

Universidad del Rosario
Facultad de Economía
Economía Matemática 2017-1
Taller 6: Optimización

Profesores: Andrea Atencio De León, Andrés F. Cárdenas, Juan C. Zambrano.

Se deben entregar en grupos de tres personas los siguientes problemas: 3, 4b, 4c, 5, 6a, 6g, 7a, 8, 10a, 11.

1. Suponga que la función de demanda inversa para un producto es

$$P = 400 - 2Q,$$

y que la función de costo promedio es

$$\overline{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q},$$

donde Q es el número de unidades, y P y C se expresan en dólares por unidad. Determine el precio en el que la utilidad es máxima.

2. Considere que en una empresa se tiene, para un cierto producto, la siguiente función de beneficios:

$$\pi = pQ - wL - rK,$$

donde p es el precio por unidad, Q es el nivel de producción, L son unidades de mano de obra, K son las unidades de capital, y w, r son los precios de los insumos L y K , respectivamente. Además, suponga que la tecnología de producción viene representada por la función $Q = L^\alpha K^\beta$, con $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$.

Determine el nivel óptimo de contratación de insumos (L^*, K^*) que maximiza la ganancia de la empresa.

3. Una empresa que produce dos bienes, con precios p_1 y p_2 respectivamente, enfrenta las siguientes funciones de demanda y costo:

$$Q_1 = 40 - 2p_1 - p_2$$

$$Q_2 = 35 - p_1 - p_2$$

$$C = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 10$$

- a) Determine una expresión para los beneficios de la empresa en términos de los niveles de producción Q_1 y Q_2 .
 - b) Encuentre los niveles de producción que maximizan el beneficio.
 - c) ¿Cuál es el beneficio máximo?
4. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones y determine su naturaleza (máximo, mínimo o punto de silla). Use el criterio de la matriz hessiana.

- a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 5$
- b) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4axy + 8a^4$; $a \in \mathbb{R}, a > 0$
- c) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$
- d) $f(x, y) = \frac{4}{x} + \frac{9}{y} + x + y + 1$
- e) $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 12x + 10$
- f) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$
- g) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
- h) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$
- i) $f(x, y, z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$

5. La función de producción de un cierto bien Q que se produce con los insumos z_1, z_2 y z_3 es:

$$Q(z_1, z_2, z_3) = 150 - (z_1 - 3)^2 - (z_2 - 8)^2 - (z_3 - 5)^2$$

Se desea determinar la combinación de insumos que maximice la producción del bien Q

- a) Encuentre el punto crítico (z_1^*, z_2^*, z_3^*) de Q a partir de las condiciones de primer orden.
 - b) Muestre, a través del criterio de la matriz hessiana, que el punto crítico obtenido corresponde a un máximo de Q.
 - c) Calcule Q^* .
6. Use el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de las siguientes funciones sujetas a las condiciones dadas:
- a) $f(x, y) = x^2y^2$ s.a $x^2 + y^2 = 1$ ($x, y \geq 0$)
 - b) $f(x, y) = x - 3y - xy$ s.a $x + y = 6$
 - c) $f(x, y) = e^x + e^y$ s.a $x + y = 2$
 - d) $f(x, y) = 7 - y + x^2$ s.a $x + y = 0$
 - e) $f(x, y) = x^2 + 24xy + 8y^2$ s.a $x^2 + y^2 = 25$
 - f) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ s.a $x - y + z = 1$ y $x + 3y = 2$
 - g) Para qué valores de $b \in \mathbb{R}$, el punto $P(1, 1, -1)$ es un mínimo de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + bxy + x + y + 2z$ restringida a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
7. Para cada literal en el problema anterior, determine si aumenta, disminuye o permanece constante el valor óptimo de f si se da un aumento pequeño en el valor de la constante que aparece en las restricciones (Δk). Adicionalmente, calcule su cambio df^* a primer orden.
8. Una planta de fabricación de productos químicos puede producir z unidades de un producto Z, dadas y unidades del compuesto químico Y y x unidades del compuesto X; donde $z = 500x^{0.6}y^{0.3}$. El producto X cuesta 10 unidades monetarias por unidad, mientras que

el producto Y cuesta 25 unidades monetarias por unidad. La compañía desea maximizar la producción de Z teniendo en cuenta que pueden invertir máximo 2000 unidades monetarias en el proceso de producción.

Establezca el problema de optimización en términos de multiplicadores de Lagrange, y calcule cuál es la producción máxima de Z . ¿Cuántas unidades de los productos Y y X son necesarias para alcanzar dicho máximo?

9. Dada la función de utilidad $U(x, y) = (x + 2)(y + 1)$. Determine los niveles óptimos de compra x^*, y^* para hacer máxima a $U(x, y)$, sujeto a la condición $4x + 6y = 130$.
10. Derive las condiciones del teorema de Kuhn-Tucker para los siguientes problemas y encuentre su solución:

$$\begin{aligned} a) \quad & \text{Max } -8x^2 - 10y^2 + 12xy - 50x + 80y \\ & \text{s.a. } x + y \leq 1 \\ & 8x^2 + y^2 \leq \frac{9}{4} \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & \text{Max } -x^2 - 3y^2 + 3xy + x + y \\ & \text{s.a. } 2x + y \leq 2 \\ & -x + y \leq -1 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad & \text{Max } (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \\ & \text{s.a. } -x + y = 1 \\ & x + y \leq 2 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad & \text{Min } (x - 3)^2 + (y - 5)^2 \\ & \text{s.a. } x + y \leq 7 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

11. Semanalmente se pueden contratar 160 horas de mano de obra a 15 dólares la hora. Si se quiere contratar horas de mano de obra adicionales, se debe pagar cada hora a 25 dólares. Se puede obtener capital en cantidades ilimitadas a un costo de 5 dólares la unidad de capital. Si se disponen de K unidades de capital y de L horas de mano de obra, entonces se pueden producir $L^{1/2}K^{1/3}$ máquinas. En el mercado, cada máquina se vende a 270 dólares. ¿Cómo puede la empresa maximizar su beneficio? Indique:

- a) El total de horas de mano de obra a contratar.
- b) El total de unidades de capital obtenidas.
- c) El total de máquinas a producir.