

**ESTRUCTURA A PLAZO COLOMBIA: MODELO AFIN DE
TRES FACTORES**

Presentado por:

LINA CAROLINA VÁSQUEZ GALINDO

Supervisor de Tesis:

CARLOS CASTRO

Maestría en Finanzas Cuantitativas

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

Bogotá

Agosto, 2015

Abstract

The estimation and interpretation of the interest rates term structures of great relevance because it allows to make predictions, is an important key to policy makers on monetary and fiscal decisions, is essential in risk management and also is an input for the right assessment of many financial assets. For these reasons is necessary to understand what can cause movements in the term structure. These paper estimates a "Three factors exponential affine model" applied to the Colombian sovereign debt yield in pesos. The estimated factors are the short-term rate, it's long term mean and volatility. The data used corresponds to the period between January of 2010 and May of 2015, and also a correlation analysis between the three mentioned factors is performed. Following, with the three factors estimated a regression to identify the importance of each one in the behavior of the Colombian sovereign debt rates for different terms to maturity is performed. Finally, the term structure for the Colombian interest rates is estimated and the relation between the three factors with those founded by Litterman and Scheinkman [1991] corresponding to the level, slope and curvature is identified.

Key words: Term structure, affine model

Resumen

La estimación e interpretación de la estructura a plazo de la tasas de interés es de gran relevancia porque permite realizar pronósticos, es fundamental para la toma de decisiones de política monetaria y fiscal, es esencial en la administración de riesgos y es insumo para la valoración de diferentes activos financieros. Por estas razones, es necesario entender que puede provocar un movimiento en la estructura a plazo. En este trabajo se estiman un modelo afín exponencial de tres factores aplicado a los rendimientos de los títulos en pesos de deuda pública colombianos. Los factores estimados son la tasa corta, la media de largo plazo de la tasa corta y la volatilidad de la tasa corta. La estimación se realiza para el periodo enero 2010 a mayo de 2015 y se realiza un análisis de correlaciones entre los tres factores. Posterior a esto, con los factores estimados se realiza una regresión para identificar la importancia que tiene cada uno de estos en el

comportamiento de las tasas de los títulos de deuda pública colombiana para diferentes plazos al vencimiento. Finalmente, se estima la estructura a plazo de las tasas de interés para Colombia y se identifica la relación de los factores estimados con los encontrados por Litterman y Scheinkman [1991] correspondientes al nivel, pendiente y curvatura.

Palabras clave: Estructura a plazo, modelos afines

1. Introducción

La estructura a plazo de las tasas de interés es la relación entre el rendimiento de un bono y su plazo al vencimiento y puede ser representada gráficamente en la curva de rendimientos. La estimación e interpretación de la estructura a plazo es de gran relevancia para realizar pronósticos, debido a que la curva de rendimientos actual contiene información de carácter económico futuro que es fundamento para la toma de decisiones de inversión y ahorro. Adicional a esto, es un factor relevante para la toma de decisiones de política monetaria y fiscal porque permite entender como el movimiento de la tasa de corto plazo puede trasladarse a las tasas de largo plazo y de esta manera tener un impacto en variables macroeconómicas como la demanda agregada y por otra parte, facilita la toma de decisiones de financiamiento por parte de los gobiernos. Finalmente, la estructura a plazo es un instrumento esencial en la administración de riesgos e insumo fundamental para la valoración de diferentes activos financieros como swaps, caps, floors, futuros y opciones de tasas de interés.¹

Por las razones expuestas anteriormente surge la necesidad de entender que factores pueden causar un movimiento en la curva de rendimientos. Al respecto, se ha producido una gran cantidad de literatura entre la que se puede encontrar el desarrollo de modelos factoriales para la estimación de la estructura a plazo. Litterman y Scheinkman [1991] realizaron un estudio para determinar los factores comunes que afectaban las tasas de rendimiento de los Tesoros² y en su aproximación encontraron que los movimientos de las tasas de rendimiento se podían representar principalmente en términos de tres

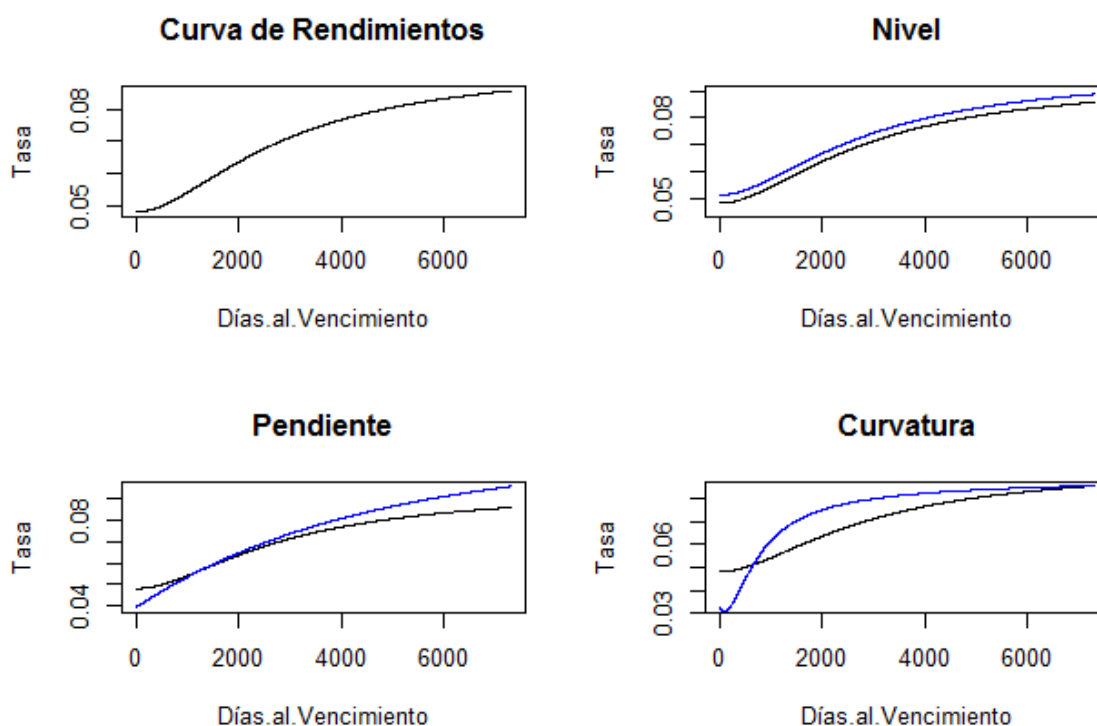
¹ Piazzesi, Monika. "Affine Term Structure Models". Department of Economics, Stanford CA, pp. 694-695

² Bonos de deuda pública emitidos por el gobiernos de los Estados Unidos.

factores: nivel, pendiente y curvatura, explicando estos tres factores aproximadamente el 96% de los cambios en las tasas de rendimiento de los Tesoros.

Los factores encontrados Litterman y Scheinkman [1991] producen un movimiento diferente en la curva de rendimientos. Un cambio en el nivel de la curva implica un desplazamiento paralelo, un movimiento de pendiente implica un cambio en el diferencial de dos puntos (largo plazo-corto plazo) sobre la curva y un cambio en la curvatura involucra el movimiento de un rendimiento de mediano plazo con respecto a los plazos corto y largo.

Figura 1



Fuente: Infovalmer, Cálculos propios

En la Figura 1 se puede observar la representación gráfica de la curva de rendimientos y un ejemplo de cambios en el nivel, la pendiente y la curvatura. Para cada uno de los ejemplos la curva en color negro representa la curva inicial y la curva en color azul representa la curva resultante después del movimiento en cada uno de los factores.

En el mercado de valores colombiano actualmente existen dos entidades encargadas de proveer al mercado curvas de rendimientos para diferentes clases de activos financieros entre los que se puede encontrar: deuda corporativa indexada a IPC, DTF, IBR y Tasa

Fija, deuda pública en pesos, deuda pública en UVRs y bonos pensionales. Sin embargo, a pesar de la variedad de productos que ofrece el mercado colombiano para la negociación en títulos de renta fija, la deuda pública representa aproximadamente 90%³ del volumen negociado en el mercado de renta fija local. Esta notable participación hace más interesante el análisis de la curva de rendimientos de deuda pública pues describe gran parte del comportamiento del mercado de valores colombiano. La deuda pública corresponde a bonos emitidos por el Gobierno, en el caso colombiano estos bonos se denominan TES y para el desarrollo de este artículo se utilizará la información correspondiente a los TES tasa fija en pesos.

En este documento se realizará la implementación del modelo afin propuesto por Balduzzi, Pierluigi, Sanjiv R. Das, Silverio Foresi, and Rangarajan K. Sundaram [1996]. Los objetivos de la implementación son:

- Estimar los factores propuestos por los autores en el mercado de deuda pública colombiano y encontrar su evolución desde enero de 2010 hasta mayo de 2015.
- Establecer la relación o dependencia de los factores estimados por medio de un análisis de correlaciones
- Determinar cuál es el impacto de cada uno de los factores estimados en el comportamiento de las tasas de rendimiento de los TES para diferentes plazos al vencimiento.
- Estimar la estructura a plazo de las tasas de interés para el mercado de deuda pública colombiano e identificar la relación de cada uno de los factores estimados con los encontrados por Litterman y Scheinkman [1991]

El documento está dividido de la siguiente manera: esta primera Sección usada como introductoria, en la Sección 2 se lleva a cabo una revisión de literatura enfocada a modelos afines y literatura de la estructura a plazos de Colombia, en la Sección 3 se realiza una explicación de los modelos Afines, en la Sección 4 se describe el modelo usado en la estimación, en la Sección 4 se presenta la estimación y los resultados obtenidos y la Sección 5 concluye.

³ Cálculos propios con información de volúmenes negociados en BVC y SEN desde el 02/01/15 hasta el 20/05/15.

2. Revisión de Literatura

La literatura asociada a modelos afines comienza con los modelos de un factor donde la curva de rendimientos está completamente determinada por la tasa corta. En este grupo de modelos se encuentra Vasicek [1977], Cox-Ingersoll-Ross [1985] y Hull y White [1990].

Un bajo desempeño de los modelos de un factor al representar las tasas de largo plazo de la curva de rendimientos, produjo el desarrollo de modelos de dos factores. El segundo factor escogido varía de acuerdo a los autores, entre los más utilizados se puede encontrar los modelos de media estocástica que incorporan la media de largo plazo de la tasa corta como segundo factor. En este grupo de modelos se encuentra Balduzzi, Bertola, and Foresi [1993], Naik and Lee [1993], y Balduzzi, Das, Foresi y Sudamaram [1996]. Los modelos de volatilidad estocástica también se encuentran en la literatura de dos factores. En este caso se incorpora la volatilidad de la tasa corta como segundo factor. En este grupo de modelos se encuentra Longstaff y Schwarts [1993] y Fong, Vasicek y Yoo [1992]. Algunas otras variables escogidas como segundo factor son la inflación, duración y spread de tasas de largo y corto plazo.

Finalmente, se encuentra en la literatura los modelos de tres factores que utilizan combinaciones de los factores anteriormente mencionados para conformar el modelo. Entre los modelos más utilizados de tres factores se encuentran los que utilizan la tasa corta, la media de largo plazo de la tasa corta y la volatilidad de la tasa corta como los factores que componen el modelo. Este esquema en particular es el que desarrollaremos a lo largo de este documento. Entre este grupo de modelos se encuentra Balduzzi et al [1996], Chen [1996] y Dai y Singleton [2000].

La literatura encontrada sobre la estructura a plazo de las tasas de interés aplicada a Colombia se enfoca en la estimación de la curva de rendimientos, la relación que tiene esta con diferentes variables macroeconómicas y el uso de esta para identificar cambios futuros en el ambiente económico. A continuación se mencionan algunos de los estudios realizados sobre este tema.

Arango, Melo y Vásquez [2002] estiman la estructura a plazo de las tasas de interés utilizando el método de Nelson y Siegel, haciendo una referencia a la desagregación de

la tasa spot como una suma entre las expectativas de tasa de interés y una prima de riesgo utilizando la ecuación de Euler.

Arango, Flórez y Arosemena [2004] utilizan la información contenida en la estructura a plazo de las tasas de interés, para predecir cambios esperados en el ambiente económico futuro. Para tal efecto, utilizan el spread de las tasas de interés nominales y el diferencial de inflación.

Arango, León, González y Melo [2006] estiman el impacto que tienen los movimientos de las tasas de intervención del Banco de la República en la estructura a plazo de tasas de interés planteando una regresión lineal entre las variaciones de la tasa de los títulos y la tasa de intervención del Banco Central.

Melo y Granados [2010] estiman el BEI (Breik even inflation) a partir de los rendimientos de los TES en pesos y los TES en UVRs y lo descomponen en dos factores, expectativas promedio de inflación y prima por riesgo inflacionario.

Espinosa, Gómez, Melo y Moreno [2015] analizan la relación entre la prima por plazo de los bonos del gobierno de Estados Unidos con las de Brasil, Colombia, México y Perú. Buscando identificar el efecto del posible cambio en las primas por plazo en los Estados Unidos en las primas por plazo de los bonos de los gobiernos latinoamericanos anteriormente mencionados.

3. Modelos Afines

El modelo que se implementará en el documento corresponde a un modelo afín de tasas de interés, por esta razón, en esta Sección se explicará que es un modelo afín y se realizará una comparación de los resultados obtenidos por la implementación de componentes principales en tasas de interés y los resultados obtenidos por la implementación de modelos afines en las tasas de interés.

En este documento se utilizará el concepto modelo afín para describir cualquier modelo libre de arbitraje en el cual el rendimiento de un bono es afín (constante – lineal)

función de un vector de estado x .⁴ La tasa de rendimiento de un bono (Y_τ) puede ser representada de la siguiente manera:

$$Y_\tau = A(\tau) + B(\tau)^T x$$

En esta fórmula $A(\tau)$ y $B(\tau)$ sólo dependen del tiempo al vencimiento (τ) y el vector de estado incorpora los factores que se desean incluir en el modelo. Como se mencionó en la Sección 2, el modelo que se desarrollará en este artículo corresponde a un modelo donde el vector de estado incorpora 3 factores: la tasa corta, la media de la tasa corta y la volatilidad de la tasa corta.

En un modelo de estructura a plazos afín se asume una forma funcional para modelar la curva de rendimientos y esto permite obtener fórmulas de valoración más flexibles que facilitan la implementación computacional. Los supuestos sobre la forma funcional se realizan sobre el vector de estado bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo Q^* , la forma funcional es afín para todos los factores que componen el vector de estado.

En el caso de los modelos de media estocástica el vector de estado está compuesto por $x = (r, \theta)$, donde r representa la tasa corta y θ representa la media de largo plazo de la tasa corta. En estos modelos, r revierte a su media de largo plazo θ . En el caso de los modelos de volatilidad estocástica el vector de estado está compuesto por $x = (r, v)^T$, donde r representa nuevamente la tasa corta y v representa la volatilidad de la tasa corta. Combinación de estas dos clases de modelos llevan al desarrollo de los modelos de tres factores en los que el vector de estado está compuesto por $x = (r, \theta, v)$, modelo que se desarrollará a lo largo del documento.

Un concepto importante es el de factores latentes, en este caso el vector de estado x no se puede observar directamente pero es posible inferirlo de los rendimientos de las tasas de la tasa corta. Es importante en este documento porque tanto la tasa de largo plazo de la tasa corta y la volatilidad de la tasa corta en el modelo de Balduzzi, Pierluigi, Sanjiv R. Das, Silverio Foresi, and Rangarajan K. Sundaram [1996] son concebidos como factores latentes y la tasa corta es observada.

⁴⁴ Definición tomada de Piazzesi, Monika. "Affine Term Structure Models". Department of Economics, Stanford CA, pp. 693.

Monika Piazzesi en el documento *Affine Term Structure Models*, expone las similitudes que existen entre los resultados obtenidos por medio de componentes principales aplicados a las tasas de rendimiento de los bonos y los factores latentes estimados en los modelos afines. En el caso de componentes principales se ha encontrado que gran parte de la varianza de los cambios en los rendimientos es explicado por los primeros componentes, específicamente por los tres primeros. En este caso se vuelve a encontrar una relación de los componentes con los resultados obtenidos por Litterman y Scheinkman [1991], el componente principal asociado al nivel, el segundo componente a la pendiente y el tercero a la curvatura. En general, se ha encontrado en diferentes modelos afines con diferentes especificaciones, para diferentes periodos de tiempo y datos que los factores estimados tienen un patrón que se puede relacionar con los resultados obtenidos por medio del análisis de componentes principales.

4. Modelo Usado en la Estimación

El modelo utilizado para la estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en el mercado de deuda pública colombiano en este documento fue desarrollado por Pierluigi Balduzzi, Sanjiv Ranjan Das, Silverio Forensi, y Rangarajan Sundaram en el artículo “A Simple Approach to Three-Factor Affine Term Structure Models” del año 1996.

Se utilizará un modelo afín exponencial de tres factores para la estimación. Los tres factores en el modelo son: la tasa de interés de corto plazo, la media de largo plazo de la tasa de interés de corto plazo y la volatilidad de la tasa de interés de corto plazo.

Aunque el modelo incorpore tres factores, para aproximar la estimación del modelo multifactorial se utilizará una única ecuación de máxima verosimilitud que es posible obtener por la solución del modelo afín.

Se especifican las ecuaciones para los tres factores:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sqrt{V}dz \quad (1)$$

$$d\theta = \alpha(\beta - \theta)dt + \eta dw \quad (2)$$

$$dV = a(b - V)dt + \varphi\sqrt{V}dy \quad (3)$$

Donde r representa la tasa de interés de corto plazo, θ representa la media y V la volatilidad. k , α y a representan los coeficientes de regresión a la media, β representa el nivel medio de θ y b representa el nivel medio de V . Los coeficientes de volatilidad de la media y la volatilidad son η y ϕ . Por su parte dz , dw y dy son procesos de Wiener que pueden estar correlacionados.

$$\begin{aligned} dz dy &= \rho dt \\ dz dw &= 0 \\ dw dy &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

En este caso las innovaciones de la tasa de interés de corto plazo y la volatilidad están correlacionados y las innovaciones de la media de largo plazo son independientes.

Dado que ninguno de estos factores es directamente observado en el mercado es necesario introducir primas de riesgo para cada uno como argumentos de equilibrio estándar. Estas primas de riesgo hacen referencia al rendimiento adicional requerido por cada uno de los factores por riesgo adicional asumido. Se denotan las primas de riesgo de la siguiente manera λ_r , λ_θ y λ_V

Se define el precio del bono $P(r, \theta, V)$ como una función de los tres factores y del tiempo al vencimiento τ . Utilizando los subíndices como derivadas, se puede escribir la ecuación diferencial parcial del precio del bono como:

$$\begin{aligned} 0 = & [\kappa(\theta - r) - \lambda_r V]P_r + 0.5VP_{rr} + [\alpha(\beta - \theta) - \lambda_\theta \eta]P_\theta + 0.5\eta^2 P_{\theta\theta} \\ & + [a(b - V) - \lambda_V V]P_V + 0.5\phi^2 VP_{VV} + \rho\phi VP_{rV} - P_\tau - rP \end{aligned} \quad (5)$$

Se plantea la solución para el precio del bono:

$$P(r, \theta, V, \tau) = A(\tau) * \exp[-rB(\tau) - \theta C(\tau) - VD(\tau)] \quad (6)$$

Tomando las derivadas y reemplazando en (5) obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 = & r[\kappa AB + AB_\tau - A] + \theta[-\kappa AB + \alpha AC + AC_\tau] \\ & + V[\lambda_r AB + 0.5AB^2 + aAD + 0.5\phi^2 AD^2 + \rho\phi ABD + AD_\tau + \lambda_V AD] \\ & + [-\alpha\beta AC + 0.5\eta^2 AC^2 - abAD - A_\tau + \lambda_\theta AC] \end{aligned}$$

(7)

Para obtener la solución de (7) los cuatro términos en paréntesis deben ser iguales a cero. Las solución para $A(\tau), B(\tau), C(\tau)$ y $D(\tau)$ de (6) se encuentra integrando el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
 0 &= \kappa B + B_\tau - 1 \\
 0 &= -\kappa B + \alpha C + C_\tau \\
 0 &= \lambda_r + 0.5B^2 + aD + 0.5\phi^2 D^2 + \rho\phi BD + D_\tau + \lambda_v D \\
 0 &= -\alpha\beta C + 0.5\eta^2 C^2 - abD - \left(\frac{A_\tau}{A}\right) + \lambda_\theta C
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Las condiciones de frontera que aseguran que $P(r, \theta, V, \tau = 0) = 1$ son

$$\begin{aligned}
 A(0) &= 1 \\
 B(0) &= 0 \\
 C(0) &= 0 \\
 D(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Es posible obtener la solución explícita para $B(\tau)$ y $C(\tau)$

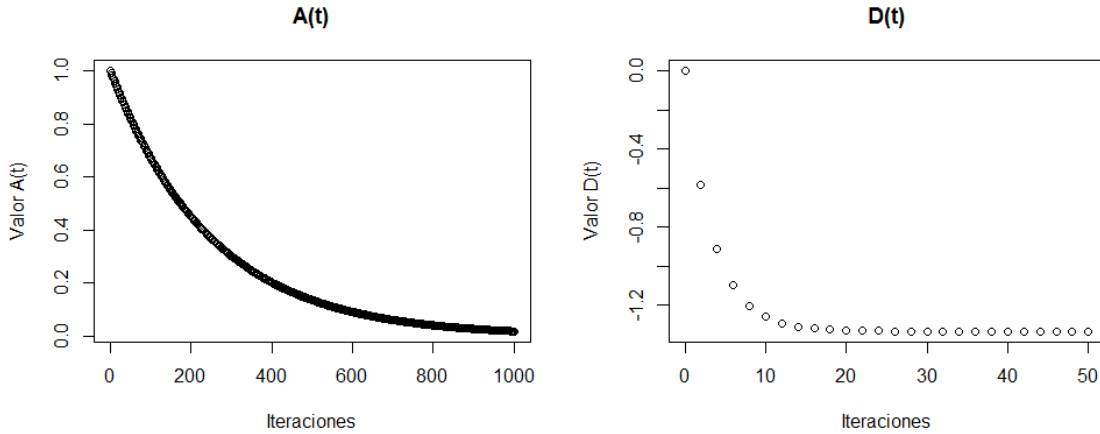
$$\begin{aligned}
 B(\tau) &= \frac{1 - \exp(-\kappa\tau)}{\kappa} \\
 C(\tau) &= \frac{(1 - \exp(-\kappa\tau)) + \frac{\kappa}{\alpha} \exp(-\alpha\tau)(1 - \exp(-\alpha\tau))}{\alpha - \kappa}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Para encontrar la solución a para $A(\tau)$ y $D(\tau)$ es necesario implementar un método numérico. Se utilizó el Método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales. Este procedimiento se realizó en el programa R haciendo uso del paquete deSolve y la función rk4. En la Figura 2 se muestra el proceso de convergencia del método para la aproximación en los dos casos.

La curva de rendimientos se define como:

$$Y(r, \theta, v, \tau) = \frac{-\log [P(r, \theta, v, \tau)]}{\tau} \quad (11)$$

Figura 2



Cálculos propios

Para implementar el modelo es necesario estimar los procesos de los tres factores. En este documento se asumirá la tasa de 30 días de los TES tasa fija en pesos como una buena aproximación para la tasa de interés de corto plazo, el factor de volatilidad se obtendrá asumiendo que esta sigue un proceso GARCH y θ se obtendrá a partir de los precios observados de los TES usando la forma funcional de la solución del precio del bono de la siguiente manera:

$$\theta = \frac{\log(A) - \log(P) - rB - VD}{C}$$

$$\theta = \gamma_0 + \gamma_1 \log(P_{t-1}) + \gamma_2 r_{t-1} + \gamma_3 V_{t-1}$$

(12)

Donde $\gamma_0 = \left[\frac{\log(A)}{C} \right]$, $\gamma_1 = \frac{-1}{C}$, $\gamma_2 = \frac{-B}{C}$ y $\gamma_3 = \frac{-D}{C}$. Estos coeficientes son constantes para cada τ .

Teniendo en cuenta estas especificaciones es necesario estimar el siguiente sistema de ecuaciones:

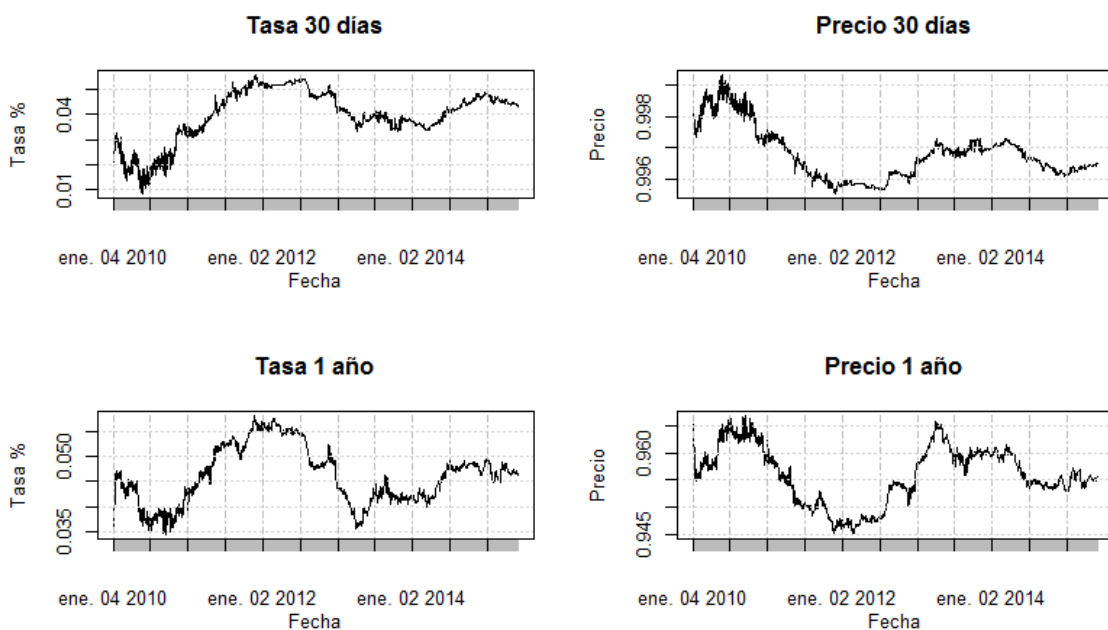
$$\begin{aligned}
 r_{t+1} &= r_t + k(\theta_t - r_t)\Delta_t + \varepsilon_{t+1} \\
 \varepsilon_{t+1} &\sim N(0, V_t) \\
 V_t &= \beta_0 + \beta_1 V_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_t^2 \\
 \theta_t &= \gamma_0 + \gamma_1 \log(P_{t-1}) + \gamma_2 r_{t-1} + \gamma_3 V_{t-1}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

El sistema de ecuaciones (12) se estimará usando máxima verosimilitud adoptando el algoritmo de Berndt, Hall, Hall y Hausman.

5. Estimación y Resultados

Los datos utilizados en la implementación del modelo multifactorial consiste en tasas y precios cero cupón⁵ de los TES tasa fija en pesos a 30 días y 1 año con periodicidad diaria. Esta información fue obtenida del proveedor de precios Infovalmer de la curva CEC en pesos para el periodo enero 2010 – mayo 2015.

Figura 3



Fuente: Infovalmer, Cálculos propios

⁵ Un bono cero cupón tiene un pago final, usualmente normalizado a 1, sin pagar cupones intermedios.

La tasa de los TES a 30 días para el periodo analizado aumentaron desde niveles promedio de 2.81% en enero de 2010, a niveles de 4.49% promedio en mayo de 2015. El principal periodo de desvalorización observado corresponde a mayo 2010-noviembre 2011. El máximo alcanzado de las tasas de 30 días fue 5.56% en noviembre de 2011 y el mínimo 0.87% en mayo del 2010. Por su parte, la tasa de los TES a 1 año para el periodo analizado aumentaron levemente desde niveles promedio de 4.38% en enero de 2010, a niveles de 4.69% promedio en mayo de 2015. En esta serie se identificó un fuerte periodo de desvalorización octubre 2010 – febrero 2013 seguido de uno de valorización junio 2012- abril 2013 volviendo a niveles anteriores al inicio de la subida de tasas. El máximo alcanzado de las tasas de 1 año fue 5.83% en noviembre de 2011 y el mínimo 3.42% en septiembre del 2010. El análisis de las series de precios es equivalente al realizado para las series de las tasas.

Del resultado de la estimación se obtendrán los parámetros necesarios para la construcción de los procesos de la tasa de corto plazo (r), la media de largo plazo de la tasa de corto plazo (θ) y la volatilidad de la tasa de corto plazo (V). Se asumirá la tasa de 30 días de los TES tasa fija en pesos como una buena aproximación para la tasa de interés de corto plazo y se utilizará la tasa de un año para estimar el proceso de la media de largo plazo.

Para la estimación de θ y V es necesario encontrar los coeficientes $\kappa, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ por medio de la estimación de máxima verosimilitud del sistema de ecuaciones (13). Este procedimiento se realizó en el programa R haciendo uso de la función `maxLik` y especificando como método de maximización BHHH (Berndt-Hall-Hall-Hausman)⁶. Los resultados de la estimación se muestran en la Tabla 1.

⁶ Ver Berndt, E., B. Hall, R. Hall, and J. Hausman. *Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models*. Annals of Economic and Social Measurement, , pp. 653-665, 1974.

Tabla 1

Parámetro	Estimado	Modelo Original
κ	0.1054	3.3797
γ_0	0.0018	0.0033
γ_1	- 0.0000	0.4697
γ_2	0.9520	- 0.4094
γ_3	0.3934	14.4293
β_0	-	-
β_1	0.9861	0.7766
β_2	0.0737	0.2335

Cálculos Propios

El resultado de la estimación se encuentra en la Tabla 1 en la columna “Estimado”, los parámetros que hacen parte del proceso de θ indican que las variables que mayor incidencia tienen en el comportamiento de θ son la tasa de corto plazo y la volatilidad del periodo anterior. Para los estimadores asociados a estas dos variables γ_2 y γ_3 respectivamente, se obtuvieron resultados positivos y en el caso de γ_2 un valor muy cercano a 1. Contrario a esto, para el parámetro γ_1 se obtuvo un estimador muy cercano a 0, indicando que el $\log(P_{t-1})$ no incide de manera contundente en el comportamiento de θ .

En el caso de la estimación de los parámetros del proceso de volatilidad se obtuvieron valores positivos para $\beta_{0,1,2}$ como se esperaba. Adicional a esto, se identificó que el componente que mayor incidencia tiene en la volatilidad actual es la volatilidad del periodo anterior con un coeficiente estimado muy cercano a 1.

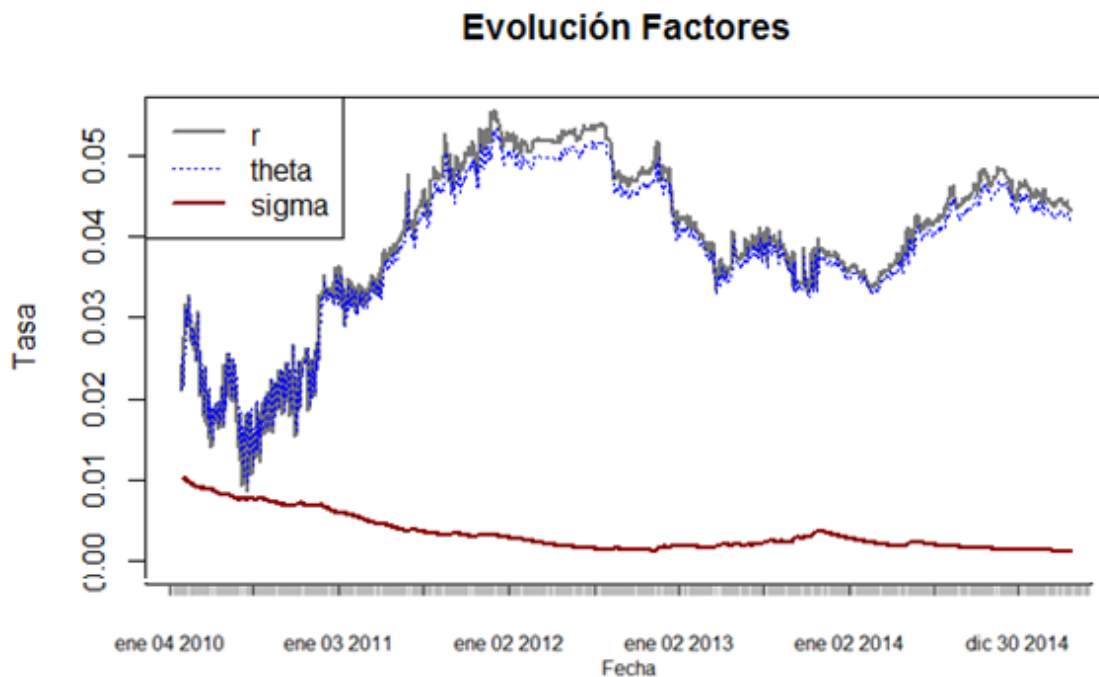
En la columna “Modelo Original” de la Tabla 1 se encuentran los resultados del modelo aplicado por Pierluigi Balduzzi, Sanjiv Ranjan Das, Silverio Forensi, y Rangarajan Sundaram en el artículo “A Simple Approach to Three-Factor Affine Term Structure Models” del año 1996 a las tasas de los Tesoros. Con respecto al ejercicio realizado en los TES se encontró que la tasa de reversión a la media de los Tesoros es mayor que la de los títulos de deuda pública colombiana. Con respecto al proceso de la volatilidad los valores de los estimadores obtenidos en los dos ejercicios son similares $\beta_1 > \beta_2$ y $\beta_0 = 0$. En el proceso de la media se encontró que γ_0 en los dos ejercicios es muy cercano a cero, γ_1 en el ejercicio aplicado a los TES es muy cercano a cero y para el ejercicio realizado con los tesoros se encontró un valor de 0.46, γ_2 para el ejercicio realizado en los TES se ubicó en 0.95 contrario al encontrado en el ejercicio de los

Tesoros donde este parámetro es negativo con un valor de -0.40. Finalmente, en el estimador de γ_3 se encontró la principal diferencia en los dos modelos. Para el caso de los TES el estimador obtenido fue 0.39 y en el caso de los Tesoros este se ubicó en 14.42.

Los valores de los parámetros $\kappa, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ permiten construir los procesos de θ y v haciendo uso de las ecuaciones de cada uno de estos en el sistema (12). La serie de los factores r, θ y v para el periodo enero 2010 – mayo 2015 se muestran en la Figura 4.

Como era de esperarse se encontró que la tasa de corto plazo (línea gris) tiene un comportamiento cercano de su media de largo plazo (línea azul). Sin embargo, desde el año 2011 la tasa de corto plazo se ha ubicado levemente por encima de su media de largo plazo con un spread más pronunciado a mitad del año 2012.

Figura 4



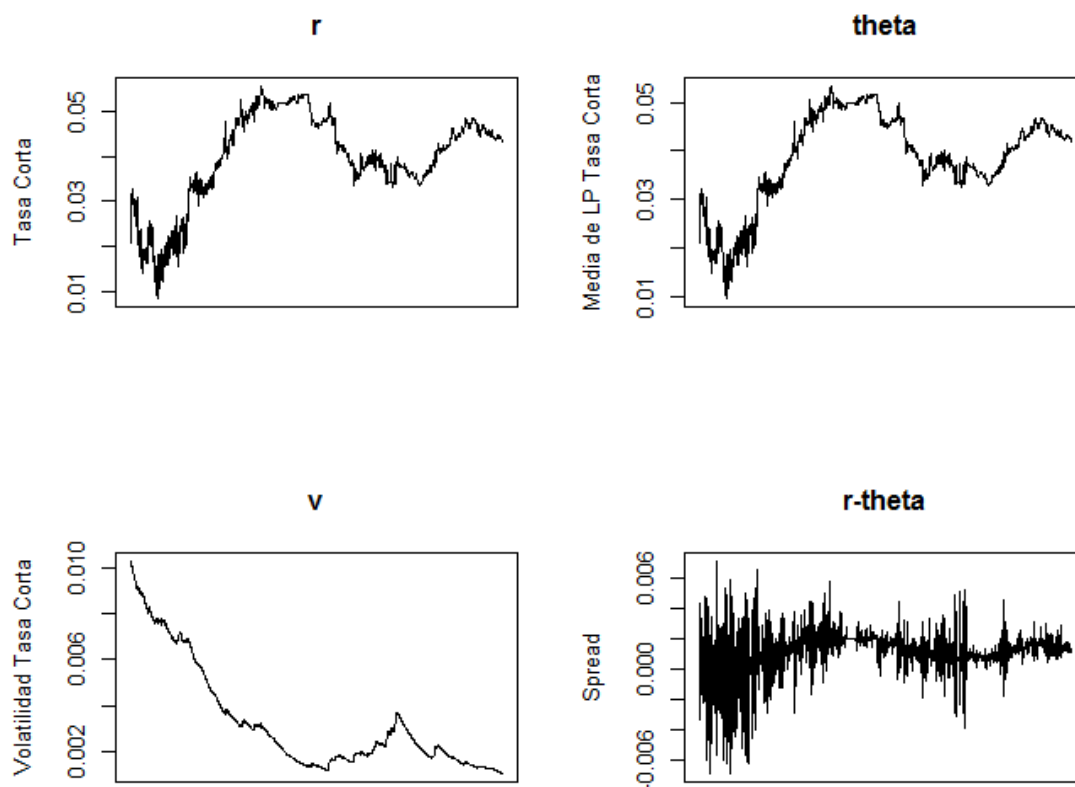
Cálculos propios

En la Figura 5 se encuentra la evolución de cada uno de los factores para el periodo de análisis y el spread entre la tasa corta y su media de largo plazo. En este grupo de gráficas es posible observar mejor el comportamiento de la serie de la volatilidad de la tasa de corto plazo.

Por su parte, el proceso de volatilidad para el periodo analizado se ha mantenido en niveles bajos, mostrando una tendencia negativa. En enero de 2010 el proceso de volatilidad se ubicaba en niveles del 1% y para mayo del 2015 el proceso se ubica en 0.1%, el periodo de mayor nivel del proceso de volatilidad estimado coincide con el periodo de mayor volatilidad presentado por las series de tasas a 30 días y 1 año.

En el spread entre la tasa corta y su media de largo plazo se observa un comportamiento alrededor de cero. Sin embargo, como se observó en la Figura 4 la tasa corta se ha ubicado por encima de su media de largo plazo desde el año del 2011 y esta tendencia hoy se mantiene.

Figura 5



Cálculos propios

En la Tabla 2 se encuentran las principales estadísticas descriptivas de los procesos estimados y de las variaciones de cada uno de los factores. Como era de esperarse, la media de los procesos de r y θ son muy cercanas con valores de 3.97% y 3.86%

respectivamente, también era un resultado esperado que la media de r se encontrara por encima de la media de θ debido al comportamiento que se ha observado de estas dos series desde el año 2011. Adicionalmente, dado que r fluctúa alrededor de θ se puede observar en este caso particular que el valor de θ está delimitado por los valores del proceso de r y por lo tanto $\theta_{min} > r_{min}$ y $\theta_{max} < r_{max}$. En el caso de la volatilidad se reitera los bajos niveles presentados en este factor.

Tabla 2

	r	θ	v	dr	$d\theta$	dv
min	0.00857	0.00976	0.00000	- 0.49029	- 0.41527	- 0.01405
max	0.05567	0.05336	0.00010	0.53881	0.45878	0.21540
range	0.04709	0.04360	0.00010	1.02909	0.87405	0.22944
sum	52.40467	50.89732	0.02115	0.58165	0.51884	- 4.56941
median	0.04106	0.03981	0.00001	0.00010	0.00010	- 0.01215
mean	0.03970	0.03856	0.00002	0.00044	0.00039	- 0.00346
var	0.00010	0.00009	0.00000	0.00450	0.00365	0.00061

Cálculos Propios

En la Tabla 3 se muestra la correlación existente entre los cambios de los tres factores estimados dr , $d\theta$ y dv . Se encontró que movimientos en la tasa de corto plazo tiene una correlación cercana a uno con movimientos en la media de largo plazo de la tasa de corto plazo. Por otra parte, se encontró un coeficiente negativo entre cambios en la volatilidad y cambios en los otros dos factores θ y r .

Tabla 3

	dr	$d\theta$	dv
dr	1.0000	0.9901	- 0.7910
$d\theta$	0.9901	1.0000	- 0.7912
dv	- 0.7910	- 0.7912	1.0000

Cálculos Propios

Ya se ha realizado un análisis de los resultados obtenidos en la estimación de los tres factores, ahora, se busca identificar la importancia que tiene cada uno de estos en el comportamiento de las tasas cero cupón de los TES para diferentes vencimientos. Con este objetivo se realizó la siguiente regresión:

$$Y_{\tau t} = \alpha_{\tau 0} + \alpha_{\tau 1} r_t + \alpha_{\tau 2} \theta_t + \alpha_{\tau 3} v_t + \varepsilon_t \quad (14)$$

Donde $Y_{\tau t}$ corresponde a la tasa vencimiento de los TES tasa fija en pesos para $\tau = \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, 1, 2, 3, 4, 5, 10$ y 20. Los vencimientos están expresados en años y el

ejercicio se realizó con datos de la curva CEC de Infovalmer para el periodo enero 2010-mayo 2015. Los resultados de la regresión se pueden observar en la Tabla 4.

Se encontró que los principales factores que determinan las tasas de los TES son: en el corto plazo r y en el largo plazo v . Por su parte el coeficiente de θ va aumentando a medida que el plazo al vencimiento se incrementa, pero para ningún vencimiento se encontró que fuera el principal determinante del comportamiento de las tasas.

Tabla 4

vencimiento (Años)		$\alpha 0$	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$
2/12	Estimate	0.000876	0.9298009	0.0481734	0.1704196
	t value	8.592	117.059	5.607	20.241
	Pr(> t)	< 2e-16	< 2e-16	2.51E-08	< 2e-16
3/12	Estimate	0.0017637	0.8673076	0.0890319	0.3383512
	t value	9.469	59.765	5.672	21.996
	Pr(> t)	< 2e-16	< 2e-16	1.74E-08	< 2e-16
4/12	Estimate	0.0026482	0.8094695	0.1259427	0.504112
	t value	10.327	40.515	5.828	23.803
	Pr(> t)	< 2e-16	< 2e-16	7.06E-09	< 2e-16
5/12	Estimate	0.0035257	0.7577225	0.1573887	0.6663889
	t value	11.111	30.648	5.885	25.428
	Pr(> t)	< 2e-16	< 2e-16	5.04E-09	< 2e-16
6/12	Estimate	0.004414	0.71034	0.184767	0.824708
	t value	11.928	24.64	5.925	26.989
	Pr(> t)	< 2e-16	< 2e-16	3.98E-09	< 2e-16
1	Estimate	0.0095157	0.5002415	0.2874033	1.7199431
	t value	15.603	10.528	5.592	34.149
	Pr(> t)	< 2e-16	< 2e-16	2.73E-08	< 2e-16
2	Estimate	0.0176986	0.309818	0.3306009	3.0295439
	t value	18.409	4.136	4.08	38.157
	Pr(> t)	< 2e-16	0.0000376	0.0000477	< 2e-16
3	Estimate	0.023651	0.248383	0.305333	3.843929
	t value	19.977	2.693	3.06	39.314
	Pr(> t)	< 2e-16	0.00718	0.00226	< 2e-16
4	Estimate	0.02798	0.235485	0.269211	4.325375
	t value	21.502	2.323	2.455	40.247
	Pr(> t)	<2e-16	0.0204	0.0142	<2e-16
5	Estimate	0.031295	0.238342	0.238487	4.587131
	t value	23.001	2.248	2.08	40.823
	Pr(> t)	<2e-16	0.0247	0.0377	<2e-16
10	Estimate	0.041015	0.239783	0.20445	4.573808
	t value	27.827	2.088	1.646	37.576
	Pr(> t)	<2e-16	0.037	0.1	<2e-16
20	Estimate	0.051035	0.152049	0.264068	3.59737
	t value	27.879	1.066	1.712	23.795
	Pr(> t)	<2e-16	0.2866	0.0872	<2e-16

Cálculos Propios

Hasta el plazo al vencimiento de 5 meses se encontró que la tasa de corto plazo es el factor que mayor incidencia tiene en el comportamiento de las tasas de los TES, seguido por la volatilidad y finalmente por la media de largo plazo. Hasta este plazo, los

coeficientes α_0 y α_1 asociados a r y θ respectivamente son significativos. Para el caso del coeficiente α_3 asociado a v resultó significativo para los plazos 2, 3, 4 y 5 meses.

A medida que el plazo al vencimiento aumenta, la importancia del factor de la tasa de corto plazo va disminuyendo progresivamente, mientras la importancia del factor de la volatilidad va aumentando. Para el caso del factor de la media, la importancia de este factor aumenta hasta el plazo de 3 años y luego disminuye levemente, pero como se mencionó anteriormente en ningún plazo se encontró que esta fuera el factor con mayor importancia para explicar el comportamiento de las tasas de los TES.

Desde el plazo de 6 meses en adelante el factor que tuvo una mayor importancia para explicar el comportamiento de las tasas de los TES fue la volatilidad, seguido en la mayoría de los casos por la tasa de corto plazo y finalmente por la media de largo plazo. Se encontró que para los tres factores y los plazos al vencimiento superiores o iguales a 6 meses, todos los coeficientes estimados resultaron significativos.

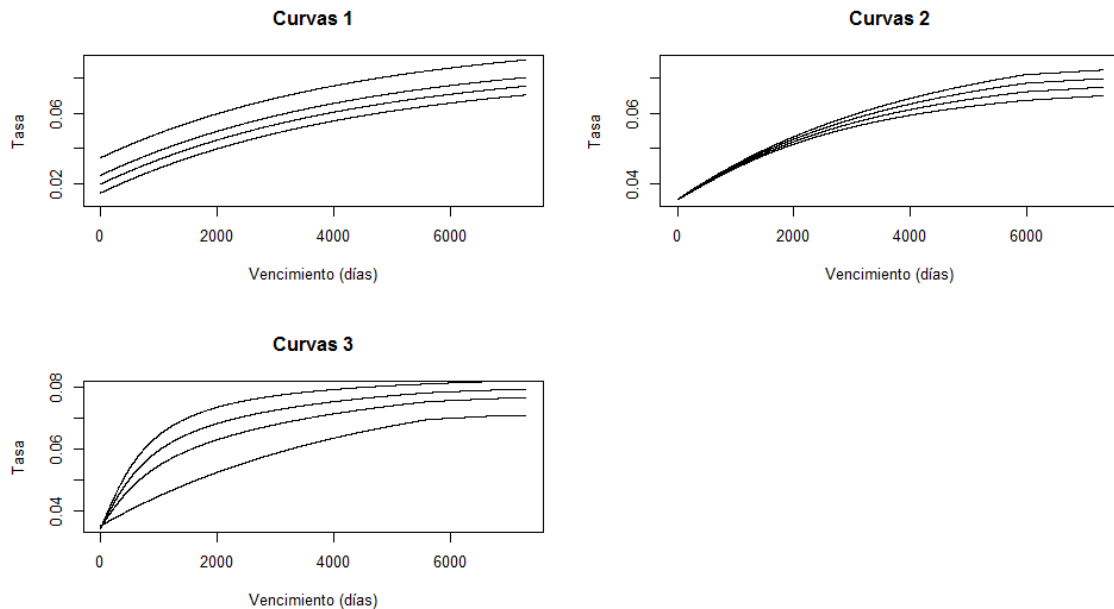
Los resultados obtenidos en la regresión se asemejan a los resultados encontrados por Pierluigi Balduzzi, Sanjiv Ranjan Das, Silverio Forensi, y Rangarajan Sundaram en el artículo “A Simple Approach to Three-Factor Affine Term Structure Models” del año 1996 aplicado a las tasas de los Tesoros. En este artículo se encontró que la tasa de corto plazo es el principal determinante del comportamiento de las tasas de los tesoros en el corto plazo y que a medida que el plazo al vencimiento aumenta el factor de la volatilidad se convierte en el de mayor incidencia en el comportamiento de las tasas.

Para entender cuál es el efecto que produce un cambio en el nivel de r , θ y v en la curva de rendimientos, se construyeron las curvas haciendo uso de la ecuación (11) para diferentes niveles de cada uno de los factores. Los resultados se pueden encontrar en la Figura 6.

La gráfica de la esquina superior izquierda (Curvas 1) se construyó para diferentes niveles de r , en este caso para $r = 1.47\%$, 1.97% , 2.47% y 3.47% manteniendo los otros parámetros constantes. Se encontró que a medida que r aumentaba la curva se desplazaba para arriba de forma paralela y cambiaba el intercepto con el eje y. Este movimiento se puede asociar a un cambio en el nivel de la curva de rendimientos como se explicó en la introducción del presente artículo. Intuitivamente se puede pensar que

dado que r hace referencia a la tasa de corto plazo marca el origen de la curva y define el nivel de esta.

Figura 6



cálculos propios

La gráfica de la esquina superior derecha (Curvas 2) se construyó para diferentes niveles de θ , en este caso $\theta = 3.85\%, 3.95\%, 4.05\%$ y 4.15% manteniendo los otros parámetros constantes. Se encontró que a medida que θ aumentaba los rendimientos de largo plazo se desplazaban hacia arriba en mayor proporción que los rendimientos de corto plazo, aumentando el diferencial de los puntos de largo plazo y corto plazo. Este movimiento corresponde a un cambio en la pendiente de la curva de rendimientos. En este caso particular, un aumento en el factor θ provoca un empinamiento de la curva de rendimientos. Intuitivamente, como θ representa la media de largo plazo de la tasa de interés de corto plazo, un cambio en este factor afecta la parte larga de la curva pero no tiene mayor incidencia en la parte corta y media.

Finalmente, la gráfica de la esquina inferior izquierda (Curvas 3) se construyó para diferentes niveles de v , en este caso $v = 0.7\%, 0.8\%, 0.9\%$ y 1% manteniendo los otros parámetros constantes. Se encontró que a medida que v aumentaba los rendimientos de la parte media de la curva se desplazaban hacia arriba en mayor proporción que los rendimientos de corto y largo plazo. Este movimiento corresponde a un cambio en la

curva de rendimientos. En este caso particular, un aumento en el factor v provoca un aumento en la curvatura de la curva de rendimientos. El efecto de la volatilidad tiene un efecto mayor en los rendimientos de mediano plazo con respecto al efecto en el corto y largo plazo.

6. Conclusiones

Con la aplicación en Colombia del modelo propuesto por Pierluigi Balduzzi, Sanjiv Ranjan Das, Silverio Forensi, y Rangarajan Sundaram en el artículo “A Simple Approach to Three-Factor Affine Term Structure Models” se estimaron los factores r, θ y v y su evolución desde el año 2010. Se obtuvo un resultado coherente al encontrar que r fluctúa alrededor de su media de largo plazo (θ) y que la volatilidad (v) presenta niveles bajos en línea con los niveles de volatilidad presentados por las series de las tasas a 30 días y a 1 año utilizados en la implementación del modelo.

Las correlaciones entre los factores mostraron lo siguiente: cambios en r tienen correlación positiva muy cercana a 1 con cambios en θ y cambios en v tienen una correlación negativa con r y θ . Esto implica que un aumento en r está relacionado con un aumento en casi la misma magnitud de θ y que un aumento en la volatilidad (v) esta relacionado con una disminución en los niveles de r y θ .

El impacto que tiene cada uno de los factores para determinar el comportamiento de las tasas fue calculado para diferentes plazos por medio de una regresión. En este caso, se encontró que el principal determinante del comportamiento de las tasas de corto plazo de los TES es r y que su relevancia va disminuyendo a medida que aumenta el plazo al vencimiento. En el caso del comportamiento de las tasas de largo plazo se encontró que el factor determinante es v . Para esta regresión se obtuvo estimadores significativos con algunas excepciones en el plazo 1/12.

Finalmente, al calcular las curvas de rendimiento para diferentes niveles de los tres factores (r, θ, v) se encontraron indicios gráficos de que cada uno de estos factores captura los diferentes componentes de la curva de rendimientos a los que se hicieron referencia en la introducción del presente artículo. En este caso particular, la tasa de interés de corto plazo proporciona el nivel de la curva, la volatilidad proporciona la curvatura y la media de largo plazo la pendiente.

Los resultados obtenidos en esta implementación con datos colombianos son similares a los obtenidos por Pierluigi Balduzzi, Sanjiv Ranjan Das, Silverio Foresi, y Rangarajan Sundaram en los Tesoros americanos, por lo tanto, la implementación de este modelo se puede realizar con diferentes series de títulos gubernamentales cero cupón para encontrar la descomposición factorial en el caso de diferentes países.

7. Bibliografía

Arango, L., L. Melo and D. Vasquez. *Estimación de la Estructura de las Tasas de Interés en Colombia*, 2002.

Arango, L., L. Flórez and A. Arosemena. *El Tramo Corto de la Estructura a Plazo Como Predictor de Expectativas de Actividad Económica en Colombia*, 2004.

Arango, L., A. González, J. León and L. Melo. *Cambios en la Tasa de Intervención y su Efecto en la Estructura a Plazo de Colombia*, 2006.

Balduzzi, P., G. Bertola, and S. Foresi. *A Model of Target Changes and the Term Structure of Interest Rates.* Working paper, New York University, 1993.

Balduzzi, P., S. Das, S. Foresi, and R. Sundaram. *Stochastic Mean Models of the Term Structure of Interest Rates.* Working paper, Harvard Business School, 1996.

Balduzzi, Pierluigi, Sanjiv R. Das, Silverio Foresi, and Rangarajan K. Sundaram. *A simple approach to three factor affine term structure models.* Journal of Fixed Income 6, 43–53, 1996.

Berndt, E., B. Hall, R. Hall, and J. Hausman. *Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models.* Annals of Economic and Social Measurement, , pp. 653-665, 1974.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross. *A theory of the Term Structure of Interest Rates.* Econometrica, pp. 385-407, 1985.

Chen, Lin. *Stochastic Mean and Stochastic Volatility – A Three factor Model of the Term Structure of Interest Rates and its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives.* Oxford, UK: Blackwell Publishers, 1996.

Dai, Qiang and Kenneth Singleton. *Specification analysis of affine term structure models.* Journal of Finance 55, pp. 1943-1978, 2000.

Engle Robert, Lilien David and Robins Russell. *Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model*. *Econometrica*, Vol. 55, No. 2 , 391-407, 1987.

Espinosa, J., J. Gomez, L. Melo and J. Moreno. *The International Transmission of Risk: Causal Relations Among Developed and Emerging Countries' Term Premia*, 2015.

Fong, G., O. Vasicek, and D. Yoo. *Omission Impossible*. *RISK*, Vol. 5,2, pp. 62-65, 1992.

Hamilton, J.D, *Time Series Analysis*. Princeton, New Jersey, 1994.

Hull, J., and A. White. *Pricing Interest-Rate Derivative Securities*. *Review of Financial Studies*, Vol. 3, 4, pp. 573-592.

Litterman, R., and J. Scheinkman. *Common Factors Affecting Bond Returns*. *Journal of Fixed Income*, pp. 54-61, 1991.

Longstaff, F.A., and E.S. Scharwartz. *Implementation on the Longstaff-Schwartz Interest Rate Model*. *Journal of Fixed Income*, pp. 7-14, 1993.

Naik, V., and M.H. Lee. *The Yield Curve and Bond Option Prices with Discrete Shifts in Economic Regimes*. Working paper, University of British Columbia, 1993.

Melo, L., and J. Granados. *Expectativas y Prima por Riesgo Inflacionario bajo una medida de Compensación a la Inflación*, 2010.

Piazzesi, Monika. *Affine Term Structure Models*. Department of Economics, Stanford CA

Vasicek, O. *An Equilibrium Characterization of the Term structure*. *Journal of Financial Economics*, pp. 177-188, 1977.