

**SERIE DOCUMENTOS**

**BORRADORES  
DE  
INVESTIGACIÓN**

No. 75 Julio 2005

**Economía Matemática: Antecedentes, Evolución y  
algunos desarrollos recientes**

Alvaro Hernando Chaves Castro



UNIVERSIDAD DEL ROSARIO  
Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario- 1653

## *Economía Matemática: Antecedentes, Evolución y algunos Desarrollos Recientes*

Alvaro Hernando Chaves Castro<sup>†</sup>  
achavescastro@yahoo.com

### *Resumen*

Se presenta en forma somera el origen de la matematización económica y el campo de la Economía Matemática. Un enfoque histórico inicial divide dicho campo en un primer periodo *marginalista*, uno de utilización de teoría de los conjuntos y modelos lineales, y un periodo que integra los dos anteriores. Luego se analiza la evolución de la *Teoría del Equilibrio General* desde Quesnay, pasando por Walras y desarrollos posteriores, hasta su culminación con los trabajos de Arrow, Debreu y sus contemporáneos. Finalmente se describe, la influencia de las matemáticas en especial de la optimización dinámica en la teoría macroeconómica y a otras áreas de la economía.

**Palabras Clave:** marginalismo, equilibrio general, teoría del valor, optimización dinámica, institucionalismo, teoría de juegos.

### **Abstract**

This document briefly presents the origin of application of mathematics to economics and of the mathematical economics. It begins with a historical approach that presents the marginalist period, later a set theory period and lineal models and finally, a period that combines the two precedents. Later, it analyze the evolution of General Equilibrium Theory from Quesnay, Walras and others developments, until the contributions of Arrow Debreu and theirs contemporaries. Finally, it ends describing the influence from mathematics, specially dynamic optimization, on macroeconomic theory an the applications of theory of games on the institutional economics.

**Keywords:** marginalism, general equilibrium, Theory of value, dinamic optimization, institutionalist theory, Game theory.

**Clasificación JEL:** C60, D50, B41.

---

<sup>†</sup> Profesor Facultad de Economía Universidad del Rosario y del programa de maestría en la universidad Externado de Colombia. El autor agradece los valiosos comentarios y sugerencias realizadas por Jorge Iván González y Luis Fernando Gamboa, quienes realizaron la lectura a una versión anterior del artículo.

## Introducción

La presentación que se hace a continuación no sigue un orden cronológico estricto. Por el contrario, se desarrolla resaltando los avances más importantes en el campo de la economía matemática y sigue una secuencia similar a la desarrollada por Arrow e Intriligator (1981). Las fuentes de información son aquellos trabajos que por su claridad y rigurosidad en el tema son de gran complementariedad.

La relevancia que ha tenido el área de la economía matemática, ha desatado una gran explosión de trabajos que han sido publicados en revistas especializadas en economía, estadística y econometría muy importantes a nivel internacional. En efecto, de acuerdo con Debreu (1991), a partir de la segunda guerra mundial la economía entró en una fase intensiva de matematización que profundamente ha transformado la profesión. En efecto, es a partir de 1944 que comienza un periodo de auge en la producción de artículos que tratan el tema de la economía matemática, lo que convirtió a este año como el punto más alto en la producción intelectual de los economistas en esta área<sup>1</sup>. Así mismo, este campo se volvió relevante en la mayoría de departamentos de economía de los Estados Unidos, en donde el acceso a los distintos programas de doctorado en economía exigía como mínimo un conocimiento de cálculo y álgebra lineal como requisito para que la persona sea admitida.

De acuerdo con el anterior, este trabajo está motivado en parte por la gran relevancia que ha tenido y sigue teniendo esta área en la ciencia económica y por otro lado, reseñar de forma breve los principales avances que ha tenido esta área y los campos de acción a los cuales ha penetrado.

Este documento consta de cinco partes, de las cuales esta introducción es la primera. En la segunda se revisa brevemente algunas obras influyentes en torno a los orígenes de la economía matemática. La tercera parte describe los inicios de la teoría del equilibrio general. Una cuarta sección, analiza la extensión de la economía matemática, y describe principalmente la aplicación de la optimización dinámica en la teoría macroeconómica. La teoría de juegos como

---

<sup>1</sup> De acuerdo con Debreu, cinco revistas econometrica, Review of Economic Studies, internacional Economic Review, Journal of Economic Theory y el Journal of Mathematical Economics publicaron en conjunto más de 5.000 dedicadas al campo de la economía matemática.

herramienta de análisis utilizada en otros campos de la economía se describe en la quinta parte. Finalmente, se presentan unos comentarios a manera de conclusión.

## 2. Algunos Antecedentes

La naturaleza de la economía matemática, tal como la percibió en su momento Walras (1874), era hacerla acceder a un *status* auténticamente científico que hace disponer a la economía de conceptos precisos, imponiendo una serie de condiciones de abstracción sobre la naturaleza y comportamiento de los agentes económicos. De igual manera, según él se permite formular el conjunto de relaciones económicas fundamentales como un sistema coherente de ecuaciones, y en tercer lugar pone a disposición de la economía de un instrumento de deducción mucho más eficaz que el razonamiento intuitivo<sup>2</sup>.

Según Gerard Debreu (1991), entre 1874 y 1988 hay un periodo muy grande que tiene información muy valiosa sobre los avances en el área de la economía matemática. En su artículo “The matematization of the economic Theory”, resalta que este lapso de tiempo estuvo muy influenciado por la teoría física, lo que estimulo el desarrollo de varios trabajos. Durante este periodo, los trabajos se interesan por analizar la relación entre cantidades y precios demandados y ofrecidos en un contexto de multimercados y la idea es obtener un vector de precios de equilibrio. De acuerdo con esto, los elementos de cálculo diferencial y álgebra lineal ayudaron significativamente a este análisis, en donde se desarrolla el teorema del punto fijo de precios y el concepto de convexidad. Lo anterior, obligó a desarrollar un análisis de solución de dicho vector de precios de equilibrio apoyados en el desarrollote algoritmos matemáticos para probar la existencia, estabilidad y unicidad en el análisis de equilibrio general.

Autores recientes como A. Chiang (1988) se han referido a la economía matemática no como una rama expresa de la economía, como lo es la política fiscal o monetaria, si no como una aproximación al análisis económico en la que el economista emplea símbolos matemáticos cuando expone un fenómeno o problema y, además, recurre a teoremas matemáticos como ayuda en su razonamiento. En este sentido, la definición de Chiang, resalta las ventajas de la

---

<sup>2</sup> No obstante, se reconoce de todas maneras, que Walras deja un gran espacio para lo que él llama las instituciones y el arte, en los que no cabe la matemática.

matemática como instrumento de análisis ya que: i) el lenguaje es más conciso y exacto, ii) existe una abundancia de teoremas matemáticos a nuestro servicio, iii) al establecer explícitamente hipótesis económicas como condición para usar teoremas, nos protege del peligro de adoptar hipótesis implícitas no deseadas, y iv) permite tratar el caso general de  $n$  variables.

Tomando como base la introducción del *Handbook of Mathematical Economics* de Arrow e Intriligator (1981) se puede clasificar las etapas históricas del desarrollo de la materia fundamentalmente en tres. La primera, conocida como la *marginalista*<sup>3</sup> que arranca en 1938 con la obra “Investigaciones sobre los Principios Matemáticos de la Teoría de las Riquezas de Cournot y termina en 1947 con la aparición de la segunda de las dos obras clásicas de este periodo, los “Fundamentos del Análisis Económico” de Samuelson. La primera de las obras con que culmina este periodo fue “Valor y Capital” de Hicks, que apareció en 1939.

La característica principal de esta primera etapa, fue la aplicación de una herramienta matemática denominada *cálculo infinitesimal*, con metodologías que los economistas en gran parte han tomado de otras ciencias, en especial de la física<sup>4</sup>. En este periodo se llegó a una formulación bastante completa del *sistema de equilibrio general*, con una formulación cercana a la presente de los problemas de competencia perfecta e imperfecta, de monopolio, duopolio, teoría del consumidor y la teoría de la producción basados en los principios de maximización. Como se mencionó anteriormente, esta etapa está influenciada por los trabajos realizados en forma independiente por Samuelson (1947) y Hicks (1939).

De acuerdo con el análisis realizado por González y Pecha (1995) sobre la dinámica en economía, se observa como el cálculo y la mecánica clásica sirven de fundamento en los análisis relacionados con este fenómeno económico. Según ellos, las reflexiones de Samuelson en su trabajo Fundamentos del Análisis Económico, giran en torno al concepto de *principio de*

---

<sup>3</sup> Se puede definir al marginalismo como un intento de construir la Teoría Económica a partir de la Teoría Subjetiva del Valor y, sobre todo, de la formulación de la Ley de Utilidad Marginal Decreciente, como una ley que es esencialmente formulable de manera matemática

<sup>4</sup> En este sentido, autores pertenecientes a esta corriente como Jevons, Menger y Walras pertenecían a una comunidad científica, la cual estaba dominada por las ciencias naturales (la Física). Ninguno de ellos se formó para ser economista, todos se entrenaron y trabajaron en un contexto interdisciplinario en el que la relación con otras áreas del conocimiento a veces podía ser más importante que los problemas económicos.

*correspondencia*, cuando se preguntaba por la relación entre la estática y la dinámica, ya que para él la estabilidad del equilibrio está íntimamente ligada al problema de cómo derivar teoremas útiles en el campo de la estática comparativa. Es precisamente esta dualidad, a la cual Samuelson ha llamado *principio de correspondencia*. Contrario a los análisis de Samuelson, Hicks explicita con mayor claridad la necesidad de justificar los supuestos y la conveniencia de que el análisis económico no quede aprisionado en el marco de la mecánica clásica, pues para él el problema fundamental de la dinámica es la definición del periodo. Según González y Pecha (1995), las concepciones de la dinámica económica realizadas por Samuelson y Hicks, son pertinentes porque “con la abundancia de modelos intertemporales la teoría económica contemporánea ha minimizado la importancia de examinar los supuestos. En los últimos años se ha hecho énfasis en el formalismo matemático y se ha dejado por completo fuera el debate sobre la duración y las características del periodo propuesto por Hicks”.

La segunda etapa comienza en el año 1948 y finaliza aproximadamente en 1960. Durante estos doce años, se cambió el enfoque no tanto de los problemas analizados, sino del tipo de herramientas utilizadas en donde sobresale el uso de la teoría de conjuntos y los modelos de tipo lineal. En este periodo la obra que juega un papel preponderante es la “Teoría del Valor” de Debreu, que aparece en 1959.

Esta época se caracteriza, por el gran desarrollo de la teoría de juegos de estrategia y sus aplicaciones al análisis económico, principalmente al modelo de equilibrio general. Específicamente, el análisis se ha concentrado en el concepto de solución de equilibrio cooperativo. De acuerdo con Shubik (1996), ha habido varias etapas de generalización en la aplicación de la teoría de juegos al análisis económico, que han tenido que ver en particular, con suposiciones referentes a preferencias y utilidad y con la aplicación de los llamados métodos limitantes para estudiar economías con muchos agentes pequeños.

En este sentido, Von Neumann y Morgenstern (1944) construyeron modelos de juegos cooperativos, bajo el supuesto de función de utilidad transferible entre agentes, supuesto que ha sido criticado por constituirse en una restricción fuerte y con poco realismo económico. Transcurrido cierto tiempo, el trabajo de estos dos autores rápidamente se constituyó en un estímulo para los matemáticos y científicos sociales en la elaboración de trabajos futuros en

cada una de sus áreas y para fortalecer mucho mas la investigación en teoría de juegos. Según Aumann y Hart (2003), el principal aporte de Von Neumann al análisis de la teorías de juegos y que aún se mantiene dominante, fue realizado en 1928, cuando establece el teorema "mínimax" para fundamentar la existencia de una solución de estrategia optima y en general a la teoría de juegos. Siguiendo a Monsalve (2002), el trabajo de Von Neumann y Morgenstern consolidaría un aparato teórico que permite un cuidadoso estudio de problemas estáticos y dinámicos en economía. Sus soluciones, las posteriores soluciones cooperativas y la solución no cooperativa de Nash estaban todas dirigidas a este propósito.

El trabajo influyente de Nash del año 1950, se caracteriza por elaborar toda una axiomática encaminada a dar consistencia lógica y fundamento a la teoría e introduce una representación idealizada del problema de bargaining para describir las acciones de dos agentes económicos dentro de un conjunto factible de alternativas y por consiguiente la posible solución a la cual los dos pueden llegar. El objetivo de Nash consistió en desarrollar una teoría encaminada a predecir el compromiso que pueden alcanzar los agentes en el modelo y definió una solución muy conocida como el equilibrio de Nash. Tal equilibrio, representaba la existencia de una única solución que satisfacía todos los axiomas listados por el autor.

En cuanto al tratamiento de los modelos lineales, se puede citar el modelo de insumo producto de Leontief (1947) en el cual se describe toda una estructura de interrelación de sectores relacionadas con la producción<sup>5</sup>, los modelos de programación lineal iniciados con los trabajos de Dantzig (1949) y Kantorovich (1959), y el análisis de actividades con base en el trabajo de Koopmans (1951). El logro fundamental de esta época es la demostración de la consistencia del modelo de equilibrio general lograda por Arrow y Debreu en 1954.

El tercer periodo en el desarrollo histórico de la economía matemática que comenzó en 1961, fue denominado por Arrow e Intriligator como periodo de integración del instrumental básico,

---

<sup>5</sup> En Colombia el DANE en el análisis de Cuentas Nacionales ha utilizado la matriz insumo-producto para describir las transacciones intersectoriales relacionadas con la producción. Sin embargo, con base en esta descripción y algunos supuestos tecnológicos, la matriz insumo-producto puede servir también como herramienta de programación y análisis económico a fin de determinar los niveles de producción que deben alcanzar los diferentes sectores para satisfacer las demandas de consumo o inversión de los diferentes productos; puede utilizarse para estudiar la composición del valor agregado de productos y efectuar análisis de precios, calcular requerimientos de importaciones, etc.

entre el cálculo infinitesimal por un lado y teoría de conjuntos y modelos lineales por el otro. Esta integración hoy en día se encuentra muy avanzada, y prácticamente ya no queda campo de la economía que no haya sido tratado en mayor o menor medida desde el punto de vista matemático.

### 3. La Teoría del Equilibrio Económico General

Los orígenes de la Teoría del Equilibrio Económico General pueden remontarse por lo menos al Tableau Economique de Quesnay<sup>6</sup>, en la época anterior a Cournot que Arrow e Intriligator denominan la *prehistoria de la economía matemática*. Pero le ocupó a otro francés, quien tuvo que emigrar a Suiza por no conseguir acceder a una cátedra en su país natal<sup>7</sup>, desarrollar la teoría en tal esplendor. Es entonces en la obra de Walras (1874), donde se desarrollo el concepto fundamental que los mercados están interrelacionados, por lo que el equilibrio de la economía está caracterizado por la igualdad simultánea entre oferta y demanda en todos los mercados. Este concepto fue extendido y expuesto por W. Pareto (1906). Pero cual era la esencia del equilibrio general walrasiano?. En su obra “Elementos de Economía Política Pura” se percibe una conciencia epistemológica radical y precisa de lo que significa la matematización de la economía. En ésta Walras, fundamenta el análisis del equilibrio de los mercados mediante toda una axiomática impecablemente elaborada, de tal forma que define un universo económico casi compacto, el cual tiene dos características: i) todos los elementos que intervienen son tomados en cuenta (completo) y ii) todas las relaciones entre los elementos forman un sistema (autónomo).

Pero para estar seguro de que el objeto de la economía es un universo compacto, Walras afirma que son las matemáticas las que permiten justificar ese postulado, ya que según él, si el sistema de todas las relaciones económicas es expresable en un sistema de ecuaciones y si se dan ciertas condiciones perfectamente verificables, se puede afirmar que el sistema económico

---

<sup>6</sup> Talvez a este economista francés comúnmente llamado el “padre de la Fisiocracia”, se lo puede catalogar como el que dio inicio al uso de las matrices en la interrelación de sectores productivos descrita en su Tableau Economique (Cuadro Económico).

<sup>7</sup> Durante la época en que emigró Walras a Suiza, la escuela dominante en Francia era la escuela “ultraliberal” de París, que tomaba como referencia principal la obra de J. B. Say, quien publicó una crítica violenta a los intentos de matematización de la economía, la cual no se resquebrajaría en Francia hasta la segunda década del siglo XX. Tal parece que esto fue lo que obligó a Walras a abandonar su país y desarrollar sus ideas en otro.



así descrito determina un universo independiente. De esta forma, las matemáticas son una condición necesaria y suficiente para afirmar a la economía como *ciencia pura*, ya que sin las matemáticas, el postulado de un universo autónomo es arbitrario e inverificable.

Otra característica esencial del equilibrio general walrasiano, es tratar que la economía científica formule todos sus conceptos de manera que sean matemáticamente operativos. En este sentido todos los elementos económicos deben ser considerados como magnitudes y todas las relaciones económicas, como funciones de ciertas características.

El problema al que se enfrenta Walras es que, para que sus matemáticas puedan aplicarse hacen falta aún más condiciones restrictivas. Es entonces como supone y construye su hipótesis de equilibrio perfecto, es decir un equilibrio en el que las fuerzas que lo establecen, cuando son ligeramente modificadas, provocan reacciones en sentido contrario que tienden a establecer el estado de equilibrio primitivo. Estas fuerzas económicas para Walras no son más que el comportamiento de los agentes económicos (empresas, economías domésticas) individuales, y se tiene la idea de que se comporten como *homo oeconomicus*<sup>8</sup>. No obstante, la justificación del *homo oeconomicus* no es principalmente psicológica, sino metodológica en el sentido de que es una condición de abstracción sobre los agentes económicos que permiten matematizar sus relaciones.

La construcción analítica de Walras se adelantó por completo a su época, en la cual muy pocos economistas tenían la preparación matemática suficiente como para poder apreciar debidamente su obra. Además, la misma ciencia matemática estaba demasiado subdesarrollada como para que fuera posible analizar rigurosamente la consistencia<sup>9</sup> del esquema walrasiano. Sólo hasta 1941, Shizuo Kakutani (1941), mediante herramientas desarrolladas después de Walras, demostró el *teorema del punto fijo* que fue un elemento clave para los desarrollos posteriores de la materia. Con base en este teorema, se demostraron varias proposiciones esenciales en la Teoría de Juegos de Estrategia, tales como la demostración de Nash (1950) de

---

<sup>8</sup> Este es un agente que quiere y puede (bajo ciertas condiciones, como una información perfecta) comportarse de una manera totalmente racional, es decir maximizando la utilidad total que puede alcanzar dada una dotación de recursos.

<sup>9</sup> A partir de este desarrollo pionero de Walras sobre los modelos de equilibrio general, se desató toda una serie de estudios atinentes a verificar la consistencia lógica y matemática de su hallazgo, los cuales se caracterizan por validar la existencia, unicidad y estabilidad del equilibrio en economía.

la existencia de una solución no cooperativa para juegos de  $n$  personas, generalizando la solución que Cournot ya había dado para el duopolio, extendiéndola al caso de más de dos oponentes. Aunque en trabajos posteriores realizados por Nash se amplía los alcances de los juegos cooperativos.

De acuerdo con este resultado, un francés Debreu junto con Kenneth Arrow (1954), pudieron demostrar finalmente la existencia del equilibrio competitivo en el modelo de Walras. Este trabajo, junto con los casi simultáneos de Mc Kenzi (1955), Gale (1960) y Nikaido (1954,1955) han iniciado un enorme flujo de investigaciones sobre modelos cada vez más complejos, cuya característica común es la de destacar la interdependencia entre las acciones de los distintos agentes de un sistema económico.

A pesar de las bondades que ofrecía el *teorema de kakutani*, en el sentido de permitir afirmar que las curvas de oferta y demanda agregadas de la economía se cruzan, este no da indicación alguna sobre como se cuantifican precios y cantidades de equilibrio. Después, los economistas se interesaron en el problema netamente empírico de cuantificar la solución de equilibrio (precios y cantidades) del modelo de Walras. De esta forma, es cuando el modelo de insumo-producto desarrollado por Leontief cobra relevancia ya que permite resolver por medio de técnicas de álgebra lineal las soluciones de equilibrio de un sistema económico, lo que permite estimular el surgimiento de la tercera etapa de la evolución histórica de la economía matemática.

#### **4. Optimización Dinámica y Teoría Macroeconómica**

Desde la década de los 70's, la macroeconomía ha avanzado considerablemente bajo la influencia de tres factores. El primero de ellos ha sido, la introducción de la dinámica en los modelos neoclásicos o keynesianos tradicionales<sup>10</sup>, que ha obligado a ampliar el ámbito de los problemas y ha utilizado nuevas herramientas formales. Segundo, la necesidad de microfundamentar los modelos originales, es decir la necesidad de revisar los supuestos con los cuales se elaboraron estos modelos, y tercero la aparición de nuevos problemas, que surgen por

---

<sup>10</sup> Un análisis del papel que juega la dinámica en la economía, desde el punto de vista de autores como Samuelson y Hicks, se encuentra bien desarrollado en el trabajo de J. I. González y A. Pecha (1995).

el intento de resolver problemas macroeconómicos anteriores, lo que ha desatado la necesidad de ampliar o corregir los modelos en primer lugar y revisarlos posteriormente.

Debido a que el objetivo principal de este documento es mostrar los desarrollos en la economía matemática, y principalmente el uso de técnicas como la *optimización dinámica* en la teoría macroeconómica, centraré el análisis en el primero de los factores que ha dado impulso al desarrollo de la macroeconomía en las décadas recientes. No obstante, es indispensable comenzar por definir en qué consiste la *Optimización Dinámica*. De acuerdo con A. Chiang (1988), el término *dinámica* ha tenido diferentes significados a lo largo del tiempo y para diferentes economistas. Sin embargo, hoy este término hace referencia a un tipo de análisis cuyo objeto es trazar y estudiar las trayectorias temporales de variables específicas, o determinar, para un periodo dado si esas variables tienden a converger a ciertos valores de equilibrio.

Según este autor un rasgo sobresaliente del análisis dinámico es la *afectación temporal* de las variables, lo cual introduce la consideración explícita de la variable tiempo en el análisis del fenómeno económico. De esta forma, se puede considerar en el análisis al tiempo como una variable continua, con lo cual se apela al uso de las ecuaciones diferenciales, o tratar al tiempo como una variable discreta, por lo cual se puede utilizar las ecuaciones en diferencias. Para A. Chiang, la diferencia entre un modelo económico estático y uno dinámico, es que en el primero el problema radica en encontrar los valores de las variables endógenas que satisfacen algunas condiciones de equilibrio específicas; mientras que en el segundo, el problema implica la determinación de la trayectoria temporal de alguna variable sobre la base de una forma de cambio conocida.

Autores como Intriligator (1973) definen la *optimización dinámica* como un problema dinámico de economizar, que consiste en distribuir recursos escasos entre objetivos que compiten en un intervalo de tiempo, que va desde un tiempo inicial hasta un tiempo terminal. En términos matemáticos, el problema consiste en elegir cursos temporales para ciertas variables, llamadas *variables de control* dentro de una clase dada de cursos temporales, llamada *conjunto de control*.

La integración de este instrumental matemático a la teoría macroeconómica es diversa, y son varios los autores que los han utilizado. Por ejemplo, el modelo de crecimiento neoclásico de R. Solow (1987) cuya contribución consistió en proponer la flexibilización de la relación tecnológica capital-trabajo, con lo cual permitió aumentar las posibilidades para que la economía se encaminara por una senda de crecimiento estable. En su trabajo, el instrumental matemático utilizado por el autor, consistió en utilizar ecuaciones diferenciales, para determinar la trayectoria temporal de la relación capital-trabajo que determinaba un crecimiento estable de la economía.

Posteriormente al desarrollo pionero realizado por Solow, sobre la teoría del crecimiento económico exógeno, se utilizaron técnicas matemáticas que sofisticaron aún más estos hallazgos, tales como la utilización de los diagramas de fase para determinar las posibles trayectorias convergentes hacia el equilibrio estable, y la utilización de las funciones Hamiltonianas. En este sentido, Barro y Sala – i – Martín (1995), realizan una revisión completa sobre los diferentes modelos de crecimiento económico, caracterizados por utilizar la optimización dinámica y diagramas de fase.

En los aspectos metodológicos del libro “Macroeconomía del Desarrollo” de Agénor y Montiel (1996), se destaca que los requerimientos para leer el texto incluyen nociones de álgebra, sistemas de ecuaciones diferenciales y técnicas básicas de optimización dinámica. Muchos de los modelos desarrollados a lo largo del libro, no se derivan a partir de principios microeconómicos (microfundación), es decir son modelos “ad hoc”, pero ofrecen la ventaja en la comprensión de algunos aspectos macroeconómicos claves. Siguiendo con la introducción de este libro, los autores manifiestan que los modelos construidos sin principios microeconómicos, están sujetos a una serie de críticas dentro de las cuales sobresalen: i) los resultados que ofrecen pueden ser muy sensibles a los supuestos arbitrarios que se hagan con respecto al comportamiento del sector privado, ii) no escapan a la “crítica de Lucas (1976)”, de acuerdo a la cual las reglas de decisión de los individuos son invariantes frente a las decisiones de política económica, iii) son una descripción explícita de las preferencias de las diferentes categorías de agentes y de las restricciones presupuestales a las cuales se enfrentan, tales modelos son, estrictamente hablando, inadecuados para realizar análisis de bienestar, y iv) tales modelos ignoran las restricciones intertemporales que se derivan de las condiciones de

transversalidad, es decir, condiciones apropiadas para determinar las trayectorias estables asociadas con los procesos de optimización.

Por el contrario, Agénor y Montiel, destacan que los modelos en los cuales el comportamiento de los individuos se deriva de un problema explícito de optimización intertemporal y en donde las relaciones de comportamiento se pueden agregar, tienen muchas ventajas, dentro de las cuales sobresalen: i) son coherentes con el comportamiento de maximización individual, y ii) dado que se construyen sobre la base de las preferencias individuales, las cuales son invariantes con respecto a los cambios de política, ofrecen alternativas para los análisis de política económica ya que son menos vulnerables a la crítica de Lucas.

Blanchard y Fischer (1998), en su libro “Lectures on Macroeconomics” se proponen caracterizar y explicar las fluctuaciones del producto, el desempleo, y los movimientos en los precios. Además, los temas que desarrollan en su trabajo incluyen el consumo y la inversión, las implicaciones de los horizontes finitos, los equilibrios múltiples, burbujas, y estabilidad; el papel de las rigideces nominales; y los mercados de bienes y servicios. Gran parte de los temas, se desarrollan con base en la aplicación de la teoría del control óptimo, la utilización de los diagramas de fase y la utilización de condiciones tomadas del análisis dinámico, como la condición de transversalidad<sup>11</sup>. Esta última es utilizada por los autores en el libro, por ejemplo cuando describen y analizan el modelo de crecimiento de Ramsey, en la parte del consumo y la inversión. El objetivo del modelo es, analizar el problema de la asignación intertemporal óptima de recursos, en el sentido de determinar cual es la tasa de ahorro óptima de una economía que genera una senda de crecimiento estable. El aporte de la matemática al análisis macroeconómico, es introducir modelos de optimización dinámica en un horizonte infinito, cuyo objetivo es determinar la senda óptima, mediante la solución del problema de maximización del bienestar de la sociedad a través del principio del máximo.

## **5. Otros Campos de la Economía**

---

<sup>11</sup> Una condición de transversalidad, es un artificio matemático utilizado en los análisis de estabilidad y convergencia de sistemas dinámicos, cuya principal función es tratar de eliminar las trayectorias explosivas o no convergentes de un sistema y que carecen de sentido económico.

En la actualidad se puede manifestar que los mercados son imperfectos. No es posible llevar a cabo transacciones referidas al futuro o a las externalidades que se generan en las actividades de producción y consumo. La información es imperfecta porque cada individuo no conoce todo lo que saben aquellos con los cuales interactúa. La información no es exógena porque aprendemos sobre los demás individuos observando su conducta en el mercado. Las fallas que se originan en mercados incompletos e información endógena son significativas y no permiten cambiar la idea de que los mercados sean eficientes. En ausencia de esta presunción, la sola idea de mercados libres ofrece poca ayuda para elegir las mejores soluciones económicas para los problemas de la sociedad.

Cuando la información es incompleta y asimétrica, entonces la asignación eficiente de los recursos promulgada por la mano invisible de los mercados no trabaja y los precios dejan de representar en forma exclusiva los costos de oportunidad y pueden incluso desinformar a los participantes en el mercado. Por otro lado, las externalidades están presentes en muchas acciones de los agentes, la información es asimétrica, el uso del poder de mercado es extendido y los buscadores de renta (rent seekers) abundan. De esta forma, el estado puede jugar un papel importante en corregir las fallas del mercado y para participar con tradiciones e instituciones extraeconómicas con el fin de reestablecer el orden, el respeto a los derechos de propiedad, la aplicación de los contratos y la defensa de la nación. Así el estado (instituciones) tiene un papel positivo que ejercer.

Esta evidente realidad es el campo de acción, entre otros, por el cual ha avanzado la economía institucional. No obstante, de acuerdo con Hodgson (1998) el enfoque institucionalista pasa de ideas generales respecto al agente humano, las instituciones y la naturaleza evolutiva de los procesos económicos, hacia ideas y teorías específicas, relacionadas a instituciones económicas específicas o tipos de economía. Según Hodgson, se requiere de elementos adicionales de análisis en los problemas económicos y resalta el fuerte nexo entre los agentes y sus instituciones con las cuales interactúan. Así las cosas, en lugar de modelos analíticos de comportamiento racional de los individuos, el institucionalismo construye sobre los psicológico, lo antropológico, lo sociológico y otras investigaciones del comportamiento de la gente.

De acuerdo con la visión general y amplia de la economía institucional, en la cual se introducen nuevos elementos de análisis, se intentara referenciar algunas aplicaciones de la economía matemática hacia el campo de la economía institucional, principalmente como herramienta de análisis y mecanismo de formalización de sus problemas.

Los nuevos avances en la económica matemática, especialmente en los campos de la teoría de juegos, interacción entre agentes con información incompleta y desarrollo de las instituciones, ofrecen un amplio marco analítico de las interacciones entre las instituciones y los agentes sociales en lo relativo a las características de la información, control, incentivos y recompensas. En este sentido, Fuentes y Marshall (1999) adoptan una metodología de juegos de estrategia simple con soluciones tipo Nash, con el fin de analizar la eficiencia de las instituciones del estado sobre el desempeño económico. De esta forma, se estudia la relación entre información y control que puede tomar fácilmente la forma del dilema del prisionero, en que la estrategia dominante para la institución controladora es utilizar la información que recibe con una visión de beneficios de corto plazo.

En el trabajo de Shubik (1996), Teoría de Juegos en las Ciencias Sociales, se hace una buena descripción de las aplicaciones de la teoría de juegos en el campo de la economía. En concreto para la economía institucional, se resalta las aplicaciones de juegos sobre bienes públicos, cuestiones externas y economía de bienes . De acuerdo con su trabajo, cuando se examina la bibliografía sobre bienes públicos, se dificulta hacer una clara distinción entre un análisis económico y uno de ciencias políticas, y por tal se requiere de un enfoque basado en la economía política.

Como se menciono anteriormente, cuando en una economía están presentes cuestiones externas, es posible que no exista un sistema de precios eficiente. Esto implica la necesidad, de diseñar un sistema de impuestos y subsidios para corregir las posibles fallas del sistema de precios. En este sentido, Klevorick y Kramer (1973), Aumann y Kurz (1977), analizan enfoques teóricos de juegos de bienes públicos e impuestos.

Shubick (1966), analiza los problemas planteados por las cuestiones externas e intenta responde a preguntas como, se puede obligar a un individuo a compartir un bien publico?, se le

puede impedir usar un bien a menos que pague su parte?. Estas preguntas le permiten diferenciar muchos tipo de bienes y sugiere una taxonomía basada en estas consideraciones.

Otro aspecto de la teoría de bienes en el que se utiliza como herramienta de análisis la teoría de juegos, es el estudio de impuestos de precio global, subsidios y compensaciones. De acuerdo con este enfoque, Brams, Schotter y Schwodiauer (1979) y Schleicher (1979), estudian fenómenos teniendo en cuenta los supuestos con relación a la disponibilidad de un sistema de pagos laterales y el nexo existente ente posibilidades sociales y económicas, y la estructura de preferencias individuales.

Un aplicación directa de los juegos al análisis de las instituciones económicas, ha sido la relación ente el dinero y las instituciones financieras. Desde una óptica microeconomica, la mayor parte de estos análisis se han centrado en la modelación no estratégica de equilibrio general del sistema de precios. De estos estudios, cabe destacar los de Foley (1970), Hahn (1971), Shubick et al (1977), entre otros. Estos se han caracterizado por enfocar el análisis desde una perspectiva estática. Al mismo tiempo, ha habido una explosión de trabajos que utilizan modelos de juegos no cooperativos cuya característica principal ha sido el uso de un bien o dinero fiduciario. En este sentido, Shubik (1976) introduce en el modelo estructuras y reglas rudimentarias del juego, que pueden interpretarse en términos de instituciones, instrumentos y leyes financieras. De esta forma, cuando se especifica el uso de dinero, debe resaltarse la diferencia entre dinero y crédito y al mismo tiempo se debe especificar las leyes de quiebra. A su vez, los actores del juego (banqueros, gobierno y otros) necesitan modelarse como jugadores separados en el juego de mercado estratégico.

De acuerdo con Shubik (1996), las condiciones de información son bastante cruciales en una economía de masas. La alta elasticidad de los modelos económicos con respecto a los movimientos del mercado financiero y por cambios en las condiciones de información, deben tenerse en cuenta en la construcción de modelos de juegos estratégicos con diferentes actores.

La anterior reseña sobre la aplicación de la teoría de juegos a otras áreas de la economía, permite evidenciar un instrumental que otorga un alto nivel de abstracción, lo que permite fabricar y analizar toda una axiomática que facilita el análisis de factores de poder, equidad,



justicia, sistemas formativos y leyes específicas, los cuales están dentro del núcleo de la economía institucional. En este sentido, Monsalve (2002) acierta cuando concluye que el estudio de la teoría de juegos nos ha dado un poderoso lenguaje que ha ayudado a examinar algunos de los problemas que enfrentan agentes optimizadores conscientes dentro de situaciones de competencia. No obstante, el mismo advierte sobre las limitaciones de estas aplicaciones.

## **6. Comentarios Finales**

La utilización de las matemáticas, tal como lo expresó Walras en el desarrollo de la Teoría del Equilibrio General, sirve, efectivamente, para clarificar y precisar los problemas económicos. Incluso las perspectivas que rechazan la construcción de una teoría económica pura no pueden ignorar las ventajas de una formulación matemática, siempre que sea posible dotarla de un significado económico.

La misión de las matemáticas en cuanto a la formalización de los fenómenos económicos, es por un lado, describir y en segundo lugar fundamentar el análisis mediante la dinámica entre los axiomas y las deducciones.

La utilización de las matemáticas en la ciencia económica es una herencia neoclásica, pues en dicha escuela, las nociones de optimización y de equilibrio general competitivo imponen de manera clara la relación entre economía y matemáticas. Como instrumento útil en el análisis económico, la ventaja de la formalización matemática consiste, en buscar la generalidad y la sencillez.

En el campo de la economía institucional, la aplicación de la teoría de juegos ha surgido como un poderoso instrumento de análisis para evaluar las insuficiencias y los alcances de los modelos económicos tradicionales, que propugna el campo de la economía institucional.

## **Referencias**

ARROW, K. J Y M. INTRILIGATOR (1981): Handbook of Mathematical Economics I. Amsterdam: North – Holland.

ARROW, K. J Y G. DEBREU (1954): Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, *Econometrica* 22.

ALPHA C. CHIANG (1988): Métodos Fundamentales de Economía Matemática, Mc Graw Hill, Tercera Edición.

AGÉNOR PIERRE R. Y MONTIEL J. PETER (1996): Development Macroeconomics, Princeton University Press, New Jersey.

BLANCHARD O. Y S. FISCHER (1998): Lectures on Macroeconomics. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

BARRO R, Y SALA-I-MARTIN, X (1995): Economic Growth, Mc Graw Hill.

COURNOT, A. (1938): Investigaciones sobre los Principios Matemáticos de la Teoría de las Riquezas.

DANTZIG, G. B. (1949): Programming of Interdependent Activities, II: Mathematical Model, *Econometrica* 17.

DEBREU, G. (1959): Teoría del Valor, New York: Wiley.

----- (1990): The Mathematization of Economic Theory, third meeting of the American Economic Association, diciembre.

GONZALEZ J.I y ARCENIO PECHA (1995): La Dinámica en Economía: los Enfoques de Hicks y Samuelson. En: Revista Cuadernos de Economía UN, Vol XIV, Número 23.

INTRILIGATOR M (1973): Optimización Matemática y Teoría Económica. Universidad de California, Los Ángeles. Editorial Prentice Hall Internacional.

SAMUELSON, P. (1947): Foundations of Economic Analysis, Harvard University, Edición Ampliada, 1983.

SOLOW, ROBERT (1987): La Teoría del Crecimiento: Una Exposición”, Fondo de Cultura Económica.

WALRAS, M. E. L. (1874): Elementos de Economía Política Pura.

HICKS, J. R. (1939): Valor y Capital, Londres, Oxford University Press.

LEONTIEF, W. (1947): Introduction to a Theory of the Internal

KANTOROVICH (1959): Economic Calculation of Optimal Utilization of Resources, Oxford Pergamon Press.

KOOPMANS, T (1951): Activity Analysis of Production and Allocation, New York, Wiley

- NASH (1950): Equilibrium in  $n$  – Persons Games, Proceedings of the National Academy of Sciences.
- VON NEUMAN, J y O. MORGENSTERN. (1944): Theory of Games and Economic Behaviour, Princeton University Press. (2a. ed., 1947).
- PARETO, W. (1906): Manual of Political Economy. 1971 translation of 1927 edition, New York: Augustus M. Kelley.
- KAKUTANI, S. (1941): A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem, Duke Mathematical Journal.
- Mc KENZIE (1955): Competitive Equilibrium with Dependent Consumer Preferences", Proceedings of 2nd Symposium on Linear Programming.
- GALE, D, (1960): The Theory of Linear Economic Models, New York, Mc Graw Hill.
- NIKAIDO, H., (1954): On Von Neumann's Minimax Theorem. Pacific Journal of Mathematics, 4.
- NIKAIDO, H., y K.. Isoda (1955): Note on Noncooperative Games. Pacific Journal of Mathematics, 5.
- LUCAS R. (1976): Econometric Policy Evaluation: A critique", CROCH
- SHUBIK, MARTIN (1996): Teoría de Juegos en las Ciencias Sociales Conceptos y Soluciones, Fondo de Cultura Económica, Reimpresión.
- , (1966): Notes on the Taxonomy of Problems Concerning Public Goods, Discussion paper 203, Cowles Foundation, Yale University.
- , (1976): A Noncooperative Model of a Closed Economy with Many Traders and Two Bankers, Zeitschrift für Nationalökonomie, 36.
- SHUBIK, M., y WILSON, C. (1977): The Optimal Bankruptcy Rule in a Trading Economy Using Fiat Money, Zeitschrift für Nationalökonomie, 37.
- AUMANN, R. y HART, S. (2003): Handbook of Game Theory With Economic Applications, volumen II. Elsevier, North Holland.
- MONSALVE, SERGIO (2002): Teoría de Juegos Hacia Donde Vamos, Revista de Economía Institucional, vol. 4, Numero 7, segundo semestre.
- HODGSON, G. (1998): The Approach of Institutional Economics, Journal of Economic Literature, marzo.
- FUENTES, F., y MARSHALL, J. (1999): Eficiencia de las Instituciones y Desempeño Económico, Estudios Públicos, 76.

KLEVORICK, A., y KRAMER, G. (1973): Social Choice on Pollution Management the Genossenschaften, *Journal of Public Economics*, 2.

AUMANN, R. J., y KURZ, M., (1977): Power and Taxes, *Econometrica*, 45.

BRAMS, S., SCHOTTER, A., y SCHWODIAUER (1979): *Applied Game Theory*, Wurzburg, Physica Verlag.

SCHLEICHER, H. (1979): *Games, Information and Groups*, Paris *Economica*.

FOLEY, D. (1970): Economic Equilibrium with Costly Marketing, *Journal of Economic Theory*, 2.

HAHN, F. (1971): Equilibrium with Transactions Costs, *Econometrica*, 39.