UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
Facultad de Economía
Economía Matemática 2017-I - Taller 4

Ejercicios para entregar: 3.e, 4.d, 10.e, 16 y 20.a en grupos de tres personas.

1. Trace la gráfica de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = x^2 + x - 5$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x}$

   (c) $f(x) = |x - 6|$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 0 \\ x^3 + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

2. Encuentre el dominio y codominio de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = 4x + 2$

   (b) $f(x) = x^2$

   (c) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{3 - 2x}}$

   (d) $f(x) = k$, constante

   (e) $f(x) = senx$

   (f) $f(x) = ln(x)$

3. Encuentre el dominio y codominio de las siguientes funciones:

   (a) $z(x, y) = x^2 + y^2$

   (b) $z(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

   (c) $Z(x, y) = -\sqrt{xy}$

   (d) $z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 4y^2}}$

   (e) $\phi(x, y, z) = \sqrt{10 - x^2 - y^2 - z^2}$

4. Para las siguientes funciones:

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

   (b) $f(x, y) = 2x - 3y$

   (c) $f(x, y) = xy$

   (d) $f(x, y) = \frac{3xy}{x^2 + y^2}$

   (e) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

   Determine si los siguientes límites existen. Para la función en el item b, demuestre por definición formal:

   (a) $lim_{p \to (1,1)} f(x, y)$

   (b) $lim_{p \to (1,-1)} f(x, y)$

   (c) $lim_{p \to (-1,1)} f(x, y)$

   (d) $lim_{p \to (0,0)} f(x, y)$

5. Para cada una de las funciones del problema 4, determine si $f(.)$ es continua en:

   (a) $(1, 1)$

   (b) $(1, -1)$

   (c) $(-1, 1)$

   (d) (0.0)

6. Sea $f(x) = x + \frac{1}{x}$, con $x = (3u + 1)^3$. Calcule $\frac{df}{du}$

7. Sea $y = 1 + u + u^2$ con $u = \dfrac{10 - 7x}{2 + x^3}; x = (t-2)^2$ Calcule $\dfrac{dy}{dt}$

8. Calcule las derivadas indicadas:

   (a) $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, donde $y = u^3$ y $u = (1 + 2x)^2$

   (b) $\dfrac{dy}{dt}$, donde $y = x^5 \dfrac{d^2u}{dt^2}$, $x = x(u)$ y $u = u(t)$

9. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, con $x(u) = u - 1$, $y(u) = u^3 + 2u - 5$, $z(u) = \dfrac{-1}{u}$.
   Calcular $\dfrac{df}{du}$

10. Sea $\varphi(x, y) = \dfrac{3x^2}{y}$, con $x(s, t, u, v) = s^2 - 2st - u^2v + 10$, $y(s, t, u, v) = 3s^2 + t + su + v - 32$, encuentre:

    (a) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}$

    (b) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$

    (c) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$

    (d) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$

    (e) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}|_{s=2,t=0,u=1,v=-1}$

11. Sea $u = u(x, y), con\, x(r, \theta) = rcos(\theta)$, $y(r, \theta) = rsen(\theta)$, muestre que:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

12. Si $f(x, y)$ satisface la identidad:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

    entonces f es llamada una función homogénea de grado n. Demuestre que f cumple la relación

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

    Este es el llamado *teorema de Euler sobre funciones homogéneas.*
    Sugerencia: tome a t como variable independiente, derive ambos miembros de la identidad con respecto de t, y evalúe la identidad resultante cuando $t \to 1$.

13. Muestre que si $f(X)$ y $g(X)$, con $X \in \Re^n$ son dos funciones diferenciables, entonces:

    (a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

    (b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

14. Encuentre un vector unitario normal a la curva $x^2 + y^2 = 8$ en el punto $p(2, 2)$.
Sugerencia: use el hecho de que el vector ∇f, siendo $f(x, y) = x^2 + y^2 = 8$, es normal a las cuvas de nivel de f.

15. Encuentre el vector unitario normal a la superficie $x^2y + 2xz = 4$ en el punto $p(2, -2, 3)$.
Sugerencia: use el hecho de que el vector ∇f, siendo $f(x, y) = x^2 + 2xz = 4$, es normal a las superficies de nivel de f.

16. Muestre que si $\phi(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$, se cumple que:

$$x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

17. Muestre que si $\varphi(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ se cumple que:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

18. Verifique que las siguientes derivadas pacriales son iguales entre si:

    (a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ si $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

    (b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ si $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

    (c) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ y $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$ si $f(x, y) = x^2yz + 2xy^2z^2 - \dfrac{z^3}{xy}$

19. Para cada una de las funciones del problema 19, encuentre la matriz Hessiana correspondiente.

20. Para las siguientes funciones, encuentre la expansón de Taylor alrededor del punto indicado:

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + z}$ al rededor de $a = 0$

    (b) $f(x) = \dfrac{1}{4 + 2z}$ al rededor de $a = 0$

    (c) $f(x) = \dfrac{1}{z}$ al rededor de $a = 1$

    (d) $f(x) = sen(x)$ al rededor de $a = 0$

    (e) $f(x) = \sqrt{1 + x}$ al rededor de $a = 1$