USO DE MODELOS ECONOMÉTRICOS EN ASEGURAMIENTO DE PORTAFOLIOS

Margarita Ortiz Almeida

Jorge Eduardo Pérez Pérez

Facultad de Economía

Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario

Resumen

El aseguramiento de portafolio trae consigo unos costos de transacción asociados que son reconocidos por la teoría financiera pero que no han sido objeto de estudio de muchas aproximaciones empíricas. Mediante modelos econométricos de series de tiempo se puede pronosticar el número de rebalanceos necesarios para mantener un portafolio asegurado, así como el tiempo que debe transcurrir entre cada uno de estos. Para tal fin se usan modelos de Datos de Cuenta de Poisson Autorregresivos (ACP) modificados para captar las características de la serie y modelos de Duración Autorregresivos (ACD). Los modelos capturan la autocorrelación de las series y pronostican adecuadamente el costo de transacción asociado a los rebalanceos.

Clasificación JEL: G27, C25, G11

Abstract

Portfolio insurance and delta hedging involves transaction costs that are recognized in finance theory but have not been studied in many empirical applications. Econometric time series models can be used to forecast the number of recompositions of an insured portfolio, and the time between each recomposition. We forecast these variables using modified autoregressive conditional Poisson models (ACP) and autoregressive conditional duration models (ACD) The model are successful in capturing the series' autocorrelation, and provide sensible estimates of the transaction cost associated with the recompositions.

1. Introducción

Los portafolios asegurados son estructuras sintéticas empleadas ampliamente por administradores de portafolios institucionales, que garantizan que el valor del portafolio no caerá por debajo de un nivel asegurado. Perold y Sharpe (1985) enumeran varias estrategias dinámicas para crear portafolios asegurados. Una de ellas, conocida como seguro de portafolio de proporciones constantes (Constant proportion portfolio insurance) consiste en mantener la exposición a los activos de renta variable como un múltiplo constante de la diferencia entre el valor del portafolio y la máxima pérdida. Otra estrategia de aseguramiento, consiste en crear un activo sintético de cobertura cuyo valor replique el valor del portafolio pero que no caiga por debajo de un nivel asegurado.

Esta última estrategia se conoce como cobertura delta (Delta hedge). Para que funcione, debe ser posible para el administrador de portafolio cambiar continuamente la participación del activo riesgoso y el activo libre de riesgo. De lo contrario, el activo sintético no replicará al portafolio y aumentarán las probabilidades de pérdida. Para determinar en qué momento y de qué forma se debe cambiar estas participaciones, se deben realizar rebalanceos de la posición. Estos rebalanceos estarán determinados por el cambio en la cobertura del portafolio, es decir, si la variación acumulada del delta supera un umbral, el portafolio deberá rebalancearse para garantizar que su valor no caiga por debajo del nivel asegurado.

De esta forma, el rebalanceo se convierte en una variable de interés para una mesa de dinero institucional que maneje portafolios asegurados. Para trazar su estrategia de *trading* es valioso saber qué tan frecuente deben estar re balanceando su posición o cuantas veces deben hacerlo en un horizonte de tiempo. Esto con el fin de tener una estimación del costo en el que deben incurrir cada vez que deban realizar operaciones y así saber qué tanto de su rentabilidad se verá afectada por los costos de transacción.

En este trabajo se pretende pronosticar el número de rebalanceos de un portafolio asegurado, que está conformado por 9 acciones de la Bolsa de Valores de Colombia, así

como el tiempo que debe transcurrir entre un rebalanceo y otro, utilizando modelos econométricos para datos discretos de alta frecuencia. Se usarán modelos para datos de cuenta y modelos de duración autorregresivos comparando el desempeño del pronóstico.

Para el pronóstico del número de rebalanceos consideramos dos variables de interés. La primera es el tiempo transcurrido entre dos operaciones de rebalanceo. Para modelar este tipo de variables Engle y Russell (1998) desarrollan los modelos de duración condicional autorregresiva (ACD), los cuales han sido muy usados para series financieras, los cuales tienen propiedades muy similares a los modelos ARMA, facilitando su estimación y posterior evaluación. La otra variable de interés es el número de rebalanceos para un periodo determinado (cada 60 minutos). Esto es un dato de cuenta y se modelará mediante modelos Poisson condicional autorregresivo (ACP) propuestos por Heinen (2003). La ventaja que posee esta especificación consiste en que corrigen la autocorrelación y la sobre dispersión de los datos. El pronóstico nos dirá cuantos rebalanceos se deben hacer en los diferentes intervalos de tiempo. Ortiz et. al (2008) aplican dichos modelos de datos de cuenta a un portafolio de acciones de Estados Unidos.

Gracias a la disponibilidad de datos de alta frecuencia que hoy en día tienen los mercados financieros, se cuenta con información intradiaria de las operaciones del mercado, la cual nos permite conocer los movimientos del mercado y capturar todos los posible eventos que puedan afectar la volatilidad intradiaria de un portafolio. Estos datos cuentan con todas las propiedades de una serie financiera: heteroscedasticidad, estacionalidad, clústeres de volatilidad, elevada curtosis y colas pesadas en su distribución. Por tal razón es necesario usar modelos econométricos para series de tiempo que corrijan los hechos estilizados mencionados. La especificación del modelo varía según la naturaleza de los datos. Para el caso del tiempo que debe transcurrir entre un rebalanceo y otro, los modelos de duración son apropiados. Mientras que para el caso del número de rebalanceos que se deben realizar en un periodo de tiempo, se deben usar modelos de datos de cuenta. Estos modelos permiten parametrizar los datos a una distribución.

Las secciones de este artículo están divididas de la siguiente forma. En la segunda sección se revisan las teorías de aseguramiento de portafolios. En la tercera sección se presenta el problema del costo de transacción del rebalanceo. La cuarta sección resume la aplicación

de los modelos econométricos de duración y de datos cuenta. En la quinta presentamos los resultados de las estimaciones y los pronósticos del costo del rebalanceo. En la sexta sección se darán algunas conclusiones y posibles extensiones.

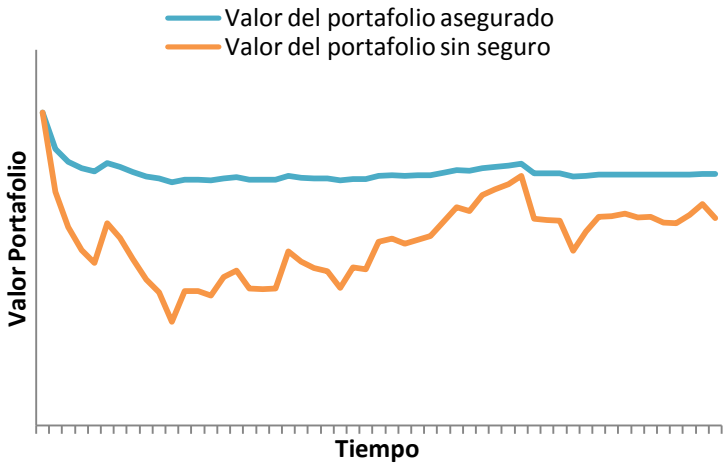
2. Justificación y marco teórico

2.1 Teoría de Aseguramiento de Portafolios

El aseguramiento de portafolios es una estrategia dinámica de cobertura que permite asegurar el valor o el rendimiento de un portafolio. Esta estrategia puede llevarse a cabo comprando una acción o un portafolio de acciones y simultáneamente una *opción put* sobre esta acción o portafolio junto con un activo libre de riesgo. Esto garantiza que el retorno de la compra nunca será más bajo que el precio de ejercicio del put (Benninga, 2008).

En el Gráfico 1 podemos observar el objetivo de una estrategia de este tipo. Si se fija un valor del portafolio el cual estará asegurado, se debe garantizar que por debajo de ese nivel no se podrá estar a pesar de la volatilidad del activo subyacente.

Gráfico 1. Portafolio asegurado Vs Portafolio no asegurado.



Fuente: Cálculos propios.

La estrategia de aseguramiento dinámico ha sido considerada por diferentes autores. Brennan y Swchartz (1976) propusieron a las compañías de seguros, que debían garantizar un pago mínimo a sus clientes, una cobertura siguiendo el modelo de valoración de

opciones de Black-Scholes. Otros autores incluyen este tipo de estrategia a la función de utilidad del individuo suponiendo diferentes tipos de aversión al riesgo, incluyendo algunas veces los costos de transacción asociados. Esta literatura parte de la Teoría CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) la cual permite al individuo mantener un activo riesgoso si cuenta con la posibilidad de invertir constantemente. Black y Perold (1992) encuentran que en ausencia de costos de transacción, CPPI es equivalente a invertir en opciones americanas y es óptimo para un individuo con una función de utilidad con aversión al riesgo hiperbólica. La ventaja de la estrategia de aseguramiento de portafolio mediante la replicación de opciones consiste en recomponer un portafolio que se acomoda a un tiempo de maduración definido, el cual tiene un objetivo que termina cuando vence el contrato. Sin embargo, según Perold y Sharpe (1988), la exposición de un portafolio asegurado con opciones depende del horizonte de tiempo, es decir, a medida que el tiempo pasa el comportamiento del activo riesgoso afecta en una mayor magnitud.

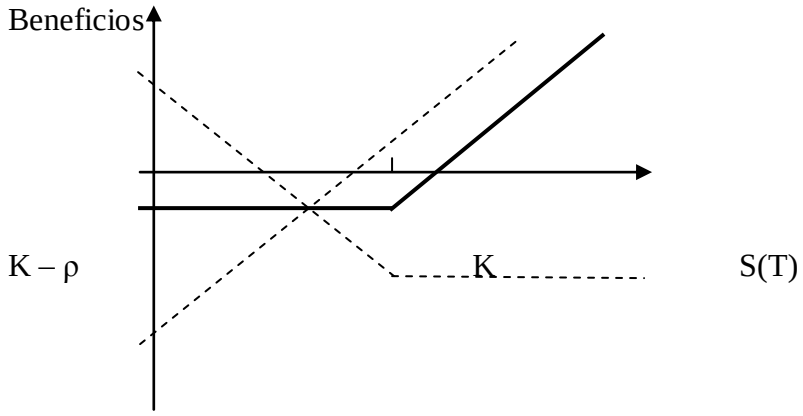
2.2 Aseguramiento de portafolio mediante opciones

La estrategia de aseguramiento mediante opciones, implica la elección de un tope, que debe ser traído a valor presente en cada momento del tiempo para de esta forma recomponer la cantidad de activo riesgoso y no riesgoso que garantice que el valor del portafolio no caiga por debajo de un límite. Esta estrategia se conoce como *Delta Hedging*, y permite tomar posiciones cortas y largas dependiendo del movimiento de los precios del activo subyacente.

Considere una estrategia de aseguramiento llevada a cabo mediante un put europeo el cual se llamará put protectivo. Es una opción tipo europeo porque sólo se ejercerá el día del vencimiento. El put sintético es una combinación lineal de un activo sintético y un activo libre de riesgo, como lo presenta la ecuación (1).

$$Put\ sintético = \Delta(Activo\ sintético) + \beta(Activo\ libre\ de\ riesgo) \qquad (1)$$

Gráfico 2. Put Protectivo



Put protectivo= largo en activo+ largo en put. K es el precio de ejercicio de la opción put, p es la prima y S(T) es el precio del activo subyacente. K-p representa el máximo nivel de pérdida del portafolio asegurado.
Fuente: Hull(2008)

Donde Δ y β son las participaciones del activo riesgoso y libre de riesgo, respectivamente. El Gráfico 2 muestra la estructura del put protectivo, el cual será la opción elegida para asegurar el portafolio. Este sintético es una combinación entre una posición larga en el activo y larga en un put. El strike de esta opción refleja el valor del portafolio asegurado, por lo que si se encuentra *in the money* es porque rompió el valor límite e inmediatamente se ejercerá para limitar las pérdidas.

Para un administrador de portafolio, las estrategias de aseguramiento a través de opciones pueden ser muy útiles, sobre todo si su desempeño es constantemente monitoreado y las pérdidas o ganancias que genere determinen su labor. Para un creador de mercado, estas estrategias son aún más ventajosas, ya que puede rebalancear más frecuentemente porque no tiene un riesgo de contraparte asociado.

Para implementar una estrategia de aseguramiento basada en opciones, se utiliza el modelo de valoración de opciones de Black and Scholes. Sea P_t el precio de un activo riesgoso en el tiempo t y T el horizonte de tiempo. Una inversión sin aseguramiento sería comprar unidades del activo riesgoso. Para hacer una inversión con aseguramiento, se construye un sintético con una estructura put tipo europeo con vencimiento igual al horizonte de tiempo de la inversión T, el cual sólo se podrá ejercer el día del vencimiento. Se conforma un nuevo portafolio con acciones y activo libre de riesgo, y se escoge un nivel asegurado X del valor del activo riesgoso dentro del portafolio, que será igual al precio del ejercicio o

"strike" del put. De esta forma, si el valor del activo riesgoso dentro del portafolio cae por debajo del nivel asegurado el día del vencimiento, el put se ejercerá. Para mantener el precio del put constante, las participaciones Δ y β en (1) deben ajustarse a medida que cambian el precio del activo riesgoso y el activo libre de riesgo. Esta operación se conoce como rebalanceo. El rebalanceo sólo se hará hasta el penúltimo día ya que el último día se revisa la posición y se decide si se ejerce dependiendo de si el valor del portafolio asegurado resulta menor a la prima.

Si se conoce una expresión para el precio del put, se pueden obtener las participaciones Δ y β para mantener el precio del put constante. Se asume que el precio del put se ajusta de acuerdo a la fórmula de Black-Scholes:

$$P_t = -S_t N(-d_1) + Xe^{-r(T-t)} N(-d_2) \qquad (2)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad (3)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \qquad (4)$$

S_t es el precio del activo subyacente, X es el "Strike", r es la tasa libre de riesgo y σ es la volatilidad del activo riesgos.

La inversión total será entonces igual a comprar la acción o portafolio y el put sobre este. Reemplazando con la fórmula de Black-Scholes (2):

$$Put\ Protectivo = S_t + P_t = S_t - S_t N(-d_1) + Xe^{-r(1-t)} N(-d_2) \qquad (5)$$

Las proporciones de activo riesgoso y libre de riesgo de (1) cambian en el tiempo, y están determinadas igualmente por la fórmula:

$$\Delta = \frac{S_t N(d_1)}{S_t N(d_1) + X e^{-r(1-t)} N(-d_2)} \tag{6}$$

$$\beta = \frac{X e^{-r(1-t)} N(-d_2)}{S_t N(d_1) + X e^{-r(1-t)} N(-d_2)} \tag{7}$$

Es importante resaltar los supuestos que este modelo de valoración impone sobre el comportamiento de la serie. El primero hace referencia a que los retornos de la acción siguen una distribución log-normal. Además se asume que la media, la varianza y la tasa libre de riesgo son constantes; y que no se pagan dividendos durante la vida de la opción. Estos supuestos pueden llegar a perjudicar la estrategia de inversión, ya que la valoración se hace sobre unos rendimientos que se comportan de acuerdo a la distribución log-normal, y las series financieras cuentan con distribuciones de colas anchas, elevada curtosis y alta dependencia con los datos históricos. Adicionalmente se omiten los saltos en la distribución de estas series que pueden ser corregidos utilizando el modelo de difusión con saltos (Ver Merton 1976).

Un supuesto adicional es la recomposición continua de las participaciones del activo riesgoso y libre de riesgo en la construcción del put sintético. Dicha recomposición no es factible en la práctica. La siguiente sección analiza en detalle el problema del rebalanceo continuo.

3. Rebalanceo continuo, rebalanceo discreto y costos de transacción

En la estrategia de aseguramiento de portafolio mediante opciones, las participaciones del activo riesgoso y del activo libre de riesgo deben cambiar para mantener el precio del put constante. Así, cada vez que cambie el valor del activo riesgoso, dichas participaciones deben cambiar, y el rebalanceo debe ser continuo. El valor del activo riesgoso cambia con altísima frecuencia en los mercados bursátiles.

En la práctica, el inversionista no cambia las participaciones continuamente, debido a varias razones. Una de ellas es la dificultad de cambiar las participaciones óptimas ante cada movimiento del valor del activo, pues el tiempo que pasa entre cada cambio de precio es muy corto. Además, si el activo riesgoso no es lo suficientemente líquido, un inversionista podría verse en incapacidad de cambiar la composición de su portafolio si no encuentra una contraparte.

Una razón de mayor peso es que cada recomposición del portafolio involucra un costo de transacción, como mínimo igual al margen entre el precio de oferta (ask) y el precio de demanda (bid). Esto hace que los portafolios asegurados sean re balanceados a muy baja frecuencia, y que se conformen para horizontes largos. El costo de transacción asociado a cada cambio de la composición del portafolio, termina reduciendo la rentabilidad de la posición. En la medida en que un inversionista pueda transar a costos más bajos, podrá cambiar la composición del portafolio con más frecuencia, y tendrán acceso a portafolios asegurados sobre activos que cambian de precio con mayor frecuencia.

Para un creador de mercado, para quien el costo de transacción es simplemente el margen entre el bid y el ask, se enfrenta un riesgo de contraparte muy bajo. Por lo tanto, ellos pueden crear portafolios asegurados sobre activos que cambian de precio con muy alta frecuencia, incluso intradiaria.

A partir de este momento, vamos a considerar a un creador de mercado con un portafolio asegurado sobre un activo que cambia de precio varias veces en un día. En un momento determinado del tiempo, el administrador del portafolio debe decidir si rebalancear su posición o esperar. Para tomar esta decisión, le puede ser útil un pronóstico del número de rebalanceos óptimo que tendrá que hacer en el siguiente lapso de tiempo y el costo de transacción asociado con el fin de reducir sus costos de operación.

Ortiz et. Al (2008) hacen este pronóstico mediante modelos econométricos de series de tiempo. La variable de interés puede ser el número de rebalanceos en un lapso de tiempo, o la duración entre una operación de rebalanceo y otra. En la siguiente sección se hace una revisión los modelos econométricos que fueron usados por Ortiz et. al (2008) y que se usan en el trabajo para obtener dicho pronóstico.

4. Modelos econométricos para pronóstico de los rebalanceos

4.1 Modelos de duración autorregresiva condicional

El tiempo que transcurre entre un rebalanceo y otro es de gran importancia para el administrador de portafolio ya que le permite planear con anticipación su estrategia de inversión y reducir sus costos de operación. Un pronóstico del tiempo que debe pasar para realizar su siguiente rebalanceo, se convierte en una variable decisiva para una mesa de dinero institucional que maneje portafolios.

En general, en el contexto de los mercados financieros, el tiempo que pasa entre un evento y otro, por ejemplo, entre dos transacciones de un activo, contiene información importante acerca de la dinámica del mercado. La modelación de esta duración presenta dificultades, pues la serie presenta características propias de una serie financiera de alta frecuencia, como aglomeración, distribuciones con exceso de curtosis y heteroscedasticidad.

Engle y Russell (1998) desarrollaron los modelos de duración condicional autorregresiva (ACD), cuyo objetivo específico es modelar la duración o el tiempo que transcurre entre dos eventos con presenta de autocorrelación. Siguiendo la notación de Pacurar (2006), sea t_i el momento de tiempo en el que ocurre un evento de interés. La duración se define como:

$$x_i = t_i - t_{i-1} = \Delta t_i \tag{8}$$

Definiendo el valor esperado condicionado a la información $\mathcal{F}$en $t-1$:

$$\psi_t = E(x_t|\mathcal{F}_{t-1}) \tag{9}$$

El modelo $ACD(p,q)$ básico es:

$$x_t = \psi_t \epsilon_t \tag{10}$$

$$\psi_t = \omega + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j x_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} \omega_j \psi_{t-j} \tag{11}$$

Donde $\epsilon_i$es una secuencia de variables aleatorias $iid.\ E(\epsilon_i) = 1.\ \epsilon_i$ sigue una distribución estándar exponencial o Weibull. Cuando ϵ_i sigue una distribución exponencial el modelo se conoce como EACD (p, q) y si se asume una distribución Weibull se conoce como WACD (p, q). El parámetro de la distribución Weibull es igual a γ y cuando este es igual a 1, la distribución se reduce a la exponencial.

La ecuación 11 muestra la forma del modelo ACD (p, q), es muy similar al modelo GARCH de Bollerslev (1986) para datos de duración. Ambos modelos surgen como respuesta a las características de las series financieras tales como los clústeres de volatilidad y la dependencia de los retornos.

El modelo ACD puede ser representado como un proceso ARMA$(max(m, q), q)$. Si se denota $\eta_t \equiv x_t - \psi_t$ entonces la ecuación (11) se convierte en:

$$x_t = \omega + \sum_{j=1}^{\max(m,q)} (\alpha_j + \beta_j) x_{t-j} - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \eta_{t-j} + \eta_t \tag{12}$$

El modelo ACD puede estimarse por el método de máxima verosimilitud. La función de log verosimilitud estaría dada por:

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^{N(T)} \log(x_t | \mathcal{F}_{t-1}; \theta) = \sum_{i=1}^{N(T)} [\log p\left(\frac{x_t}{\psi_t}; \theta_\epsilon\right) - \log \psi_t] \tag{13}$$

Engle y Russell (1998) usan la distribución exponencial donde el parámetro de forma es igual a 1. Esta estimación tiene una ventaja y es que provee estimadores de cuasi máxima verosimilitud, que son consistentes independiente de la especificación distribución del error. Sin embargo, la distribución exponencial implica una función de riesgo (hazard) plana lo que puede ser no indicado para aplicaciones financieras (Pacurar, 2006). Para corregir este inconveniente se usa la distribución Weibull lo que conlleva a estimar el modelo WACD (p, q) que permite obtener una función de riesgo monótona (si el parámetro $\gamma > 1$ la función es creciente y si es menor a 1 es decreciente).

El modelo ACD puede ser estimado de forma logarítmica. Esto para adicionar linealidades al proceso autorregresivo y obtener coeficientes que puedan ser negativos. Además, en el modelo logarítmico, las duraciones cortas o largas pueden tener un efecto no lineal sobre la duración condicional, lo que no sucede con el modelo ACD estándar.

$$\log \psi_t = \omega + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \log x_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \log \psi_{t-j} = \omega + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \log \epsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} (\beta_j - \alpha_j) \log \psi_{t-j} \tag{14}$$

La especificación del modelo puede ser variada, recientemente se han elaborado modelos que permiten trabajar con múltiples procedimientos. Sin embargo, las pruebas sobre la especificación no son sencillas de implementar y se limitan a comprobar las propiedades usuales de los errores estandarizados.

$$\widehat{\epsilon_t} = \frac{x_i}{\widehat{\psi_t}} \tag{15}$$

La primera prueba que se debe realizar sobre los errores estandarizados estimados consiste en determinar si no hay correlación residual, que se aproximan a pruebas de independencia bajo ciertas restricciones. Se puede aplicar la prueba de Ljung-Box (1978) tanto a los residuos como a los residuos al cuadrado y de esta forma saber si quedan rezagos de dependencia en el modelo. Sin embargo, Pacurar (2006) señala que existen algunas críticas sobre esta prueba ya que sigue una distribución χ^2 asintótica, por lo que algunos autores proponen un estadístico que permite que ϵ_t siga una distribución exponencial (Li *et. al.* 1994). Además, Pacurar (2006) señala que otro tipo de prueba sobre los errores hace referencia a que la media debe ser igual a 1. Se pueden igualmente, utilizar gráficos tipo cuantil-cuantil o los autocorrelogramas de los residuos estimados, tal como se examinan los modelos de series de tiempo.

Otro problema serio es que las series financieras de frecuencia muy alta presentan problemas de estacionalidad a diferentes frecuencias, incluyendo la intradiaria. Esto puede ser ocasionado por diferentes factores: *i)* los corredores que operan el mercado están muy pendientes a los diferentes resultados económicos que se publican diariamente o los que se

publicaron durante la noche del día anterior y que son definitivos para tomar posiciones; *ii)* la hora puede ser determinante pues a las 9 de la mañana que es la hora de apertura del mercado en Colombia, se realizan más operaciones que a la 1 de la tarde que es la hora del cierre, y a la hora del almuerzo las transacciones disminuyen. Este fenómeno trae bastantes complicaciones a la estimación. Engle y Russel (1998) recomiendan descomponer las duraciones del día en una parte determinística basada en la hora del día en que la duración se incrementa y una parte estocástica para modelar la dinámica de la duración. Dofour y Engle (2000) usan dummies intradiarias y encuentran que los primeros 30 minutos del día parecen tener una dinámica diferente que el resto del día.

4.2 Modelos autorregresivos de datos de cuenta

La segunda alternativa para el pronóstico del rebalanceo consiste en modelos de datos de cuenta autorregresivos. Dada la naturaleza de la variable dependiente, estos modelos tratan el número de rebalanceos en un periodo de tiempo como un proceso Poisson que permite tener información discreta y secuencial pero no acotada, pero supone que existe equidispersión, lo cual no se cumple para el caso de los datos de cuenta en el contexto de series financieras. Además de no tener en cuenta las propiedades de una serie de tiempo, ya que la estimación mediante la distribución Poisson tradicional tiene aplicaciones para datos de corte transversal.

$$P(N = n) = \frac{e^{-\mu}\mu^{n}}{n!} \tag{16}$$

Jung et. al (2005) reseñan los modelos para datos de cuenta en series de tiempo. Esto surge como respuesta a los problemas de correlación serial y sobre dispersión que presentan los datos de naturaleza discreta. El modelo INARMA (Integer valued autoregressive moving average), propuesto por Mckenzie (2003), realiza suavizamiento reemplazando las multiplicaciones escalares del proceso gaussiano ARMA que considera los datos como continuos. . Zeger (1988) crea una especificación que incorpora un modelo de variable latente al proceso autorregresivos de la media que evoluciona independientemente del pasado de la cuenta. Shepard (1995) y Davis et. al (2003) utilizan una especificación para un proceso ARMA conocida como GLARMA (Generalized Linear autoregressive moving

average) que permite tener un proceso lineal de los rezagos de la cuenta para el logaritmo de la media

Heinen (2003) propone los modelos ACD (Autoregressive Conditional Poisson) que permiten tener un proceso autorregresivo sobre la media y adiciona un proceso GARCH para la varianza. La ventaja de esta especificación consiste en que elimina los problemas de autocorrelación de la cuenta y posible heteroscedasticidad de la varianza.

Ortiz et al (2008) realizan la aplicación de estos modelos para el aseguramiento de portafolios de acciones de Estados Unidos y encuentran que predicen correctamente de la media del proceso y eliminan los problemas de autocorrelación y sobre dispersión de la serie. A continuación se revisan estos modelos en detalle.

4.2.1 Modelo ACP (p,q)

Las cuentas son generadas por una distribución Poisson. La media autorregresiva es incluida de forma similar a los modelos GARCH ó ACD.

$$E(N_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t = \omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j N_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \mu_{t-j} \quad (17)$$

Donde N_t es la variable de cuenta y $\mathcal{F}_{t-1}$ denota el conjunto de información en $t-1$. La media incondicional del modelo es igual a la de un proceso ARMA. La ecuación 18 muestra la varianza incondicional, la cual puede ser mayor que la media.

$$V(N_t) = \sigma^2 = \frac{\mu(1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2)}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2} \geq \mu \quad (18)$$

El modelo puede estimarse consistentemente usando el método de máxima verosimilitud.

4.2.2 Modelo DACP(p,q)

Los modelos DACP1 y DACP2 utilizan la distribución de la Doble Poisson y sólo difieren en que el primero asume una varianza proporcional a la media mientras el segundo asume ésta como una función cuadrática. La ventaja de introducir la distribución de la Doble

Poisson consiste en que elimina el supuesto de que la varianza condicional es igual a la media condicional. Efron (1986) introdujo esta distribución para el caso de la regresión simple, y Heinen (2003) la usa para los modelos autorregresivos. La ecuación 19 muestra la función de densidad de la Doble Poisson, donde γ es el parámetro para la dispersión que puede tener sobre dispersión si es mayor a 1 o subdispersión si es menor a 1.

$$f(y|\mu,\gamma) = \gamma^{\frac{1}{2}} e^{-\gamma\mu} \left(\frac{e^{-y} y^{y}}{y!}\right)\left(\frac{e\mu}{y}\right)^{\gamma y} \tag{19}$$

Entonces usando esta distribución las varianzas incondicionales para los modelos DACP1(1,1) y DACP2 (1,1) se muestran en las ecuaciones 20 y 21 respectivamente

$$V[N_t] = \sigma^2 = \frac{1}{\gamma}\frac{\mu(1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2)}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2} \geq \mu \tag{20}$$

$$V[N_t] = \sigma^2 = \frac{\mu(1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2)(1+\delta\mu)}{1-\delta\alpha_1^2(\alpha_1+\beta_1)^2} \geq \mu \tag{21}$$

En ambos modelos para probar la sobre dispersión se utiliza un test de Wald donde $\gamma = 1$ para el caso del DACP1 y $\delta = 0$ para el modelo DACP2. La sobre dispersión se puede calcular como el cociente entre la media y la varianza que será igual al producto de dos términos:

$$\frac{\sigma^2}{\mu} = \frac{1}{\gamma}\frac{1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2}{1-(1-(\alpha_1+\beta_1)^2)} \tag{22}$$

Otro aspecto importante del modelo DACP1 es que por construcción la correlación entre la media y la varianza es igual a 1, mientras que el DACP2 asume que se mueven en la misma dirección. Este hecho puede llegar a ser problemático para algunas series, por lo que se requiere de un modelo más general que además pueda capturar un posible efecto ARCH de la varianza. Para probar que este efecto es significativo se recomienda realizar pruebas sobre los errores al cuadrado.

4.2.3 Modelo GDACP(p,q)

Si existe varianza no constante o heteroscedasticidad condicional autorregresiva, se requiere trabajar con una forma más general del modelo DACP. El modelo GDACP agrega una varianza tipo GARCH a la función del DACP. También está la extensión a los modelos DACP1 y DACP2 que permite adicionar un proceso autorregresivo a los parámetros de dispersión; estos se conocen como GDACP1 y GDACP2.

La media condicional es la misma que se especificó anteriormente, pero se le agrega la ecuación 23 a la varianza.

$$h_t = E[\sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \omega_2 + \alpha_2 (N_{t-1} - \mu_{t-1})^2 + \beta_2 h_{t-1} \qquad (23)$$

Heinen (2003) muestra que la sobre dispersión es el producto de la media de largo plazo del proceso de la varianza y un término decreciente en α_1 y β_1.

4.2.4 Modelo ACP con inflación de ceros

Los modelos autorregresivos de Poisson no modelan la proporción excesiva de ceros dentro de la muestra. Para que los modelos ajusten el exceso de ceros, se puede utilizar una distribución diferente, como la binomial negativa, o se puede involucrar la inflación de ceros en el modelo de Poisson. Consideramos una extensión con inflación de ceros de los modelos de Heinen (2003) Siguiendo la especificación de Mullahy (1986), considere que la función de probabilidad de N_t es separable:

$$Prob(N_t = N) = \phi_N(N, \theta_N) \qquad (24)$$

En la especificación Poisson estándar, todos los ϕ_N son iguales a la misma distribución Poisson. En una especificación con inflación de ceros, la probabilidad de que la variable tome un valor de 0 sigue un proceso diferente. Considerando que la probabilidad de que la variable sea cero es constante, e igual a θ, el modelo ACP con inflación de ceros, ZIACP (p,q) está definido por las siguientes ecuaciones:

$$Prob(N_t = 0) = \theta + (1-\theta)P(N_t, \mu_t) \quad (24)$$

$$Prob(N_t = N) = (1-\theta)P(N_t, \mu_t) \text{ para } N_t > 0 \quad (25)$$

$$\mu_t = \omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j N_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \mu_{t-j} \quad (26)$$

La media y varianza condicionales están dadas por

$$E(N_t|\mathcal{F}_{t-1}) = (1-\psi)\mu_t \quad (27)$$

$$V(N_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t(1+\mu_t)e - (1-\theta)^2\mu_t^2 \quad (28)$$

Dependiendo de la ecuación (28) del modelo, puede haber sobre dispersión o subdispersión. Puede ser estimado por máxima verosimilitud, en donde la contribución de cada observación a la función de log-verosimilitud es:

$$\ell_t = I(N_t = 0)\ln[\theta + (1-\theta)e^{-\mu_t}] + [1 - I(N_t = 0][\ln(1-\theta) - \mu_t + N_t \ln\ \mu_t] \quad (29)$$

Donde $I(x)$ es la función indicadora.

5. Aplicación de los modelos al pronóstico de rebalanceo en acciones colombianas.

En esta sección se aplican los modelos econométricos explicados en la sección 3 a un portafolio asegurado compuesto por acciones de la bolsa de valores de Colombia con frecuencia intradiaria. Dicho portafolio es factible para un creador de mercado. A partir del portafolio construido, se genera una serie de tiempo de rebalanceos y se pronostica el lapso entre dos rebalanceos y el número de rebalanceos en una hora. Lapsos más cortos llevarían sujetos a un costo de transacción muy elevado, y lapsos más largos ponen en riesgo el funcionamiento de la opción sintética.

5.1 Conformación del portafolio

Para la conformación del portafolio se escogieron las 9 acciones de la Bolsa de Valores de Colombia que durante el periodo del 2 de enero al 20 de noviembre de 2009 presentaron la mayor bursatilidad. Los datos consisten en los cierres de las transacciones con una frecuencia intradiaria pero no equiespaciada y fueron proporcionados por la BVC. La Tabla 1 muestra las acciones elegidas, el número de transacciones de dicha acción en el período y el sector al que pertenece la acción.

Tabla 1. Acciones elegidas

	FRECUENCIA	SECTOR
ECOPETROL	108.23	Hidrocarburos
ISAGEN	41.35	Energía
PFBANCOLOMBIA	36.87	Financiero
ETB	36.59	Comunicaciones
FABRICATO	18.64	Industrial
ISA	16.19	Energía
CEMARGOS	12.93	Industrial
TABLEMAC	12.52	Industrial
BANCOLOMBIA	11.46	Financiero

Fuente: Bolsa de Valores de Colombia, Cálculos propios.

La elección del portafolio puede realizarse mediante diferentes métodos, como minimización de riesgo dado un rendimiento. Sin embargo, no es de interés de este trabajo incurrir en problemas de optimización de portafolio, por lo que se decidió trabajar con participaciones equitativas de cada una de las acciones elegidas. Una vez que se elige el portafolio, se debe crear un activo sintético el cual replicará los pagos de un put europeo. Esta opción nos permitirá contar con la estrategia de cobertura que buscamos y que fue explicada en detalle en la sección 2. Dicha estrategia actuará como un seguro sobre la inversión del portafolio. El delta del portafolio nos permitirá llevar a cabo esta replicación, manteniendo las participaciones elegidas. El portafolio estará compuesto por acciones

(activo riesgoso) y un bono (activo libre de riesgo). Para construir el activo libre de riesgo, se construye un bono que se descuenta con la tasa libre de riesgo y paga un nominal de 1 al final del tiempo de maduración. En la práctica, el creador de mercado debería encontrar un bono que se transe en el mercado cuyo vencimiento sea igual o cercano al horizonte del portafolio asegurado.

El rebalanceo del portafolio está en función de la variación de Δ (participación del activo riesgoso en el portafolio) acumulado. Si el valor del activo riesgoso cambia y Δ no cambia de manera acorde para mantener constante el valor del put, el portafolio quedará expuesto a pérdidas. La tolerancia a la variación de Δ es fijada por el administrador de portafolio. En este caso, se fijó una tolerancia de 0.1, de manera que el portafolio es re balanceado cada vez que la variación de Δ supere dicho umbral. Si se incrementa la tolerancia, el número de rebalanceos disminuye, pero se arriesga el funcionamiento de la opción sintética y se expone más el portafolio a pérdidas.

La Tabla 3 muestra los parámetros usados para la valoración del put. La tasa libre de riesgo se escogió como la tasa de los bonos del tesoro de Estados Unidos a 10 años. La media histórica (drift) se calculó con datos intradiarios del portafolio equitativo de 9 acciones para el período considerado.

Tabla 3. Valoración inicial

Valoración inicial			
***Drift* Histórico del Portafolio de acciones**	0.00069991	**N(d1): Normal acumulada en d1**	0.454540296
Volatilidad Histórica	0.059546724	**N(d2): Normal acumulada en d2**	0.776658392
Tasa Libre de Riesgo	1.579132%	**Precio del put**	57.61738256
Strike	133.97	**Valor Inicial**	100
Tiempo de Maduración	216 días (0.6 años)	**Posición Inicial seguros**	6344.48
Mínimo Valor del Portafolio	*850,000*	**Valor Posición Inicial Total**	*1,000,000*
d 1	0.11419831		
d 2	-0.760956222		

Fuente: Cálculos Propios.

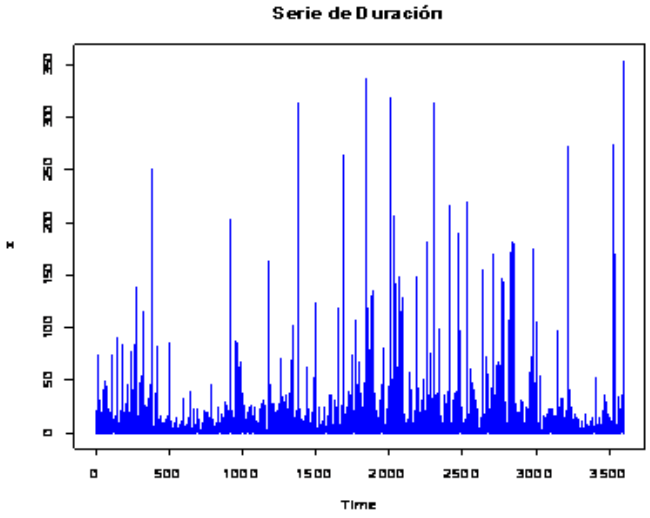
El rebalanceo implicará que se deben tomar posiciones compradoras cuando los precios suben y posiciones vendedoras cuando los precios bajan, esto debe crear una estrategia de trading tal que la compra o venta de los activos se haga de forma inmediata para replicar el sintético de la manera más exacta posible.

El modelo de valoración nos indica que el día del vencimiento la opción pasa a estar *out of the Money*. Esto se debe a que el valor asegurado del portafolio (850,000*)* pudo haber sido un valor extremo y el portafolio sin seguro no cayó por debajo de este nivel.

5.2 Pronóstico del tiempo entre rebalanceos.

Para realizar el pronóstico con el modelo de duración, se realizó la cuenta del tiempo que transcurre entre un rebalanceo y otro. La duración se definió como el tiempo en minutos entre un evento y otro. Se cuenta con 3599 datos. El Gráfico 3 muestra la serie y El Gráfico 4 su densidad. Como se puede observar la duración presenta datos atípicos y clusters de volatilidad que se evidencian porque duraciones altas están precedidas por duraciones altas y viceversa. Además el histograma evidencia una concentración de los datos alrededor de cero. El Gráfico A1 muestra las funciones de autocorrelación simple y parcial estimadas de la serie.

Gráfico 3. Serie de Duración (Tiempo transcurrido entre un rebalanceo y otro)



Fuente: Cálculos propios

Gráfico 4: Estadísticas descriptivas de la series de duración

Fuente: Cálculos Propios

El correlograma de la serie de duración indica que existen problemas de aglomeración y alta persistencia en los datos. (ver anexo, Gráfico A1) Para manejar la estacionalidad intradiaria, siguiendo a Tsay(2005) se estima el siguiente modelo determinístico:

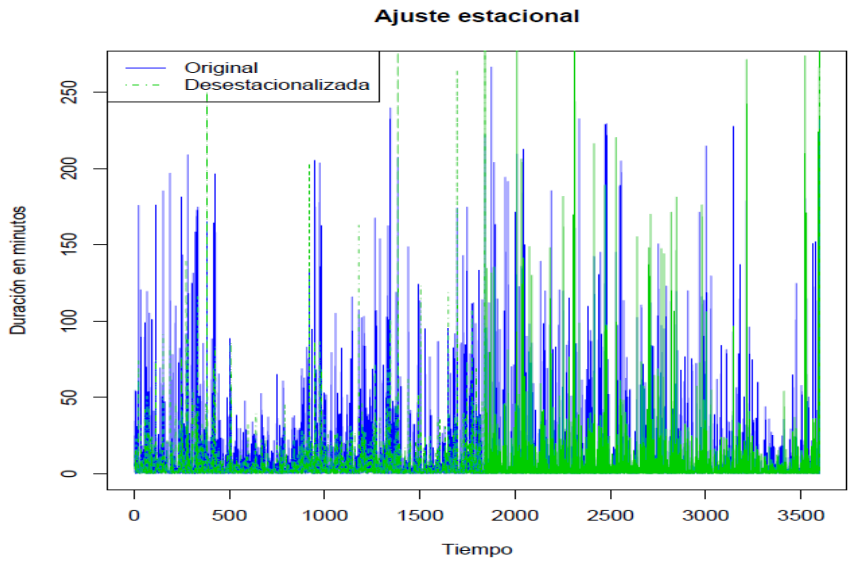
$$\log(x_t) = \alpha + \sum_{i=1}^{j} \gamma_i \delta_{it} + \eta_t \qquad (24)$$

Donde x_t es la duración, δ_{it} son dummies para cada media hora a partir de las 9:30 y para cada hora del día que va desde las 9 de la mañana a la 1 de la tarde (4 horas diarias). Estas dummies resultaron significativas, como se muestra en el anexo, Tabla A1. La serie de duración ajustada por estacionalidad se genera como:

$$y_t = \frac{x_t}{e^{\hat{x}_t}}$$

El gráfico 4 muestra la serie con estacionalidad y la serie desestacionalizada que incluye las variables dummy mencionadas.

Gráfico 5. Duración desestacionalizada.



Fuente: Cálculos Propios

Estimamos el modelo ACD logarítmico de acuerdo a la ecuación (14). Para la elección del orden del modelo, se estimaron modelos incluyendo desde 1 hasta 8 rezagos, y se escogió el modelo con el menor criterio de información de Akaike (AIC). Los resultados de la estimación del modelo de mejor especificación se muestran en la Tabla 4. Los coeficientes son todos significativos. Para calcular el error cuadrático medio (RMSE), se estima el modelo con un conjunto inicial de datos hasta el 23 de Julio, y se estimó el pronóstico un período adelante hasta el final de la muestra. El error cuadrático medio se calcula sobre este período.

Tabla 4: Resultados de la estimación del modelo ACD(2,2)

$Coeficientes$	$ACD\ (2,2)$
ω	0.0800*** (0.02)
α_1	0.1224*** (0.01)
α_2	-0.0971 *** (0.01)
β_1	0.6110 *** (0.05)
β_2	0.3445*** (0.05)
$Log-Verosimilitud$	-8681.077
$RMSE$	61.09298
Errores estándar en paréntesis. * Significativo al 10% **Significativo al 5% *** Significativo al 1%	

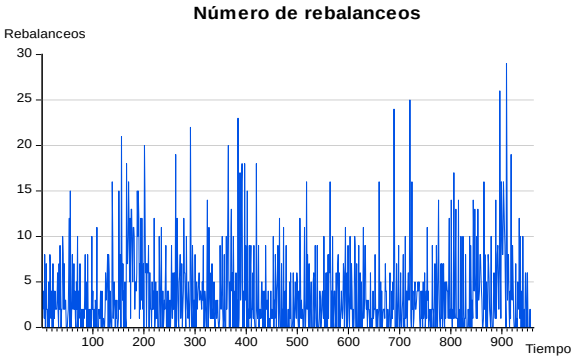
Como pruebas de especificación del modelo, se revisa que la media de los residuales era igual a 1, y se rechaza la hipótesis a un nivel de confianza del 1%. Igualmente, se llevan pruebas de Ljung-Box para verificar ausencia de autocorrelación en los errores del modelo. La prueba muestra ausencia de autocorrelación para 10 rezagos. (Ver anexo, tabla A2) El gráfico A2 del anexo muestra la duración ajustada por estacionalidad y la duración condicional ajustada por el modelo ACD. Si bien el modelo presenta un buen ajuste de la media, es incapaz de replicar las aglomeraciones de varianza y algunos datos atípicos.

5.3 Pronóstico número de rebalanceos.

Para los datos de cuenta, se realizó un conteo del número de rebalanceos que deben realizarse cada hora, que en nuestro caso es el número de veces que la variación del delta acumulado supera el umbral de 0.1 elegido.

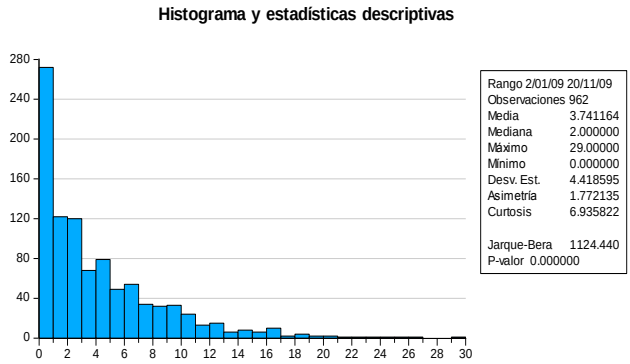
Los Gráficos 7 y 8 muestran la serie y la densidad de la serie donde se evidencia un problema de inflación de ceros, además, muestra sobre dispersión, ya que la desviación estándar supera a la media.

Gráfico 7. Serie de Rebalanceos. (Número de Rebalanceos en 60 minutos)



Fuente: Cálculos propios

Gráfico 8. Estadística descriptiva de la serie de rebalanceos.



Fuente: Cálculos Propios

Para determinar el orden del modelo autorregresivo, se tuvo en cuenta la estructura del autocorrelograma de la serie el cual nos muestra que existen rezagos que son significativos y deben ser incluidos en el modelo. (ver anexo, Gráfico A3). Se escogió una especificación con 4 rezagos. Para examinar la seriedad del problema de inflación de ceros, estimamos modelos sin inflación de ceros para verificar como cambian los coeficientes al tenerla en cuenta. Se estiman tres modelos: ACP(4,(1,4)), DACP(4,(1,4)) y ZIACP(4,(1,4)). En ninguno de los casos resultó significativa la autocorrelación de los residuales por lo que no se alteró la especificación de rezagos (ver anexo, Gráficos A4, A5 y A6) Los resultados se muestran en la Tabla 5

Tabla 5: Resultados de estimación de modelos ACP

Coeficientes	ACP(4,(1,4))	DACP(4,(1,4))	ZIACP(4,(1,4))
ω	0.4019*** (0.04036)	0.5828*** (0.1948)	1.0025*** (0.1029)
α_4	0.1671*** (0.0064)	0.1580*** (0.022)	0.02263*** (0.0122)
β_1	0.3394*** (0.019)	0.3493*** (0.0748)	0.2935*** (0.025)
β_4	0.3849*** (0.021)	0.3789*** (0.0815)	0.3448*** (0.030)
γ		0.3657*** (0.01669)	
θ			0.2760*** (0.0147)
$Log-Verosimilitud$	-3259.550	-2562.087	1888.404
AIC	6.81325	5.3592	-3.9350
$RMSE$	4.462	5.257	4.45
$Estadístico\ LR$	298.2385836	77.2973	229.3326
Errores estándar en paréntesis. * Significativo al 10% **Significativo al 5% *** Significativo al 1%. El estadístico LR es significativo al 1%.			

Los resultados indican que el mejor modelo es el ZIACP (4,1,4). Se realizaron estadísticos LR para comparar el ACP versus el ZIACP y el DACP versus el ACP, en el primer caso encontramos que se prefería el ZIACP y en el segundo se elige el DACP.[1] El uso de diferentes especificaciones implica cambios significativos en los coeficientes, en particular en el efecto de rezagos de la variable sobre sus valores futuros. La probabilidad de que un dato particular sea 0 en un momento del tiempo en el modelo ZIACP es mayor que la implicada por una Poisson estándar en 0.276.

La estimación del modelo DACP, muestra que el parámetro de sobre dispersión es significativo, mientras que el parámetro θ para el caso del ZIACP resulta igualmente significativo, comprobando la presencia de inflación de ceros en la serie.

Para cada modelo se revisaron los gráficos de los residuales al cuadrado para verificar presencia de efecto ARCH (Ver anexo, Gráficos A4, A5 y A6). En ningún caso el

[1] Para la prueba LR entre el ZIACP y el ACP, se realizó una prueba de Wald sobre θ. Se comparó con la distribución $\chi^2(1)$ y resultó significativa al 1%.

diagnóstico indicó presencia de heteroscedasticidad por lo que no se procedió a estimar los modelos GDACP de varianza no constante.

El Gráfico A7 muestra el pronóstico del número de rebalanceos de los tres modelos ACP. A simple vista no parece haber diferencia en el ajuste de estos modelos; sin embargo, en la tabla 5 se muestra que el modelo con inflación de ceros tiene un menor error cuadrático medio y su especificación es consistente con la distribución observada de los datos, a diferencia de los modelos que no contemplan la inflación de ceros. Este modelo es el usado para pronosticar el costo de transacción.

5.4 Pronóstico Costo de Rebalanceo:

Para pronosticar el costo del rebalanceo, tomamos como medida de referencia el *Spread* promedio del "Bid-Ask" de las acciones más bursátiles de la Bolsa de Valores de Colombia. Esta medida es la más usada como indicador de liquidez ya que la brecha entre los precios demandados y ofrecidos actúa como costo de transacción para los agentes interesados en comprar o vender la acción (Agudelo, 2008). Este margen se calcula como la diferencia normalizada por el precio promedio de la siguiente forma:

$$Margen = \frac{Precio\ Ofrecido - Precio\ Demandado}{(Precio\ Ofrecido + Precio\ Demandado)/2} \tag{25}$$

Esta aproximación al costo del rebalanceo es muy cercana a lo que el trader debe pagar si quiere mantener su portafolio asegurado ya que es necesario que realice estas transacciones de compra y venta y así replicar la estructura sintética que se creó.

Agudelo (2008) reporta el margen promedio para un grupo de 40 acciones del mercado bursátil colombiano para el periodo 1997-2007. Con estos datos se construyó un pronóstico lineal para obtener el *spread* promedio de los años 2008 y 2009. Como este margen está calculado para 40 acciones se encontró el *spread* proporcional para 9 acciones. Encontramos que para el 2009 el *Spread* promedio de 10 acciones fue de 0.257%. Este será el costo de cambiar la posición.

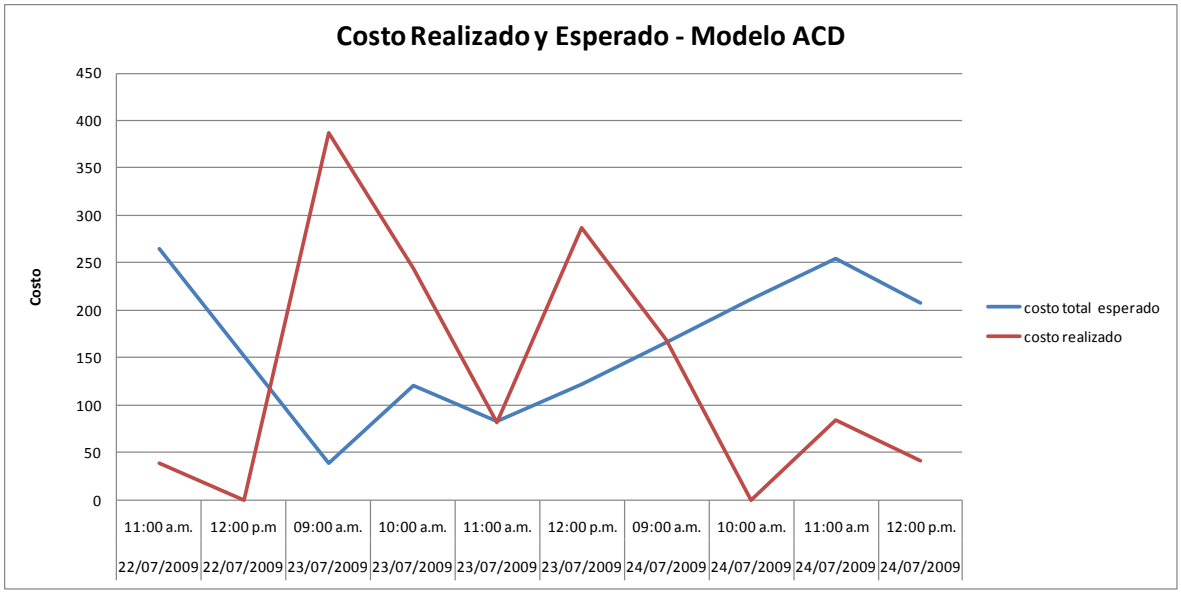
Gráfico 9. Spread Promedio (1997-2007)

Fuente: Agudelo (2008), cálculos propios

Para calcular un pronóstico del costo de transacción, se estiman los modelos hasta el 22 de Julio de 2009, de tal manera que hay 600 datos iniciales para los modelos de Poisson y 2251 datos para los modelos ACD, y se pronostica el número de rebalanceos para las 10 horas posteriores con pronósticos un período hacia adelante. En la práctica, el inversionista haría este tipo de pronósticos a corto plazo. Los pronósticos se realizan con el modelo ACD(2,2) y el modelo ZIACP(4,(1,4)). Cada uno de los modelos produce un pronóstico puntual del valor esperado del número de rebalanceos en una hora, bien sea directamente o a través de la duración entre rebalanceos. A cada rebalanceo se le asigna un costo de transacción esperado igual al costo de la última operación de rebalanceo.

El pronóstico del costo del modelo ACD está en el Gráfico 10. El costo realizado de rebalanceo durante este período es de $1330.63. El modelo ACD sobreestima el costo de transacción total en 289 dólares, siendo incapaz de captar los períodos con cero rebalanceos. En promedio, sin embargo, subestima el costo diario de rebalanceo en 22 dólares. El error cuadrático medio es de 184.47.

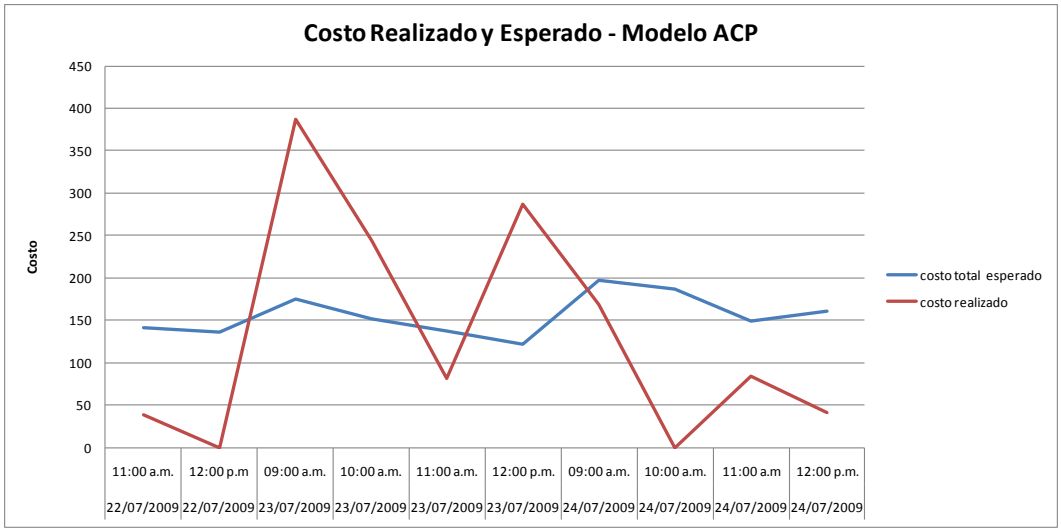
Gráfico 10. Pronóstico del costo de transacción con el modelo ACD



Fuente: Cálculos Propios

El modelo ACP presenta un mejor ajuste, con un error cuadrático medio de 129.25; sin embargo, sobre estima los costos de transacción en 226.4 dólares. El gráfico 10 permite ver que el pronóstico de este modelo aunque presenta desviaciones màs pequeñas comparado con el modelo ACD del gráfico 11, subestima y sobreestima el costo en varios puntos.

Gráfico 11. Pronóstico del costo de transacción con el modelo ACD



Fuente: Cálculos Propios

6. Conclusiones

En el actual contexto internacional de crisis financieras y alta volatilidad en los precios de los activos, es de gran utilidad una estrategia que permita cubrirse ante posibles eventos extremos. El aseguramiento de portafolios mediante la replicación de un put sintético, garantiza que el portafolio no caerá por debajo de un nivel determinado y así limitar las probabilidades de pérdida. De esta forma, el uso de modelos econométricos para pronosticar el número de rebalanceos y el tiempo que debe transcurrir entre cada transacción, permiten trazar un plan de inversión y prever posibles costos de transacción necesarios para mantener la posición.

Los pronósticos de los modelos ACD capturan adecuadamente la autocorrelación de los datos. Sin embargo, la estacionalidad intradiaria puede ser un problema para la estimación trayendo consigo falta de especificación. Por su parte, los modelos ACP con inflación de ceros, manejan la naturaleza de la serie y predicen con más probabilidad la obtención de cero rebalanceos. Este hecho permitió que el pronóstico con este modelo tuviera una menor desviación con respecto al costo observado del rebalanceo. Los modelos pronostican el costo de rebalanceo con buena precisión, si bien tienden a sobreestimarlo.

Posibles extensiones pueden tratar el problema de inflación de ceros y sobre dispersión de la serie para el caso de los datos de cuenta y series de tiempo. Así como posibles tratamientos a la estacionalidad intradiaria para los modelos de duración.

Referencias

Agudelo (2008) “Liquidez y actividad bursátil en los mercados accionarios colombianos ¿Cuánto hemos avanzado en los últimos años?” Presentado en: Conferencia sobre liquidez y actividad bursátil en Colombia. ¿Cuánto hemos avanzado? , Universidad ICESI, 15 de Agosto de 2008

Benninga, S. (2008). *Financial Modeling.* 3 ed. The MIT Press.

Black, F y Perold, A. (1992) “Theory of constant proportion portfolio insurance” *Journal of Economic Dynamics and Control* 16 (3-4), 403-426}

Bollerslev, T. (1986) "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of Econometrics* 31(3), 307-327

Brennan, M. y Eduardo S. Schwartz (1976) "The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee" *Journal of Financial Economics* 3 (3), 195-213

Davis, R. A.; Dunsmuir, W.T.M y S.B Street (2003) "Observation-driven models for time series of counts" *Biometrika* 90, 777-790

Dufour, A. and R.F. Engle (2000a), "The ACD Model: Predictability of the Time between Consecutive Trades," Discussion Paper, ISMA Centre, University of Reading.

Efron, B. (1986) "Double exponential families and their use in generalized linear regression" *Journal of the American Statistical Association,* 81, 709–721.

Engle, R.F. y J.R. Russell (1998), "Autoregressive Conditional Duration: a New Model for Irregularly Spaced Transaction Data," Econometrica, 66 (5), 1127-1162.

Heinen, A. (2003). "Modelling time series Count Data: An Autoregressive Conditional Poisson Model". MPRA Discussion Paper 8113.

Hull (2008) *Options, Futures, and Other Derivatives.* Prentice Hall; 7 edition

Jung, R; Kukuk, M y R. Liesenfeld, (2005). "Time series of count data: Modelling and estimation". CAU Economics Working Paper 2005-08.

Li, W.K. y T.K. Mak (1994), "On the Squared Residual Autocorrelations in Non-Linear Time Series with Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Time Series Analysis* (15) 627-636.

Ljung, G.M. and G.E.P. Box (1978), "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models," *Biometrika* 65, 297-303.

Mc. Kenzie, E (2003) "Discrete variate time series" In Shandbag, D.N. y Rao, C. R. (Eds) *Handbook of Statistics,* Volumen 21, 573-606. Amsterdam: Elsevier.

Merton, R. (1976) ″Option pricing when underlying stock returns are discontinuous″ *Journal of Financial Economics* 3 (1-2), 125-144.

Mullahy, J (1986) "Specification and testing of some modified count data models," *Journal of Econometrics* 3(3), 341-365

Ortiz, M; Pérez, J. y J. Sarmiento (2008). Datos de cuenta y series de tiempo: Aplicación a aseguramiento de Portafolios. Trabajo presentado en el VI Foro de Estudiantes de Economía y Finanzas y Comercio Internacional Universidad del Rosario, Bogotá, Colombia.

Pacurar, M. (2006) "Autoregressive Conditional Duration (ACD) Models in Finance: A survey of the theoretical and empirical literature" Working Paper, School of Business Administration, Dalhousie University.

Perold, A y Sharpe, W. (1988) "Dynamic Strategies for Asset Allocation" *Financial Analysts Journal* 44 (1), 16-27

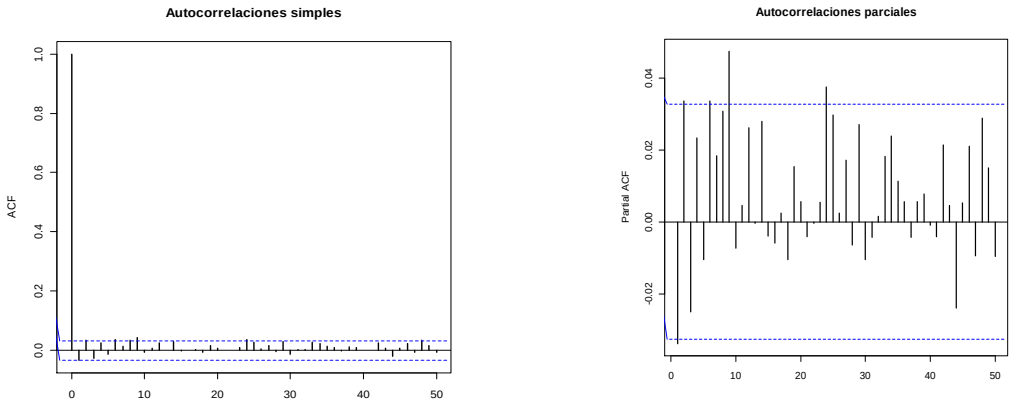
Shephard, N. (1995). Generalized linear autoregressions. Working Paper, Nuffield College, Oxford.

Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series (Wiley Series in Probability and Statistics)*. Wiley-Interscience.

Zeger, S. L. (1988) "A regression model for time series of counts" *Biometrika* 75, 621-629

Anexos

Gráfico A1. Autocorrelograma de la Serie de Duración.



Fuente: Cálculos Propios

Tabla A1. Modelo de desestacionalización de la duración

Resultados	
α	-0.20869*** (0.05978)
γ_1	1.12302*** (0.11498)
γ_2	1.52305*** (0.13090)
γ_3	1.52682*** (0.14888)
γ_4	1.75479*** (0.14283)
γ_5	1.67716*** (0.17947)
γ_6	1.85413*** (0.15148)
γ_7	1.27502*** (0.11131)
γ_8	0.82696*** (0.32218)
R2	0.1022
F(8,3589)	51.07
Errores estándar en paréntesis. *Significativo al 10% ** Significativo al 5% *** Significativo al 1%	

Tabla A2. Prueba de Ljung Box y Media del modelo ACD

Estadístico	**ACD (2,2)**
Prueba para la media igual a 1 **df** = 3597	2.7995 (0.005146)
Ljung – Box (10 rezagos)	13.5489 (0.1946)
P-valor en paréntesis.	

Gráfico A2. Duración ajustada versus condicional en el modelo ACD (2,2)

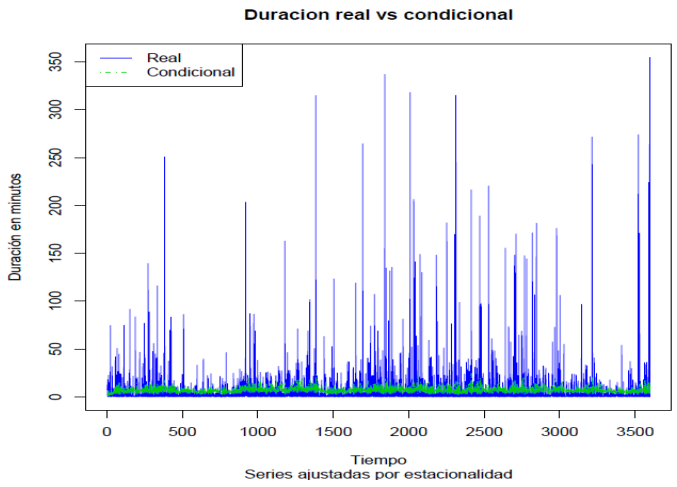
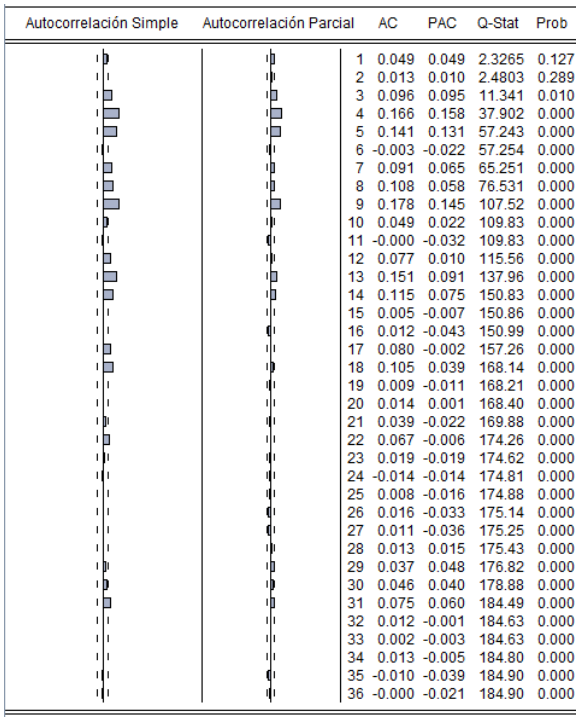


Gráfico A3. Autocorrelograma de la serie de número de rebalanceos

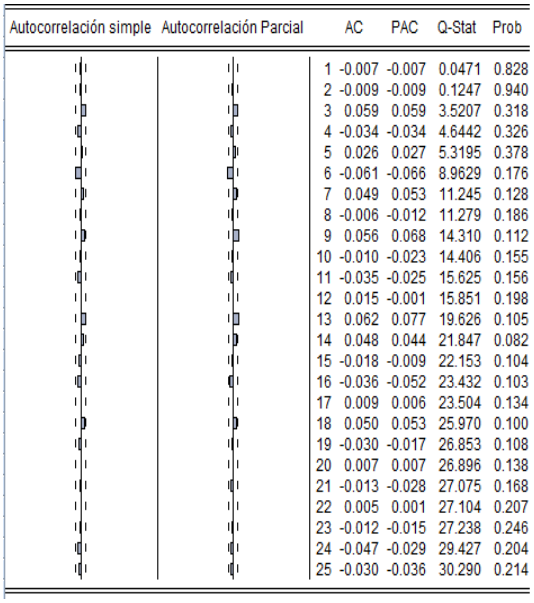


Autocorrelación Simple	Autocorrelación Parcial		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.049	0.049	2.3265	0.127
		2	0.013	0.010	2.4803	0.289
		3	0.096	0.095	11.341	0.010
		4	0.166	0.158	37.902	0.000
		5	0.141	0.131	57.243	0.000
		6	-0.003	-0.022	57.254	0.000
		7	0.091	0.065	65.251	0.000
		8	0.108	0.058	76.531	0.000
		9	0.178	0.145	107.52	0.000
		10	0.049	0.022	109.83	0.000
		11	-0.000	-0.032	109.83	0.000
		12	0.077	0.010	115.56	0.000
		13	0.151	0.091	137.96	0.000
		14	0.115	0.075	150.83	0.000
		15	0.005	-0.007	150.86	0.000
		16	0.012	-0.043	150.99	0.000
		17	0.080	-0.002	157.26	0.000
		18	0.105	0.039	168.14	0.000
		19	0.009	-0.011	168.21	0.000
		20	0.014	0.001	168.40	0.000
		21	0.039	-0.022	169.88	0.000
		22	0.067	-0.006	174.26	0.000
		23	0.019	-0.019	174.62	0.000
		24	-0.014	-0.014	174.81	0.000
		25	0.008	-0.016	174.88	0.000
		26	0.016	-0.033	175.14	0.000
		27	0.011	-0.036	175.25	0.000
		28	0.013	0.015	175.43	0.000
		29	0.037	0.048	176.82	0.000
		30	0.046	0.040	178.88	0.000
		31	0.075	0.060	184.49	0.000
		32	0.012	-0.001	184.63	0.000
		33	0.002	-0.003	184.63	0.000
		34	0.013	-0.005	184.80	0.000
		35	-0.010	-0.039	184.90	0.000
		36	-0.000	-0.021	184.90	0.000

Fuente: Cálculos Propios

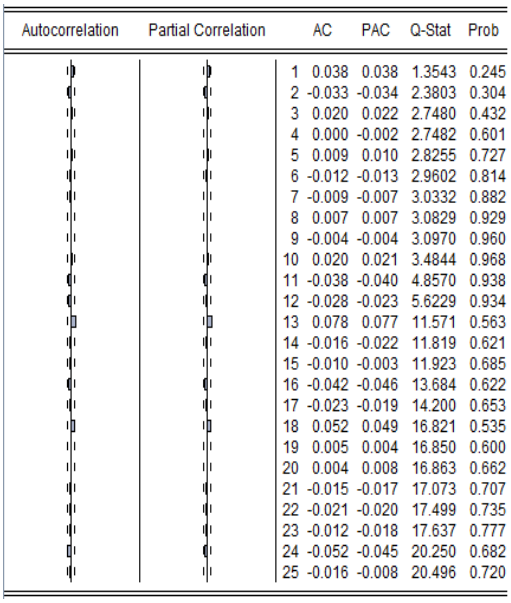
Gráfico A4: Correlogramas de los residuales del modelo ACP(4,(1,4))

Residuales



Autocorrelación simple	Autocorrelación Parcial		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.007	-0.007	0.0471	0.828
		2	-0.009	-0.009	0.1247	0.940
		3	0.059	0.059	3.5207	0.318
		4	-0.034	-0.034	4.6442	0.326
		5	0.026	0.027	5.3195	0.378
		6	-0.061	-0.066	8.9629	0.176
		7	0.049	0.053	11.245	0.128
		8	-0.006	-0.012	11.279	0.186
		9	0.056	0.068	14.310	0.112
		10	-0.010	-0.023	14.406	0.155
		11	-0.035	-0.025	15.625	0.156
		12	0.015	-0.001	15.851	0.198
		13	0.062	0.077	19.626	0.105
		14	0.048	0.044	21.847	0.082
		15	-0.018	-0.009	22.153	0.104
		16	-0.036	-0.052	23.432	0.103
		17	0.009	0.006	23.504	0.134
		18	0.050	0.053	25.970	0.100
		19	-0.030	-0.017	26.853	0.108
		20	0.007	0.007	26.896	0.138
		21	-0.013	-0.028	27.075	0.168
		22	0.005	0.001	27.104	0.207
		23	-0.012	-0.015	27.238	0.246
		24	-0.047	-0.029	29.427	0.204
		25	-0.030	-0.036	30.290	0.214

Residuales al Cuadrado

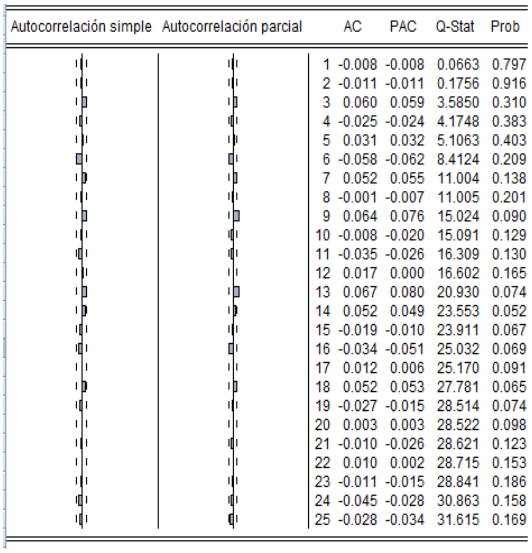


Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.038	0.038	1.3543	0.245
		2	-0.033	-0.034	2.3803	0.304
		3	0.020	0.022	2.7480	0.432
		4	0.000	-0.002	2.7482	0.601
		5	0.009	0.010	2.8255	0.727
		6	-0.012	-0.013	2.9602	0.814
		7	-0.009	-0.007	3.0332	0.882
		8	0.007	0.007	3.0829	0.929
		9	-0.004	-0.004	3.0970	0.960
		10	0.020	0.021	3.4844	0.968
		11	-0.038	-0.040	4.8570	0.938
		12	-0.028	-0.023	5.6229	0.934
		13	0.078	0.077	11.571	0.563
		14	-0.016	-0.022	11.819	0.621
		15	-0.010	-0.003	11.923	0.685
		16	-0.042	-0.046	13.684	0.622
		17	-0.023	-0.019	14.200	0.653
		18	0.052	0.049	16.821	0.535
		19	0.005	0.004	16.850	0.600
		20	0.004	0.008	16.863	0.662
		21	-0.015	-0.017	17.073	0.707
		22	-0.021	-0.020	17.499	0.735
		23	-0.012	-0.018	17.637	0.777
		24	-0.052	-0.045	20.250	0.682
		25	-0.016	-0.008	20.496	0.720

Fuente: Cálculos propios

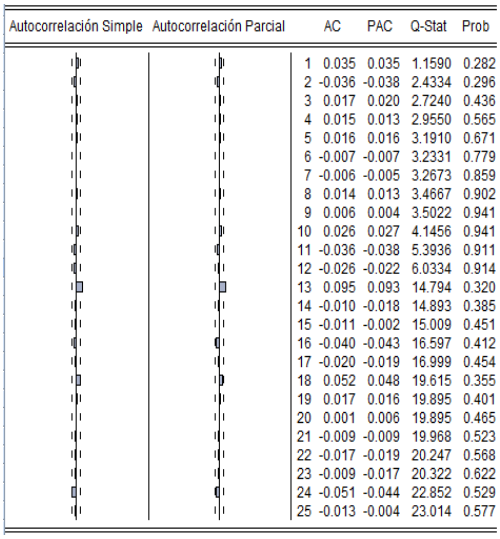
Gráfico A5: Correlogramas de los residuales del modelo DACP(4,(1,4))

Residuales



Autocorrelación simple	Autocorrelación parcial		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.008	-0.008	0.0663	0.797
		2	-0.011	-0.011	0.1756	0.916
		3	0.060	0.059	3.5850	0.310
		4	-0.025	-0.024	4.1748	0.383
		5	0.031	0.032	5.1063	0.403
		6	-0.058	-0.062	8.4124	0.209
		7	0.052	0.055	11.004	0.138
		8	-0.001	-0.007	11.005	0.201
		9	0.064	0.076	15.024	0.090
		10	-0.008	-0.020	15.091	0.129
		11	-0.035	-0.026	16.309	0.130
		12	0.017	0.000	16.602	0.165
		13	0.067	0.080	20.930	0.074
		14	0.052	0.049	23.553	0.052
		15	-0.019	-0.010	23.911	0.067
		16	-0.034	-0.051	25.032	0.069
		17	0.012	0.006	25.170	0.091
		18	0.052	0.053	27.781	0.065
		19	-0.027	-0.015	28.514	0.074
		20	0.003	0.003	28.522	0.098
		21	-0.010	-0.026	28.621	0.123
		22	0.010	0.002	28.715	0.153
		23	-0.011	-0.015	28.841	0.186
		24	-0.045	-0.028	30.863	0.158
		25	-0.028	-0.034	31.615	0.169

Residuales al Cuadrado

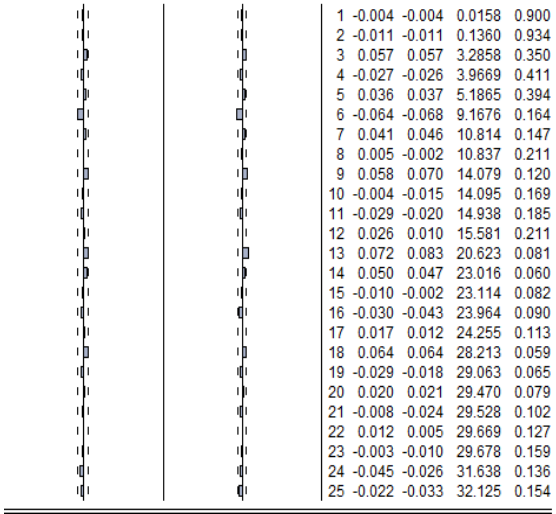


Autocorrelación Simple	Autocorrelación Parcial		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.035	0.035	1.1590	0.282
		2	-0.036	-0.038	2.4334	0.296
		3	0.017	0.020	2.7240	0.436
		4	0.015	0.013	2.9550	0.565
		5	0.016	0.016	3.1910	0.671
		6	-0.007	-0.007	3.2331	0.779
		7	-0.006	-0.005	3.2673	0.859
		8	0.014	0.013	3.4667	0.902
		9	0.006	0.004	3.5022	0.941
		10	0.026	0.027	4.1456	0.941
		11	-0.036	-0.038	5.3936	0.911
		12	-0.026	-0.022	6.0334	0.914
		13	0.095	0.093	14.794	0.320
		14	-0.010	-0.018	14.893	0.385
		15	-0.011	-0.002	15.009	0.451
		16	-0.040	-0.043	16.597	0.412
		17	-0.020	-0.019	16.999	0.454
		18	0.052	0.048	19.615	0.355
		19	0.017	0.016	19.895	0.401
		20	0.001	0.006	19.895	0.465
		21	-0.009	-0.009	19.968	0.523
		22	-0.017	-0.019	20.247	0.568
		23	-0.009	-0.017	20.322	0.622
		24	-0.051	-0.044	22.852	0.529
		25	-0.013	-0.004	23.014	0.577

Fuente: Cálculos propios

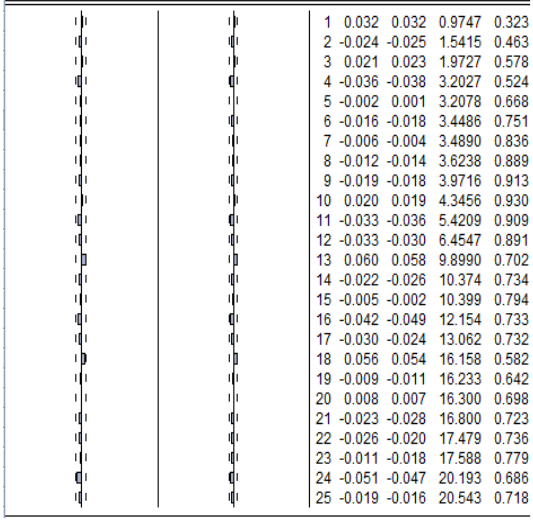
Gráfico A6: Correlogramas de los residuales del modelo DACP(4,(1,4))

Residuales



Autocorrelación simple	Autocorrelación parcial		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.004	-0.004	0.0158	0.900
		2	-0.011	-0.011	0.1360	0.934
		3	0.057	0.057	3.2858	0.350
		4	-0.027	-0.026	3.9669	0.411
		5	0.036	0.037	5.1865	0.394
		6	-0.064	-0.068	9.1676	0.164
		7	0.041	0.046	10.814	0.147
		8	0.005	-0.002	10.837	0.211
		9	0.058	0.070	14.079	0.120
		10	-0.004	-0.015	14.095	0.169
		11	-0.029	-0.020	14.938	0.185
		12	0.026	0.010	15.581	0.211
		13	0.072	0.083	20.623	0.081
		14	0.050	0.047	23.016	0.060
		15	-0.010	-0.002	23.114	0.082
		16	-0.030	-0.043	23.964	0.090
		17	0.017	0.012	24.255	0.113
		18	0.064	0.064	28.213	0.059
		19	-0.029	-0.018	29.063	0.065
		20	0.020	0.021	29.470	0.079
		21	-0.008	-0.024	29.528	0.102
		22	0.012	0.005	29.669	0.127
		23	-0.003	-0.010	29.678	0.159
		24	-0.045	-0.026	31.638	0.136
		25	-0.022	-0.033	32.125	0.154

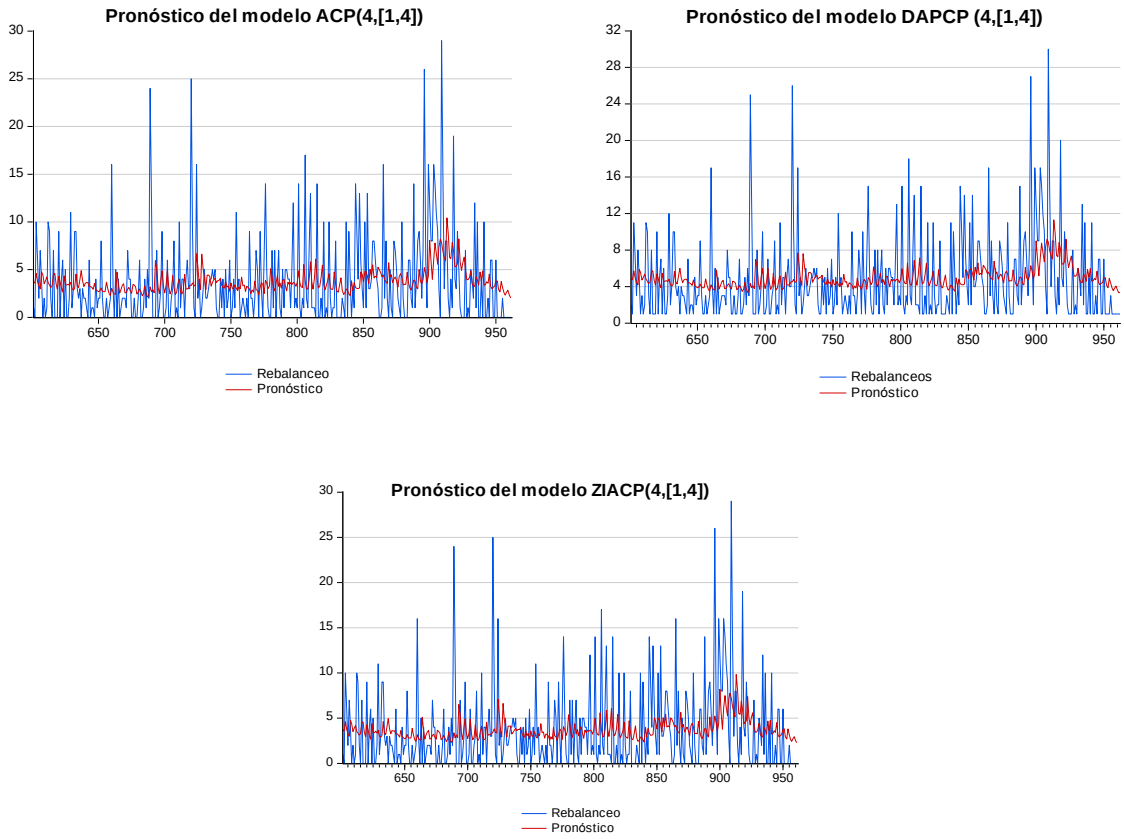
Residuales al Cuadrado



Autocorrelación simple	Autocorrelación parcial		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.032	0.032	0.9747	0.323
		2	-0.024	-0.025	1.5415	0.463
		3	0.021	0.023	1.9727	0.578
		4	-0.036	-0.038	3.2027	0.524
		5	-0.002	0.001	3.2078	0.668
		6	-0.016	-0.018	3.4486	0.751
		7	-0.006	-0.004	3.4890	0.836
		8	-0.012	-0.014	3.6238	0.889
		9	-0.019	-0.018	3.9716	0.913
		10	0.020	0.019	4.3456	0.930
		11	-0.033	-0.036	5.4209	0.909
		12	-0.033	-0.030	6.4547	0.891
		13	0.060	0.058	9.8990	0.702
		14	-0.022	-0.026	10.374	0.734
		15	-0.005	-0.002	10.399	0.794
		16	-0.042	-0.049	12.154	0.733
		17	-0.030	-0.024	13.062	0.732
		18	0.056	0.054	16.158	0.582
		19	-0.009	-0.011	16.233	0.642
		20	0.008	0.007	16.300	0.698
		21	-0.023	-0.028	16.800	0.723
		22	-0.026	-0.020	17.479	0.736
		23	-0.011	-0.018	17.588	0.779
		24	-0.051	-0.047	20.193	0.686
		25	-0.019	-0.016	20.543	0.718

Fuente: Cálculos propios

Gráfico A7. Pronósticos de los modelos ACP



Fuente: Cálculos propios