

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
FACULTAD DE ECONOMÍA

Taller 6 Economía Matemática Octubre de 2017

Profesores: Andrés F. Cárdenas y Juan C. Zambrano

Deben entregar en grupos de tres personas: 2b,3c,4c,5,7,9,10d,11c,12a,11c,4d,15,16d,19, 20b

1. Compruebe que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada:

(a) $2y' + y = 0$; $y = e^{-\frac{x}{2}}$.

(b) $y'' - 6y' + 13y = 0$; $y = e^{3x} \cos 2x$.

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$; $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$.

(d) $p' = p(1 - p)$; $p = \frac{c_1 e^t}{1 + c_1 e^t}$

(e) $x' = 3t^2(x^2 + 1)$; $x(t) = \tan(t^3 + c)$

2. Dada la ecuación diferencial, su solución y las condiciones iniciales, determinar el valor de las constantes arbitrarias:

(a) $y^2 y' - 4x = 0$, $y^3 = 6x^2 + c$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$;

(b) $y'' + y = \cos x + 4$, $y = c_1 x \operatorname{sen}(x) + c_2$, $y(0) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

(c) $x' + 2tx^2 = 0$, $x(t) = \frac{1}{t^2 + C}$, $x(0) = 1$.

3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$ (b) $y \ln x \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$ (c) $e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

4. Resuelva en cada caso el problema de valor inicial dado:

(a) $x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy$, $y(-1) = 1$ (b) $\frac{dy}{dt} + 2y = 1$, $y(0) = \frac{5}{2}$

(c) $2\frac{dy}{dt} + 12y + 2e^t = 0$, $y(0) = \frac{6}{7}$

5. El precio $P(t)$ de un bien al tiempo t satisface $\dot{P} = 2[D(P) - S(P)]$, en donde $S(P) = P - 4$ es la oferta y $D(P) = 11 - 2P$ es la demanda del bien. Resuelve para $P(t)$, suponiendo que $P(0) = P_0$, y discute el comportamiento de esta función a largo plazo.

6. En el modelo de Malthus, la población $P(t)$ de individuos al tiempo t crece de acuerdo con $\dot{P} = aP$, con $a > 0$ la tasa de crecimiento de la población.

(a) Encuentra $P(t)$, suponiendo que $P(0) = P_0$.

(b) En cuánto tiempo se duplicará la población inicial?

(c) Determina $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$

(d) si $a < 0$, Cuál sería el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$

7. Sean las ecuaciones de oferta y demanda $Q_d = \alpha - \beta P - \sigma \frac{dP}{dt}$; $Q_s = -\gamma + \delta P$ con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$.

- (a) Suponiendo que la tasa de cambio de los precios respecto al tiempo es directamente proporcional a la demanda excedente, encuentre la trayectoria de tiempo $P(t)$.
- (b) Cuál es el precio de equilibrio intertemporal ?
- (c) Cuál es el precio de equilibrio de clarificación del mercado?
- (d) Qué restricción sobre el parámetro σ aseguraría la estabilidad dinámica?
8. Sean las ecuaciones de oferta y demanda $Q_d = \alpha - \beta P - \eta \frac{dP}{dt}$; $Q_s = \delta P$ con $(\alpha, \beta, \eta, \delta > 0)$.
- (a) Suponiendo que el mercado está clarificado para cada instante de tiempo, encuentre la trayectoria de tiempo $P(t)$
- (b) Tiene este mercado un precio de equilibrio intertemporal dinámicamente estable?
9. El consumo $C(t)$, la inversión $I(t)$ y la renta nacional $Y(t)$ en el tiempo t satisfacen las ecuaciones:

$$C(t) + I(t) = Y(t)$$

$$I(t) = k\dot{C}(t)$$

$$C(t) = aY(t) + b$$

En donde $a, b, k \in \mathbb{R}^+$ con $a < 1$. Demuestre que $Y(t)$ satisface la ecuación:

$$\dot{Y}(t) = \frac{1-a}{ka}Y - \frac{b}{ka}$$

Resuelva para $Y(0) = Y_0 > \frac{b}{1-a}$. Luego halle la función $I(t)$ y calcule $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y(t)}{I(t)}$

10. Resuelva cada una de las ecuaciones *homogéneas* :

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{3x+y}$

(b) $(y^2 + xy) dx - x^2 dy = 0$

(c) $(x + ye^{\frac{y}{x}}) dx - xe^{\frac{y}{x}} dy = 0$ (d) $-y dx + (x + \sqrt{xy}) dy = 0$

11. Determinar si las siguientes ecuaciones son *exactas*; si lo son, encuentre la solución general.

(a) $(5x + 4y) dx + (4x - 8y^3) dy = 0$ (b) $(x^3 + y^3) dx + 3xy^2 dy = 0$

(c) $(3x^2y + e^y) dx + (x^3 + xe^y - 2y) dy = 0$ (d) $(x - y^3 + y^2 \sin x) dx = (3xy^2 + 2y \cos x) dy$

12. Encuentre un factor integrante adecuado para resolver las ecuaciones dadas:

(a) $(2y^2 + 3x) dx + 2xy dy = 0$ (b) $6xy dx + (4y + 9x^2) dy = 0$

13. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales:

(a) $x^2 y' + 2xy = e^{3x}$; (b) $xy' - 3y = x^4 \sin(x)$; (c) $y' - \frac{y}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

14. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

(a) $y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{3}x^4 y^4$;

(b) $y' - xy = 2x\sqrt{y}$;

(c) $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$

(d) $x' = \frac{2x}{t} - 5x^2 t^2$ $x(1) = \frac{1}{2}$

15. En el modelo de Solow el capital per capita, k , satisface la ecuación:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k$$

Donde $f(k)$ representa la producción per capita, $0 < s < 1$ la tasa de ahorro, $n > 0$ la tasa de crecimiento de la fuerza laboral y $\delta > 0$ la tasa de depreciación del capital. Resuelva para $k(t)$ suponiendo que $f(k) = k^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$. Luego determine el comportamiento $k(t)$ a largo plazo.

16. Determine las soluciones y_c y y_p para cada una de las siguientes ecuaciones. Además encuentre la solución definida por las condiciones iniciales dadas.

- (a) $y'' + 25y = 0$, donde $y(0) = 0$, $y'(\frac{\pi}{5}) = 1$;
- (b) $2y'' + 3y' + 4y = 12$, donde $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;
- (c) $y'' + 9y = 3$, donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
- (d) $4y'' - 8y' + 5y = 40$, donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
- (e) $y^{IV} - y = 0$, donde $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = -2$;
- (f) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$, donde $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$;

17. Cuáles de las ecuaciones diferenciales anteriores poseen trayectorias de tiempo con:

- a) Fluctuación amortiguada
- b) fluctuación uniforme
- c) fluctuación explosiva.

Determine cuáles de los equilibrios intertemporales son dinámicamente estables.

18. Sean las funciones de oferta y demanda $Q_d = \alpha - \beta P + m \frac{dP}{dt} + n \frac{d^2P}{dt^2}$; $Q_s = -\gamma + \delta P$ con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$.

- (a) Si el mercado no siempre está en ceros, si no que se ajusta a $\frac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s)$ con $(j > 0)$. Escriba la ecuación diferencial indicada según este ajuste.
- (b) Encuentre el precio de equilibrio intertemporal $\bar{P}$ y el precio para el mercado en ceros P^*
- (c) Establezca la condición para tener una trayectoria de precio fluctuante.
- (d) Puede presentarse fluctuación si $n > 0$?

19. Sean la ecuaciones de oferta y demanda $Q_d = 9 - P + P' + 3P''$ y $Q_s = -1 + 4P - P' + 5P''$ con $P(0) = 4$ $P'(0) = 4$

- (a) Encuentre la trayectoria de precio, suponiendo que el mercado está en ceros para todo instante de tiempo.
- (b) Es convergente la trayectoria de Tiempo? Con fluctuación?.

20. Use el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución de las siguientes ecuaciones:

- a) $y'' + 2y' + y = t$
- b) $y'' + y' + 2y = e^t$
- c) $y'' + y' + 3y = \sin t$
- d) $y'' + y = 2t \sin(t)$