

**IMPLEMENTACION DE CÓPULAS PARA LA ESTIMACIÓN DEL
VALOR EN RIESGO**

Presentado por:
ÁNGELA MARÍA CEBALLOS LOPEZ

Supervisor de Tesis
CARLOS CASTRO IRAGORRI

Maestría en Finanzas Cuantitativas
Universidad del Rosario
Facultad de Economía
Agosto 2015

Resumen

La dependencia entre las series financieras, es un parámetro fundamental para la estimación de modelos de Riesgo. El Valor en Riesgo (VaR) es una de las medidas más importantes utilizadas para la administración y gestión de Riesgos Financieros, en la actualidad existen diferentes métodos para su estimación, como el método por simulación histórica, el cual no asume ninguna distribución sobre los retornos de los factores de riesgo o activos, o los métodos paramétricos que asumen normalidad sobre las distribuciones. En este documento se introduce la teoría de cópulas, como medida de dependencia entre las series, se estima un modelo ARMA-GARCH-Cópula para el cálculo del Valor en Riesgo de un portafolio compuesto por dos series financiera, la tasa de cambio Dólar-Peso y Euro-Peso. Los resultados obtenidos muestran que la estimación del VaR por medio de copulas es más preciso en relación a los métodos tradicionales.

Palabras Clave: cópula, dependencia, Valor en Riesgo, modelos ARMA GARCH
Clasificación JEL: C13, C14, C16, G10

Abstract

Dependency between the financial series is a key parameter used to estimate risk models. Value at Risk (VaR) is one of the most important measures used for financial risk management; currently there are different methods to estimate, as the historical simulation method, which assumes no distribution on returns risk factors or assets, or parametric methods that assumes normality on distributions. In this paper we propose the theory of copula as a measure of dependence between sets, we use a ARMA-GARCH-Copula model for estimating VaR, for the specific case we take a portfolio composed of two assets, daily US dollar-peso and Euro-Peso exchange rates. The results show that the estimate of VaR through copulas is more accurate compared to traditional methods.

Keywords: copula, dependency, Value at Risk, ARMA-GARCH model
JEL classification: C13, C14, C16, G10

1. Introducción

El capital regulatorio que debe tener toda entidad financiera está determinado por el portafolio de activos que lo conforman, de esta manera el capital puede disminuir en caso que el riesgo del portafolio asociado a cada activo no sea administrado correctamente, y las pérdidas excedan el valor de capital requerido en un tiempo determinado. Así mismo se pueden presentar pérdidas en el valor de los activos de un portafolio, causado por movimientos adversos de los factores que determinan el precio de los activos, lo cual está asociado al riesgo de mercado que debe administrar una entidad financiera.

Con el fin de estimar correctamente los riesgos asociados a un portafolio existen diferentes medidas que permiten cuantificar la exposición de este, ante pérdidas inesperadas. El Valor en Riesgo (VaR) cuantifica la máxima pérdida que puede llegar a tener un portafolio en un horizonte de tiempo dado y con un nivel de confianza establecido. Esta medida de riesgo constituye una de las más importantes dentro de la administración de riesgos, debido a que no solo permite estimar la pérdida que tendrá el portafolio, sino también los niveles de capital requerido y la relación de solvencia, de aquí la importancia de un correcto método de estimación, dado que si no se cuenta con un método apropiado se puede estar subestimando o sobrestimando el VaR.

De acuerdo a lo anterior se debe establecer y analizar la función de distribución de pérdidas, la cual es indispensable para describir el nivel de riesgo de pérdida del portafolio. Los métodos tradicionales para la medición del VaR son simulación histórica, simulación de Montecarlo, y los modelos paramétricos; estos métodos modelan la distribución conjunta de los retornos de los activos basándose en una aproximación de la función de distribución normal multivariada, es decir se asume que estos siguen un comportamiento bajo los supuestos de normalidad; lo cual no en todos los casos es cierto, pues esto implica que los retornos de una serie financiera tienen una estructura de dependencia predeterminada y lineal, con simetría y colas livianas. Sin embargo dado los movimientos del mercado y las variables económicas que interactúan en una economía resulta inapropiado asumir que el comportamiento de los activos financieros, que responden a estos cambios siga un comportamiento basados en supuestos de normalidad, por el contrario la mayoría de los activos financieros presentan altas volatilidades en los retornos de sus precios y generalmente colas pesadas.

Hechos estilizados han comprobado que asumir normalidad sobre los retornos no resulta lo más adecuado. Dado esto se han desarrollado diferentes métodos que permiten establecer una estructura más flexible de la distribución conjunta, en este sentido se implementa la teoría de cópulas¹ para establecer la dependencia de los retornos de los activos financieros, y de esta manera obtener una aproximación más precisa para la medición de Valor en Riesgo.

Las metodologías basadas en cópulas proveen una interesante herramienta para modelar distribuciones multivariadas conjuntas cuando se conoce únicamente la distribución marginal, de

¹El término cópula proviene del Latín que significa “link”. [Fantazzini]

esta manera permiten descomponer la distribución conjunta en distribuciones marginales y la función cópula. La función cópula logra una representación de las relaciones de dependencia entre vectores de variables aleatorias. Las cópulas se han convertido en una herramienta para la modelación multivariante en muchos campos, donde la dependencia multivariada es de gran interés.

La teoría cópulas fue desarrollada por primera vez por Skalar (1959) para describir funciones de distribución multivariadas definidas sobre el cubo unidad, enlazando variables aleatorias con funciones de distribución de una sola dimensión. Actualmente esta teoría ha sido implementada por varios autores en diferentes áreas financieras, tal es el caso de Jondeau y Rockinger (2006) quienes proponen una nueva metodología basada en la función cópula, la cual consiste en estimar primero la distribución univariada y la distribución conjunta, Liu y Luger (2009), realizan una estimación de un modelo GARCH-Cópula y por medio de un ejemplo numérico ilustran la eficiencia ganada de la estimación de algoritmos en el contexto de un modelo de GARCH-cópula, Vaz y Martins (2004), quienes modelan la estructura de dependencia de datos financieros multivariados utilizando el concepto de cópulas, Embrechts, Mcneil y Straumann (2002) estudian la dependencia de la representación de cópulas para una variable aleatoria, Parra y Koodi (2006) realizan una aplicación de la teoría de Cópulas para estimar el VaR de un portafolio compuesto por los índices Nasdaq y S&P500, Cherubini y Luciano (2001) utilizan la cópula arquimediana para estimar el VaR, Georges (2001) usa la cópula normal para modelar el momento de ejercicio de las opciones y fijar el precio del derivado, Cherubini et al (2004) utilizan las cópulas en aplicaciones de matemáticas financieras y en la fijación de precios de derivados, Patton (2006), estima dos modelos de copulas, dinámicos y no dinámicos en su parámetros, el análisis en su paper está motivado por un modelo de distribución conjunta de dos series de tiempo, encontrando una evidencia significativa de la dependencia por medio de cópulas, Patton (2003), utiliza cópulas para modelar la dependencia condicional entre diferentes activos, Hosing y Juri (2003), usan cópulas para modelar valor extremo, Li(2000) analiza el problema de la correlación en el incumplimiento en los modelos de riesgo de crédito y muestra que la teoría de la correlación de activos establecida por CreditMetrics, es equivalente a utilizar la función de la cópula normal, Bouyé, Durrleman, Nikeghbali, Riboulet y Roncalli (2000), usaron cópulas para medir el riesgo operacional y analizar escenarios de estrés multidimensional, Giacomini (2005) estimó el valor en riesgo de un portafolio por medio de tres clases de cópulas.

En cuanto a la literatura nacional Becerra y Melo (2008), utiliza la función cópula en la medición de riesgo financiero, tomando como ejemplo un portafolio compuesto por tres activos del mercado colombiano, concluyendo que la estimación del VaR por medio de cópulas es contundente, dado que los modelos derivados de la cópula ofrecen una estructura analítica flexible en la medición de riesgos.

El presente trabajo tiene como objetivo estimar una función cópula para calcular la dependencia entre dos series financieras, y posteriormente estimar el Valor en Riesgo (VaR) de un portafolio compuesto por la tasa representativa del mercado colombiano (TRM) -USD/COP, la cual revela el nivel diario de la tasa de cambio oficial en el mercado spot de divisas colombiano, y por otra parte la tasa de cambio EUR/COP.

Dada la volatilidad de estas tasas de cambios en la economía colombiana y en general del dólar en los mercados financieros, asumir normalidad de la distribución de los retornos no resulta lo más apropiado, por tal motivo se busca implementar la teoría de cópula para encontrar el método más adecuado de la distribución conjunta de los datos y posteriormente estimar el valor en Riesgo de estos activos.

El documento está organizado de la siguiente manera, en la sección dos se define el concepto de cópula, la función de distribución de cópula, su estimación y algunas clases de cópulas que existen, en la sección tres se presenta la aplicación de la función cópula para estimar el Valor en Riesgo de un portafolio compuesto por la TRM y la tasa EUR/COP y los respectivos resultados, finalmente en la sección 4 se dan a conocer la conclusiones.

2. Función Cópula

2.1 Definición

La función cópula une en una distribución de probabilidad multivariada a una colección de funciones marginales univariadas, de esta manera se determina la estructura de dependencia tanto de la función de distribución conjunta de un portafolio, como también de las marginales de cada uno de los activos riesgosos [Dowd, 2004b].

La cópula tiene las siguientes propiedades:

- i. $C(u_1, \dots, u_d)$ es creciente en cada componente u_i
- ii. $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, $u_i \in [0, 1]$
- iii. Para todo $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in T [0,1]^d$ con $a_i < b_i$ se tiene que:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 \dots (-1)^{i_d + \dots + i_1} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0$$

Donde $u_{j1} = a_j$ y $u_{j2} = b_j$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

- iv. Para toda cópula $C(u_1, \dots, u_d)$, se tienen los siguientes límites:

$$\text{Max} \left\{ \sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right\} \leq C(u) \leq \min\{u_1, \dots, u_d\}$$

La teoría de cópulas sigue el teorema de Sklar, el cual dice que cada distribución conjunta se puede descomponer en sus distribuciones marginales y una cópula C, responsable de la estructura de dependencia.

Sea F una función de distribución d-dimensional con marginales F_1, \dots, F_d , entonces existe una Cópula de la siguiente manera para cada $x_1, \dots, x_d \in R$. Si F_1, \dots, F_d son continuas, entonces C es única.

$$F(x_1, \dots, x_d) = C\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\} \quad (1)$$

Por otra parte si C es una cópula y F_1, \dots, F_d , son funciones de distribución, la función F es una función de distribución conjunta con marginales F_1, \dots, F_d . De esta manera la cópula única C para todo $u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0,1]^d$ está definida como:

$$C = (u_1, \dots, u_d) = F\{F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)\} \quad (2)$$

2.2 Estimación de la Cópula

Una manera para estimar la cópula es el método de funciones de inferencia por marginales (IFM), la ventaja de este método es que simplifica la estimación conjunta de todos los parámetros, el cual fue desarrollado por Shih y Lois (1995) y Joe y Xu (1996).

Sean (x_1, x_2) dos variables aleatorias con función de distribución conjunta, donde $F_i(x_i; \alpha_i)$ es la función de distribución acumulativa de x_i y $f_i(x_i; \alpha_i)$ su densidad, cada función de distribución marginal depende de parámetro α_i los cuáles serán reagrupados en el vector $\theta = (\alpha_1, \alpha_2)$, de acuerdo al teorema de Sklar se tiene:

$$F(x_1, x_2; \theta) = C(F_1(x_1; \alpha_1), F_2(x_2; \alpha_2); \theta) \quad (3)$$

$C =: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una función de distribución cópula con parámetro θ .

Derivando la Función de distribución obtenemos la función de densidad:

$$f(x_1, x_2; \theta) = c(F_1(x_1; \alpha_1), F_2(x_2; \alpha_2); \theta) f_1(x_1; \alpha_1) f_2(x_2; \alpha_2) \quad (4)$$

La densidad de la cópula está dada por:

$$c(u_1, u_2; \theta) = \frac{\partial^2 c(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (5)$$

Donde $c(u_1, u_2; \theta)$ es la densidad de la cópula, derivada de $C(u_1, u_2; \theta)$.

La función de máxima verosimilitud en logaritmos está dada por:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_{t1}, \alpha_1), F_2(x_{t2}, \alpha_2); \theta) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^2 \log f_i(x_{ti}; \alpha_i) \quad (6)$$

Posteriormente se debe maximizar la función de máxima verosimilitud en logaritmos respecto a todos los parámetros en θ .

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta} = l(\theta) = l_m(\theta_1) + l_c(\theta_1, \theta_2) \quad (7)$$

En la ecuación anterior se realizó una descomposición del score en dos partes: los parámetros de la distribución marginal F_i y los parámetros de la cópula.

De esta manera se tiene que:

$$l_m(\theta_1) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^2 \log f_i(x_{ti}; \alpha_1) \quad (8)$$

$$l_c(\theta_1, \theta_2) = \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_1, \alpha_1), F_2(x_2, \alpha_2); \theta)) \quad (9)$$

Se obtiene dos estimadores de máxima verosimilitud desarrollado por el método IFM²

$$\hat{\alpha}_i = \arg \max \sum_{t=1}^T \log f_i(x_{ti}; \alpha_i) \quad (10)$$

$$\hat{\theta} = \arg \max l_c(\hat{\theta}_1, \theta_2) \quad (11)$$

El score de la función de máxima verosimilitud está dado por:

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial l_m(\theta_1)}{\partial \theta} + \frac{\partial l_c(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta} \quad (12)$$

²El desarrollo del algoritmo de IFM y BMP por sus siglas en inglés, "Estimador de máxima verosimilitud" se encuentra detallado en Liu y Luger (2009)

2.3 Clases de Cópulas

Un primer grupo de cópulas se presenta en función de la dependencia de parámetros, en este sentido están las cópulas paramétricas donde el parámetro o parámetros cuantifican la relación de dependencia entre las variables, por otra parte las cópulas no paramétricas, donde no existe ningún parámetro, de esta manera al poseer una estructura empírica se ajustan de forma local a los datos

En función de la relación de la dependencia existen los siguientes tipos de Cópulas:

2.3.1. Cópulas Elípticas

Esta clase de cópulas están asociadas a las distribuciones elípticas, su principal característica es que representan relaciones de dependencia simétricas sin importar que lado de la distribución de una serie de datos se está analizando. Dentro de este grupo se encuentran las cópulas Normales y t-Student.

Estas cópulas poseen la siguiente forma:

$$C_{\rho}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi_{g,1}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_{g,2}^{-1}(v)} g\left(\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dx \cdot dy = (\Phi_{g,1}^{-1}(u), \Phi_{g,2}^{-1}(v)) \quad (13)$$

Donde $\Phi_{g,1}^{-1}(u), \Phi_{g,2}^{-1}(v)$ corresponden a las distribuciones conjuntas de x, y ; y ρ su coeficiente de correlación.

- *Cópula Normal*: tiene la estructura de dependencia asociada a la distribución normal multidimensional, es decir que las distribuciones marginales normales combinadas con la cópula gaussiana forman distribuciones normales multivariadas. La cópula normal se define de la siguiente manera:

$$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)), \quad u \in [0,1]^d \quad (14)$$

Su densidad está representada por:

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) \quad (15)$$

Tomando $x_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ y haciendo uso de la densidad de la distribución normal ϕ bivariada tenemos:

$$\varphi_{\rho}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)}\right) \quad (16)$$

Posteriormente con la propiedad relativa a la densidad de la cópula, se determina la densidad de la cópula normal.

$$f(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \quad (17)$$

Gráfico 1. Cópula Normal y Función de distribución

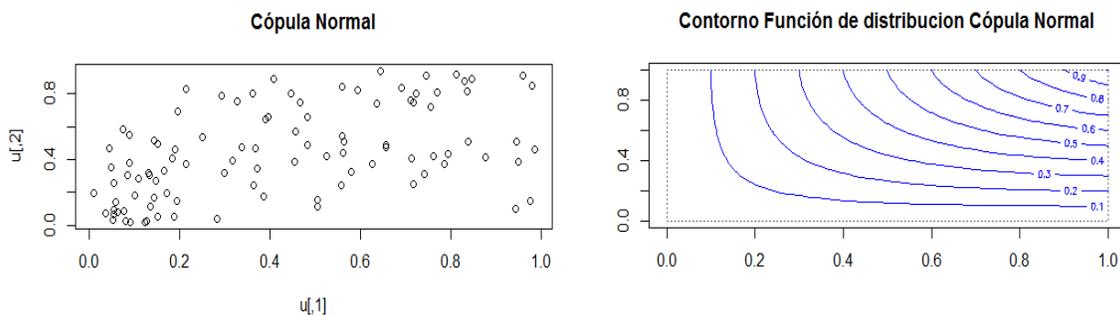
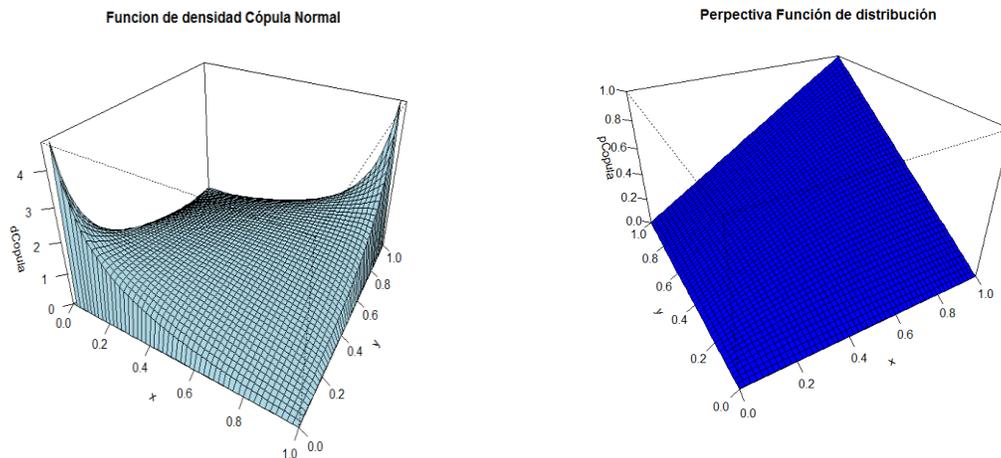


Gráfico 2. Función de densidad y Función de distribución



- *Cópula t-Student*: contiene la función de dependencia t multidimensional. En el caso bivariado la cópula t-Student se define:

$$C(u_1, u_2; \rho, \nu) = t_{\rho, \nu}(t^{-1}(u_1), t^{-1}(u_2)), \quad u \in [0, 1]^d \quad (18)$$

La densidad de la cópula t corresponde a:

$$C(u_1, u_2; \rho, v) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{v}{2})^2}{\Gamma(\frac{v+1}{2})^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{v(1-\rho^2)}\right) - \frac{v+2}{2}}{\left[\left(1 + \frac{x_1^2}{v}\right)\left(1 + \frac{x_2^2}{v}\right)\right] - \frac{v+1}{2}} \quad (19)$$

Tomando $x_1 = t_v^{-1}(u_1)$ y haciendo uso de la densidad de la distribución *t*bivariada tenemos:

$$t_{(\rho, v)}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{y_1^2 + y_2^2 - 2\rho y_1 y_2}{v(1-\rho^2)}\right) - \frac{v+2}{2} dy_1 \cdot dy_2 \quad (20)$$

Con la propiedad relativa a la densidad de una cópula se determina la densidad de la cópula *t*.

$$f(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \quad (21)$$

Grafico 3. Cópula t-Student y Función de distribución

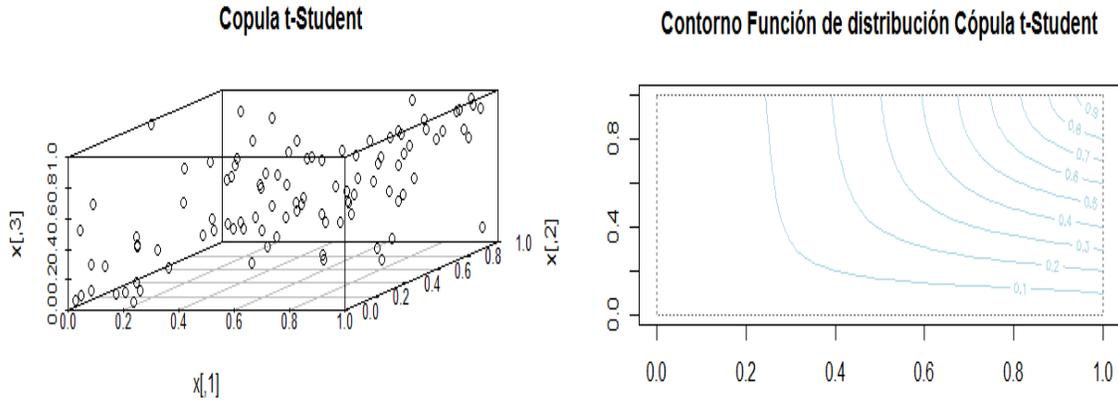
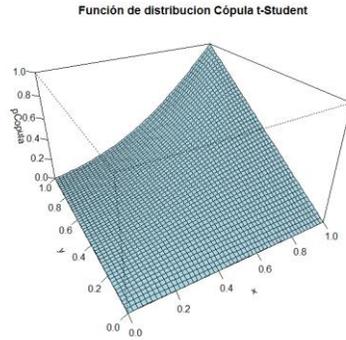


Gráfico 4. Función de distribución



Otras clases de cópulas en función de la relación de dependencia son:

2.3.2. Cópulas Arquimedianas

Son cópulas asimétricas y paramétricas, dentro de esta familia de cópulas existen diferentes clases, las más comunes y utilizadas son: la cópula de Gumbel, la cópula Clayton y la cópula Frank.

La cópula Arquimediana se define de la siguiente manera:

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (22)$$

Donde Φ es el conjunto de funciones $\varphi: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ que son continuas, estrictamente decrecientes y convexas y cumple $\varphi(0) = \infty$ y $\varphi(1) = 0$.

La función φ es conocido como el generador de la cópula y φ^{-1} es la pseudo inversa de φ .

Esta clase de cópulas logran capturar mayor número de estructuras de dependencia debido a que pueden tener más de un parámetro.

- *Cópula de Gumbel*: tiene la siguiente forma:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \exp\left(-\left(\tilde{u}_1^{-\theta} + \dots + \tilde{u}_d^{-\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right) \tilde{u}_i = -\log u_i, \quad (23)$$

- *Cópula Clayton*: tiene la siguiente forma

$$C(u_1, \dots, u_d) = \left(u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (24)$$

- *Cópula Frank*: tiene la siguiente forma:

$$C(u_1, \dots, u_d) = -\frac{1}{\theta} \log\left[1 + \frac{\prod_{i=1}^d (e^{\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta u_i} - 1)^{d-1}}\right] \quad (25)$$

Las cópulas descritas anteriormente, desempeñan un papel importante dentro de las Finanzas, por ejemplo las cópulas de Arquimedes, según Genest y Mackay (1986) poseen características importantes para la simulación de series financieras, especialmente en grandes dimensiones. Al igual que las copulas elípticas son copulas paramétricas, debido a que poseen el parámetro Rho el cual refleja el grado de dependencia entre las series.

La cópula de Gumbel es asimétrica y captura diferentes situaciones de riesgo que ocurren durante periodos de tensión, es decir pueden captar variaciones bruscas o repentinas en los mercados financieros, lo cual desde el punto de vista de la medición del valor en riesgo permite tener en cuenta los eventos extremos, siendo esta una importante característica ya que las distribuciones de los rendimientos financieros poseen colas anchas.

Por otra parte, la cópula de Clayton es adecuada para describir la dependencia negativa entre las series financieras, debido a que asigna mayor probabilidad a eventos ubicados en la cola izquierda de la distribución.

3. Aplicación de la cópula en la estimación del VaR.

En esta sección, se detalla la metodología utilizada para estimar la cópula que mejor se ajuste a los datos, y modele correctamente la estructura de dependencia entre las dos series, con el fin de estimar el Valor en Riesgo (VaR) de un portafolio compuesto por estos dos activos.

El valor en Riesgo (VaR) es una medida fundamental en la administración y gestión del Riesgo de Mercado. El VaR se define como la máxima pérdida que puede tener un portafolio en un horizonte de tiempo dado, con un nivel de significancia dado. En estadística se define como α -ésimo percentil de la distribución futura de pérdidas y ganancias [Becerra et al., 2008]:

$$VaR_\alpha = \inf\{r | F_R(r) \geq \alpha\} \quad (26)$$

Para estimar el VaR de un portafolio es necesario conocer las distribuciones marginales y la distribución multivariada de los activos. El proceso a seguir para estimar la cópula apropiada y calcular el Valor en Riesgo es el siguiente:

- Se debe calcular los retornos de los activos y corregir los problemas de heterocedasticidad que tengan los datos, así mismo estandarizar dichos residuales.
- A partir de los retornos se obtienen las distribuciones marginales univariadas, las cuales son necesarias para calcular el parámetro correspondiente a la cópula.
- Una vez se tengan las marginales univariadas y el valor de la cópula se procede a simular variables uniformes que tengan como distribución conjunta la cópula estimada.

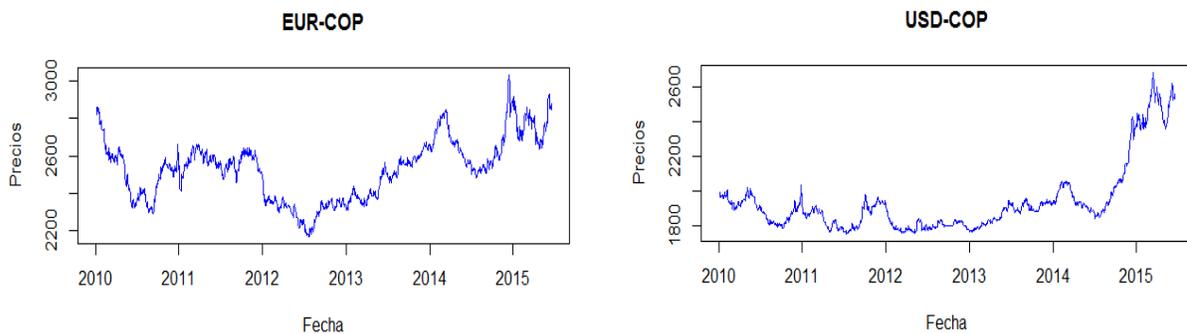
- Por medio del Método de Simulación de Montecarlo se simulan los retornos con base en las variables uniformes simuladas anteriormente y la inversa de la función de distribución.
- Después de obtener los retornos, se debe calcular la distribución de pérdidas y ganancias del portafolio.
- Finalmente se ponderan los rendimientos, en este caso será del 50% para cada activo, y se obtiene el percentil de los rendimientos ponderados con un nivel de confianza determinado, que será del 99%.

3.1. Caso aplicado de cópulas al Valor en Riesgo

Con el fin de implementar las cópulas para estimar el Valor en Riesgo de un portafolio se desarrolló el ejercicio para un portafolio compuesto por dos activos, la tasa representativa del mercado colombiano (TRM) y la tasa de cambio EUR/PESO, los datos utilizados corresponden a los precios de cierre diarios desde el 5 de enero del 2010 hasta el 17 de junio del 2015 de cada una de las series, para un total de 1422 observaciones.

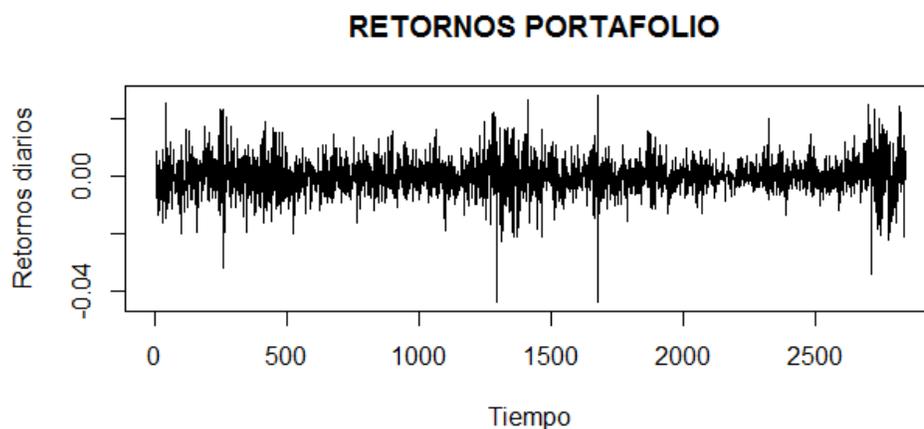
El comportamiento de estos dos activos presenta una tendencia alcista en los últimos años, lo cual responde a los movimientos por los que ha atravesado la economía colombiana, como lo es el deterioro de los precios del petróleo, lo cual afecta de manera directa el precio de las divisas. El siguiente gráfico muestra el comportamiento de los precios de los activos.

Grafico 5. Precios Euro/Peso, Dólar/Peso



Con el fin de establecer la volatilidad de estas dos series, a partir de los precios de los activos se calcularon los retornos logarítmicos, obteniendo los siguientes resultados.

Grafico 6. Retornos Portafolio



Según los gráficos anteriores se puede evidenciar la alta volatilidad de las series, principalmente al final de las observaciones, siendo más profunda en los retornos de la tasa USD/COP, así mismo se observa presencia de heterocedasticidad, dispersión de los datos, y presencia de datos atípicos. Se realizó la prueba de Jarque Bera, en la cual se rechaza la hipótesis de normalidad al 5% de significancia, así mismo se calculó la kurtosis con el fin de identificar si los datos se distribuyen de manera normal, los resultados obtenidos permiten concluir que las series poseen una distribución leptocúrtica de colas gruesas, lo cual es común en los activos financieros. En las siguientes tablas se presentan algunos datos estadísticos de los retornos.

Tabla 1. Estadística descriptiva de los retornos

EUR/COP		USD/COP	
Min. :	-0.04382762	Min. :	-0.04356387
1st Qu.:	-0.00377122	1st Qu.:	-0.00277504
Median :	-0.00005147	Median :	0.00005168
Mean :	0.00000438	Mean :	0.00017694
3rd Qu.:	0.00381106	3rd Qu.:	0.00303039
Max. :	0.02645301	Max. :	0.02836853

Cálculos propios *Cálculos propios*

Adicionalmente se presenta el histograma de los retornos del portafolio y los gráficos Q-Q de cada serie.

Grafico 6. Histograma Portafolio

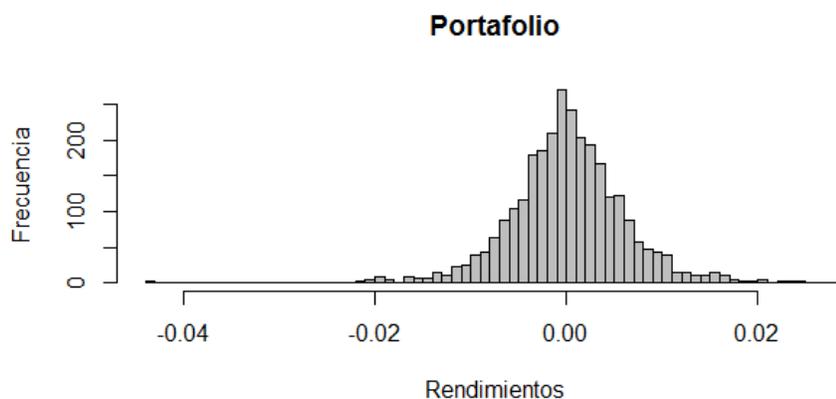
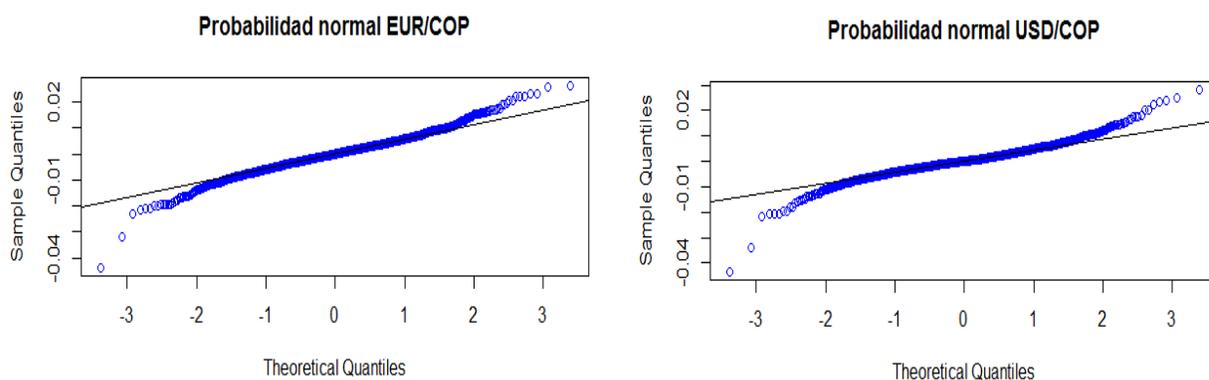


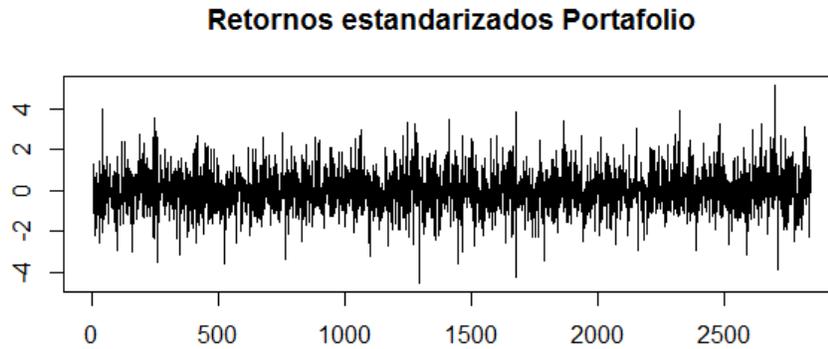
Grafico 7. Gráficos Q-Q Euro/Peso, Dólar/Peso



Los resultados anteriores permiten inferir que las series de datos analizadas no tienen un comportamiento que siga una distribución normal, por lo cual asumir normalidad en los retornos de los activos no es lo más apropiado, lo cual puede subestimar o sobrestimar la estimación del Valor en Riesgo.

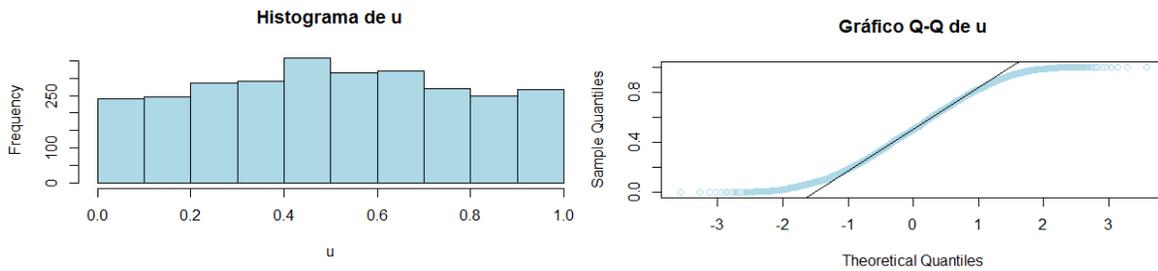
Después de analizar los retornos, se realiza una filtración de la variancia por medio de un modelo ARMA (1,1)-GARCH (1,1) para modelar la variancia de las series, y obtener las marginales de cada serie, los resultados estadísticos se encuentran en el Anexo.

Grafico 7. Retornos estandarizados



Se obtienen las distribuciones marginales a partir de los residuales estandarizados. Con estos residuales se obtienen los parámetros de la cópula correspondientes, se debe tener en cuenta que para lograr una estimación apropiada de la cópula, los valores de la pseudo muestra generada a partir de los residuales estandarizados, deben seguir una distribución uniforme estándar, es decir $u \in [0,1]^d$.

Grafico 8. Función de distribución estimada



Con la pseudo muestra descrita se estimó los parámetros de dos cópulas elípticas, la cópula normal y la cópula t-Student con tres grados de libertad. Para seleccionar la cópula más apropiada existen algunos criterios de selección de la cópula como son: el criterio de log verosimilitud (LR) y el criterio de Akaike (AIC) que se basa en la teoría de la información, la cópula que mejor representa el comportamiento conjunto de las dos series es la cópula t-Student, de acuerdo a los resultados el AIC de la copula T-Student es menor al criterio AIC de la copula normal. La cópula T-Student no solo tiene en cuenta la dependencia en el centro de la distribución como lo hace la cópula Gaussiana, sino que también analiza las colas de la distribución, presentando una alta dependencia asintótica en las colas.

Tabla 1. Estimación Cópula

Parametro Rho	
Copula Normal	Cópula t-Student
0.4721749	0.4678363

Calculos propios

Una vez estimada la copula se simulan variables uniformes (0,1), que tengan como distribución conjunta la copula estimada, es decir el parámetro rho.

Posteriormente se deben calcular los retornos simulados a partir de las variables estimadas anteriormente y la función inversa de distribución, que en principio se supuso tienen los retornos. A las variables uniformes u simuladas que corresponden a grados se debe volver a residuales estandarizados, para la cual se aplica la función inversa de distribución, una vez se tengan los residuales estandarizados se debe des estandarizar estos residuales para lograr obtener retornos, los residuales estandarizados se deben multiplicar por la desviación estándar de los errores que se obtuvo de la varianza pronosticada.

Con estos residuales se deben simular retornos los cuales están correlacionados por un parámetro de dependencia rho, que corresponde al parámetro obtenido por la cópula t-Student, que en este caso fue la cópula seleccionada para estimar el VaR.

Dado que se partió de un modelo ARMA(1,1)-GARCH(1-1), los retornos simulados serán de la forma:

$$Y_t = \mu + AR(1).Y_{t-1} + MA(1).\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (27)$$

Donde Y_{t-1} corresponde al último retorno obtenido, ε_{t-1} el último residual obtenido del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1-1) y ε_t los residuales simulados. En la ecuación (27) la parte determinística de los retornos corresponde a:

$$\mu + AR(1).Y_{t-1} + MA(1).\varepsilon_{t-1} \quad (28)$$

Y ε_t los choques aleatorios correlacionados, es decir los diferentes residuales estandarizados que pronostican los retornos y modelan la varianza.

Con los retornos simulados anteriormente se deben realizar los siguientes pasos para estimar el Valor en Riesgo:

- Se debe calcular una trayectoria para cada uno de los retornos para el futuro, es decir con la información que tengo hasta t , se estima la trayectoria de los retornos del portafolio en $t+1$.

$$\tilde{r}_{t+k}^q = w \cdot \tilde{r}_{t+k}^q$$

Donde w es el peso de cada activo en el portafolio y $q=1, \dots, Q$

- Finalmente con los retornos del portafolio se calcula la distribución de pérdidas y ganancias del portafolio y se estima el Valor en riesgo.

3.2. Resultados

Se estimó el VaR para un portafolio compuesto por dos tasas de cambio, USD/COP y EUR/COP, el valor en dólares invertidos fue de US 97,753 que a la TRM³ vigente al día de estimación del VaR equivale a \$ 250.000.000 el valor en euros invertidos fue de € 86,813 que a la tasa de cambio euro-peso⁴ vigente equivale a \$250.000.000 de esta manera se tiene un portafolio equivalente en pesos colombianos por valor nominal de \$500.000.000.

El valor en riesgo estimado se realizó con un nivel de confianza del 99% para un horizonte de tiempo de un día, obteniendo un VaR-Copula de 1,79 es decir asumiendo un portafolio de \$500.000.000 distribuidos 50% en cada activo, la pérdida máxima estimada para el siguiente día es de \$ 8.981.625

Con el fin de comparar este resultado con las metodologías tradicionales para calcular el Valor en Riesgo de un portafolio, se estimó un VaR no paramétrico por medio de simulación histórica con las mismas características del portafolio descrito anteriormente, el VaR no paramétrico obtenido fue de 1,42 es decir la pérdida máxima estimada del portafolio para el día siguiente es de \$7.121.635.

De acuerdo a los resultados la estimación por medio de la teoría de copulas arrojó un VaR mayor al obtenido por simulación histórica, lo cual es más preciso desde el punto de vista que la cópula estimada en este caso la t-Student permitió simular datos de retornos correlacionados entre las dos series que componen el portafolio, así mismo se cuenta con más información para estimar el VaR, pues según lo estipulado por Basilea se deben tener mínimo 250 observaciones para estimar la máxima pérdida de un portafolio, en este caso se contó con 1422 observaciones de precios diarios de los dos activos con el cual se calculó el VaR por simulación histórica al 99% de nivel de confianza siendo el Var la posición 50 de los retornos ordenados, sin embargo con la simulación de retornos por medio de la copula en este caso 5000 datos simulados, se logra tener percentiles más precisos dado que entre la observación 50 y la 51 hay una serie infinitesimal de números que es lo que se logra simular con la copula, además que como se mencionó anteriormente estos retornos están correlacionados, lo cual brinda un mayor precisión al estimar el VaR.

Por otra parte al utilizar la cópula t-Student se capta mejor las colas de las series, así mismo la cópula fue estimada con un modelo ARMA-GARCH sobre los retornos, la selección del modelo GARCH (1,1) se debe principalmente a los clauster de volatilidad que se observó en los retornos de las series financieras utilizadas, y el modelo ARMA (1,1) dado que no se asumió media constate,

³ TRM vigente al 17 de junio de 2015 fue de \$2557.45

⁴EUR/COP vigente al 17 de junio de 2015 fue de \$2879.75

por lo cual el VaR estimado por medio de las copula estimada no están subestimando las pérdidas del portafolio y resulta un ser más conservador.

Así mismo observado el comportamiento que han tenido estas dos tasas de cambios en cuanto a la variación de sus precios y la alta volatilidad, es común observar en el mercado bursátil un mayor nivel de riesgo de portafolios compuesto por estos activos y mayores estrategias de coberturas por medio de derivados u opciones con el fin de minimizar las pérdidas ocasionadas por movimientos inesperados del mercado.

4. Conclusiones

En este documento se presentó la teoría de copulas, desarrollada en principio por Sklar para estimar el grado de dependencia de series financieras, es decir el comportamiento conjunto de variables aleatorias a partir de comportamientos individuales, lo cual es fundamental para la estimación de medidas de riesgo, como lo es el VaR. Se utilizó la estimación de un cópula Gaussiana para calcular la dependencia de dos tasas de cambio, EUR/COP y USD/COP y se calculó el VaR por medio de la estimación de la copula utilizando un modelo ARMA (1,1)-GARCH (1,1) y el método tradicional de simulación histórica.

Los resultados obtenidos permiten concluir que las pérdidas estimadas de un portafolio calculadas por medio de métodos tradicionales son menores en relación al método por medio de copulas, El método de simulación histórica asume que los momentos condicionales de las series son constantes, y existe normalidad sobre los retornos, de esta manera se estaría subestimando las pérdidas del portafolio debido a que no se tienen en cuenta las colas de las series.

Por su parte los modelos por medio de copulas que se alejan de los supuestos de normalidad, media y volatilidad constante son más conservadores para estimar las pérdidas de un portafolio compuesto por varios activos, pues tiene en cuenta la dependencia que tienen las series y además gracias a la simulación de los retornos lo percentiles sobre los cuales se estima el VaR son más precisos.

Por otra parte al implementar la teoría de cópula para la medición del VaR, la estructura de dependencia del portafolio y los activos que los conforman no depende de la correlación individual, sino de la estructura de dependencia del parámetro “rho” arrojado por la estimación de la cópula. La cópula extrae la estructura de dependencia de la función de distribución multivariada, de esta manera contiene mucha más información de la dependencia de los activos de un portafolio.

REFERENCIAS

- Charpetier A (2015). Prévissionavec de copules en Finances.<hal01151233>
- Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. In *Risk Management Value at Risk andBeyond*(Edited bu M. Dempster), 176-223.Cambridge University Press.
- Fantazini,D. Dynamic copula modeling for Value at Risk.Department of Economics and Quantitative Methods.University of Pavia.
- Genest, C., MacKay, J. (1986); The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals. *The American Statistician* 40, 280-283.
- Giacomini, E (2005). Risk Management with Cópulae. Institute for Statistics and Econometrics CASE - Center for Applied Statistics and Economics.
- Joe, H.,Dependence Modeling with Cópulas. Monographs on Statistics and Applied Probability 134.General Editors
- Jondeau, E., Rokinger, M.(2006) The cópula-garch model of conditional dependencies an international stock market application. *Journal of International Money and Finance* 827-853
- Liu, Y., Luger,R., (2009).Efficient estimation of cópula-GARCH models. *ComputationalStatistics and Data Analysis* 53 2284–2297
- Melo L.,Becerra O.,(2008).Medidas de Riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones.Borrados de Economía No 489. Banco de la República
- Nadiezhdá T, (2010). Valoración del Riesgo utilizando cópulas como medida de la dependencia: aplicación al Sector Financiero Mexicano (2002-2008). Memoria para optar al grado de doctor. Universidad Complutense de Madrid.
- Nelsen Roger B. An Introduction to Copulas. Second Edition. Springer Series in Statistics.
- Parra , H., Koodi, L, (2006) . Using Conditional Copula to Estimate Value at Risk.*Journal of Data Science*, 93-115
- Patton, A.J., 2006. Estimation of multivariate models for time series of possibly different lengths. *Journal of Applied Econometrics* 21, 147–173.
- Rank, J, (2000) Copulas in Financial Risk Management. Department for Continuing Education University of Oxford
- Teoría de Cópulas y aplicaciones en simulación de riesgos financieros y en ingeniería civil.Masteres.urg.es

ANEXOS

Tabla 1. Resultados estadísticos Modelo ARMA (1,1)-GARCH (1,1)
Euro/Peso

```

Parameter Initialization:
Initial Parameters:      $params
Limits of Transformations:  $U, $V
Which Parameters are Fixed? $includes
Parameter Matrix:

```

		U	V	params	includes
mu	-0.006547537	6.547537e-03	0.000705239		TRUE
ar1	-0.999999990	1.000000e+00	-0.197260887		TRUE
ma1	-0.999999990	1.000000e+00	0.291537649		TRUE
omega	0.000001000	1.000000e+02	0.100000000		TRUE
alpha1	0.000000010	1.000000e+00	0.100000000		TRUE
gamma1	-0.999999990	1.000000e+00	0.100000000		FALSE
beta1	0.000000010	1.000000e+00	0.800000000		TRUE
delta	0.000000000	2.000000e+00	2.000000000		FALSE
skew	0.100000000	1.000000e+01	1.000000000		FALSE
shape	1.000000000	1.000000e+01	4.000000000		TRUE

```

Index List of Parameters to be Optimized:
mu    ar1    ma1    omega  alpha1  beta1  shape
1     2     3     4     5     7     10
Persistence:                0.9

```

```

Final Estimate of the Negative LLH:
LLH: -5197.99    norm LLH: -3.65798
      mu      ar1      ma1      omega      alpha1
-1.674318e-05 -8.810463e-02 1.612384e-01 4.647742e-07 3.907230e-02
      beta1      shape
9.509078e-01 7.934749e+00

R-optimhess Difference Approximated Hessian Matrix:
      mu      ar1      ma1      omega      alpha1
mu    -3.156680e+07 -1.644553e+00 -6.822035e+02 2.114077e+08 -1.591772e+04
ar1   -1.644553e+00 -1.397040e+03 -1.385261e+03 9.586365e+05 2.128659e+01
ma1   -6.822035e+02 -1.385261e+03 -1.390859e+03 4.241112e+05 -1.013925e+00
omega 2.114077e+08 9.586365e+05 4.241112e+05 -1.733786e+14 -5.039538e+09
alpha1 -1.591772e+04 2.128659e+01 -1.013925e+00 -5.039538e+09 -1.858682e+05
beta1 5.283444e+03 -2.947768e+01 -4.406023e+01 -5.935688e+09 -1.990089e+05
shape -1.451218e+01 7.807620e-02 1.680638e-02 -3.840973e+06 -1.337336e+02
      beta1      shape
mu    5.283444e+03 -1.451218e+01
ar1   -2.947768e+01 7.807620e-02
ma1   -4.406023e+01 1.680638e-02
omega -5.935688e+09 -3.840973e+06
alpha1 -1.990089e+05 -1.337336e+02
beta1 -2.263554e+05 -1.493930e+02
shape -1.493930e+02 -4.867218e-01
attr(,"time")
Time difference of 0.271807 secs

```

Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-value
Jarque-Bera Test	R	Chi ²	61.83165	3.741452e-14
Shapiro-wilk Test	R	w	0.9924462	1.153235e-06
Ljung-Box Test	R	Q(10)	7.699147	0.658197
Ljung-Box Test	R	Q(15)	13.34607	0.5755867
Ljung-Box Test	R	Q(20)	19.58553	0.4841105
Ljung-Box Test	R ²	Q(10)	22.58023	0.01240667
Ljung-Box Test	R ²	Q(15)	41.47769	0.0002703227
Ljung-Box Test	R ²	Q(20)	48.01233	0.000423705
LM Arch Test	R	TR ²	26.02381	0.01065094

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-7.306108	-7.280201	-7.306156	-7.296431

Tabla 2. Resultados estadísticos Modelo ARMA (1,1)-GARCH (1,1)
Dólar/Peso

Parameter Initialization:

Initial Parameters: \$params
 Limits of Transformations: \$U, \$V
 which Parameters are Fixed? \$includes
 Parameter Matrix:

	U	V	params	includes
mu	-0.31574863	0.3157486	0.03161470	TRUE
ar1	-0.99999999	1.0000000	0.06710740	TRUE
ma1	-0.99999999	1.0000000	0.06835796	TRUE
omega	0.00000100	100.0000000	0.10000000	TRUE
alpha1	0.00000001	1.0000000	0.10000000	TRUE
gamma1	-0.99999999	1.0000000	0.10000000	FALSE
beta1	0.00000001	1.0000000	0.80000000	TRUE
delta	0.00000000	2.0000000	2.00000000	FALSE
skew	0.10000000	10.0000000	1.00000000	FALSE
shape	1.00000000	10.0000000	4.00000000	TRUE

Index List of Parameters to be Optimized:

mu	ar1	ma1	omega	alpha1	beta1	shape
1	2	3	4	5	7	10

Persistence: 0.9

Final Estimate of the Negative LLH:

LLH: -5563.864 norm LLH: -3.915457
 mu ar1 ma1 omega alpha1
1.850862e-05 2.591626e-01 -1.548664e-01 3.330045e-07 7.582212e-02
 beta1 shape
9.168347e-01 6.224693e+00

R-optimhess Difference Approximated Hessian Matrix:

	mu	ar1	ma1	omega	alpha1
mu	-1.149134e+08	6.860214e+02	1.552375e+03	4.863106e+09	2.592845e+04
ar1	6.860214e+02	-1.507567e+03	-1.459312e+03	8.139882e+06	7.003007e+01
ma1	1.552375e+03	-1.459312e+03	-1.445007e+03	7.687247e+06	4.695720e+01
omega	4.863106e+09	8.139882e+06	7.687247e+06	-2.068912e+14	-2.723497e+09
alpha1	2.592845e+04	7.003007e+01	4.695720e+01	-2.723497e+09	-5.396571e+04
beta1	7.415895e+04	8.030463e+01	6.311001e+01	-3.640650e+09	-6.284264e+04
shape	5.780176e+02	1.330649e+00	9.556786e-01	-8.154655e+06	-1.559552e+02
	beta1	shape			
mu	7.415895e+04	5.780176e+02			
ar1	8.030463e+01	1.330649e+00			
ma1	6.311001e+01	9.556786e-01			
omega	-3.640650e+09	-8.154655e+06			
alpha1	-6.284264e+04	-1.559552e+02			
beta1	-7.934060e+04	-1.829533e+02			
shape	-1.829533e+02	-1.389659e+00			

attr("time")
Time difference of 0.2414801 secs

Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-value
Jarque-Bera Test	R	Chi ²	147.0937	0
Shapiro-wilk Test	R	w	0.986347	2.633362e-10
Ljung-Box Test	R	Q(10)	12.83346	0.2331327
Ljung-Box Test	R	Q(15)	18.55048	0.234831
Ljung-Box Test	R	Q(20)	28.13725	0.10619
Ljung-Box Test	R ²	Q(10)	12.80712	0.2346569
Ljung-Box Test	R ²	Q(15)	21.07191	0.1345476
Ljung-Box Test	R ²	Q(20)	25.56899	0.1805231
LM Arch Test	R	TR ²	13.10269	0.3616213

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-7.821062	-7.795155	-7.821110	-7.811384