DOCUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Facultad de Administración

No. 139, ISSN: 0124-8219
Junio de 2012

Modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales en gestión de empresas

Giovanni E. Reyes Ortiz

Universidad del Rosario
Facultad de Administración

Modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales en gestión de empresas

Documento de investigación No. 139

Giovanni E. Reyes Ortiz

Grupo de Investigación sobre Perdurabilidad Empresarial
Línea de investigación: Estudios Organizacionales

Universidad del Rosario
Facultad de Administración
Editorial Universidad del Rosario
Bogotá D.C.
2012

Modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales en gestión de empresas / Giovanni E. Reyes Ortiz. —Bogotá: Editorial Universidad del Rosario, 2012.
24 p. (Documento de Investigación; 139)
ISSN: 0124-8219

Ecuaciones de Lagrange / Ecuaciones diferenciales / Variables (Matemáticas) / Funciones (matemáticas) / I. Universidad del Rosario, Facultad de Administración, Grupo de Investigación sobre Perdurabilidad Empresarial Línea de investigación: Estudios Organizacionales / II. Título. / III. Serie.

515.1 SCDD 20

Catalogación en la fuente – Universidad Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario. Biblioteca

dcl Julio 11 de 2012

Giovanni E. Reyes Ortiz

Corrección de estilo
Lina Morales

Diagramación
Fredy Johan Espitia Ballesteros

Editorial Universidad del Rosario
http://editorial.urosario.edu.co

ISSN: 0124-8219

* Las opiniones de los artículos sólo comprometen a los autores y en ningún caso a la Universidad del Rosario. No se permite la reproducción total ni parcial sin la autorización de los autores.
Todos los derechos reservados.

Primera edición: Junio de 2012
Hecho en Colombia
Made in Colombia

Contenido

1. Introducción 6

2. Perspectiva de la optimización: transformadas de Lagrange 8

3. Series Maclaurin y Taylor 10

4. Fundamentos de ecuaciones diferenciales..... 14

5. Aplicación de ecuaciones diferenciales en gestión de procesos productivos sustentables 17

6. Consideraciones finales y conclusiones 21

Referencias 23

Modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales en gestión de empresas

Giovanni E. Reyes Ortiz*

Resumen

El objetivo fundamental de este estudio es abordar la aplicación de los modelos de Maclaurin-Taylor y de ecuaciones diferenciales en la dirección y gestión de unidades de producción. Entre los aspectos más importantes de los procesos de planeación y evaluación de actividades se encuentra la identificación de funciones de producción y de costos. Cuando estos procesos están en función de la proyección o identificación de tendencias se puede requerir la utilización de los modelos de Maclaurin y Taylor. Una versión que incorpore dinamismo en la identificación de tendencias incluirá no solo las variables de manera directa, sino –en lo fundamental– las tasas de cambio. De ahí la importancia de la aplicación de ecuaciones diferenciales. Este documento incluye una ilustración respecto a la aplicación particular de ecuaciones diferenciales en procesos de sustentabilidad ecológica.

Palabras clave

Modelos de Maclaurin y Taylor, ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales aplicadas a la economía, economía ecológica.

Clasificación JEL: C00, C16, C20.

* Ph. D. en Economía para el Desarrollo y Relaciones Internacionales de la Universidad de Pittsburgh, con certificados de posgrado de las universidades de Pennsylvania y Harvard. Ha sido becario de la fundación Fulbright y del Banco Mundial; director del Sistema Económico Latinoamericano y representante ante la Organización Internacional del Café con sede en Londres; ha trabajado para la Organización de Naciones Unidas en Nueva York, para el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD), el Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia (Unicef) y el Vienna International Center. Ha sido coordinador del *Informe de desarrollo humano* de Naciones Unidas en Venezuela y en dos ocasiones decano de la Facultad de Economía de la Universidad Católica de Colombia. Es Profesor asociado de carrera y director académico de la Facultad de Administración de la Universidad del Rosario.

1. Introducción

Una de las áreas de aplicación de las matemáticas más extendida en relación con la dirección y gestión, esto es, la dirección de empresas, se relaciona con los aspectos de: (i) identificación de funciones de producción y costos; (ii) delimitación de las variables, procesos y en general factores que constituyen las condicionantes principales; y (iii) establecimiento de tendencias que puedan aportar criterios en lo referente a escenarios futuros.

En estas consideraciones se deben tener en cuenta, no pocas veces, soluciones para problemas que implican la optimización de recursos. Los cálculos sobre optimización por lo general se relacionan con aspectos de análisis marginal, determinación de puntos de equilibrio y de niveles óptimos de producción para una determinada unidad de productividad económica, o nivel de integración económico: individuo, hogar, institución o empresa. Ese punto óptimo de producción se relaciona con la igualdad entre costo marginal e ingreso marginal.

Con el fin de establecer esas condiciones óptimas en equilibrio dinámico se pueden utilizar mecanismos de determinación de derivadas, las cuales constituyen un medio de determinación de los valores óptimos y de los valores extremos. Las derivadas, por referirse a funciones, sean estas lineales o no, representan más bien factores causales manifestados como vectores relacionados con causalidad; una parte de estos métodos está relacionada con las cadenas de Markov.[1]

Para establecer los mecanismos de optimización por lo general se determina la función mediante la cual la variable dependiente o endógena es resultante de un conjunto de factores. Estos últimos constituirán las variables exógenas o independientes. De allí que las denominaciones sean: (i) función objetivo y (ii) variables de elección, en relación con la expresión matemática a trabajar y las variables o factores independientes que influyen en la variable endógena.

1 Una de las representaciones en conjunto más utilizadas es la de matrices, en la cual se posibilita el estudio de vectores. Con ello los factores no se ven aislados ni de manera estática. Por el contrario, mediante la técnica de espacios vectoriales se puede tener una aproximación dinámica, en la que los diferentes factores se encuentren interrelacionados; véase: Bourbaki et ál. (2010), Horn et ál. (2008) y Prasolov et ál. (2005).

La detección de los puntos máximos o mínimos relativos se realiza mediante la igualación a cero de la primera derivada. Una vez detectados los puntos en los cuales la pendiente de la función es cero, se establece cuáles puntos son mínimos, máximos o de inflexión. Para esto último puede utilizarse el criterio de la segunda derivada.

Con base en lo anterior, y reconociendo que f' y f'' son respectivamente la primera y segunda derivadas, se tiene:

$f'(x_0) \succ 0$

$f'(x_0) \prec 0$ Esto significa que el valor de la función –o velocidad, en términos físicos– tiende a aumentar o a disminuir.

Si:

$f''(x_0) \succ 0$

$f''(x_0) \prec 0$ Esto significa que la pendiente –o la aceleración– de la curva tiende a aumentar o a disminuir.

De manera que, según la denominada prueba de la segunda derivada, si esta es negativa quiere decir que pasa de positiva a negativa, y el punto donde la primera derivada es cero se relaciona con un máximo. Si la segunda derivada es positiva significa que pasa de negativo a positivo, situación que nos advierte que estamos frente a un mínimo. Si la segunda derivada es cero, estamos ante un punto de inflexión de la función que estudiamos.

En una primera parte de este documento estudiaremos procesos de optimización mediante la identificación de transformadas de Lagrange. Esta será la base para la discusión sobre modelos basado en los postulados de Maclaurin y Taylor. En una siguiente sección se abordará el tema conceptual de las ecuaciones diferenciales, para, en la sección final, ofrecer un caso aplicativo de este tipo de ecuaciones en procesos de gestión sostenible –en lo ecológico– en lo que respecta a procesos productivos.

2. Perspectiva de la optimización: transformadas de Lagrange

El objetivo fundamental de la aplicación de las transformadas de Lagrange es resolver problemas de optimización en condiciones de restricción de valores. Por ejemplo, se quiere determinar la solución como nivel óptimo de producción, y se toman en cuenta restricciones –que pueden ser de presupuesto, de cantidad de insumos o de energía–.

La respuesta final debería incluir de manera específica, por ejemplo, la cantidad de cada insumo a ser utilizada. Este método de optimización también es conocido como multiplicadores de Lagrange.[2]

La utilización del método de multiplicadores de Lagrange sigue el siguiente método general:

Para maximizar los resultados, o bien minimizar costos de $f(x, y)$ que se encuentran sujetos a la restricción dada por $g(x, y) = 0$, se procede:

1. Identificando una nueva función:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y) \quad (1)$$

Esta nueva variable λ es reconocida como el multiplicador de Lagrange.

2. Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales parciales:[3]

---

2 Joseph Louis Lagrange (1736-1813): Matemático y físico italo-francés. Contribuyó de manera significativa al desarrollo de la especulación científica mediante aportes en la teoría de los números y las ecuaciones que llevan su nombre. Estas últimas, generalmente, se utilizan en la resolución de problemas mecánicos. Realizó también trabajos referentes al movimiento lunar y los satélites de Júpiter. Fue senador y conde del imperio de Napoleón Bonaparte. Sus métodos de optimización en economía son ampliamente reconocidos. Una mayor discusión en Hockett y Sternstein (2008, 534-541) y Larson y Hostetler (2009, 602-603, 914-919).

3 En este tipo de ecuaciones de derivación parcial sabemos que al derivar, por ejemplo, respecto a la variable x, los datos referentes a la variable y se consideran como valores constantes, y por lo tanto la derivada será igual a cero. Se sigue aquí el método general de:

$$Si\ y = Nx^q \Rightarrow y^* = NQx^{q-1}$$

El método de Lagrange es ilustrado aquí para dos variables, pero su capacidad de resolución de problemas de optimización puede incluir n número de variables, además de sus restricciones. Al utilizar dos variables, como endógena y exógena, el criterio de la segunda derivada puede ser útil para determinar valores críticos, para maximización, minimización o bien puntos de inflexión en el comportamiento de las funciones. Mayores aplicaciones en problemas económicos en Dowling (2009, 105-107, 131-132, 150-153, 453-454, 470-472) y Bronson (2007, 206-207), y en relación con pruebas econométricas, Gujarati (2006, 264-265, 457-458).

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad g(x, y) = 0 \text{ (2)}$$

3. Se evalúa *f (x, y)* en los puntos *(a, b)* que se han encontrado en el paso 2. Si *f* tiene un máximo o un mínimo, ocurrirá en uno de esos puntos.

Otra forma de presentar lo antes mencionado es:

1. Se resuelven simultáneamente las ecuaciones:

$$\upsilon f\ (x, y) = \lambda \upsilon g(x, y) \quad \text{y} \quad g(x, y) = \text{c} \text{ (3)}$$

Para ello se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_x\,(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y\,(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \text{ (sistema 4)} \\ g\,(x, y) &= \text{c} \end{aligned}$$

2. Igual que en el paso 3 del primer procedimiento mencionado, se evalúa *f* en cada punto de solución obtenido en el paso 1 de este segundo procedimiento. El valor mayor representa el máximo obtenido en medio de las restricciones $g(x, y) = c$, y a la inversa.

3. Series Maclaurin y Taylor

Tanto las series de Maclaurin como las de Taylor tratan de establecer los desarrollos y expansión de una función alrededor donde los valores son cero, tal como los extremos relativos mencionados anteriormente. Se entenderá aquí que expandir una función a partir de un punto (x_0) es transformar la función en una forma polinomial, en la que los distintos términos se expresan en tanto los valores de las derivadas –primera, segunda, tercera–. Esas derivadas se evalúan a partir del punto de expansión (x_0).[4]

Para aplicar las series de Maclaurin se establece la expansión de la función polinomial de n-ésimo grado:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + ... + a_nx^n \quad (5)$$

A partir de esta función (1) se procede a obtener las derivadas, mediante un proceso de diferenciación sucesiva:

$$f\cdot(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... + na_nx^{n-1}$$

$$f\cdot\cdot(x) = 2a_2 + 3(2)a_3x + 4(3)a_4x^2 + ... + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$f\cdot\cdot\cdot(x) = 3(2)a_3 + 4(3)(2)a_4x + ... + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

$$f^{(4)}(x) = 4(3)(2)a_4 + 5(4)(3)(2)a_5x + ... + n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-4}$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3).....(3)(2)(1)a_n \quad \text{(sistema 6)}$$

Se pueden evaluar estas derivadas en diferentes puntos, pero para efectos del estudio de la expansión de la función, se evaluarán con base en *x = 0*; con esto se eliminan todos los términos de los polinomios que incluyan a x, y quedan solo los valores siguientes:

4 Esta sección está fundamentada en el trabajo de Chiang y Wainwright (2008, 243-248); véase también: Dowling (2009), Frish (1999), Gallo (2010), Hamburg (2009) y Marascuilo y Serlin (2008).

$$f\cdot(0) = a_1$$
$$f\cdot\cdot(0) = 2a_2$$
$$f\cdot\cdot\cdot(0) = 3(2)a_3$$
$$f^{(4)}(0) = 4(3)(2)a_4$$
$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)(n-3).....(3)(2)(1)a_n \quad \text{(sistema 7)}$$

Una ilustración sobre cómo caracterizar una función mediante las series de Maclaurin:

Por ejemplo, sea la función:

$$f(x) = 14 + 3x + 3x^2 \quad (8)$$

De allí se tiene que:

$$f\cdot(x) = 3 + 8x \Rightarrow f\cdot(o) = 3$$
$$f\cdot\cdot(x) = x \Rightarrow f\cdot\cdot(o) = 8$$

Tomando en cuenta que:

$$f(x) = f(o) + f\cdot(0)x + \left(\frac{f\cdot\cdot(0)}{2}\right)x^2 \quad \text{(sistema 9)}$$
$$\Rightarrow f(x) = 14 + 3x + 4x^2$$

Con ello se comprueba que la serie de Maclaurin representa la función dada.

Con base en lo que hasta ahora se ha trabajado –la aproximación a los métodos de optimización mediante las transformadas de Lagrange y la serie de Maclaurin– se puede estudiar el desarrollo de una función alrededor del punto (x_0). Para ello se utilizará el concepto de las desviaciones del punto (x_0), que se identificarán con δ.

Por ejemplo, sea la función:

$$f(x) = 2 + 4x + 3x^2 \quad (10)$$

Conforme la notación de Taylor, al incluir las desviaciones y los valores de la primera y segunda derivadas, se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + 4(x_0 + \delta) + 3(x_0 + \delta)^2 \\ f\cdot(x) &= 4 + 6(x_0 + \delta) \\ f\cdot\cdot(x) &= 6 \end{aligned} \qquad \text{(sistema 11)}$$

Se considerará, además, que la función específica en términos del punto (x_0), junto a sus derivadas primera y segunda, resulta en el conjunto de expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 2 + 4x_0 + 3x_0^{\,2} \\ f\cdot(x_0) &= 4 + 6x_0 \\ f\cdot\cdot(x_0) &= 6 \end{aligned} \qquad \text{(sistema 12)}$$

Con base en lo anterior (10, 11 y 12), el polinomio de Taylor daría como resultado:

$$f(x) = 2 + 4x_0 + 3x_0^{\,2} + (4 + 6x_0)(x - x_0) + \left\{\left(\frac{6}{2}\right)(x - x_0)^2\right\} \quad (13)$$

Nótese que en (13) se han incorporado elementos del tratamiento de la serie Maclaurin, en $(4+6x_0)$ $(x\text{-}x_0)$; y en el denominador 2 para el 6, además de la resta del binomio elevada al cuadrado que se expresa en el último término.

La resolución de (13) nos lleva a la expresión (10):

$$f(x) = 2 + 4x + 3x^2$$

Una ilustración ahora sobre cómo expandir una función, utilizando para ello una igualdad cuadrática, y así obtener su expansión; a continuación se expresará una interpretación al respecto:

$$f(x) = 5 + 2x + x^2 \quad (14)$$

Se estudiará la función en términos de $(x_0) = 1$, y $n = 1$. La primera derivada es $2 + 2x$; evaluando en $x_0 = 1$, la función y su derivada producen:

$$f(x_0) = f(1) = 8$$
$$f\cdot(x_0) = f\cdot(1) = 4 \quad \text{(sistema 15)}$$

Al trabajar la anterior expresión con la fórmula de Taylor, agregando el residuo, se tiene:

$$f(x) = f(x_0) + f\cdot(x_0)(x - x_0) + R_1$$
$$f(x) = 8 + 4(x-1) + R_1 \quad \text{(sistema 16)}$$
$$f(x) = 4 + 4x + R_1$$

En este caso, $(4 + 4x)$ constituyen una aproximación lineal y el término R_1 representa el error de aproximación.

La interpretación se basa en que, como se puede apreciar, la función cuadrática que se trabaja cruza al eje de las *y* en el punto 5, y tiene un mínimo en el punto (−1, 4); cuando la función llega a 1 para el eje de las x, el valor en el eje y es 8. La expansión de carácter lineal trabaja este último punto a manera de expansión, de forma tal que en la medida en que nos aproximamos a (1, 8), R_1 sería cero.[5]

Se tendría un mayor valor a medida que nos separamos de ese punto, y más aún al seguir una expansión de carácter lineal. En este caso nos estaríamos alejando de los valores estrictos de la función cuadrática, dada la forma parabólica que tiene, y que en el cuadrante de las x positivas, y las y positivas, va en ascenso –recuérdese que la función tiene un mínimo en (–1, 4)–.

A manera de resumen conclusivo, en referencia a estas secciones de optimización y de modelos basados en los postulados de Maclaurin y Taylor, es posible afirmar que los métodos de optimización son importantes componentes de la aplicación matemática en ciencias económicas en general y de la administración en particular. Estos métodos, por lo general, se fundamentan en procedimientos relacionados con las transformadas de Lagrange.

Con el fin de estudiar factores lineales o no lineales de funciones como representación de aspectos causales, se pueden emplear matrices, a manera de espacios vectoriales. En estos, los factores no se verían aislados ni en situación estática, sino que se pueden trabajar elementos de variabilidad; tal es el caso de las cadenas de Markov.

5 Mayor discusión en Marascuilo y Serlin (2008), Polimeni (2002), Rycroft (2002) y Samuelson (2001).

4. Fundamentos de ecuaciones diferenciales

Cuando en economía resolvemos problemas con base en modelos algebraicos utilizamos procedimientos de solución directa o comparada, de naturaleza estática. La razón es que el álgebra es el ámbito matemático de generalización de la aritmética, pero es de carácter estático. Con el cálculo, tanto diferencial como integral, introducimos métodos que imprimen un sentido dinámico a la solución de problemas.

Al abordar problemas no lineales basados en modelos polinómicos o bien trascendentes, estamos incorporando funciones cuyos valores pueden ser resueltos mediante ecuaciones diferenciales, además de los procesos de resolución basados en sistemas de cálculo general –diferencial o integral–.

En las ecuaciones diferenciales encontramos expresiones que contienen derivadas, y por ello la connotación dinámica es una de sus características principales. Además, debido a ese rasgo, las soluciones se dan en ámbitos que son secuenciales: generales, particulares y singulares. Estos últimos nos proporcionan los datos directos de solución que buscamos.

La aplicación a un prototipo de problema relacionado con economía ecológica es la ilustración fundamental de la aplicación de ecuaciones diferenciales que se expone en este escrito. En la actualidad los problemas ecológicos, desde la perspectiva económica, prometen un rico filón de actividad para estudio, en función de necesidades que se relacionan crecientemente con fenómenos como el calentamiento global y la irregularidad de los patrones de lluvia y sequía; y con el comportamiento de poblaciones.[6]

Uno de los primeros aspectos a recordar aquí es que no debemos confundir las ecuaciones diferenciales con las ecuaciones de diferencia. En las ecuaciones diferenciales las variables, más que representar números reales o de variable compleja, representan derivadas de funciones; de allí el carácter con el cual nos permiten trabajar este tipo de funciones. Constituyen por ello componentes de nivel superior en cálculo, que se abordan luego del dominio del cálculo diferencial e integral.

Las ecuaciones de diferencia se refieren a un tipo específico de ecuaciones de recurrencia. En estas se define de manera reincidente la especificación

6 Ejemplos de aplicación de modelos no lineales en Suen (2010) y Thompson (2007).

de una secuencia –tal es el caso de la serie de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8…–. Las relaciones de recurrencia son útiles en la caracterización de procesos complejos que tienen representaciones no lineales, y son útiles en el estudio de procesos de caos. Algunas de ellas incluyen la expresión de mapas logísticos, como los que se derivarían de la función:

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n) \quad (17)$$

Respecto a las relaciones operativas que existen entre las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de diferencia, se destaca que existen ocasiones en que muchas propiedades de las ecuaciones diferenciales se pueden determinar mediante la solución de las propias ecuaciones diferenciales, o bien de las correspondientes ecuaciones de diferencia.

En una ecuación diferencial, una o más variables se relacionan con valores entre sí y con derivadas que pueden ser de diferentes órdenes. La aplicación de las ecuaciones diferenciales, al establecer expresiones de cambio o dinamismo en un grado más elevado que el cálculo diferencial e integral estricto, tiene amplias aplicaciones en ingeniería, física, medicina, biología en general, ecología y economía.

En muchos casos, cuando hay funciones de mayor grado de complejidad, la solución de las ecuaciones diferenciales no es directa, es decir numérica, sino que es general; luego, en determinadas condiciones se puede hacer particular, y con especificaciones de valores se puede tornar singular. Esta última ya tiene números directamente expresados para condiciones concretas.[7]

Las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales tienen dos grandes énfasis o perspectivas de solución. En uno de ellos se aborda el análisis cualitativo, y se refiere a las soluciones de sistemas dinámicos. En el segundo gran énfasis se brinda prioridad a los métodos numéricos, con lo que se obtienen soluciones que varían en diferentes niveles de certeza, como los ya mencionados: generales, particulares y singulares.

Los textos, especialmente los de carácter introductorio, dan inicio a la exposición de la teoría de ecuaciones diferenciales, y señalan dos grandes tipos:

7 Una mayor discusión, especialmente respecto a ecuaciones diferenciales ordinarias, en Basov (2007), Budnick (2007), Hammond (2008), Shone (2010), Suen (2010), Thompson (2007) y Zhag (2008).

a. Ecuaciones diferenciales ordinarias: En este caso, la ecuación diferencial tiene una variable dependiente y una variable independiente. Tienen un orden definido que corresponde a la derivada de más alto grado que contienen. Pueden tener presentaciones de carácter explícito o implícito; y
b. Ecuaciones diferenciales parciales: En este caso, existe una variable dependiente o endógena, y más de una variable independiente o exógena. Se utilizan aquí derivadas parciales. De manera similar a lo que ocurre con las ecuaciones diferenciales ordinarias, el orden de la ecuación diferencial corresponde a la derivada de más alto grado que se incluya. Las ecuaciones diferenciales parciales pueden involucrar tipos elípticos, parabólicos o hiperbólicos.

5. Aplicación de ecuaciones diferenciales en gestión de procesos productivos sustentables

La aplicación que se realizará aquí corresponde a un caso de economía ecológica, y se orientará específicamente a los cambios que se están produciendo en una población de peces debido a la introducción de una especie foránea. Ello implica que la población original destinada a la producción piscícola se transforme y que se tengan que desarrollar nuevos usos o aprovechamientos basados en la especie foránea que se está reproduciendo.[8]

El problema a resolver establece que la población de una especie foránea está creciendo de manera exponencial, de tal forma que en un inicio se calculó una población de 50.000 peces y 5 años más tarde la población ascendía a 75.000. En función de t (t = años), el crecimiento de la especie de peces foráneos está dado por la función diferencial siguiente:[9]

$$\frac{dP}{dt} = kP = kP_0 e^{kt} \quad (18)$$

Con base en lo anterior se desea determinar:

a. El modelo de solución general de la ecuación;
b. El modelo de solución particular, considerando la población de 75.000 individuos en 5 años;
c. La solución singular en cuanto a corroborar –con base en la solución particular– la población de 75.000 en 5 años;
d. La población de peces foráneos que existirá en 10 años;
e. El tiempo para que la población llegue a 100.000 individuos.

Solución:

a. Modelo de solución general: Como se puede apreciar, este modelo corresponde a una ecuación diferencial ordinaria, es decir con una sola variable exógena o independiente.

8 Mayor discusión de este caso en Budnick (2007, 898-903).
9 Aplicaciones más generales y discusión de casos más específicos en la relación entre economía y ecología en Commom (2009), Hanley et ál. (1998) y Hill et ál. (2009).

Lo que inicialmente se debe hacer es determinar el modelo de solución general, el cual se obtiene mediante integración:

$$\int \frac{dP}{dt} = \int kP_0 e^{kt} \quad (19)$$

De allí que:

$$P = P_0 \int k e^{kt} \quad (20)$$

Es decir que la *solución general* es:

$$P = P_0 e^{kt} \quad (21)$$

b. Modelo de solución particular: Como resultado del modelo de solución general, se tiene que P_0 y k son constantes; para determinar el valor de P_0 se aplica la condición inicial según la cual $P = 50.000$ y $t = 0$.

$$50.000 = P_0 e^{k0}$$

Es decir:

$$50.000 = P_0 \quad (22)$$

Es necesario ahora determinar el valor de k, para lo cual utilizamos la información de que en 5 años la población de peces ascendió a 75.000. Para esto se utiliza la solución general:

$$75.000 = 50.000\ e^{k(5)} \quad (23)$$

Es decir que:

$$1{,}5 = e^{5k}$$

Utilizando los logaritmos naturales en ambos lados de la ecuación se tiene:

$$\log nat\ (1{,}5) = 5k$$

$$0{,}4054651 = 5k \quad (24)$$

Esto es que:

$$k = 0{,}0811 \quad (25)$$

Con base en lo anterior, la *solución particular* es:

$$P = 50.000\, e^{(0{,}0811)t} \quad (26)$$

c. Corroboración de las condiciones de población a 5 años: Con base en la solución particular (10) se tiene el siguiente planteamiento de solución singular:

$$P = 50.000\, e^{(0{,}0811)(5)}$$

$$P = 50.000\,(1{,}5) = 75.000 \quad (27)$$

Con este cálculo, la situación a 5 años está corroborada.

d. Determinación de la población de peces foráneos que habrá en 10 años: La solución singular se basaría en:

$$P = 50.000\, e^{(0{,}0811)(10)} \quad (28)$$

Esto es:

$$P = 50.000(2{,}718281)^{(0{,}0811)(10)}$$

$$P = 50.000(2{,}25015) = 112.507 \quad (29)$$

Por lo tanto, *se espera que en 10 años la población de peces foráneos ascienda a 112.507 individuos*.

e. Determinación del tiempo para que la población llegue a 100.000 individuos: Ahora la incógnita es *t*, por lo tanto se tiene:

$$100{,}000 = 50.000\,(2{,}718281)^{(0{,}0811)(t)} \quad (30)$$

$$2 = (2{,}718281)^{(0{,}0811)(t)}$$

Lo que se traduce en:

$$\log nat\,(2) = 0{,}0811\,(t)$$

$$t = 8{,}54 \quad (31)$$

Es decir que *el tiempo necesario para que la población foránea de peces alcance el número de 100.000 individuos es de 8 años con 6 meses y aproximadamente 15 días*.

6. Consideraciones finales y conclusiones

En este estudio se han abordado métodos de optimización de valores en funciones especialmente no lineales. Para ello se han discutido las aplicaciones de las transformadas de Lagrange. Se han utilizado los criterios de segunda derivada.

Con base en estos criterios es posible sostener que cuando los valores de estas últimas son negativos se trata de funciones que tienen máximos, si son positivos, tienen mínimos, y si se hacen cero se está frente a puntos de inflexión. Una de las formas más útiles de estudiar las zonas de expansión o zonas limítrofes a puntos críticos, alrededor de esos puntos x_0, son las series de Maclaurin y de Taylor.

En este escrito se han puesto tales series en el contexto de su aplicación, en relación con espacios vectoriales y con transformadas de Lagrange, y se han elaborado ilustraciones al respecto. En el método de Taylor se trabaja con desviaciones del punto crítico δ. En la medida en que la aproximación que utilicemos sea mayor, mayor será el residuo R_1 asociado con la desviación.

Esta metodología general de expansión y de estudio del desarrollo de funciones alrededor de puntos críticos resulta especialmente útil para el caso de funciones no lineales, sean éstas trascendentes logarítmicas o exponenciales.

En una sección posterior se abordó el tema de una breve caracterización de las ecuaciones diferenciales. A continuación se ha procedido a ilustrar una aplicación particular a manera de modelo, sobre solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se han trabajado los niveles de soluciones generales y soluciones particulares, dada la naturaleza de este tipo de funciones.

Con el fin de establecer la solución singular o concreta se requiere utilizar las condiciones iniciales y las llamadas condicionantes acotadas –datos específicos– respecto a las condiciones para las cuales se desea encontrar los datos de solución.

En las ecuaciones diferenciales encontramos, en función del tiempo, medidas relacionadas con razones de cambio. La solución de ecuaciones diferenciales permite tener una idea más completa de las relaciones funcionales, tomando en cuenta las temporalidades y el comportamiento de

las diferentes unidades de estudio en cuanto a los vectores causales que afectan. Una aplicación última se ha realizado en un ejemplo particular respecto a la gestión de empresas en contextos de desarrollo sustentable en lo ecológico.

Referencias

Basov, Suren (2007). *Partial Differential Equations in Economics and Finance*. New York: Nova Science.

Bourbaki, Nicolas et ál. (2010). *Topological Vector Spaces*. London: Springer.

Bronson, Richard (2007). *Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.

Budnick, Frank (2007). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales.* (México D.F.: McGraw-Hill).

Chiang, Alpha & Wainwright, Kevin (2008). *Métodos fundamentales de economía matemática*. México D. F.: McGraw-Hill.

Commom, Michael (2009). *Ecological Economics: An Introduction*. New York: Cambridge University Press.

Dowling, Edward (2009). *Introduction to Mathematical Economics*. New York: McGraw-Hill.

Frish, Ragnar (1999). *Theory of Production*. Chicago: Rand & McNally.

Gallo, César (2010). *Matemáticas para estudiantes de administración y economía*. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Gujarati, Damodar (2006). *Econometría*. México D. F.: McGraw-Hill.

Hamburg, Morris (2009). *Statistical Analysis for Decision Making*. New York: Harcourt Brace Jovanovich.

Hammond, Peter (2008). *Essential Mathematics for Economic Analysis*. New York: Oxford University Press.

Hanley, Nick et ál. (1998). *Environmental Economics in Theory and Practice*. London: MacMillan Press.

Hill, Robert et ál. (2009). *The Economics of Environment and Natural Resources*. Oxford, U. K.: Blackwell.

Hockett, Shirley & Sternstein, Martin (2008). *Applied Calculus*. Malabar, Florida: Robert E. Krieger.

Horn, Roger et ál. (2008). *Matrix Analisis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Larson, Roland & Hostetler, Robert (2009). *Multivariable Calculus*. Lexington, Massachussets: Heath & Co.

Marascuilo, Leornard & Serlin, Roland (2008). *Statistical Methods for the Social and Behavioral Sciences*. New York: W.H. Freeman & Co.

Polimeni, Roland (2002). *Cost Accounting, Concepts and Applications for Managerial Decision-Making*. New York: McGraw-Hill.

Prasolov, Victor et ál. (2005). *Problems in Linear Algebra*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Rycroft, Robert (2002). *The Economics Problem Solver*. Pisctaway, New Jersey: Research and Education Association.

Samuelson, Paul (2001). *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Shone, Ronald (2010). *An Introduction to Economic Dynamics*. Oxford, U. K.: Oxford University Press.

Suen, Wing (2010). *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*. Boston: McGraw-Hill.

Thompson, George (2007). *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*. New York: Springer.

Zhag, Wei-Bin (2008). *Differential Equations Bifurcations and Chaos in Economics*. London: World Scientific Publishing.

Universidad del Rosario
Facultad de Administración