UNIVERSIDAD DEL ROSARIO - FACULTAD DE ECONOMÍA
Economía Matemática 2017-II - Taller 0

Andrés Felipe Cárdenas T.
Juan Carlos Zambrano.

July 31, 2017

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & \frac{-1}{10} \\ 4 & -3 & -2 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

   realice las siguientes operaciones:

   (a) AB
   (b) BA
   (c) A^T
   (d) $(AB)^T$
   (e) $A^2 - 4BC + 5I$
   (f) $A^3 + B^3 - C^3$

2. Encuentre el determinante de A, B, y C, tanto por el método de Gauss, como por el de cofactores. Demuestre que ambos métodos coinciden en todos los casos.

3. Encuentre los valores propios y los vectores propios , de las matrices A, B, y C, indicando en cada caso la dimensión de cada autovector.

   Recuerde: $\dim V_\lambda = \dim A - \rho(A - \lambda I)$, con $\rho(B) :=$ rango de B.

4. Diga cual de las matrices, A, B, y C son diagonalizables y por qué?

5. Calcule la expresión matricial y encuentre una expresión diagonal de las formas cuadráticas cuya forma análitica viene dada por:

   (a) $q(x, y) = -3x^2 - 2xy + 5y^2$
   (b) $q(x, yz) = x^2 - y^2 + z^2 - 3xy + 6yz - 9xz$
   (c) $q(x, yz) = 4x^2 + 5y^2 + 3z^2 + yz - xz$

6. Clasifique las anteriores formas cuadraticas en semidefinida positiva, semidefinida negativa, entre otras.

7. Para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se puede clasificar, usando el método de los menores principales, la siguiente forma cuadrática?

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2ax_1x_3 + x_3^2.$$

En los casos en que exista, obtenga los valores de a para que la forma cuadrática sea semidefinida positiva. Existe algún valor de a para que la forma cuadrática sea definida negativa?

8. Indique si las siguientes funciones son o no continuas. Justifique tan detalladamente como sea posible su respuesta, y encuentre su derivada (Son derivables en todos los puntos de su dominio?).

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 2, \\ 4 & si \quad x > 2. \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2, \\ 1 & si \quad x = 2, \\ 4 & si \quad x > 2. \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$

   (d) $f(x) = tan(x)$.

9. Realize una gráfica, utlizando curvas de nivel, y encuentre el gradiente y la matriz hessiana para cada una de las siguientes funciones:

   (a) $f(x_1, x_2) = xy$
   (b) $g(x_1, x_2) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}}$
   (c) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$
   (d) $u(x, y) = 2x + y$
   (e) $g(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2}$
   (f) $u(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2$
   (g) $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 x_2 (x_3)^6 - x_1 (x_2)^2$
   (h) $t(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - \log(x_2 x_3)$

10. Encuentre la expansión de Taylor de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = e^x, \text{en}, a = 0$
   (b) $f(x) = \ln(x), \text{en}, a = 1$
   (c) $f(x) = \sin(x), \text{en}, a = 0$

11. Sea $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad \text{con } x = (3u + 1)^3$ Calcule $\dfrac{df}{du}$

12. Sea $y = 1 + u + u^2$ con $u = \dfrac{10 - 7x}{2 + x^3}; x = (t-2)^2$ Calcule $\dfrac{dy}{dt}$

13. Calcule las derivadas indicadas:

    (a) $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, donde $y = u^3$ y $u = (1+2x)^2$

    (b) $\dfrac{dy}{dt}$ donde $y = x^5 \dfrac{d^2u}{dt^2}$ y $x = x(u)$ $u = u(t)$

14. Sea $u = u(x, y), con\, x(r, \theta) = rcos(\theta),\ y(r, \theta) = rsen(\theta),$ muestre que:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

15. Muestre que si $f(X)$ y $g(X)$, con $X \in \Re^n$ son dos funciones diferenciables, entonces:

    (a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

    (b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

16. Encuentre el vector unitario normal a la superficie $x^2y + 2xz = 4$ en el punto $p(2, -2, 3)$ (sugerencia use el hecho de que el vector ∇f siendo $f(x, y) = x^2 + 2xz = 4$ es normal a las superficies de nivel de f)

17. Muestre que si $\varphi(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ se cumple que:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

18. Verifique que las siguientes derivadas parciales son iguales entre si:

    (a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ si $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

    (b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ si $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

    (c) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ y $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$ si $f(x, y) = x^2yz + 2xy^2z^2 - \dfrac{z^3}{xy}$

19. para cada una de las funciones del problema 17 encuentre su matriz Hessiana Correspondiente.

20. Realice las siguientes integrales

    (a) $\int xe^{x^2} dx$

    (b) $\int \frac{e^x}{e^x + e} dx$

    (c) $\int \frac{x^2 + 2}{x + 1} dx$

    (d) $\int \ln x dx$

    (e) $\int x^2 e^x dx$

    (f) $\int e^x \sin x dx$