



**Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario**  
**Facultad de Economía**  
**Maestría en Economía**  
**Febrero de 2011**

**Impuesto a la renta en Colombia:**  
**Una aproximación desde la teoría de la tributación óptima\***

*Julián Alberto Moreno Bonilla\*\**

**Clasificación JEL:** *H21, H22 y H23*

**Palabras clave:** *Tributación óptima, tasa marginal de tributación e impuesto a la renta.*

**Resumen:** La política fiscal es un mecanismo con importantes implicaciones en el bienestar de la población. En particular, el impuesto de renta genera incentivos sobre la oferta laboral de los contribuyentes y esto tiene repercusiones sobre su consumo, ingreso y bienestar. En Colombia, el impuesto de renta a personas naturales tiene poca relevancia al interior de la estructura tributaria; sin embargo, es un impuesto que puede ser reformado para obtener mayor recaudo y progresividad de la política fiscal. Este artículo analiza, desde la perspectiva de la tributación óptima, cuál debe ser la estructura óptima del impuesto a la renta a personas naturales en Colombia. Utilizando simulaciones con datos trasversales de la Encuesta de Calidad de Vida se encuentra que el régimen óptimo de tributación de renta a personas naturales para este ejemplo metodológico está compuesto por tasas marginales decrecientes a lo largo de la distribución del ingreso laboral y que este es altamente sensible ante variaciones en la distribución de habilidades.

**Abstract:** Fiscal policy is a mechanism, which has relevant implications onto welfare. In a particular way, the income tax creates incentives on labor supply taxpayers. Thus, it has an impact on consumption, income and welfare. In Colombia, the income tax has minor significance within the tax structure; however, income tax should be reformed to achieve a greater tax burden and progressive tax policy. This article analyzes, from optimal taxation perspective, what should be the optimal structure of income tax in Colombia. Using simulations and Colombian database (Encuesta de Calidad de Vida) the optimal income tax scheme is estimated to Colombia. The optimal regimen is composed of diminishing marginal tax rates over labor income distribution, besides it is sensitive to variations in skills distribution highly.

*\*El autor agradece enormemente la ayuda brindada por su director de tesis Darío Maldonado durante la elaboración de este documento, así como la asesoría de Andrés Salamanca en el desarrollo de las simulaciones y el apoyo incondicional de su familia durante todos sus estudios.*

*\*\*Economista, Profesional en Finanzas y Comercio Internacional de la Universidad del Rosario e investigador asistente de Fedesarrollo (jmoreno@fedesarrollo.org.co).*

## I. Introducción

El sistema tributario colombiano está fundado sobre los principios de equidad, eficiencia y progresividad. Sin embargo, la interacción de estos tres principios puede conducir a disyuntivas económicas. Por ejemplo, la progresividad permite la redistribución pero tiene un costo en la eficiencia tributaria debido a que altas tasas de impuestos pueden desincentivar la oferta laboral y erosionar la base tributaria<sup>1</sup>. Luego, el reto más grande que enfrenta la economía de mercado es la disyuntiva entre eficiencia y equidad, ya que como bien lo muestra el primer teorema del bienestar la asignación de recursos es eficiente en esta clase de economías pero cabe la posibilidad que la eficiencia y la equidad no vayan en el mismo sentido.

Por tal razón, desde hace décadas se debate acerca de qué factores pueden dar fin a esta disyuntiva. A pesar de las innumerables discusiones y consideraciones sobre dichos factores, sin duda alguna, es la política fiscal aquel que posee mayor repercusión en temas de eficiencia y equidad al interior de una economía. A través de este mecanismo, es posible incentivar el desarrollo económico y al mismo tiempo reducir las inequidades.

Dada la relevancia de la política fiscal, esta debe contribuir a la eficiencia de los mercados, a la estabilidad macroeconómica y a la reducción de la desigualdad presente al interior de una sociedad<sup>2</sup>. Pese a esto, el actual sistema tributario colombiano se caracteriza por generar distorsiones en la asignación de los recursos productivos y por mantener las inequidades existentes.

El sistema tributario colombiano presenta inequidades horizontales y verticales<sup>3</sup>, causadas por las exenciones de impuestos que erosionan la base tributaria<sup>4</sup>, y que a su vez, facilitan fenómenos de evasión y elusión<sup>5</sup>. Además, el sistema tiene un recaudo insuficiente para las necesidades de gasto<sup>6</sup>, incrementa los costos no salariales incentivando el desempleo y la informalidad<sup>7</sup>, y perpetúa los altos índices de desigualdad que tiene el país<sup>8</sup>.

Dada esta realidad, es imperante efectuar una reforma tributaria que permita tener una estructura tributaria que minimice las distorsiones y maximice el recaudo. Esta propuesta está en el debate público desde hace años y ha impulsado la aprobación de un conjunto amplio de reformas fiscales que no han surtido ningún efecto fiscal real; quizás en mayor medida, por causa de la economía política que

---

<sup>1</sup> Ver artículo 363 de la Constitución Nacional de 1991.

<sup>2</sup> Ver Musgrave (1959).

<sup>3</sup> Ver Cárdenas et. al. (2006), Goñi et. al. (2008) y Perry (2010).

<sup>4</sup> Según Cárdenas et. al. (2006) el número de tasas promedio de IVA en la región es de 2 mientras que en Colombia hay 9 diferentes tasas.

<sup>5</sup> Perry (2010) señala que el impuesto de renta a empresas es muy alto y que existen reglamentaciones como la Ley 1004 de 2005 que permiten reducir, casi a la mitad, el impuesto de renta de las empresas de acuerdo a su ubicación espacial.

<sup>6</sup> Olivera et. al. (2009) muestran que la diferencia entre el gasto y los ingresos ha crecido substancialmente desde la expedición de la Constitución de 1991 debido a que la Constitución creó gastos permanentes con ingresos transitorios.

<sup>7</sup> Santa María et. al. (2010) muestran que Colombia tiene los costos no salariales más altos de la región y que esto es una causa del alto desempleo y de la informalidad.

<sup>8</sup> Goñi et. al. (2008) analizan los coeficientes Gini antes y después de impuestos para una muestra de 6 países latinoamericanos, incluido Colombia y de 15 países europeos. Encuentran evidencia que los coeficientes Gini antes de impuestos son similares entre regiones, pero el sistema fiscal europeo reduce la desigualdad en 0,05 unidades de coeficiente Gini, mientras en América Latina tan sólo en 0,01; incluso en países como Perú la distribución empeora.

únicamente ha permitido el tránsito de reformas parciales debido al alto costo político de las estructurales<sup>9</sup>.

A pesar del importante número de reformas efectuadas y propuestas<sup>10</sup>, el régimen tributario continúa presentando falencias significativas que deben ser estudiadas desde la perspectiva de la tributación óptima, con el deseo que la teoría económica aporte en beneficio de la política tributaria.

Dada la amplitud del ámbito tributario en Colombia, este artículo se concentra específicamente en analizar la forma del régimen tributario de renta a personas naturales. La relevancia de estudiar el impuesto de renta en Colombia radica en que este tributo es altamente progresivo, pero su aporte al interior del sistema tributario es mínimo. Por ejemplo, Cárdenas et. al. (2006) calculan para el período 1990-2004 la productividad de este gravamen evidenciando su notoria tendencia a decrecer.

En el mismo sentido, Perry (2010) afirma que el recaudo del impuesto a la renta a personas naturales es exiguo, debido a que posee el nivel de exención mínima más alto de la región. Esto conlleva a que tan sólo el 1,56% de los ciudadanos deban contribuir con este impuesto, implicando un costo fiscal de 0,9% del PIB.

Bajo este escenario, es importante analizar el impuesto de renta a personas naturales desde la perspectiva de la tributación óptima, con el objetivo de tener una aproximación de cómo deberían ser las tasas marginales del impuesto a la renta a personas naturales a lo largo de la distribución del ingreso. Por ende, este artículo, basándose en desarrollos recientes de la teoría de la tributación óptima, tiene como objetivo hacer una propuesta metodológica sobre la estructura óptima del impuesto a la renta a personas naturales en Colombia.

Utilizando simulaciones numéricas, ajustadas con datos transversales de la Encuesta de Calidad de Vida de 2008, para resolver el problema de tributación óptima se simula el régimen óptimo de renta a personas naturales en Colombia. Los resultados de este ejemplo metodológico muestran que el sistema debe estar caracterizado por tasas marginales decrecientes a lo largo de la distribución del ingreso. A su vez, hay evidencia de variaciones en la forma del régimen tributario frente a cambios en la distribución del ingreso laboral supuesta.

La relevancia de la estimación de las tasas marginales de tributación radica en que son estas los principales incentivos que enfrentan los agentes económicos al momento de determinar su oferta laboral. Por tanto, la determinación de estas tasas tiene amplias repercusiones sobre el consumo de los hogares y el bienestar de la sociedad.

Este artículo se divide en siete secciones contando esta introducción. En la segunda sección se hace una breve revisión de la literatura reciente sobre el tema de tributación óptima. En la tercera sección se realiza el planteamiento del problema de tributación óptima. Por su parte en la cuarta sección, se muestra

---

<sup>9</sup> Ver Olivera et. al. (2009)

<sup>10</sup> Olivera et. al. (2009) muestran la alta frecuencia en las reformas fiscales y además señalan que en el período 1991-2008 se aprobaron 31 reformas, siendo las tributarias las de mayor frecuencia (41,1%).

la información necesaria para calcular la forma del régimen óptimo. En la quinta sección, se explica el método que se emplea para resolver el problema de tributación óptima, asimismo en la sexta sección se dan a conocer los principales resultados, y finalmente, en la séptima sección se presentan las conclusiones.

## **II. Revisión de literatura**

La tributación óptima es uno de los temas más ampliamente estudiados en el ámbito de la economía pública. En principio, este tipo de literatura reconcilia los problemas de eficiencia y equidad dentro de los sistemas tributarios. En general, estudia las distorsiones en las decisiones de los contribuyentes a razón de la implementación de sistemas tributarios, en particular en la oferta laboral. Desde la perspectiva microeconómica, determinan la estructura óptima de un sistema tributario el cual debe estar caracterizado por generar las mínimas distorsiones en la oferta laboral de los contribuyentes, maximizar el recaudo del gobierno y contener criterios redistributivos.

Dentro de los primeros artículos que se destacan en esta literatura, se encuentra el escrito seminal de Mirrlees (1971) que deriva las condiciones de decisión óptima en un problema donde se maximiza una función de agregación social, sujeta a la restricción de presupuesto del gobierno y a la condición individual de optimización de la oferta laboral. Con dichas condiciones, Mirrlees (1971) demuestra que el régimen tributario óptimo depende de la distribución de las habilidades al interior de la población y de las preferencias de los individuos. Igualmente, señala que no existe beneficio al establecer un impuesto marginal superior al 100% y que las tasas marginales de tributación no deben ser negativas.

A pesar de los importantes aportes de Mirrlees (1971), el artículo tiene un alcance limitado, dado que las formas funcionales empleadas son específicas impidiendo la generalización de las conclusiones. No obstante, en trabajos posteriores Seade (1977) y Seade (1982) establecen las condiciones concretas bajo las cuales los resultados anteriores se mantienen. Este último artículo también muestra que al final de la distribución de habilidades, la tasa marginal del impuesto se debe acercar a cero para no generar ineficiencias a través de la oferta laboral. Asimismo, Seade (1977) y Sadka (1976) confirman este hecho manifestando que si la distribución de habilidades es finita, entonces el nivel de la tasa marginal del impuesto del contribuyente más hábil debe ser cero.

La intuición que subyace a esta conclusión es la de crear un incentivo en la oferta laboral de los contribuyentes más hábiles y así incrementar el recaudo tributario. Esto a razón que la densidad de individuos muy hábiles es minúscula y el incentivo no afecta a otra clase de contribuyentes. A pesar de esto, algunos hacedores de política consideran que es una conclusión con pocas implicaciones en la política pública, dado que únicamente aplica a un conjunto muy limitado de individuos.

En relación con esto, Stiglitz (1982) analiza los efectos de la tributación sobre la oferta de trabajo. En su análisis encuentra que existe una disyuntiva entre los individuos más hábiles<sup>11</sup> cuando se modifican sus tasas marginales de tributación, puesto que ellos derivan una mayor utilidad a través de dos mecanismos.

---

<sup>11</sup> Dada la imposibilidad de observar la habilidad acuden a variables altamente relacionadas con la habilidad, tales como el salario.

Por un lado, a través del efecto sustitución que implica aumentar su oferta de trabajo y por ende su consumo de bienes, y por otro lado, por medio del efecto ingreso que involucra disminuir su oferta laboral y consumir más ocio.

En este sentido, Stiglitz (1982) muestra que la interacción de los dos efectos puede conducir a diferentes respuestas en la oferta laboral ante cambios en el salario. Es importante, entonces, analizar desde la perspectiva de la tributación óptima las distorsiones que se presentan tanto en el consumo como en la oferta laboral.

Varios estudios se han concentrado en determinar la forma del régimen tributario óptimo. Utilizando datos para Estados Unidos, Atkinson (1973) y Tuomola (1984) muestran no linealidades y algunos patrones de U en los sistemas tributarios óptimos<sup>12</sup>.

Del mismo modo, Kanbur et. al. (1994), desarrollan un modelo de tributación óptima con desigualdad, a partir del cual concluyen que para niveles bajos de desigualdad las tasas marginales deben ser decrecientes a medida que aumenta el ingreso. Sin embargo, en economías con desigualdades altas se deben implementar tasas marginales de tributación crecientes.

Posteriormente, Diamond (1998) retomó el artículo seminal de Mirrlees (1971) y examinó las condiciones bajo las cuales las tasas marginales de tributación son crecientes en los ingresos altos y decrecientes en el intervalo donde se ubica la moda de la habilidad. Diamond (1998) utilizó una función de utilidad cuasi lineal y construyó el sistema tributario óptimo de renta a personas con la información proveniente de la encuesta *Current Population Survey* de 1992<sup>13</sup>; encontró un patrón de U en las tasas marginales de tributación óptima.

Por su parte, Dahan et. al. (2000) revisan las estimaciones de algunos de los artículos ya mencionados y determinan las propiedades de las funciones de utilidad bajo las cuales el sistema tributario óptimo tiene forma de U o de U invertida. Los autores determinan que el efecto ingreso desempeña un rol importante en el perfil del sistema tributario. Afirman que en modelos de tributación donde se incluyen funciones de utilidad social con efecto ingreso los patrones de U se invierten. Concluyen, que al omitir el efecto ingreso el patrón de tributación óptima sigue una forma de U mientras que cuando se incluye el patrón es una U invertida. Encuentran evidencia de este hecho para los Estados Unidos.

Finalmente, Mankiw et. al. (2009) analizan el diseño óptimo de los tributos y las relaciones entre la teoría y la política tributaria. En su estudio, sugieren ocho lecciones generales acerca de la tributación óptima en el escenario de la política tributaria contemporánea. Quizás la conclusión más destacada es que los regímenes de tasas marginales de tributación óptima son sensibles a la distribución de habilidades que se suponga, esto lo muestran para el caso de Estados Unidos. Esta conclusión es

---

<sup>12</sup> Tuomola (1994) utilizando un modelo con incertidumbre ratifica los mismos resultados.

<sup>13</sup> Encuesta realizada en los Estados Unidos.

ratificada por Brewer et. al. (2010) quienes encuentran para el Reino Unido diferentes patrones de tributación óptima, dependiendo de la forma funcional de la distribución de salarios que se suponga<sup>14</sup>.

Esta sección mostró los principales estudios acerca de tributación óptima de renta a personas naturales. No obstante, aun no se conoce la estructura óptima que debe tener este tributo en una economía como la colombiana. Este conocimiento permitiría construir un impuesto a la renta a personas en Colombia que genere mínimas distorsiones en el mercado laboral y que cuente con un importante recaudo.

### III. Planteamiento del problema

El problema de tributación óptima es un problema de optimización restringida donde se maximiza una función de utilidad social la cual está sujeta a la restricción de presupuesto del gobierno y a la condición de optimalidad de los contribuyentes respecto a su oferta laboral. Este es un problema complejo cuyo proceso de optimización es mostrado en detalle en la sección A del apéndice de este artículo<sup>15</sup>.

El problema del hogar representativo radica en:

$$\max_L U(c, L) = u(c) + \xi(L) \quad [a]$$

s. a

$$c = wL - T(w) \quad [b]$$

La función de utilidad depende del consumo ( $c$ ) y de la oferta laboral ( $L$ ),  $wL$  es el ingreso laboral y  $T(w)$  es el impuesto total pagado por el individuo. A su vez, se tiene una restricción de recursos del gobierno que consiste en que los recursos provenientes de los tributos alcancen a cubrir los gastos del gobierno. Por tanto, la restricción del gobierno es  $\int_0^{\infty} T(w)f(w)dw = E$ , donde  $T(w)$  es el impuesto total pagado por el contribuyente,  $f(w)$  es la función de densidad de las habilidades de los contribuyentes y  $E$  es el nivel de gasto del gobierno.

---

<sup>14</sup> El artículo de Brewer et. al. (2010) hace parte del Reporte Mirrlees el cual es un documento que analiza el sistema tributario del Reino Unido desde la perspectiva de la tributación óptima, sirviendo de instrumento de recomendación para el desarrollo de políticas públicas en estos temas.

<sup>15</sup> Para aproximarse a la caracterización del régimen tributario óptimo para Colombia, se sigue un modelo de tributación óptima basado en Salanié (2003) quien desarrolló una solución al problema propuesto por Mirrlees (1971), en esta solución se utiliza una función de utilidad aditivamente separable para facilitar el proceso matemático.

Suponiendo una función de agregación de preferencias  $\eta$  y una función  $\xi$  que depende de  $L$  cuya primera derivada es  $\xi'(L)$ , el problema de tributación óptima que soluciona el planificador es<sup>16</sup>:

$$\max_L \int_0^\infty \eta(u) f(w) dw \quad [e]$$

s. a

$$\int_0^\infty T(w) f(w) dw = E \quad [f]$$

$$w - t(w)w - \xi'(L) = 0 \quad [g]$$

Para la solución de este problema se supondrá un régimen tributario no lineal dado por  $T(w)$ , el cual depende del ingreso laboral de los contribuyentes denotado por  $w$ . Así,  $t(w)$  será la tasa marginal de tributación. Dicha tasa es el valor adicional de impuesto que enfrenta cada individuo por cada ingreso marginal que obtiene. Es una variable de suma relevancia en la determinación de la oferta laboral óptima de los contribuyentes, dado que si los agentes enfrentan tasas marginales muy elevadas se verán incentivados a reducir su oferta laboral. Por consiguiente, la tasa marginal de tributación tiene importantes efectos sobre el consumo, el ingreso y el bienestar de la población.

Igualmente, se supone que el ingreso de los agentes sigue una distribución acumulada  $F(w)$  que indica la proporción de contribuyentes con ingreso menor a  $w$ . A esta función de distribución acumulada se le asocia una función de densidad  $f(w)$ .

Adicionalmente, las preferencias por redistribución están dadas por la función  $G(w)$  que es una medida del valor marginal del consumo de los individuos con ingreso superior a  $w$ . Por tanto, esta última es decreciente en  $w$  si el gobierno prefiere la redistribución. Cabe mencionar que esta función cobra importancia en el caso de un gobierno utilitarista con criterios redistributivos, puesto que en un caso rawlsiano no tiene sentido emplearla ya que desde un principio se desea maximizar la utilidad del contribuyente menos favorecido.

Dado este marco, el sistema tributario óptimo está compuesto por un conjunto de tasas marginales que se denominan régimen tributario. El régimen muestra cómo deben variar las tasas marginales en tanto cambia el ingreso.

Al solucionar el problema de tributación óptima, se tiene que el régimen tributario óptimo está determinado por la condición<sup>17</sup>:

$$\frac{t(w)}{1-t(w)} = \left(1 + \frac{1}{e(w)}\right) \cdot \left(\frac{1-F(w)}{w \cdot f(w)}\right) \cdot \left(1 - \frac{G(w)}{\lambda}\right) \quad [h]$$

<sup>16</sup> La solución de este problema debe verificar la condición de compatibilidad de incentivos para cada agente. Esta condición obliga a los individuos a revelar su condición y elimina los beneficios derivados de hacer mímica.

<sup>17</sup> Para el desarrollo de esta solución ver la sección A del apéndice de este artículo.

Donde  $e(w)$  es la elasticidad salario de la oferta laboral y  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de presupuesto del gobierno que suele ser interpretado como el costo marginal del uso de los recursos públicos.

Esta condición determina el régimen tributario para cada uno de los individuos al interior de la economía. El primer factor del producto en la expresión [h] muestra cómo la elasticidad de la oferta laboral respecto al salario afecta la forma del régimen tributario, de manera que, entre mayor sea la elasticidad menor ha de ser la carga tributaria aplicada. Esto con el objetivo de minimizar las distorsiones en el mercado laboral en los contribuyentes que más sensibilidad tienen en su oferta laboral.

El segundo factor toma en cuenta la forma de la distribución de habilidades dentro de la economía, cuya aproximación se hace a través del ingreso laboral dada la imposibilidad que el gobierno observe la dotación de habilidad de cada contribuyente. Este término muestra que el sistema tributario óptimo aplica tasas marginales altas donde la densidad de los contribuyentes es baja en comparación con el número de contribuyentes de ingreso alto<sup>18</sup>.

Por su parte, el tercer factor mide el criterio redistributivo; entre más rápido sea el decrecimiento de la función  $G(w)$ , mayores tasas se cobrarán a los individuos de ingreso alto. Por ende, estos tres factores son los determinantes del sistema tributario óptimo.

#### **IV. Información necesaria para la estimación**

Para la estimación de un régimen tributario óptimo que satisfaga la condición anteriormente mencionada, es necesario contar con información detallada sobre el ingreso laboral de los individuos. Asimismo, se deben tener estimaciones adecuadas de la elasticidad salario de la oferta laboral.

La información sobre la distribución de los ingresos laborales para Colombia se obtiene de la Encuesta de Calidad de Vida de 2008 (ECV), realizada por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). La encuesta recolecta información socioeconómica en hogares colombianos, tiene una cobertura geográfica nacional y para 9 regiones, con un tamaño de muestra de 13.600 hogares el cual permite hacer un análisis por unidad de vivienda, hogar y personas.

Debido a la omisión de reporte de los ingresos laborales causada por el desconocimiento por parte del encuestado del valor de su salario o por el simple hecho de no querer declararlo, se hace necesaria la imputación de dicho ingreso. Para la estimación del ingreso laboral se sigue a Núñez (2009), quien siguiendo el método propuesto por la Misión para el Diseño de una Estrategia de Reducción de la Pobreza y la Desigualdad (MERPD)<sup>19</sup> estima el ingreso laboral individual.

Para la estimación del ingreso laboral Núñez (2009) efectúa una serie de imputaciones y ajustes en las cuentas nacionales con el objetivo de minimizar la omisión de reporte. La ECV cuenta con una amplia

---

<sup>18</sup> Note que  $\frac{1-F(w)}{wf(w)}$  es una medida de curtosis de la distribución de habilidades.

<sup>19</sup> Ver MERPD (2006).

gama de conceptos de ingreso, que en total suman 23<sup>20</sup>. Se utilizan solamente aquellos que están relacionados directamente con el ingreso laboral<sup>21</sup>.

El proceso de imputación de ingreso se da a través de la estimación de ecuaciones de Mincer para los informantes<sup>22</sup>. Con los coeficientes estimados se calcula el valor del ingreso para los no informantes dadas sus características socioeconómicas. Consecutivamente, se corrobora que la distribución del ingreso no varié.

Una vez imputado el ingreso a los no informantes, se realiza un ajuste de los ingresos por medio de factores calculados con las cuentas nacionales. La distribución de ingresos que se obtuvo después de este procedimiento se muestra en el gráfico 7 en la sección C del apéndice de este artículo.

Por otro lado, es necesario contar con una adecuada estimación de la elasticidad de la oferta laboral con respecto al salario. Sin embargo, estudios como Cahuc et. al. (2004) y Meghir et. al. (2010) muestran la dificultad para estimar este parámetro. Esta dificultad proviene del hecho que si se desea lograr una estimación insesgada es necesario tener en cuenta las diferencias generadas por variables como género, edad, estado civil, nivel de ingreso, entre otras. De acuerdo a estas características el parámetro de elasticidad salario puede ser distinto. Además, la interacción entre las características individuales podría conducir a mayores dificultades en la estimación, mostrando que es posible que la elasticidad no sea constante entre grupos poblacionales con características disimiles.

Dada la complejidad en dicha estimación, esta no está contenida en el alcance de este artículo, por lo cual se acude al uso de las elasticidades que son comúnmente manejadas en la literatura sobre estos temas; la mayoría de literatura sobre tributación óptima estima los regímenes tomando elasticidades de 0.25 y 0.5 como dadas<sup>23</sup>.

Adicionalmente, con el ánimo de enriquecer el análisis de tributación óptima en el contexto colombiano se usa una estimación correspondiente a la elasticidad de Frisch<sup>24</sup> para Colombia. Esta fue realizada por Prada et. al. (2009) quienes desarrollaron un modelo teórico del mercado laboral segmentado y estimaron la elasticidad de Frisch utilizando el método generalizado de momentos, calibrado con datos nacionales. La estimación arroja un valor de 0.31 para esta elasticidad en Colombia.

---

<sup>20</sup> Los salarios sólo tienen una omisión de 3%. Los individuos a los que se les imputó el ingreso laboral fueron aquellos que no reportaron, reportaron ingreso inferior a \$1000 pesos o afirmaron no saber o no responder esta pregunta.

<sup>21</sup> Los conceptos utilizados en la construcción del ingreso laboral fueron: salarios, subsidios asociados al trabajo (transporte y alimentación), primas (técnica, servicios, navidad y vacaciones) y bonificaciones para cada trabajo reportado.

<sup>22</sup> Se entiende por informante aquel que reporta ingreso.

<sup>23</sup> Ver Saez (2001), Diamond (1998) y Mankiw et. al. (2010).

<sup>24</sup> La elasticidad de Frisch se define como la variación porcentual en la oferta laboral cuando cambia el salario real, bajo la condición que la utilidad del consumo permanezca constante.

## V. Método de las simulaciones

Como se mencionó en la revisión de literatura, existen algunas soluciones analíticas al problema de tributación óptima. En particular, las tasas de tributación marginal de los contribuyentes más hábiles deben ser cero para incentivar su oferta laboral. No obstante, aún no hay claridad sobre la forma del régimen tributario óptimo en el resto de la distribución de habilidades, pues éste depende de varios factores como se mostró en la tercera sección.

Dada la complejidad del proceso de optimización propuesto por Mirrlees (1971) es necesario utilizar simulaciones numéricas para tener una aproximación al régimen tributario óptimo. Para dichas simulaciones, se sigue la metodología planteada por Mankiw et. al. (2009) donde se realiza un proceso de maximización numérica de un planificador central bajo las restricciones de presupuesto del gobierno, de oferta laboral óptima individual y de compatibilidad de incentivos.

El proceso de optimización se realiza de la siguiente manera:

Primero, se estima la función de densidad de la distribución del ingreso laboral de los individuos proveniente de la ECV con los ajustes ya mencionados. La distribución empírica se ajusta a través de dos tipos distintos de distribuciones de probabilidad. En primer lugar, se utiliza la distribución Log-Normal la cual tiene un ajuste adecuado a las distribuciones de ingreso de otros países y es comúnmente utilizada en la literatura.

En segundo lugar, en aras de medir la sensibilidad del régimen en presencia de variaciones en la estimación de la distribución del ingreso, y en parte, aproximarse a la realidad colombiana, se emplea una función de distribución de densidad Gamma que acumula más rápidamente los ingresos bajos, es decir, es una distribución que tiene en cuenta los altos niveles de desigualdad que se presentan en la región. Cabe mencionar que si bien se hace un ajuste a distribuciones teóricas los parámetros de estas son cercanos a la realidad colombiana ya que para su ajuste se utilizaron los datos de la ECV (Ver gráfico 8 de la sección C del apéndice).

Segundo, para facilitar el proceso de optimización se transforma de continua a discreta, a través de intervalos, la función de distribución del ingreso laboral. Por consiguiente, la tasa óptima del impuesto se estima para 203 intervalos de ingreso laboral.

Este procedimiento no permite alcanzar una estimación del régimen para cada nivel de ingreso laboral, limitando en parte el análisis, ya que para lograr esto, el número de intervalos debería tender a infinito. Pese a esto, para alcanzar convergencia en el proceso de simulación del régimen tributario es necesario acudir a esta simplificación que se aproxima en gran medida a la forma real de régimen tributario óptimo.

Tercero, se seleccionan los parámetros de la función de utilidad.

$$U(c, L) = \frac{c^{1-\varphi}-1}{\varphi} - \frac{\alpha L^\psi}{\psi} \quad [i]$$

El primer parámetro es  $\varphi$  que mide el grado de concavidad de la función. Este parámetro se toma de Mankiw et. al. (2009) cuyo valor es de 1.5. El segundo parámetro es  $\alpha$  que es un valor de escala del nivel de la oferta laboral, es tomado también de Mankiw et. al. (2009) y su valor es 2. Este parámetro no afecta la forma del régimen tributario pero ayuda en la convergencia de las tasas marginales durante el proceso de simulación.

Por último, para el parámetro de la elasticidad  $\psi$  se usan los tres valores discutidos, a saber: 0.31, 0.25, y 0.5. Esto con el ánimo de establecer el grado de sensibilidad del régimen ante variaciones en la elasticidad ingreso de la oferta laboral de los contribuyentes.

Cuarto, se supone que todos los agentes tienen la misma función de utilidad aditivamente separable entre ingreso y oferta laboral mientras que la función de utilidad social se supone utilitarista.

$$\int_0^{\infty} U(w)f(w)dw \quad [j]$$

Quinto, se estiman los vectores de oferta laboral y consumo que maximizan la función de utilidad para cada agente. Con estos vectores, se calcula el vector de utilidades correspondiente teniendo en cuenta el parámetro de elasticidad dado<sup>25</sup>.

Sexto, se supone un régimen tributario inicial, dado que los agentes deciden una oferta laboral dependiendo del régimen tributario vigente, el proceso de simulación debe incluir un régimen tributario idéntico para todos los contribuyentes en la escogencia de su oferta laboral inicial.

Séptimo, una vez se estima el vector de utilidades se procede a calcular la tasa marginal óptima para cada agente siguiendo la condición de optimalidad de estas tasas marginales propuesta por Saez (2001)<sup>26</sup>.

Octavo, se construye el ingreso del gobierno con los aportes de cada contribuyente y se revisa que la restricción presupuestal se satisface<sup>27</sup>, y el mismo procedimiento se aplica para la restricción de compatibilidad de incentivos.

Noveno, una vez estimada la tasa marginal óptima para cada agente, se busca la convergencia en la simulación utilizando la tasa marginal calculada en el paso siete para actualizar el régimen inicial. Este proceso se repite tantas veces sea necesario hasta que las tasas marginales converjan a un punto fijo. La tasa a la que la simulación converge es la tasa óptima para cada nivel de ingreso laboral.

---

<sup>25</sup> Se estima el régimen tributario para tres tipos distintos de elasticidades.

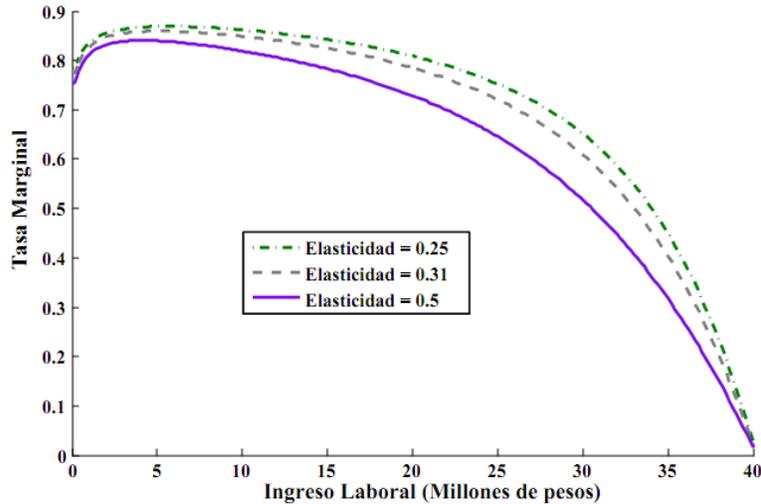
<sup>26</sup> Ver la Sección B del apéndice ecuación [29].

<sup>27</sup> Se asume que el gobierno debe estar en equilibrio fiscal.

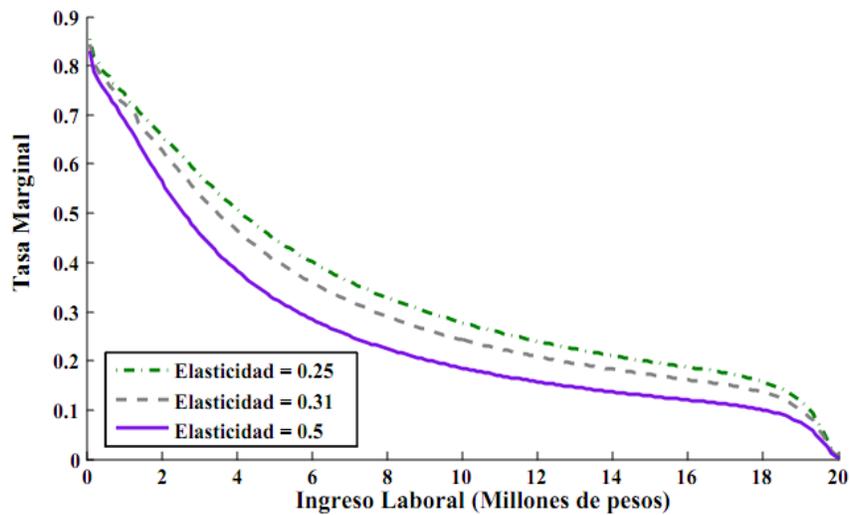
## VI. Resultados

Una vez se logra la convergencia a través del método de la sección anterior, se construye el régimen tributario óptimo para Colombia. Los gráficos 1 y 2 muestran los distintos regímenes para las dos distribuciones de habilidad estimadas y para cada uno de los niveles de elasticidad que se utilizaron.

**Gráfico 1. Regímenes tributarios óptimos, distribución Log-Normal**



**Gráfico 2. Regímenes tributarios óptimos, distribución Gamma**



Los regímenes muestran que la tasa de tributación marginal de renta debe ser decreciente a lo largo de la distribución de habilidades que se aproxima con el ingreso laboral, esto con el objetivo que los individuos más hábiles participen en mayor medida en el mercado laboral.

Lo anterior no implica que la contribución tributaria total sea menor para los individuos de altos ingresos laborales, pero la tasa marginal que enfrentan sí debe ser menor a medida que se incrementa la habilidad. Incluso, el régimen tributario simulado con la función de densidad Log-Normal evidencia la necesidad de tener tasas marginales crecientes en los individuos menos hábiles.

Es decir, el impuesto total que aporta un contribuyente de alto ingreso es mayor al de un individuo con bajo ingreso. Sin embargo, el impuesto adicional que afecta al individuo de alto ingreso por cada ingreso marginal debe ser menor para que el contribuyente más hábil sea incentivado a incrementar su oferta laboral. Con esto es posible construir un sistema tributario con un mayor recaudado y con menores distorsiones.

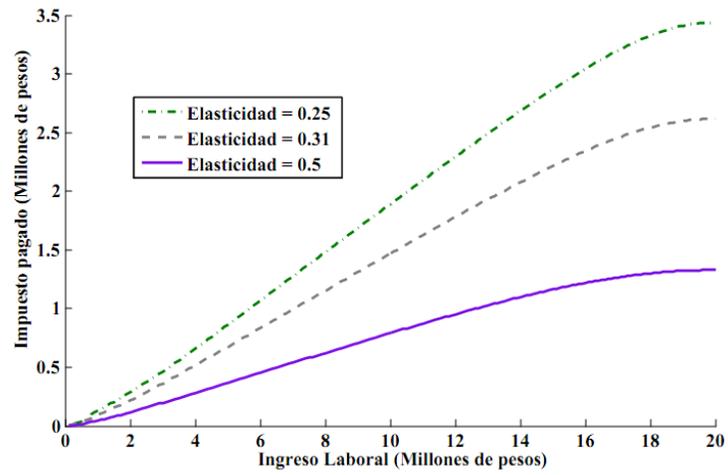
Es importante mencionar que este régimen óptimo incrementa el recaudo tributario debido a la mayor oferta laboral de los individuos más hábiles, producto de tasas marginales menores, pero que tributan impuestos totales mayores. Este nuevo ingreso fiscal es redistribuido a los individuos menos hábiles lo que permite construir un sistema tributario más progresivo.

En este sentido, los gráficos 3 y 4 muestra el impuesto total pagado por los contribuyentes cuando se suponen funciones de distribución de habilidades Log-Normal y Gamma respectivamente; los gráficos evidencian que los contribuyentes con mayor ingreso pagarían más que aquellos de ingresos inferiores. Dada esta lógica, los gráficos 5 y 6 también son evidencia que el valor cancelado por los individuos más hábiles, y que bajo este ejemplo metodológico debe enfrentar tasas marginales de tributación más bajas, son aquellos que tributan una mayor proporción de su ingreso. Cabe mencionar que una vez son recolectados los impuestos de todos los contribuyentes el gobierno los redistribuye a través de transferencias de suma fija<sup>28</sup>.

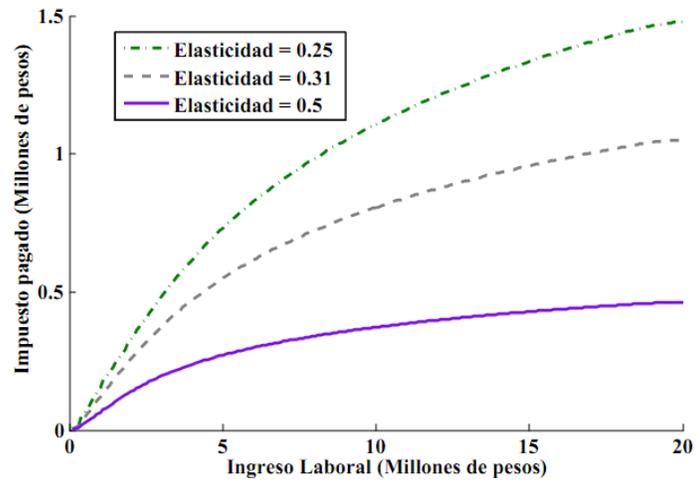
---

<sup>28</sup> Las simulaciones arrojan que los contribuyentes, cuando se supone una distribución de habilidades Log-Normal, para las elasticidades 0,25; 0,31 y 0,5 reciben las siguientes transferencias de suma fija: \$115.537, \$122.204, \$63.745, respectivamente. Para el caso de la función Gamma las transferencias son equivalentes a \$89.529, \$77.445 y \$40.863, respectivamente.

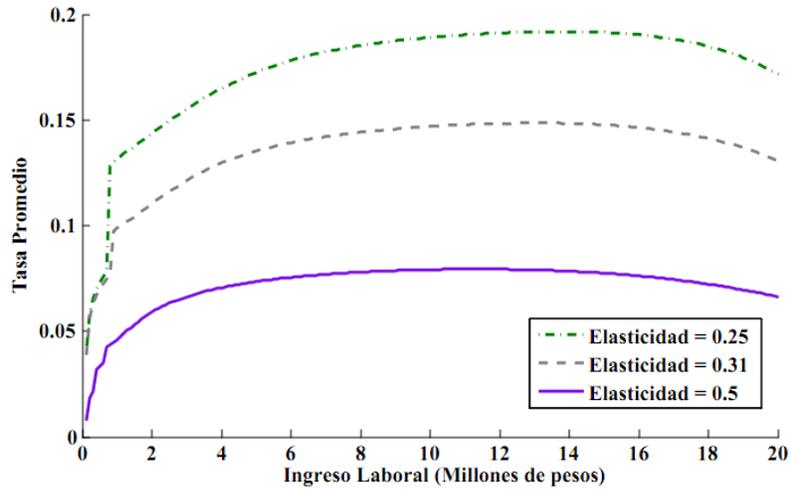
**Gráfico 3. Impuesto total, distribución Log-Normal**



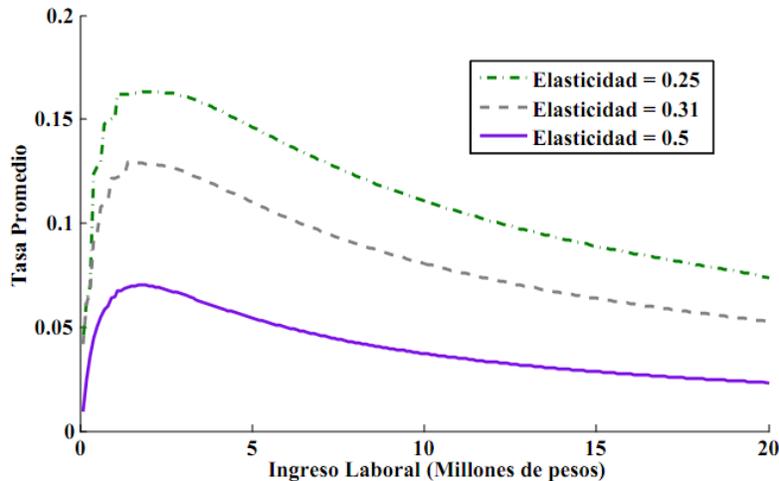
**Gráfico 4. Impuesto total, distribución Gamma**



**Gráfico 5. Impuesto promedio, distribución Log-Normal**



**Gráfico 6. Impuesto promedio, distribución Gamma**



Por otra parte, las simulaciones muestran la sensibilidad del régimen tributario óptimo a las elasticidades salario de la oferta laboral, donde se verifica la regla clásica de elasticidad inversa propuesta por Ramsey (1927). Los regímenes tributarios óptimos exhiben la necesidad de establecer tasas marginales menores a medida que la elasticidad salario de la oferta laboral es mayor, con esto se logra minimizar las distorsiones que causan los tributos en la oferta laboral óptima de los contribuyentes.

Por último, las simulaciones de los regímenes óptimos muestran el alto grado de sensibilidad respecto a cambios en la distribución del ingreso laboral. Al comparar los regímenes tributarios con las dos diferentes funciones de densidad estimadas, se encuentran dos tipos distintos de patrones a pesar de que conservan la misma tendencia a decrecer a lo largo de la distribución del ingreso. Por ende, se concluye

que el factor determinante en la forma de régimen tributario óptimo es la distribución de habilidades al interior de la economía.

## **VII. Conclusiones**

Basado en los últimos avances de la literatura de tributación óptima de renta se hace una primera propuesta metodológica de la forma que debería tener el impuesto marginal de renta a personas naturales en Colombia. Una vez es calculado el régimen óptimo, de la manera en que este artículo lo propone, se hace clara la necesidad de tener tasas marginales de renta decrecientes sin que esto implique que la incidencia del impuesto recaiga en mayor medida sobre los individuos menos hábiles, es decir, aquellos que perciben un menor ingreso laboral.

Por su parte, se hace hincapié en las necesidades de información para calcular de manera más precisa el régimen óptimo de renta en Colombia. En específico, es necesario contar con información oportuna y veraz sobre el ingreso laboral de los contribuyentes así como con mejores estimaciones de la elasticidad salario de la oferta laboral. Si se cuenta con esta información es posible construir un régimen tributario óptimo que permita elaborar una reforma tributaria con más criterios técnicos, al menos en este importante impuesto.

A su vez, el artículo abre puertas a otro tipo de investigaciones que pueden enriquecer la estimación del régimen óptimo de renta a personas naturales. En este sentido, los resultados expuestos asumen la ausencia de fenómenos de evasión, elusión, desempleo e informalidad laboral. Dichos fenómenos son comunes en las economías en desarrollo, en especial en Colombia, y sin duda, erosionan la base gravable y deben ser incluidos en posteriores simulaciones del régimen de tributación óptima.

Igualmente, se debe estudiar la posibilidad de segmentar el impuesto a la renta a causa de las diferencias que pueden existir al interior de los distintos grupos poblacionales que conforma una economía. La importancia de esto reside en que es probable que dichos grupos posean diferentes elasticidades salario de la oferta laboral y por tanto deban enfrentar tasas marginales de tributación diferentes que minimicen los problemas de eficiencia (distorsiones en las asignaciones) e incrementen el recaudo fiscal.

El continuo avance en temas de tributación óptima en Colombia podría ser la base de futuras reformas tributarias con más criterios técnicos que logren solucionar los defectos del actual sistema y permitan construir un sistema tributario más eficiente, equitativo y progresivo.

## VIII. Apéndice

### Sección A: *Problema de tributación óptima*<sup>29</sup>

Suponga que todos los agentes de una economía tienen las mismas preferencias representadas por una función de utilidad cuasi lineal que depende del consumo ( $c$ ) y de la oferta laboral  $\xi(L)$ , donde  $\xi$  es una función que depende de  $L$ .

$$u(c, L) = c - \xi(L) \quad [1]$$

Su consumo está determinado por:

$$c = wL - T(w) \quad [2]$$

Donde  $wL$  es el ingreso ( $y$ ) y  $T(w)$  es el impuesto total pagado por el individuo.

Remplazando la ecuación [2] en la [1] el problema de cada agente se reduce a:

$$\max_{L \geq 0} wL - T(w) - \xi(L) \quad [1a]$$

Bajo este escenario, el argumento maximizador esta dado por:

$$B = wL(w) - T(wL(w)) - \xi(L(w)) \quad [3]$$

Note que  $B$  depende de  $w$  pero esto no se denotará para simplificar notación.

Ahora bien, aplicando el teorema de la envolvente se tiene que:

$$B' = L(w) + l(w)w - t(wl(w))(L(w) + l(w))w - \xi'(l(w)) * (L(w)l(w)) \quad [4]$$

Donde:

$$\frac{dT}{dw} = t; \frac{dB}{dw} = B'; \frac{dL}{dw} = l; \frac{d\xi}{dl} = \xi'$$

A su vez, la condición de primer orden (CPO) de la ecuación [1a] es:

$$w - t(w)w - \xi'(L) = 0 \quad [5]$$

Por su parte, la ecuación [4] puede ser rescrita como:

$$B' = L(w) - t(wl(w))L(w) + t(wl(w))l(w)w + l(w)w - \xi'(l(w)) * (L(w)l(w)) \quad [4a]$$

Reordenado la ecuación [4a] se llega a:

$$B' = L(w) - t(wl(w))L(w) + l(w)(w - t(w) - \xi'(L)) \quad [4b]$$

---

<sup>29</sup> Esta sección sigue el proceso de optimización de Salanié (2003).

Con la ecuación [5] y [4b] se obtiene:

$$B' = L(w) (1 - t(wl(w))) \quad [4c]$$

Por tanto,

$$\frac{B'}{L(w)} = (1 - t(wl(w))) \quad [6]$$

Remplazando la ecuación [6] en la [5] se tiene:

$$\xi'(L) = w \frac{B'}{L(w)}$$

Por ende,

$$B' = \frac{\xi'(L)L(w)}{w} \quad [7]$$

Recuerde que  $y = wl$  entonces  $\frac{dy}{dw} = L(w) + wl(w)$ .

Para simplificar el procedimiento de optimización se supondrá  $\frac{dy}{dw} > 0$ , sin embargo, en el proceso de las simulaciones numéricas se valida la condición  $\frac{dy}{dw} \geq 0$ .

Bajo este contexto, el problema de tributación óptima se reduce a:

$$\max_L \int_0^{\infty} \eta(B) f(w) dw \quad [8]$$

s. a

$$\int_0^{\infty} T(w) f(w) dw \quad [9]$$

$$B' = \frac{\xi'(L)L(w)}{w} \quad [7]$$

Donde  $T(w) = wL(w) - \xi(L(w)) - B$ .  $\eta$  es una función de agregación de preferencias y  $f(w)$  es la función de densidad de la distribución de las habilidades en la economía asociada a una función acumulada  $F(w)$ .

Note que el problema guarda similitud con los problemas de optimización dinámica. Por ende, se utilizará un Hamiltoniano para dar solución a este problema.

El Hamiltoniano está caracterizado como sigue:

$$H = \eta(B)f(w) + \lambda * (wL(w) - \xi(L(w)) - B)f(w) + \mu * \left(\frac{\xi'(L)L(w)}{w}\right) \quad [10]$$

$L(w)$  es la variable de control asociada al multiplicador  $\lambda$  y  $B$  es la variable de estado cuyo multiplicador asociado es  $\mu$ .

Las CPO son:

$$\frac{dH}{dL(w)} = \lambda w f(w) - \eta'(B) f(w) + \frac{\mu}{w} (\xi'(L) + \xi''(L)) L(w) = 0 \quad [11]$$

$$\frac{dH}{dB} = -\lambda f(w) + \lambda \xi'(L) f(w) = -\mu \quad [12]$$

La condición de transversalidad está dada por:

$$\mu(0) = \lim_{w \rightarrow \infty} \mu(w) = 0 \quad [13]$$

Por su parte, integrando [12] de  $w$  a infinito se obtiene:

$$\mu(w) = \int_w^{\infty} (\xi'(L) f(w) - \lambda) f(z) dz \quad [14]$$

Despejando  $\lambda$  de la ecuación [14] y evaluando  $w = 0$  se alcanza el multiplicador asociado a la variable de control:

$$\int_w^{\infty} (\xi'(L) f(w)) f(z) dz = \int_w^{\infty} (\lambda) f(z) dz$$

$$\int_0^{\infty} (\xi'(L) f(w)) f(z) dz = \lambda \int_0^{\infty} f(z) dz$$

Por definición  $\int_0^{\infty} f(z) dz = 1$

Luego,

$$\lambda = \int_0^{\infty} (\xi'(L) f(w)) f(z) dz \quad [15]$$

El criterio redistributivo del gobierno está dado por la función  $G(w)$  que es el promedio de las utilidades marginales de los individuos que sobrepasan el umbral  $w$ . Por tanto,  $G(w)$  es decreciente si el gobierno desea redistribuir.

$$G(w) = \frac{1}{1-F(w)} \int_w^{\infty} \eta'(B(z)) f(z) dz \quad [16]$$

Ahora bien, note que si se evalúa la ecuación [16] en  $w = 0$  se obtiene la ecuación [15], es decir  $G(0) = \lambda$

Remplazando la ecuación [15] en la [14] se llega a:

$$\mu(w) = \int_w^\infty \left( \xi'(L) f(w) - \int_0^\infty (\xi'(L) f(w)) f(z) dz \right) f(z) dz$$

La ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\mu(w) = \int_w^\infty (\xi'(L) f(w)) f(z) dz - \int_w^\infty G(0) f(z) dz$$

$$\mu(w) = (1 - F(w))G(w) - (1 - F(w))G(0)$$

$$\mu(w) = (1 - F(w))(G(w) - G(0)) \quad [17]$$

De la ecuación [5] se deduce que:

$$\xi'(L) = w(1 - t(w)) \quad [18a]$$

Ahora se define el salario después de impuestos como:

$$\xi'(L(w)) = w^{DI} = [18b]$$

Asimismo, la elasticidad de trabajo esta dada por:

$$\varepsilon = \frac{dL}{dw^{DI}} * \frac{w^{DI}}{L}$$

Primero se redefine  $L(w)$  utilizando las ecuaciones [5] y [18b]:

$$L(w) = L\left(\frac{\xi'(L)}{1-t}\right) = L\left(\frac{w^{DI}}{1-t}\right)$$

Por ende,

$$\varepsilon = l\left(\frac{w^{DI}}{1-t}\right) * \frac{1}{1-t} * \frac{w^{DI}}{L}$$

Recuerde que  $l(w^{DI}) = \frac{1-t}{\xi''(L)}$ . Esto se deduce de la ecuación [18b]

Lo cual equivale a:

$$\varepsilon = \frac{w(1-t)}{\xi''(L)L} \quad [19a]$$

Manipulando la ecuación [19a]:

$$\xi''(L)L = \frac{w(1-t)}{\varepsilon}$$

$$\xi' + \xi''(L)L = \frac{w(1-t)}{\varepsilon} + \xi' \quad [19b]$$

Ahora se reemplaza la ecuación [18a] en [19b]:

$$\xi' + \xi''(L)L = \frac{w(1-t)}{\varepsilon} + w(1-t(w))$$

Siendo esto igual a:

$$\xi' + \xi''(L)L = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) w(1-t(w)) \quad [20]$$

Remplazando en la ecuación [11] la ecuación [17] y teniendo en cuenta que  $G(0) = \lambda$  se logra que:

$$G(0) \left( w - \xi'(L) \right) f(w) + (1 - F(w))(G(w) - G(0)) \left( \frac{\xi'(L) + \xi''(L)}{w} \right) = 0 \quad [21]$$

Sustituyendo la ecuación [20] en [21] y reordenando términos se tiene que:

$$G(0) \left( w - \xi'(L) \right) f(w) - (1 - F(w))(G(0) - G(w)) \left( \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) (1 - t(w)) \right) = 0 \quad [22a]$$

De [18a] se deduce:

$$w - \xi'(L) = w(t(w)) \quad [18c]$$

Ahora bien, se reemplaza en [22a] la ecuación [18c]

$$G(0) \left( w(t(w)) \right) f(w) - (1 - F(w))(G(0) - G(w)) \left( \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) (1 - t(w)) \right) = 0 \quad [22b]$$

Reordenando la ecuación [22b] se obtiene la condición del régimen tributario óptimo:

$$\frac{t}{1-t} = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{(1-F(w))}{wf(w)} \frac{(G(0)-G(w))}{G(0)} \quad [23]$$

Donde  $G(0) = \lambda$

### **Sección B: Condición de optimalidad utilizada en las simulaciones**

Para el proceso de simulaciones se seguirá la metodología propuesta por Mankiw et. al. (2009) que por facilidad computacional transforma la función de distribución de habilidades de continua a discreta. Esta metodología emplea la CPO derivada por Saez (2001), según la cual la ecuación [23] puede ser rescrita en términos de elasticidades de la siguiente manera:

$$\frac{t}{1-t} = \left( \frac{1+\varepsilon^u}{\varepsilon^c} \right) \left( \frac{u_c(w)}{wf(w)} \right) \int_w^\infty 1 - \frac{\eta'(u(\theta))u_c}{\lambda} \left( \frac{1}{u_c(\theta)} \right) e^{-\int_w^{\theta l(s)} \frac{u_{cl}(s)}{su_c(s)} f(\theta) d\theta} \quad [24]$$

Donde  $\varepsilon^c$  y  $\varepsilon^u$  son las elasticidades compensadas y no compensadas de la oferta laboral respecto a  $w$ , respectivamente.

Siguiendo a Mankiw et. al. (2009), se utiliza una función de utilidad aditivamente separable ( $U_{cl} = 0$ ) dada por la siguiente forma funcional:

$$U(c, L) = \frac{c^{1-\varphi}-1}{\varphi} - \frac{L^\psi}{\psi} + TSM \quad [25]$$

Donde  $\varphi$  representa el grado de concavidad de la función,  $TSM$  es una trasfencia de suma fija que se supondrá igual a cero y  $\psi$  es la elasticidad de Frisch que puede ser reescrita así:

$$\psi = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \quad [26]$$

Asimismo, se asume una función de agregación de preferencias utilitarista, a saber:

$$\int_0^\infty U(w)f(w)dw \quad [27]$$

Luego,

$$\eta(U(w)) = U(w) \text{ y } \eta'(U(w)) = 1 \text{ para todo } w.$$

Usando estas definiciones se tiene que la ecuación [24] es equivalente a:

$$\frac{t}{1-t} = \left(\frac{1+\varepsilon^u}{\varepsilon^c}\right) \left(\frac{u_c(w)}{wf(w)}\right) \int_w^\infty \left(1 - \frac{u_c(\theta)}{\lambda}\right) \left(\frac{1}{u_c(\theta)}\right) f(\theta)d\theta \quad [24a]$$

Operando factores al interior de la integral:

$$\frac{t}{1-t} = \left(\frac{1+\varepsilon^u}{\varepsilon^c}\right) \left(\frac{u_c(w)}{wf(w)}\right) \int_w^\infty \left(\frac{1}{u_c(\theta)} - \frac{1}{\lambda}\right) f(\theta)d\theta \quad [24b]$$

Note que la ecuación [24b] puede ser reescrita como sigue:

$$\frac{t}{1-t} = \left(\frac{1+\varepsilon^u}{\varepsilon^c}\right) \left(\frac{u_c(w)}{wf(w)}\right) \left(\int_w^\infty \left(\frac{1}{u_c(\theta)}\right) f(\theta)d\theta - (1 - F(w))\frac{1}{\lambda}\right) \quad [24c]$$

Para este caso el multiplicador de la restricción de presupuesto del gobierno, el cual es interpretado como el valor marginal de los fondos públicos, es igual a:

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^\infty \left(\frac{1}{u_c(\theta)}\right) f(\theta)d\theta} \quad [28]$$

Sustituyendo [28] en [24c] se llega a:

$$\frac{t}{1-t} = \left(\frac{1+\varepsilon^u}{\varepsilon^c}\right) \left(\frac{u_c(w)}{wf(w)}\right) \left(\int_w^\infty \left(\frac{1}{u_c(\theta)}\right) f(\theta)d\theta - (1 - F(w))\frac{1}{\int_0^\infty \left(\frac{1}{u_c(\theta)}\right) f(\theta)d\theta}\right) \quad [24d]$$

Para facilitar el proceso computacional es necesario transformar la función  $f(w)$  de continua a discreta. Para esto, se estima una función discreta de probabilidad denominada  $\pi(w)$ , de modo que  $f(w) = \pi(w)/\Delta$ , donde  $\Delta$  es la longitud de los intervalos (*bins*) de la partición del soporte de la densidad. Dado un soporte de ingresos laborales entre \$1.000 y \$40.500.000, y una longitud de los intervalos de  $\Delta = \$200.000$ , se tiene una muestra de 203 niveles de ingreso laboral<sup>30</sup>.

Igualmente,  $\Pi(w)$  será la función de probabilidad acumulada discreta asociada a  $\pi(w)$ .

Dado que los límites de integración corresponden a valores infinito, el cómputo de [24d] no puede ser realizado de manera exacta. En cambio, dicha integral será aproximada restringiendo los límites por los valores máximo y mínimo del soporte de los ingresos salariales. Bajo este escenario, la aproximación de la ecuación [24d]:

$$\frac{t(w)}{1-t(w)} \approx \left( \frac{1+\varepsilon^u}{\varepsilon^c} \right) \left( \frac{u_c(w)}{w \frac{\pi(w)}{\Delta}} \right) \left( \int_{w+\frac{\Delta}{2}}^{w_n+\frac{\Delta}{2}} \left( \frac{1}{u_c(\kappa)} \right) \frac{\pi(\kappa)}{\Delta} d\kappa - (1 - \Pi(w)) \int_{w_1-\frac{\Delta}{2}}^{w_n+\frac{\Delta}{2}} \left( \frac{1}{u_c(\kappa)} \right) \left( \frac{\pi(w)}{\Delta} \right) d\kappa \right) [24e]$$

Donde  $\kappa$  corresponde al punto medio del intervalo al cual pertenece  $w$ . Nótese que al integrar desde  $w$ , la magnitud de  $\left( \frac{1}{u_c(\kappa)} \right) \frac{\pi(w)}{\Delta}$  no tiene dimensión pues  $\pi(w)$  es discreta. En ese caso, para cada valor de salario el valor infinitesimal de la integral en ese punto puede ser aproximado como la imagen de la función evaluada en  $w + \frac{\Delta}{2}$ . Se deduce de inmediato que la aproximación es exacta cuando  $\Delta \rightarrow 0$  y  $n \rightarrow \infty$ . Naturalmente, en el caso de  $w_n$  sucede exactamente lo mismo.

Por otro lado, al integrar  $\left( \frac{1}{u_c(\kappa)} \right) \left( \frac{\pi(w)}{\Delta} \right)$  entre sus límites  $w_1$  y  $w_n$ , la aproximación es más exacta si se reemplazan los límites por  $w_1 - \frac{\Delta}{2}$  y  $w_n + \frac{\Delta}{2}$ , respectivamente. Sin embargo, esto no modifica sustancialmente el valor de la integral definida.

Por definición de  $\pi(w)$ ,  $\int_{w+\frac{\Delta}{2}}^{w_n+\frac{\Delta}{2}} g \left( \frac{\pi(w)}{\Delta} \right) = \sum_{w_i=w+1}^{w_n} g(\pi(w))$  para cualquier función continua  $g(\cdot)$ .

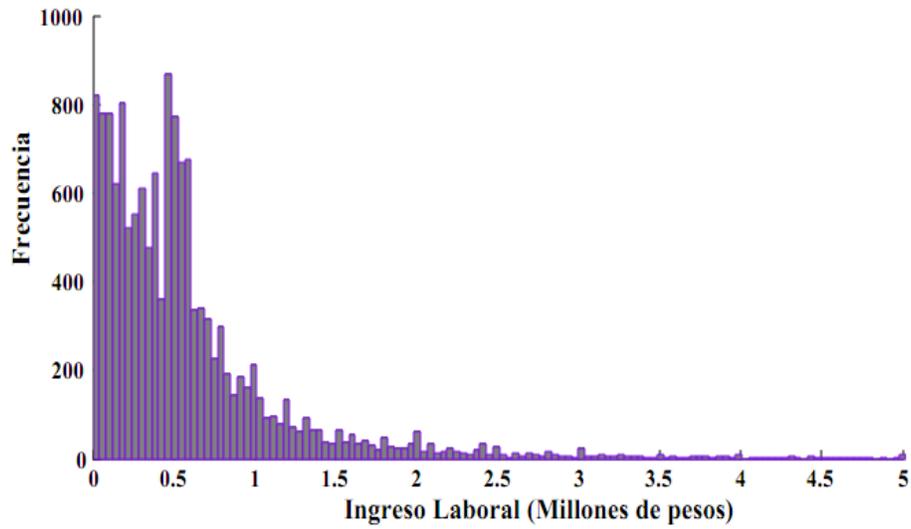
$$\frac{t}{1-t} = \left( \frac{1+\varepsilon^u}{\varepsilon^c} \right) \left( \frac{u_c(w_i)}{w \frac{\pi(w_i)}{\Delta}} \right) \left( \sum_{w_i=w+1}^{w_n} \frac{\pi(w_i)}{u_c(w_i)} - (1 - \Pi(w_i)) \sum_{w_i=w_1}^{w_n} \frac{\pi(w_i)}{u_c(w_i)} \right) [29]$$

La ecuación [29] será la CPO que se utilizara en el proceso de simulación del régimen tributario óptimo.

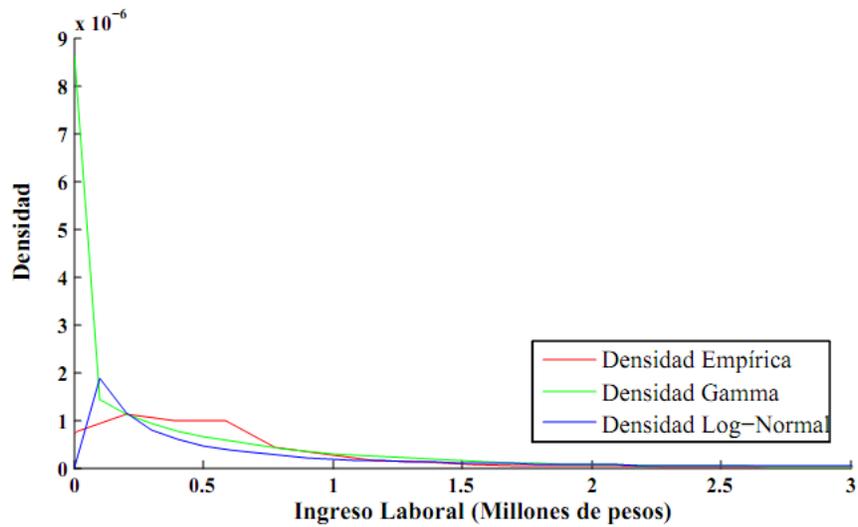
<sup>30</sup> Todas las simulaciones fueron llevadas a cabo empleando el Software Matlab 7.5 (R2007b).

Sección C: *Distribuciones de ingreso laboral*

**Gráfico 7. Distribución del ingreso laboral en Colombia, 2008**



**Gráfico 8. Distribución del ingreso laboral estimadas, 2008**



## Referencias:

- Atkinson, A. (1973) “How progressive should income tax be?”, en: M. Parkin (eds) *Essays in modern economics*: 90-109. London.
- Atkinson, A y J. Stiglitz (1976) “The design of tax structure: Direct versus indirect taxation”, *Journal of Public Economics* (6): 55-75.
- Brewer, M. Saez, E y A Shephard (2010) “Means-testing and tax rates on earnings”, en: A Stuart. T Besley. R Blundell. S Bond. R Chote. M Gammie. P Johnson, G Myles y J Poterba (eds) *Dimensions of tax design: The Mirrlees Review*. Institute for Fiscal Studies: Oxford.
- Cahuc, P y A Zylberberg (2004) *Labor Economics*. De Boeck Université Edition: MIT.
- Cárdenas, M y V Mencer Blackman (2006) *Análisis del sistema tributario colombiano y su impacto sobre la competitividad*. Fedesarrollo: Bogotá
- Dahan, M y M Strawczynski (2000) “Optimal Income Taxation: An example with a U-Shaped pattern of optimal marginal tax rates: Comment”. *American Economic Review* (90): 681-686.
- De Ferranti, D. Perry, G. Ferreira, F y M Walton (2004) “Inequality in Latin America and the Caribbean: Breaking with History?.” *Working paper*. World Bank.
- Diamond, P (1998) “Optimal Income Taxation: An example with a U-Shape pattern of optimal marginal tax rates.” *American Economic Review* (88): 83-95.
- Goñi, E. López, H y L Sérven (2008) “Fiscal Redistribution and Income Inequality in Latin America” *Working paper 4487*. World Bank.
- Kanbur, R y M Tuomala (1994) “Inherent Inequality and the Optimal Graduation of Marginal Tax Rates” *Scandinavian Journal of Economics*, (96): 275-282.
- Lasso, F (2004) “Incidencia del gasto público social sobre la distribución del ingreso y la reducción de la pobreza”. *MERPD-Departamento Nacional de Planeación*.
- Mankiw, G. Weinzierl, M y D. Yagan (2009) “Optimal taxation in theory and practice”, *Journal of Economic Perspectives* (23): 147-174.
- Meghir, C y D Phillips (2010) “Labour Supply and Taxes”, en: A Stuart. T Besley. R Blundell. S Bond. R Chote. M Gammie. P Johnson, G Myles y J Poterba (eds) *Dimensions of tax design: The Mirrlees Review*. Institute for Fiscal Studies: Oxford.
- MERPD (2006) “Metodología de medición y magnitud de la pobreza en Colombia”. *MERPD-Departamento Nacional de Planeación*.
- Mirrlees, J (1971) “An exploration in the theory of optimum income taxation” *Review of Economic Studies* (38):175-208.
- Musgrave, R (1959) *The Theory of Public Finance: Study in Public Economy*. McGraw-Hill: New York.
- Olivera, M. Pachón, M y G Perry (2009) “Cómo las reformas fiscales dependen de la política.” En: E Lora y C Scartascini (eds) *Consecuencias imprevistas de la constitución de 1991: la influencia de la política en las políticas públicas*. Alfaomega: Bogotá.
- Perry, G y G McMahon (2000) “Fiscal reform and structural change in developing countries.” *IDRC. World Bank*.
- Perry, G (2010) “Hacia una reforma tributaria estructural.” En: R Steiner y V Traverso (eds) *Colombia 2010-2010: Propuestas de política pública*. La Imprenta Editores: Bogotá.
- Prada, J y L Rojas (2009) “La elasticidad de Frisch y la transmisión de la política monetaria en Colombia”, *Borradores de Economía*, (555), Banco de la República.
- Ramsey, F (1927) “A Contribution to the Theory of Taxation”, *Economic Journal* (37): 47-61.

- Sadka, E (1976) “On Income Distribution, Incentive Effects and Optimal Income Taxation”, *Review of Economic Studies* (43): 261-267.
- Saez, E (2001) “Using elasticities to derive optimal income tax rates”, *The review of economic studies* (68): 205-229.
- Salanié, B (2003) *The Economics of Taxation*. MIT Press: Massachusetts.
- Santa María, M. Steiner, R y E Schutt (2010) “Cómo derrotar el desempleo y al informalidad.” En: R Steiner y V Traverso (eds) *Colombia 2010-2010: Propuestas de política pública*. La Imprenta Editores: Bogotá.
- Seade, J (1977) “On the Shape of Optimal Tax schedules”, *Journal of Public Economics* (7): 203-35.
- Seade, J (1982) “On the Sign of the Optimum Marginal Income Tax”, *Review of Economic Studies* (49): 637- 43.
- Stiglitz, J (1982) “Self-selection and Pareto efficient taxation”, *Journal of Public Economics*, (17): 213-240.
- Tuomala, M (1984) “On the Optimal Income Taxation: Some Further Numerical Results”, *Journal of Public Economics* (23): 351-66.