, en consecuencia, los ángulos OGM y MGV son congruentes. De otra parte, OG , GV y GM se encuentran en el mismo plano ONV .



(c) Caso general

Retomamos el problema propuesto inicialmente: dada una circunferencia de centro G y los puntos exteriores B (objeto) y A (observador), se pide hallar la ruta del rayo de luz que va desde B hasta A pasando por D (un punto en el espejo cuya normal es DE) de tal manera que los ángulos BDE y ADE sean congruentes. He procurado ser fiel a las líneas de argumentación pero me aparto totalmente de los esquemas retóricos de presentación. Trato de ofrecer una presentación un poco más amable aunque lo escabroso del camino seguido por Alhacén hace muy difícil encontrar una presentación amena.



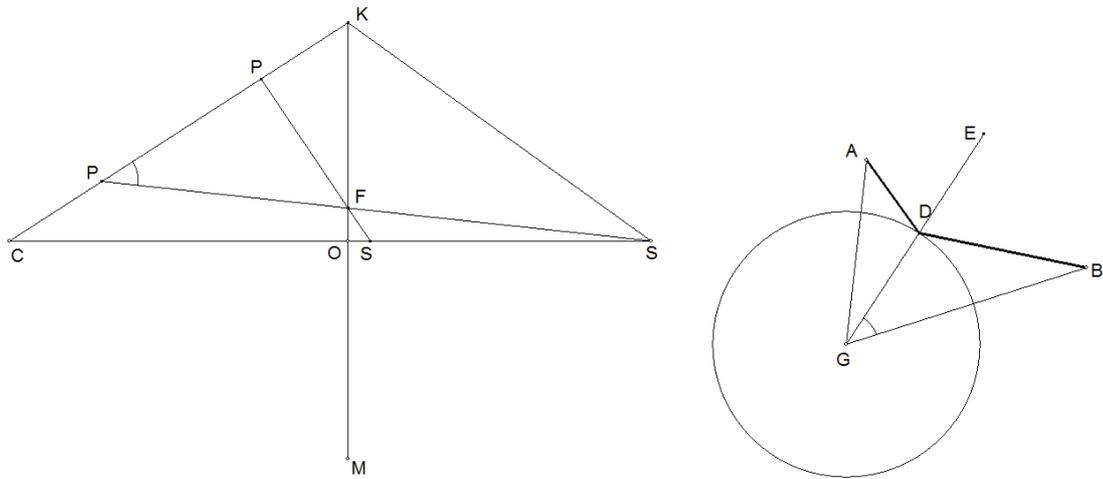
Consultar archivo: *Problema Alhacén esféricos convexos*
Requerimientos: Cabri II-plus

Esquema general de la construcción:

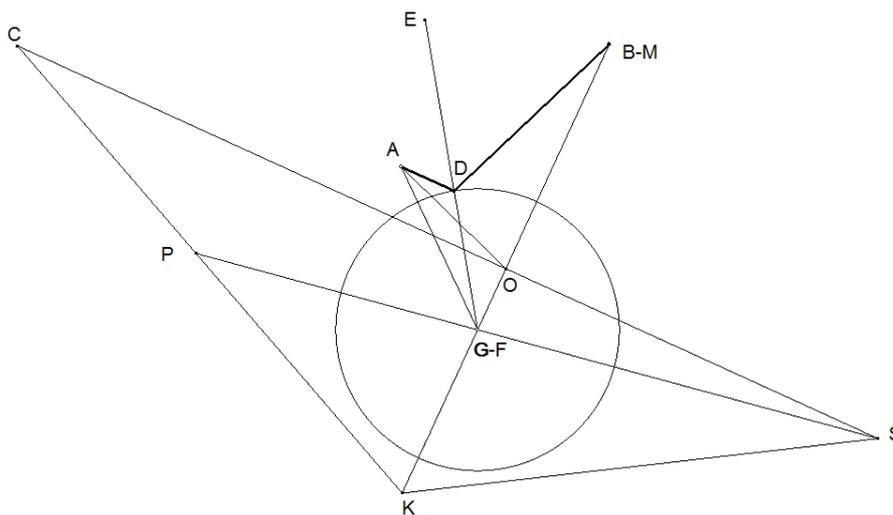
La solución exige las siguientes construcciones. Estas construcciones se pueden seguir en la modelación en Cabri activando los botones correspondientes a la numeración que aquí se presenta.

- (i) Se construyen los segmentos auxiliares FM y FK , uno a continuación del otro sobre la misma recta, de tal manera que $FM \cong BG$ y $FK \cong GA$.
- (ii) O es el punto medio de MK y OC es una perpendicular a MK . El punto C se elige de tal manera que el ángulo OCK es la mitad del ángulo BGA .
- (iii) A continuación se halla un punto S sobre CO que satisface la siguiente condición: si desde ese punto se traza la recta SF , ésta va a cortar la recta CK en un punto P tal que $\frac{SP}{PK} = \frac{BG}{GD}$, siendo GD el radio de la esfera. Este paso se lleva a cabo con la ayuda del lema 6. No hay sólo un punto que satisface la condición impuesta en la construcción auxiliar. Hay dos puntos S y S' . Alhacén demuestra que si ninguno de los ángulos CKS o CKS' es mayor que un ángulo recto, no habrá, entonces, solución para el problema de Alhacén. Imaginemos, pues, que CKS es mayor que un ángulo recto. En la modelación en Cabri se ofrecen las dos soluciones.
- (iv) A continuación se construye el ángulo BGE igual al ángulo SPK . La intersección de GE con la circunferencia es el punto buscado D .

(iii) Demostración

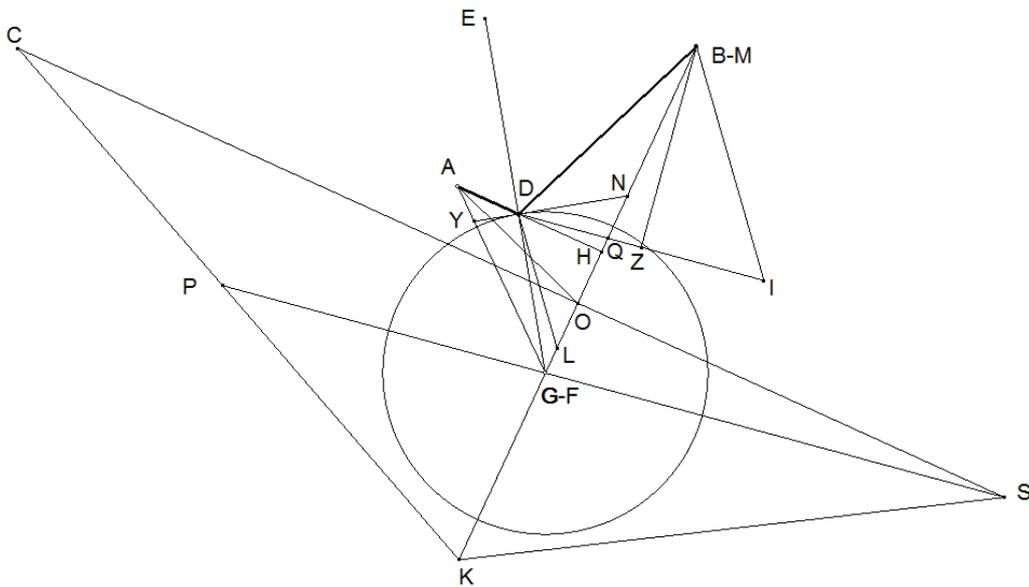


La ubicación de la construcción al margen es completamente irrelevante. En consecuencia y a diferencia de Alhacén, haremos la construcción sobre la disposición inicial para facilitar la contemplación de primera mano de las congruencias requeridas (Obviamos la solución descartada por Alhacén). Para ello, construimos el segmento GK , a continuación de BG , de tal manera que $AG \cong KG$. Para que el lector pueda seguir la variación propuesta, rebautizaremos los puntos G y B con las alusiones $G-F$, $B-M$. De esa manera se pueden seguir las descripciones en uno u otro esquema. Después replicamos todas las construcciones enunciadas en la presentación de la prueba.



Construcciones auxiliares para la justificación:

- (a) La tangente a la circunferencia por D que corta a BG y GA en los puntos N y Y .
- (b) El punto Q sobre BG de tal manera que los ángulos QDG y PKF sean congruentes.
- (c) La perpendicular BZ a QD ; el punto I sobre DZ de tal manera que $DZ \cong ZI$.
- (d) DL paralela a BI , con L sobre BG .
- (e) El punto H sobre BG , de tal manera que los ángulos HDL y BGA sean congruentes.



(1)
$$\angle QDN = \frac{\angle HDL}{2}$$

(a) $\angle QDN + \angle GDQ = \angle GDN$ (recto por construcción)

(b) $\angle OCK + \angle OKC$ es recto ($\triangle OCK$ es rectángulo)

(c) $\angle OKC \cong \angle GDQ$ (por construcción)

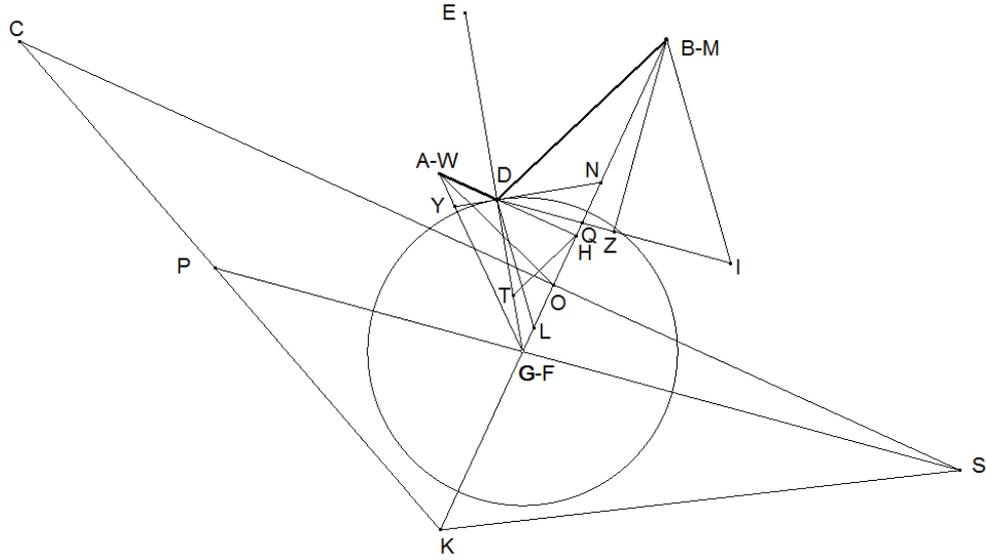
(d) $\angle QDN \cong \angle OCK$ (por (a), (b) y (c))

(e) $\angle OCK = \frac{\angle BGA}{2}$ (por construcción)

- (2) $\angle BDQ = \frac{\angle BDL}{2}$
- (f) $\angle BGA \cong \angle HDL$ (por construcción)
- (a) $\angle BDL = \angle BDQ + \angle QDL$
- (b) $\angle QDL \cong \angle QIB$ (alternos entre paralelas)
- (c) $\angle QIB \cong \angle BDQ$ ($\triangle DBI$ es isósceles)
- (d) $\angle BDL = 2\angle BDQ$ (por (a), (b) y (c))
- (3) $\angle BDN \cong \angle NDH$
- (a) $\angle BDN + \angle QDN = \angle BDQ$
- (b) $\angle BDN = \frac{\angle BDL - \angle HDL}{2}$ (reemplazando (1) y (2) en (a))
- (c) $\angle BDN = \frac{\angle BDH}{2}$, (pues $\angle BDL - \angle HDL = \angle BDH$)
- (d) $\angle BDH = \angle BDN + \angle NDH$
- (4) $\angle BDE \cong \angle HDG$ Sus ángulos complementarios ($\angle BDN$ y $\angle NDH$) son congruentes (3)
- (5) H, D y A son colineales Conjetura
- (6) $\angle BDE \cong \angle EDA$
- (a) $\angle EDA \cong \angle HDG$ (dado (5), ellos son opuestos por el vértice)
- (b) $\angle HDG \cong \angle BDE$ (por (4))

Demostración de la Conjetura (5)

- (f) Prolongamos HD hasta cortar GA en un punto W , por tanto W es colineal con H y D . Mostraremos que W coincide con A . Sea el triángulo GHW . Trazamos HT paralelo a BD (con T sobre GD).



$$(1) \quad \frac{IQ}{QD} = \frac{BG}{GA}$$

(a) $\triangle SPK \approx \triangle BGD$ (pues $\frac{SP}{PK} = \frac{BG}{GD}$ (en virtud de la construcción auxiliar (iii) y $\angle BGD \cong \angle SPK$ por construcción)

(b) $\triangle FPK \approx \triangle QGD$

(c) $\triangle BDQ \approx \triangle SKF$

(d) $\triangle BQZ \approx \triangle SOF$ (estas tres semejanzas se infieren de las construcciones adelantadas y de las proporciones emergentes se concluye (1)

$$(2) \quad \frac{IQ}{QD} = \frac{BD}{DL}$$

(a) $\triangle LDQ \approx \triangle BQI$

$$(3) \quad \frac{BD}{DL} = \frac{BG}{GA}$$

(a) por (1) y (2)

$$(4) \quad \frac{BD}{DL} = \left(\frac{BG}{HG} \right) \left(\frac{HG}{GW} \right)$$

(a) $\frac{HD}{DL} = \frac{HG}{GW}$ ($\triangle HDL \approx \triangle HWG$, pues H, D, W son colineales y $\angle HDL \cong \angle HGA$ (por construcción) $\cong \angle HGW$ (pues G, A, W son colineales)

(b) $\frac{BD}{DL} = \left(\frac{BD}{HD} \right) \left(\frac{HD}{DL} \right)$ tomando HD como media proporcional de BD y DL

(c) $\frac{DH}{DL} = \frac{HG}{GW}$ (pues $\triangle HDL \approx \triangle HWG$, ya que W, L y H son colineales y $\angle HDL \cong \angle HGA$ (por construcción))

(d) $\frac{BD}{HT} = \frac{BG}{GH}$ (pues BD es paralelo a TH)

(e) $HD \cong HT$ (pues, $\triangle THD$ es isósceles, considerando que $\angle BDE \cong \angle HDG$ ((4) en la prueba anterior) y $\angle BDE \cong \angle HTD$ (alternos entre paralelas))

(f) $\frac{BD}{HD} = \frac{BG}{HG}$ (sustituyendo (e) en (d))

(g) (4) se obtiene sustituyendo (a) y (f) en (b)

(5) $\frac{BG}{GA} = \left(\frac{BG}{HG}\right)\left(\frac{HG}{GW}\right)$ (a) sustituyendo (3) en (4)

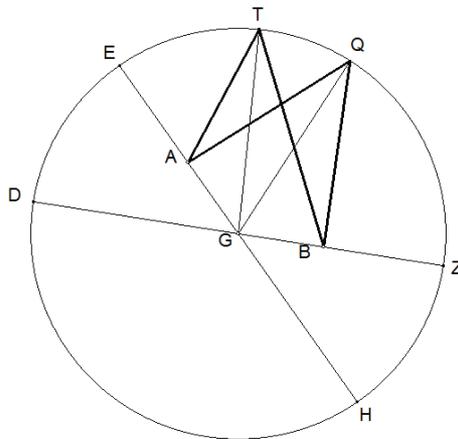
(6) $\frac{BG}{GA} = \left(\frac{BG}{HG}\right)\left(\frac{HG}{GA}\right)$ (a) tomando HG como media proporcional entre BG y GA

(7) $W=A$ (a) $GW \equiv GA$ de (5) y (6)

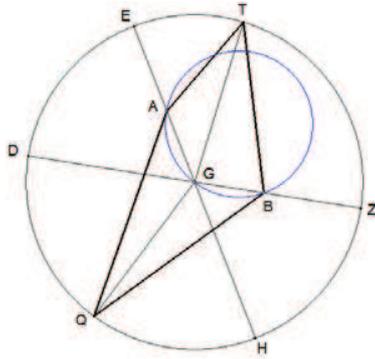
El problema de Alhacén

3.10 Espejos esféricos cóncavos

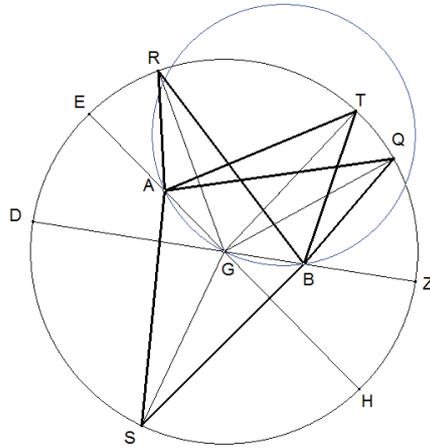
Cuando Alhacén enfrenta el caso de los espejos esféricos cóncavos sugiere el mismo procedimiento que lleva a la solución de los espejos convexos, salvo que ahora considera las dos soluciones que el protocolo arroja. Imaginemos que G es el centro de un espejo esférico, A y B son dos puntos arbitrarios (un objeto y un observador). Sean DZ el diámetro que contiene a B y EH el diámetro que contiene a A . Si T y Q son las soluciones que arroja el protocolo de Alhacén en el mismo arco EZ , Alhacén demuestra que los respectivos ángulos de reflexión no pueden ser ambos menores que el ángulo AGD (Alhacén (2006), V, 2.410–2.424). Es decir, si $\angle ATB < \angle AGD$, debe ocurrir que $\angle AQB > \angle AGD$. El lector puede encontrar un applet diseñado por A. I. Sabra para mostrar soluciones al problema de Alhacén en el caso de los espejos esféricos cóncavos en la siguiente dirección: <http://www.people.fas.harvard.edu/~sabra/applets/>



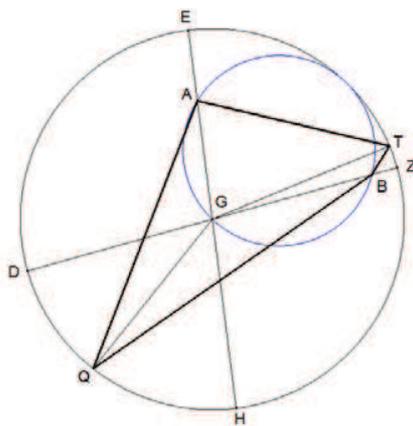
Sea G el centro de un espejo esférico. A y B dos puntos libres (uno de ellos un objeto y el otro un observador). Para evaluar si el problema de Alhacén tiene una, dos, tres o cuatro soluciones, Alhacén pide trazar la circunferencia que pasa por A , B y G . Esta nueva circunferencia puede no cortar el espejo, cortarlo en dos puntos o hacerlo sólo en un punto. Para cada caso habrá que esperar un comportamiento diferente. Si dicha circunferencia no corta el espejo, hay sólo una solución en el arco EZ (Alhacén (2006), V, 2.472–2.474).



Si dicha circunferencia corta al espejo en dos puntos, puede haber hasta cuatro (no más) soluciones diferentes: Q, R, S, T . (Alhacén (2006), V, 2.476–2.486)



Si la circunferencia sólo corta en un punto al espejo, habrá sólo dos soluciones: T y Q (Alhacén (2006), V, 2.475).



Consultar archivos: (i) *Cóncavos* y (ii) *Cóncavos (un solo corte)*
Requerimientos: Cabri II-plus

El problema de Alhacén

3.11 Lógica del descubrimiento

La solución completa del problema de Alhacén exige, pues, hallar un punto S que determina que la proporción $\frac{SP}{PK} = \frac{BG}{GD}$ efectivamente se satisface (Lema 6). Este problema, a su vez, nos conduce a otra dificultad que exige (Lema 2) trazar una recta desde un punto en una circunferencia que corta a un diámetro de la misma en un punto tal que la distancia desde dicho corte hasta el segundo corte de esta recta con la circunferencia coincida con la distancia de un segmento dado previamente. A su turno, esta solución exige la necesaria intervención de una hipérbola, de donde hemos de sospechar que el problema de Alhacén no puede resolverse con el uso exclusivo de regla y compás.

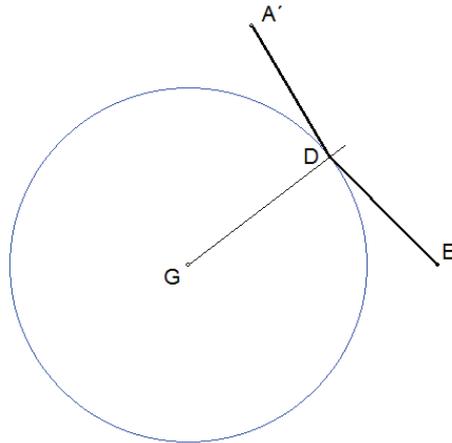
¿Cómo pudo Alhacén concebir un procedimiento tan complejo para dar con la solución del problema? Esta es una pregunta que quizá nunca logremos descifrar. De un lado, los pasos preliminares recuerdan los métodos empleados por los griegos para hallar una media proporcional entre dos segmentos dados: (i) disponerlos uno a continuación del otro sobre una recta; (ii) hallar el punto medio de la composición; (iii) trazar una perpendicular por el punto de reunión de los dos segmentos; y, por último (iv), encontrar un punto sobre dicha perpendicular que satisface condiciones adecuadas para la solución (en este caso, el punto debe ser la intersección con la circunferencia que se centra en el punto medio y pasa por los dos extremos libres de los segmentos reunidos). La familiaridad con los métodos griegos pudo guiar los pasos iniciales. De otro lado, la solución del caso simple, aquel en el que objeto y observador equidistan del espejo, pudo ofrecer las pistas siguientes.¹

Describiremos a continuación un posible procedimiento heurístico que bien podría conducir a dar con la solución propuesta por Alhacén. Primero, daremos las claves para resolver el caso trivial ajustándonos a un procedimiento similar al de hallar dos medias proporcionales. Cuando encontremos la solución advertiremos que esta es también solución para una familia de casos. A continuación deformaremos este caso (cuya solución ya conocemos) para situaciones en las que si bien observador y objeto no equidistan del centro, la solución coincide con la del caso inicial.

¹ Mark Smith propone una estrategia que atiende también a esta segunda recomendación. Sin embargo, Smith no se concentra en la construcción auxiliar inicial, sino en los elementos agregados para ofrecer la prueba final. Esto hace que las dos propuestas subrayen elementos diferentes aunque pudiesen estar emparentados. Cfr. A. M. Smith (2006), xlix-li. Una síntesis del análisis también está presente en A. M. Smith (2008), pp. 146-151.

(a) Caso trivial

Dados B y A' dos puntos libres que equidistan de G , el centro de una circunferencia de radio conocido. Se pide hallar el punto D sobre la circunferencia tal que los ángulos BDG y $A'DG$ sean congruentes.



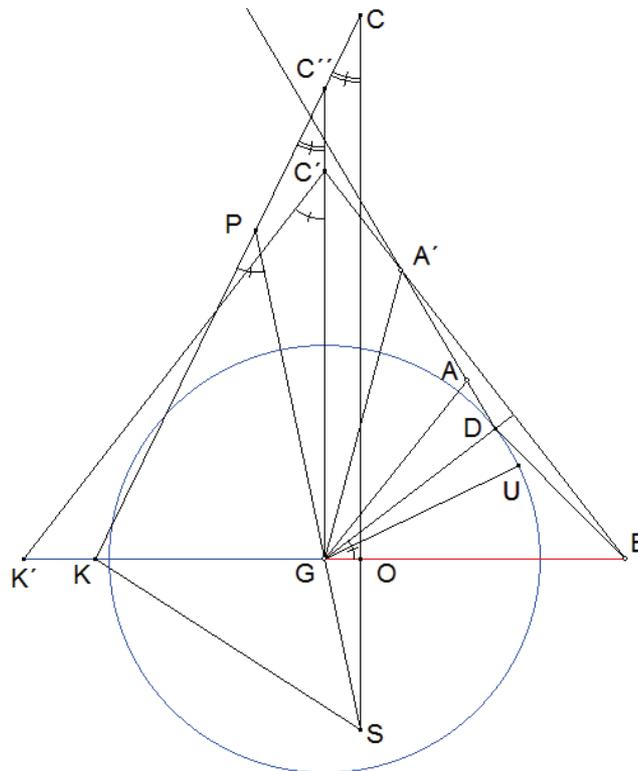
- (i) Trazar los segmentos GB y GA' . Trazar también el segmento GK' sobre la misma recta y en el sentido contrario de B , de forma que $GK' \cong GA'$.
- (ii) Construir la bisectriz del ángulo $A'GB$ y hallar el punto de corte D con la circunferencia (este es el punto que buscamos).
- (iii) Trazar una perpendicular por el punto de reunión de los dos segmentos, es decir G .
- (iv) Trazar la recta BA' y hallar el corte C' con la perpendicular. Trazar el segmento $C'K'$. Dado que los triángulos $BA'G$ y $BK'C'$ son isósceles y semejantes los ángulos $GC'K'$ y BGD son congruentes.

Así las cosas, cuando contamos con B y A' , equidistantes de G , disponemos $K'G$, congruente con GA , a continuación de BG sobre la misma recta; trazamos la recta BA' y obtenemos el corte C' con la recta perpendicular a BG trazada en G . Trazamos $C'K'$ y construimos el ángulo BGD (D sobre la circunferencia) congruente con $GC'K'$. D es el punto buscado.

Consultar archivo: *Lógica del descubrimiento*
Requerimientos: Cabri II-plus

- (iii) Trazar la perpendicular SO a BG y prolongarla hasta encontrar a KC'' en C . Es claro que los ángulos OCK y $GC''K'$ son congruentes.

Ahora bien, resulta que O es precisamente el punto medio de KB . Esto se puede demostrar usando las mismas construcciones auxiliares empleadas en la demostración general de la prueba de Alhacén. Así entonces, si tenemos inicialmente los puntos B y A (sin restricción alguna) y nos piden hallar el punto A' o el punto D , podremos seguir el procedimiento inverso. Es este el procedimiento que coincide con la sugerencia de Alhacén.

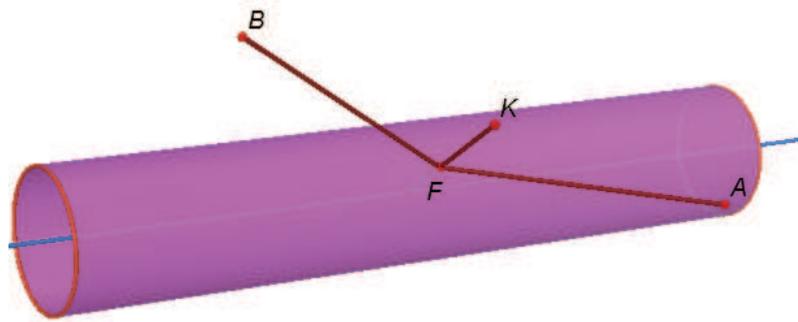


El problema de Alhacén

3.12 Espejos cilíndricos

(i) Formulación del problema

Dado un objeto y un observador (B y A) en las vecindades de un espejo cilíndrico (cóncavo o convexo), se pide hallar la ubicación precisa del punto de reflexión en la superficie del espejo.



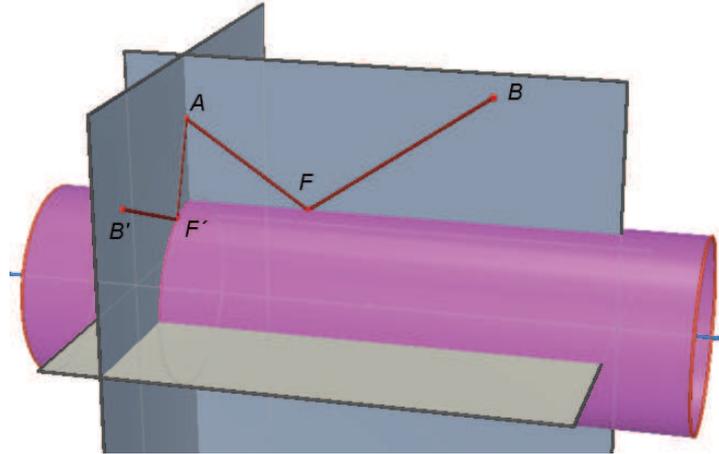
(ii) Esquema general de la construcción

Las soluciones de Alhacén, si bien siguen el mismo esquema de razonamiento, se vuelven absolutamente complejas por lo extensas y lo escabroso de los giros en los argumentos. No obstante, la estructura profunda del razonamiento es simple, elegante y poderosa. Expongo en líneas generales el esquema de razonamiento, así el lector puede seguirlo con atención en todos sus matices en un caso paradigmático y asumir que para los casos restantes vale el mismo esquema. En ese sentido puede ahorrarse la lectura de todos los casos restantes. En primer lugar, observador y objeto pueden encontrarse en un plano que contiene al eje del cilindro. En este caso el punto de reflexión ha de encontrarse en la intersección de dicho plano y la superficie del espejo (a saber, una recta longitudinal). El problema entonces se reduce a hallar la solución para el caso de un espejo plano. En segundo lugar, observador y objeto pueden encontrarse en un plano paralelo a la base del cilindro. El punto de reflexión ha de encontrarse, pues, en la intersección de dicho plano y la superficie del espejo, a saber una circunferencia. Este caso remite a hallar el punto de reflexión en un espejo esférico convexo o cóncavo. En tercer lugar –este es el caso más complejo e interesante–, no hay un plano que contenga tanto al objeto como al observador y al mismo tiempo o bien sea paralelo a la base, o bien contenga al eje del cilindro o del cono. El esquema propuesto por Alhacén es el siguiente. Sea A el observador y B el objeto. Se determina un plano paralelo a la base (del cilindro o del cono) que contenga al punto A . El corte de este plano con la superficie del espejo es una circunferencia. Llamemos a esta circunferencia S . Después, sobre dicho plano se proyecta al punto B en forma ortogonal. Sea B' la imagen de B sobre el plano que contiene a A . A continuación se resuelve el problema de Alhacén para los puntos A y B' . Este caso coincide con el caso de los espejos esféricos. Sea C' la solución de dicho problema y $C'E'$ la perpendicular a la circunferencia S en el punto C' . C' se encuentra sobre S . Luego se traza la recta que pasa por C' y es paralela al eje del cilindro. Ahora se concibe el plano que contiene a C' y al eje del cilindro (este plano contiene a la recta anterior). Ahora se busca la intersección de dicho plano con la recta AB . Sea K tal intersección. Finalmente se traza por K una perpendicular al eje del cilindro. El cruce de dicha perpendicular y la superficie del espejo es el punto buscado F . FK es la normal a la superficie del espejo en el punto de reflexión. Es claro que AF (rayo reflejado), FK (normal) y BF (rayo incidente) se encuentran en el mismo plano ABF .¹ Alhacén procura demostrar que la condición de igualdad entre los ángulos $B'C'E'$ y $E'C'A$ no se pierde en la proyección. Por lo tanto los ángulos AFK y FKB son congruentes.

¹ K está en el plano ABF , pues K está en la recta AB .

(iii) Demostración

Espejos cilíndricos: casos 1 y 2

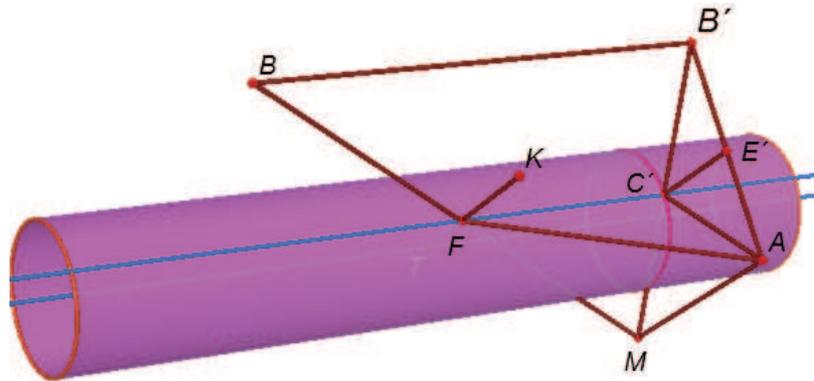


Espejos cilíndricos: casos 1 y 2

La Figura ilustra los dos casos. En el primer caso se asume que el observador A y el objeto B están en un plano que contiene el eje del cilindro. En este caso el corte de dicho plano y la superficie del espejo es una recta y el punto de reflexión –para satisfacer la primera ley de la reflexión– ha de encontrarse sobre esta recta. La ubicación del punto F replica los procedimientos descritos para los espejos planos (Alhacén (2006), V, 2.239). En el segundo caso el observador A y el objeto B' se encuentran en un plano paralelo a la base del cilindro. La intersección de dicho plano y la superficie del espejo es ahora una circunferencia. En estas circunstancias, hallar el punto de reflexión exige ocuparse de los procedimientos descritos para los espejos esféricos y, de esa forma, cabe distinguir si A y B' equidistan del eje (situación sencilla) o si difieren en su distancia al eje (situación compleja). En cualquiera de las dos situaciones valen todos los resultados establecidos con anterioridad (Alhacén (2006), V, 2.240).

Consultar archivo: *Espejos cilíndricos casos 1 y 2*
Requerimientos: Cabri IIID

Espejos cilíndricos: caso 3



Espejos cilíndricos: caso 3

Ahora asumimos que no existe un plano que contenga el eje de simetría o sea perpendicular a éste y que, además, contenga tanto al observador A como al objeto B . Alhacén pide hallar el plano que contiene a A y es paralelo a la base del cilindro (la intersección de dicho plano con el cilindro es una circunferencia), luego proyecta ortogonalmente a B sobre dicho plano y obtiene el punto B' . Después asume que B' es un nuevo objeto y encuentra el punto de reflexión C' atendiendo los procedimientos del caso 2. Ahora se traza la recta desde C' hasta el centro Q de la circunferencia que es paralela a la base del cilindro y contiene a A . Esta recta es perpendicular (normal) a la superficie del espejo en C' . Se traza a continuación en el mismo plano la recta AM paralela a QC' y se obtiene la intersección M con la recta $B'C'$. Ahora se traza la recta $C'F$ ortogonal al plano $AC'B'$ y se traza la recta MB . La intersección de MB con $C'F$, a saber el punto F , es el punto de reflexión que estamos buscando. K es la intersección de AB con TF (TF es la normal al espejo en F) y E la intersección de AB' con QC' (Alhacén (2006), V, 2.241 – 2.247).

- | | | |
|-----|--|--|
| (1) | La recta BM está en el plano $BB'C'$ | (a) $B'B$ y $C'F$ son perpendiculares al plano $B'C'A$, por construcción. Luego $C'B'$ define la intersección de los planos $C'B'A$ y $C'B'B$ |
| | | (b) M está en la intersección de los planos $C'B'A$ y $C'B'B$ pues por construcción reside en la recta $C'B'$, por tanto M está en el plano $BB'C'$. |
| (2) | AM es paralela a KF , luego BF , FA y FK están en el mismo | (a) La recta $QC'E'$ es perpendicular al plano de tangencia al cilindro en el punto C' . |

plano

(b) La recta AM es perpendicular al plano de tangencia al cilindro en C' , pues es paralela a $C'E'$ en el plano $AB'C'$.

(c) La recta FK es paralela a AM y está en un plano paralelo a AMB' , por tanto está también en un plano perpendicular al plano tangente al cilindro en C' .

(d) FK es paralela a AM , pues lo es a $C'E'$ (ambas son perpendiculares a TQ)

(3) El triángulo AFM es isósceles

(a) $MF^2 = MC'^2 + FC'^2$ (Teorema de Pitágoras en $\triangle MC'F$)

(b) $AC'^2 = AC'^2 + FC'^2$ (Teorema de Pitágoras en $\triangle AFC'$)

(c) $AC' \cong MC'$ pues M podría ser contemplado como la imagen del objeto B' visto desde el punto A a través del espejo plano que coincide con el plano tangente a la superficie del cilindro en C' .

(d) $MF \cong AF$, por (a), (b), (c)

(4) $\angle KFA \cong \angle BFK$

(a) $\angle FAM \cong \angle FMA$ por (3)

(b) $\angle KFA \cong \angle TFM$ son los complementos de (a)

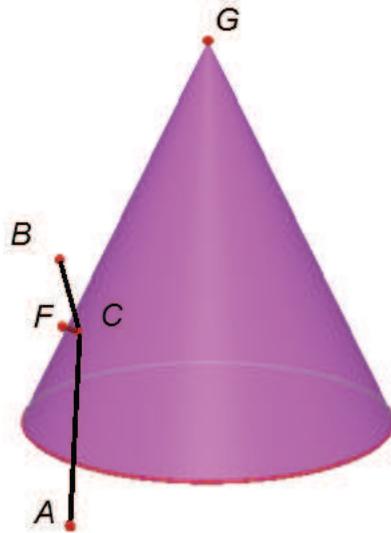
(c) $\angle BFK \cong \angle TFM$ opuestos por el vértice

El problema de Alhacén

3.13 Espejos cónicos

(i) Formulación del problema

Dado un objeto y un observador (B y A) en las vecindades de un espejo cónico (cóncavo o convexo), se pide hallar la ubicación precisa del punto de reflexión en la superficie del espejo.



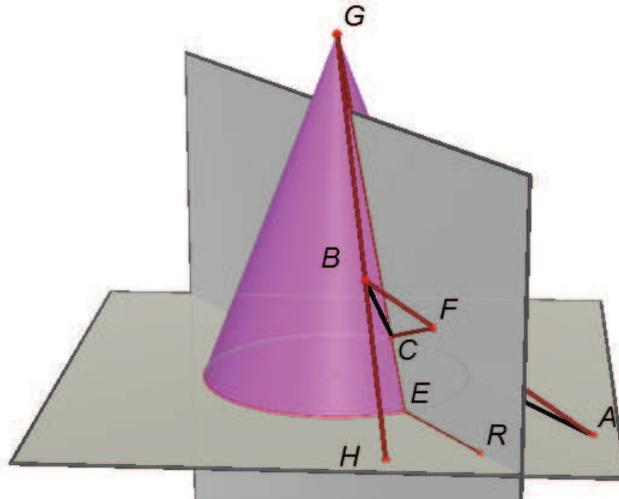
(ii) Esquema general de la construcción y demostración

Para llevar a cabo el análisis de los espejos cónicos, Alhacén distingue seis casos que dependen de las posiciones del objeto y el observador con respecto a un plano paralelo a la base y levantado en el vértice del cono. (1) Objeto y observador están ambos debajo del plano, (2) ambos están en el plano, (3) ambos están encima del plano, (4) uno de ellos está en el plano y el otro debajo del plano, (5) uno de ellos está en el plano y el otro encima del plano, (6) uno de ellos está encima y el otro debajo del plano.

Espejos cónicos: caso 1

Imaginemos que los puntos A (observador) y B (objeto) se encuentran por debajo del plano superior. Puede ocurrir que ambos estén en un plano que contiene el eje del cono. Así, la intersección de dicho plano con la superficie del cono es una recta y la ubicación del punto de reflexión se hace idéntica al caso de los espejos planos. De otra parte, si A y B están en un plano paralelo a la base y diferente del plano superior la intersección del plano y el cono resulta ser una circunferencia y, en ese orden de ideas, la situación se hace análoga a la ubicación del punto de reflexión en un espejo esférico. Si los dos puntos, en el último caso, equidistan del eje la solución es simple, el caso contrario exige el protocolo complejo presentado para dichos espejos. Si A y B difieren en posición de los dos casos anteriores la solución exige un procedimiento semejante al descrito para la condición análoga en los espejos cilíndricos. A saber, se obtiene una imagen de B en el plano que contiene a A y es paralelo a la base del cono. Esta imagen se obtiene proyectando a B desde el punto G . Después se resuelve el problema de Alhacén para el caso de los puntos A y H (imagen de B). Sea E dicha solución. Después se construye el plano que contiene a E y a G (vértice del cono) y es ortogonal al plano tangente que contiene a EG . Luego se traza la recta AB y se halla el corte con el plano anterior. Sea F dicho corte. Se proyecta F ortogonalmente sobre GE y el punto de base de dicha ortogonal, que en la figura se denomina C , es el punto que satisface las condiciones buscadas (Alhacén (2006), V, 2.271 – 2.278).

**Consultar archivo: *Espejos cónicos caso 1*
Requerimientos: Cabri IIID**

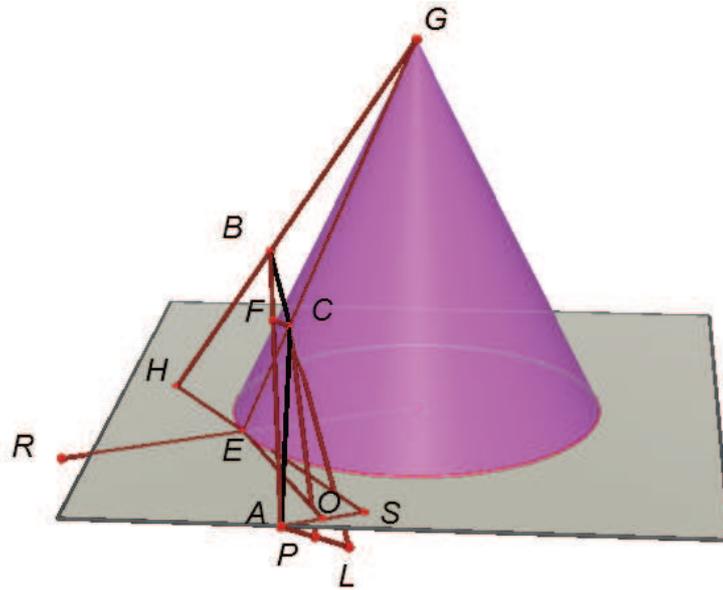


Espejos cónicos: caso 1

Para efectos de la justificación se agregan los siguientes elementos. S es la imagen de A como si fuese contemplada desde H . EO es la tangente a la circunferencia en E . AL es la paralela a FC en el plano ABC . L es la intersección de BC con AL . Este plano es paralelo al plano formado por el eje del cono y GE .

- | | |
|---|--|
| (1) $\angle ESA \cong \angle REA$, luego $\triangle EAS$ es isósceles | (a) $\angle HER \cong \angle REA$ por construcción ajustada a la segunda ley de la reflexión
(b) $\angle HER \cong \angle ESA$ alternos entre paralelas
(c) $\angle REA \cong \angle ESA$ alternos entre paralelas |
| (2) $AO \cong OS$ | EO es la altura sobre la base de un triángulo isósceles |
| (3) $AP \cong PL$ | (a) $\triangle AOP \approx \triangle ASL$ porque OP es paralelo a CE que es paralelo a SL .
(b) $AS = 2 AO$ por (2) |
| (4) $\triangle CAL$ es isósceles, por tanto $CL \cong CA$ y $\angle CLA \cong \angle CAL$ | (a) CP es perpendicular a AL , porque CP es perpendicular a CF y este paralelo a AL (por construcción)
(b) (3) |
| (5) $\angle BCF \cong \angle FCA$ | (a) $\angle CAL \cong \angle FCA$ alternos entre paralelas |

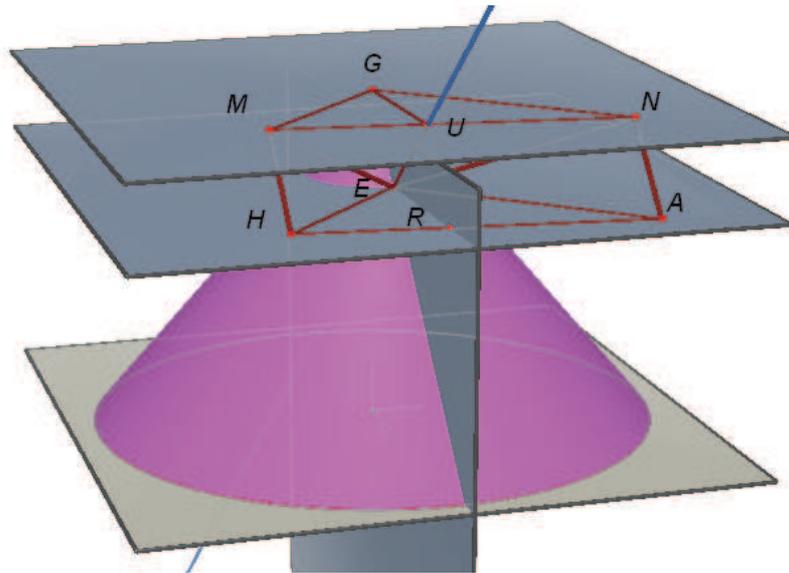
(b) $\angle CLA \cong \angle BCF$ alternos entre paralelas



Espejos cónicos: caso 1

Espejos cónicos: casos 2 y 3

Sean M y N dos puntos en el plano paralelo a la base y que contiene al vértice G . GU es la bisectriz del ángulo MGN (U en el corte con MN). G es una solución trivial y degenerada del problema de Alhacén en las condiciones planteadas. El plano que contiene al eje de simetría y al punto U corta simétricamente al cono –de hecho lo corta en las rectas que delimitan el cono (hipérbolas degeneradas)–. Ahora se traza la perpendicular a dicho corte pasando por U . Sea E el punto que sirve de base para dicha perpendicular. A continuación se concibe el plano paralelo a la base y que contiene a E . Sobre este plano se proyectan los puntos M y N usando paralelas a GE . Sean H y A las proyecciones mencionadas. R es la proyección de U siguiendo el mismo esquema. Construyendo el argumento en forma análoga al caso 1 se puede mostrar que los ángulos HER y REA son congruentes. Por lo tanto E es el punto de reflexión que permitiría contemplar a A desde H . Explotando más allá la analogía también se puede mostrar que los ángulos MEU y UEN son también congruentes. EU es perpendicular al plano tangente en E , ME , EU y EA están en el mismo plano. Por lo tanto E es la solución no-degenerada al problema planteado (Alhacén (2006), V, 2.279 – 2.287). Cuando los dos puntos se encuentran por encima del plano paralelo a la base y que contiene a G (vértice), Alhacén concibe una duplicación especular del cono inferior y procede a aplicar un algoritmo completamente análogo al anterior.



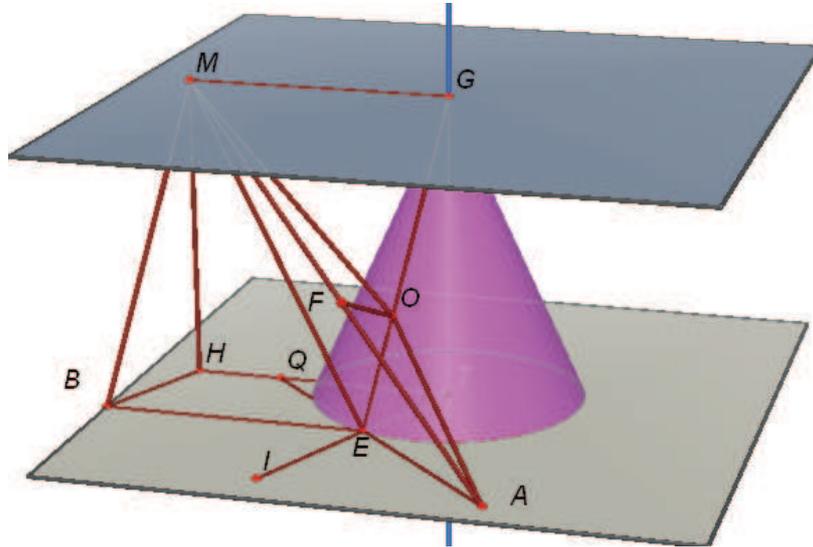
Espejos cónicos: casos 2 y 3

Consultar archivo: *Espejos cónicos casos 2 y 3*
Requerimientos: Cabri IIID

Espejos cónicos: casos 4 y 5

Sea M (observador) en el plano superior y A (objeto) por debajo de dicho plano. Se construye el plano que contiene al punto A y es paralelo a la base. M se proyecta ortogonalmente sobre dicho plano. Sea H dicha proyección. Desde A se traza una recta que corta la circunferencia en el punto E de tal manera que $EQ \cong QT$ (T es el centro de la circunferencia). Este paso exige hacer uso del Lema 5. A continuación se construye BH paralelo y congruente a TE . Se traza BE y luego AM quien debe cortar en F al plano GTE . TI es normal a la circunferencia en E . Ahora se traza la perpendicular a GE que pasa por F . Sea O la base de dicha perpendicular. A continuación se mostrará que O es el punto buscado (Alhacén (2006), V, 2.289 – 2.293).

Consultar archivo: *Espejos cónicos casos 4 y 5*
Requerimientos: Cabri IIID



Espejos cónicos: casos 4 y 5

- | | |
|---|--|
| <p>(1) $MB \cong GE$ y, además, MB es paralelo a GE</p> | <p>(a) $HT \cong BE$ y además son paralelos. Pues $HTEB$ es un paralelogramo por construcción.</p> <p>(b) $HT \cong MG$ y además son paralelos. Pues $MHTG$ es un paralelogramo</p> |
| <p>(2) $\angle IEB \cong \angle IEA$, luego A se refleja en B por E</p> | <p>(a) $\angle IEB \cong \angle ETQ$ alternos entre paralelas</p> <p>(b) $\angle ETQ \cong \angle TEQ$ el triángulo TEQ es isósceles por Lema 5</p> <p>(c) $\angle TEQ \cong \angle IEA$ opuestos por el vértice</p> |
| <p>(3) $\angle MOF \cong \angle FOA$</p> | <p>Se replica en forma análoga el procedimiento final del caso 1</p> |

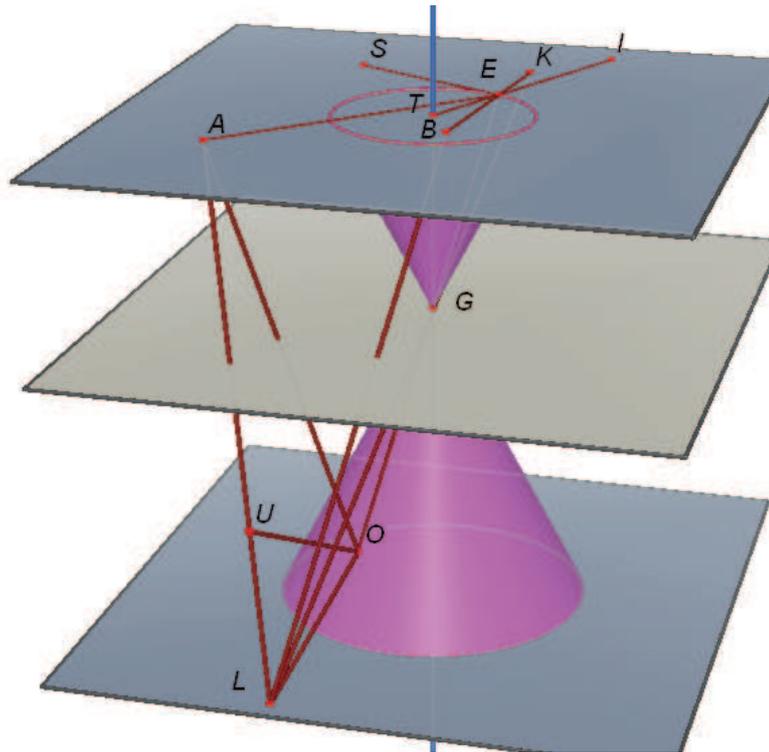
Si A se encuentra por encima del plano paralelo a la base en el vértice se replica el procedimiento anterior agregando la imagen especular del cono con respecto a dicho plano.

Espejos cónicos: caso 6

Por último, si A (punto de vista) se encuentra encima del plano que contiene a G (vértice) y este plano es paralelo a la base y, además, L (objeto) se encuentra debajo del mismo, el procedimiento para hallar el punto de reflexión, aunque análogo a los anteriores, exige las siguientes variaciones. Se construye la imagen especular del cono inicial y se concibe el plano que contiene a A y es paralelo a la base. La intersección de dicho plano con el cono es la circunferencia de centro T . Ahora se traza la recta LG y se busca la intersección con el plano mencionado. Sea K dicha intersección. Ahora se busca el punto E , sobre la circunferencia, tal que la tangente ES a la circunferencia biseca al ángulo AEK . Este paso exige atender las indicaciones del Lema 4.¹ Se traza por L una paralela a GE y se busca la intersección de dicha paralela con el plano AEK . Sea B dicho punto. Se traza la recta AL y se determina el corte U con el plano GTE . Desde U se traza la perpendicular a GE y se determina el punto de corte de dicha perpendicular. Sea O dicho punto. Este es, pues, el punto buscado (Alhacén (2006), V, 2.294 – 2.299).

**Consultar archivo: *Espejos cónicos caso 6*
Requerimientos: Cabri IIID**

¹ Si hay solución para L (en el caso del espejo cónico), no debe haber solución para K y A vistos como objetos frente a un espejo esférico convexo. Por tal razón Alhacén busca una solución que ahora compromete una tangente que biseca un ángulo y no una normal. Este hecho garantiza la satisfacción de las condiciones matemáticas aun cuando se suavizan las exigencias físicas.



Espejos cónicos: caso 6

(1) $\angle AET \cong \angle TEB$

(a) $\angle AES \cong \angle SEK$ por construcción

(b) $\angle AET \cong \angle KEI$ son complementos de ángulos congruentes

(a)

(c) $\angle KEI \cong \angle TEB$ son opuestos por el vértice

(2) $\angle AOU \cong \angle UOL$

Se replica en forma análoga el procedimiento final del caso 1

El problema de Alhacén

3.14 Solución de Huygens

En una carta de Huygens a Oldenburg en junio de 1669 el matemático calificó la solución de Alhacén con los siguientes adjetivos: «*larga y tediosa*» [longa admodum ac tediosa]¹. Christian Huygens (1629-1695) propuso una solución en 1669 y después la perfeccionó en 1672. La propuesta de Huygens hace uso de herramientas propias del álgebra moderna y la geometría analítica. Presentamos a continuación el esquema general de la solución de Huygens y su modelación en Cabri II Plus. La demostración o justificación de la solución se puede consultar en la bibliografía citada.² Sea G el centro del espejo esférico, A y B los puntos que determinan las posiciones de objeto y observador.

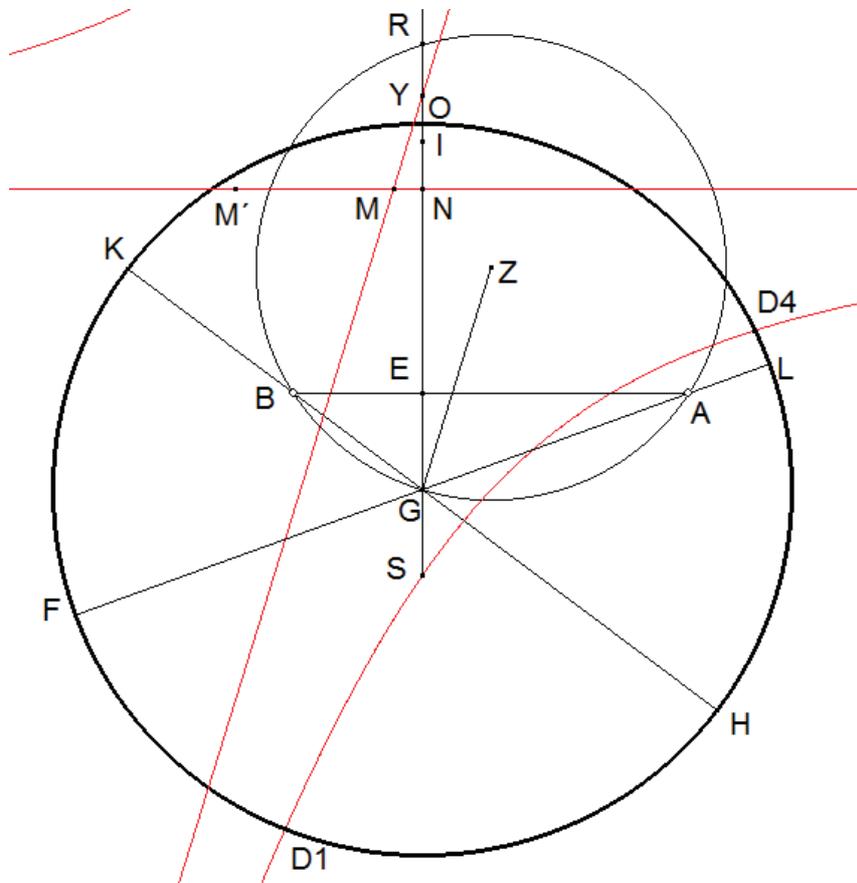
Esquema general de la construcción

- (i) Se trazan los diámetros FL y KH que contienen respectivamente los puntos A y B .
- (ii) Se construye la circunferencia que pasa sobre A , B y G . Sea Z el centro de dicha circunferencia.
- (iii) Se traza $GERO$ perpendicular a AB , E en la recta BA , R en la circunferencia ABG , O en la superficie del espejo.
- (iv) Se encuentra el punto N sobre GO de tal manera que GO sea media proporcional entre GR y GN . Es decir: $\frac{GR}{GO} = \frac{GO}{GN}$. Se traza $M'N$ perpendicular a GO .
- (v) Se encuentra el punto I sobre GO de tal manera que GO sea media proporcional entre GI y un segmento de longitud cuatro veces mayor a GE . Es decir: $\frac{GI}{GO} = \frac{GO}{4GE}$. Se localiza el punto Y , sobre GO , de tal manera que I sea el punto medio de YN . Se traza YM (M sobre $M'N$) paralela a GZ .

¹ C. Huygens (1940), p. 207, p. 330.

² C. Huygens (1940), pp. 265-271; 328-333.

- (vi) Se obtiene el punto S sobre GO de tal manera que $(IS)(IS) = \frac{(GO)(GO)}{2} + (GI)(GI)$. Se obtiene X sobre GO de tal manera que $SI = IX$. Se construye la hipérbola que pasa por S y X y tiene como asíntotas las rectas $M'M$ y MY .
- (vii) Finalmente se obtienen los cortes D_1, D_2, D_3, D_4 de la hipérbola con el espejo. Estas son las soluciones buscadas. Puede ocurrir que no sean cuatro los cortes.

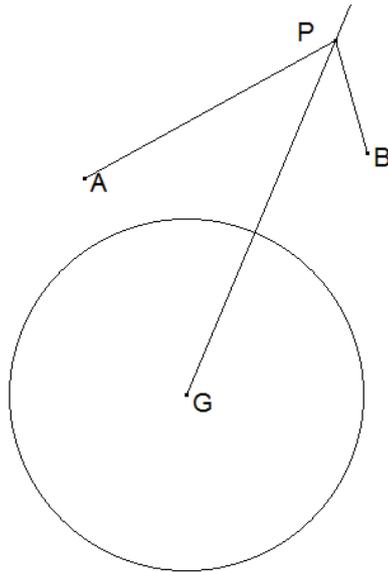


Consultar archivo: *Problema de Alhacen (Solución de Huygens)*
 Requerimientos: Cabri II Plus

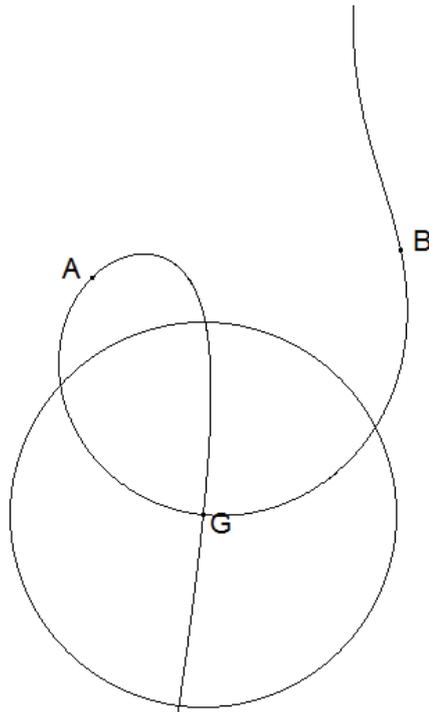
El problema de Alhacén

3.15 Solución de Isaac Barrow

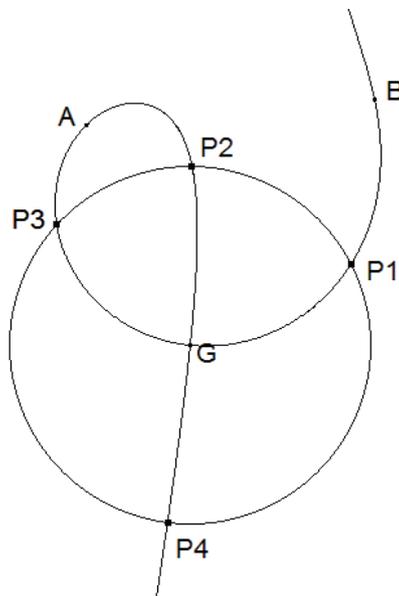
En las *Lectiones Opticae & Geometricae* Isaac Barrow se ocupa del Problema de Alhacén en la lección IX. Allí propone una interesante solución que se auxilia en una curva que el autor no precisa bien cómo construir. Dicha curva se puede construir en forma aproximada con el software de geometría dinámica Cabri. Sea G el centro del espejo esférico, A el punto que representa la ubicación del observador y B la ubicación del objeto. Consideramos una semirrecta cualquiera que se origine en G y hallamos sobre ella un punto P tal que los ángulos APG y GPB sean congruentes.



Ahora construimos el lugar geométrico de todos los puntos P cuando concebimos todas las semirrectas que se originan en G . Cualquier punto P de dicho lugar satisface la condición según la cual $\angle APG \cong \angle BPG$ (en particular, A y B pertenecen a dicho lugar geométrico).



Resta determinar los puntos del lugar geométrico que cortan a la circunferencia que define el plano de corte del espejo esférico. Estos son los puntos buscados: P_1 , P_2 , P_3 , P_4 .



Consultar archivo: *Solución Barrow*
Requerimientos: Cabri II Plus

El problema de Alhacén

4. Fuentes

- ALHACEN. (1974). "Parabolical Burning Mirrors". En E. Grant (1974), pp. 413-417.
- ALHACEN. (2001). Ver Smith, M. (2001).
- ALHACEN. (2006). Ver Smith, M. (2006).
- ALHACEN. (2008). Ver Smith, M. (2008).
- APOLONIO. (2000). *Conics*. Santa Fe, Green Lion Press. Edición preparada por Dana Densmore.
- APOLONIO. (1896). *Treatise on Conic Sections*. Chicago, Powell's Bookstore. Edición preparada y anotada por T. L. Heath.
- BAKER, M., (1881), "Alhazen's Problem. Its Bibliography and an Extension of the Problem", *American Journal of Mathematics*, Vol. 4, No. 1, pp. 327-331.
- BARROW, Isaac, (1674), *Lectiones Opticae & Geometricae*, Typis Gulielmi Godbid.
- CARDONA, Carlos. (2012). "El problema de Alhacén", *Asclepio*, en prensa.
- EUCLÍDES. (1956). *The thirteen books of the Elements*. New York, Dover Publications, INC. Traducción al inglés y edición crítica a cargo de Thomas L. Heath.
- EUCLÍDES. (2000a). *Óptica*. Madrid, Editorial Gredos. Traducción al español de Paloma Ortiz García.
- EUCLÍDES. (2000b). *Catóptrica*. Madrid, Editorial Gredos. Traducción al español de Paloma Ortiz García.
- EL-BIZRI, Nader (2005). "A philosophical perspective on Alhazen's Optics". *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 15, pp. 189-218.
- GALENO. (1968). *On the usefulness of the parts of the body*. New York, Cornell University Press. Traducido del griego con comentarios por Margaret Tallmadge May. 2 volúmenes.
- GRANT, Edward (editor). (1974). *A Source Book in Medieval Science*. Cambridge, Mass, Harvard University Press.
- GRANT, E. & Murdoch, J. (editores) (1987). *Mathematics and its applications to science and natural philosophy in the Middle Ages*. Cambridge, Cambridge University Press.

- HEATH, Sir Thomas. (1981). *A history of Greek Mathematics*. New York, Dover Publications, Inc. Volúmenes 1 y 2.
- HUYGENS, Christiaan. (1940). *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens*, vol. XX (Musique et Mathématique Musique. Mathématiques de 1666 à 1695). La Haye.
- KNORR, Wilbur R. (1985). "Archimedes and the pseudo-Euclidean catoptrics: early stages in the ancient geometric theory of mirrors". *Archives Internationales d'histoire des sciences* **35**: 28-105.
- KNORR, Wilbur R. (1994). "Pseudo-Euclidean reflections in ancient optics: a re-examination of textual issues pertaining to the Euclidian optica and catoptrica". *Physis* 31: 1-45.
- PTOLOMEO. (1996). Ver Smith M. (1996).
- RASCHED, Roshdi. (1990). "A pioneer in Anaclastics: Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses". *Isis*, Vol. 81, No. 3, pp. 464-491.
- SABRA, A. I. (1982). "Ibn al-Haytham's lemmas for Solving 'Alhazen's Problem'". *Archive for History of Exact Sciences*, 26, 4, pp. 299-324.
- SABRA, A. I. (1987). "Psychology versus mathematics: Ptolemy and Alhazen on the moon illusion". En Grant E. & Murdoch, J. (1987), pp. 217-247.
- SABRA, A. I. (2003). "Ibn al-Haytham, brief life of an Arab Mathematician: died circa 1040". En <http://www.harvardmagazine.com/on-line/090351.html>
- SABRA, A. I. <http://www.people.fas.harvard.edu/~sabra/applets/>
- SIMON, Gerard. (2001). "Optique et perspective: Ptolémée, Alhazen, Alberti", en *Revue d'histoire des sciences*, vol. 54, No. 3, pp. 325-350.
- SMITH, A. Mark. (1996). *Ptolemy's Theory of Visual Perception*. Philadelphia, The American Philosophical Society. Traducción al inglés y edición preparada por A. Mark Smith.
- SMITH, A. Mark. (2001). *Alhacen's Theory of visual perception*. Philadelphia, American Philosophical Society. Traducción al inglés con comentarios de los tres primeros libros del *De Aspectibus* de Alhacén, preparado por Mark Smith. 2 volúmenes.
- SMITH, A. Mark. (2005). "The Alhacenian account of spatial perception and its epistemological implications". *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 15, pp. 219-240.
- SMITH, A. Mark. (2006). *Alhacen on the principles of reflection*. Philadelphia, American Philosophical Society. Traducción al inglés con comentarios de los libros 4 y 5 del *De Aspectibus* de Alhacén, preparado por Mark Smith. 2 volúmenes.

SMITH, A. Mark. (2008). *Alhacen on image-formation and distortion in mirrors*. Philadelphia, American Philosophical Society. Traducción al inglés con comentarios del libro 6 del *De Aspectibus* de Alhacén, preparado por Mark Smith. 2 volúmenes.

SMITH, A. Mark. (2008a). "Alhacen's Approach to "Alhazen's Problem"". *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 18 pp. 143-163.

STEFFENS, Bradley. (1995). *Ibn al-Haytham First Scientist*. Greensboro, Morgan Reynolds.