



UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

Modelos afines consistentes con aplicación en riesgos de longevidad: Sector Asegurador Colombiano

Rodrigo Cristancho Castellanos

Universidad del Rosario
Facultad Economía
Bogotá, Colombia
2017

Modelos afines consistentes con aplicación en riesgos de longevidad: Sector Asegurador Colombiano

Rodrigo Cristancho Castellanos

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Maestría en Finanzas Cuantitativas

Director:
Doctor Rafael Antonio Serrano Perdomo

Universidad del Rosario
Facultad Economía
Bogotá, Colombia
2017

Resumen

El objetivo del siguiente trabajo es estudiar modelos afines dinámicos que capturen la dinámica de mortalidad, permitiendo incorporar el riesgo de longevidad en la valoración y análisis de riesgo para contratos de seguros de vida en Colombia. A partir de lo anterior, se quiere proponer un modelo afín multifactorial de mortalidad para aplicaciones de riesgo de longevidad, bajo el marco de un modelo libre de arbitraje y con una expresión cerrada de la curva de supervivencia. Dentro del alcance del proyecto se usará una representación de estado espacio para la estimación de los parámetros del modelo usando un filtro de Kalman. Los datos de mortalidad que se usaran para la aplicación del modelo de 2 y 3 factores serán de Colombia.

Palabras clave: (Modelo de Mortalidad, Riesgo de longevidad, Multi-factor, Libre de Arbitraje, Afín, Consistente, Filtro de Kalman).

Abstract

The purpose of this Thesis, is to study affine dynamic models that capture the price and mortality dynamics, it would allow to introduce the longevity risk into the risk analysis and valuation for life contracts in Colombia. Taking that into account, it is shown a risk-free multi-factorial affine mortality model for longevity risk applications with a close expression of the survival probability curve. Within the scope of this document we will use a state space representation to estimate the model parameters using a Kalman Filter. Colombian mortality data is used to asses 2- and 3- factor implementation.

Keywords: (Mortality Model, Longevity Risk, Multi-factor, Affine, Arbitrage Free, Consistent, Kalman Filter)

Glosario

Cobertura: Compromiso aceptado por un asegurador en virtud del cual se hace cargo, hasta el límite de la suma asegurada, de las consecuencias económicas que se deriven de un siniestro.

Reserva: Es la cantidad determinada por la aseguradora, que considera necesaria para hacerle frente a las indemnizaciones que se le presentarán en un período determinado de tiempo. Es en otras palabras la cantidad que tiene estimada la compañía para el pago de los siniestros y que calcula mediante las matemáticas y el cálculo actuarial.

Base Técnica : Los cálculos actuariales dan lugar, para cada ramo o modalidad de seguro, a la determinación de la prima que aplican las entidades aseguradoras. Las bases técnicas deben estar suscritas por un actuario de seguros y están sujetas a la vigilancia de los organismos oficiales de supervisión de seguros privados.

Prima: Es el precio pactado por el seguro contratado. Es la remuneración que recibe la aseguradora para hacerle frente a los riesgos que está amparando en la póliza y es la contraprestación que está obligando a ambas partes a cumplir con lo establecido en el contrato.

Opciones de anualidad garantizada: Un tipo de opción que los rentistas pueden comprar para sus anualidades de jubilación. Esta opción específica otorga a los beneficiarios la capacidad de proteger sus inversiones de jubilación contra el riesgo de mercado a la baja permitiendo al beneficiario el derecho a retirar un porcentaje máximo de su inversión total cada año hasta que la cantidad de inversión inicial haya sido recuperada.

Portafolio de beneficios garantizados: Un portafolio compuesto de opciones con anualidad garantizada.

Contenido

Resumen	v
Abstract	v
Glosario	vi
1. Introducción	1
2. Curvas de Mortalidad	5
2.1. Línea Base	5
2.2. Datos de Mortalidad. Implementación para Colombia.	7
2.2.1. Curvas de Mortalidad y Supervivencia	8
3. Modelo Afín de Mortalidad	11
3.1. Modelos Afines Multifactoriales	13
4. Filtro de Kalman	15
4.1. Formulación de Estado - Espacio	15
4.2. Filtro de Kalman en detalle	17
5. Resultados de la Calibración	21
5.1. Estimación de Parámetros	21
5.2. Estimación de factores y cargas	22
6. Conclusiones	25
A. Anexo: CDA Models for longevity risk applications - Colombian Insurance	26
B. Dinámicas consistentes de la curva de Supervivencia	36
B.1. Consistencia de la curva de mortalidad	37
Bibliografía	39

1. Introducción

En las últimas décadas, ha venido creciendo el interés por la medición, gestión y valoración de los riesgos de mortalidad y longevidad. De igual manera, se han producido una serie de sucesos que han provocado que distintos grupos de interés tomen una mayor consciencia sobre los efectos económicos de dichos riesgos (actos terroristas e incremento de la esperanza de vida, desde el punto de vista respectivo de cada riesgo).

En esta tesis tendremos en cuenta un riesgo en particular, el riesgo de longevidad, al cual se enfrentan las compañías de seguros de vida. Se puede afirmar que en general dichas compañías están expuestas a un número considerable de riesgos, sin embargo algunos de estos han recibido más atención que otros, tanto en la práctica como en la academia. Por lo tanto se estudiará cómo se modela el riesgo de longevidad en específico. Previo a esto cabe aclarar que, utilizamos la palabra riesgo como una fuente de incertidumbre la que puede conllevar tanto a pérdidas como ganancias, a la compañía en cuestión. En particular, una compañía de seguros suscribe día a día muchas clases de riesgos, uno de los más complejos de modelar y en consecuencia de mitigar es el riesgo de supervivencia y longevidad. Particularmente la incertidumbre que conlleva dicho riesgo y por consiguiente los contratos de seguro con coberturas de naturaleza vitalicia, hacen que este deba ser evaluado y analizado desde una perspectiva dinámica. Para los participantes del sector de seguros y/o fondos de pensiones siempre ha sido crucial tener un modelo fiable de mortalidad que pueda utilizarse para fijar precios a las primas y debidas reservas de los contratos de seguros.

Un contrato de seguro de vida, especifica un flujo periódico de pagos entre el asegurado y la compañía aseguradora. Las primas anteriormente mencionadas consisten en la suma global de las primas, desde el momento de iniciar el contrato hasta la fecha de retiro o hasta que el asegurado este activo. Considerando el hecho de que la compañía debe estar en capacidad de identificar y modelar la mayor fuente de riesgo. Esta tesis solo se enfocará en el riesgo de mortalidad.

En principio, el negocio de los seguros de vida es tradicionalmente generado por las primas

recibidas dadas las coberturas prestadas. En este orden de ideas, la compañía de seguros tradicionalmente aplica este principio usando una tasa de interés constante y una tasa de mortalidad determinística pero independiente del tiempo. Esta pareja \bar{r} , $\bar{\mu}$ se le llama usualmente la base técnica o base de primer orden. De acuerdo a lo anterior, en el caso de beneficios garantizados de forma determinística, estos dependerán de la formulación de la tasa de interés futura y la intensidad de mortalidad. Por ello, para poder encontrar la suma global de las primas bajo un contrato con beneficios determinísticos, primeramente se deberá encontrar el desarrollo esperado de vida aleatorio usando una tasa de mortalidad técnica y segundo determinar el valor presente de los resultados determinísticos de los beneficios usando una tasa de interés técnica. Entonces dicho portafolio se modela de la siguiente forma:

$$\pi = e^{-\int_0^T \bar{\mu}(x+u)du} e^{-\bar{r}T} K$$

En esta ecuación, $\bar{\mu}(x+u)$ es la intensidad de mortalidad en el tiempo u para la persona de edad x en el tiempo 0, cuando el contrato fue emitido. Por lo tanto, $e^{-\int_0^T \bar{\mu}(x+u)du}$ es la probabilidad de supervivencia de la persona de edad x desde el tiempo 0 al tiempo T , usando la base técnica.

Lo anterior representa el cálculo de la prima usando la base técnica, de un portafolio con beneficios garantizados K . Por tanto la idea básica para la administración de riesgo, del negocio de seguros de vida, es el de escoger la base técnica correcta para que el portafolio (cartera de seguros de vida) no se comporte del modo incorrecto. El cálculo de la reserva es por consiguiente muy similar al del portafolio, lo único que cambia es su especificación temporal. Entonces, la compañía estará en capacidad de generar un superávit, obteniendo un retorno que siempre supere la tasa de interés técnica y observe una tasa de mortalidad mayor en el portafolio, comparándola con la tasa de mortalidad técnica. De forma muy similar lo introduce *Dahl* [7] y *Gerber*[9].

Todo lo expuesto nos perfila al contexto y la importancia del riesgo de mortalidad en el balance de un negocio del ramo de vida. El riesgo de mortalidad se basa fundamentalmente en dos fuentes particulares de riesgo, el riesgo sistémico y el riesgo no sistémico. Este último, se refiere al riesgo asociado directamente con el desempeño aleatorio de la cartera de seguros, dado una tasa de mortalidad dada. Fruto de ello, se puede eliminar dicho riesgo si se aumenta el número de asegurados en dicha cartera, pues es una función decreciente del número de agentes en el portafolio. El riesgo sistémico, bajo este marco se refiere a cambios asociados a la intensidad de mortalidad subyacente, pues esta afectará a todo el conjunto de asegurados.

En suma a todo lo anterior este trabajo se enfocará en estudiar modelos afines dinámicos que capturen la dinámica de precios de activos y de mortalidad, permitiendo incorporar el riesgo de longevidad en la valoración y análisis de riesgo para contratos de seguros de vida en Colombia. A partir de lo anterior, se quiere proponer un modelo afín multifactorial de mortalidad para aplicaciones de riesgo de longevidad, bajo el marco de un modelo libre de arbitraje y con una expresión cerrada de la curva de supervivencia. Dentro del alcance del proyecto se usara una representación de estado espacio para la estimación de los parámetros del modelo usando un filtro de Kalman. Los datos de mortalidad que se usaran para la aplicación del modelo de 2 y 3 factores serán de Colombia.

En este sentido *Schrager* [18] resalta, que las propiedades o ventajas que satisface usar esta familia de modelos son requerimientos importantes para su aplicación en la practica y enlista tres en especifico: Capacidad analítica, clara interpretación de factores y compatibilidad con modelos de valoración de opciones. Este último, hace que esté estudio tome relevancia en el contexto de finanzas cuantitativas y computacionales. Este autor también especifica las dos últimas propiedades, pues los factores se interpretan como tendencia i.e. longevidad, nivel (población) y volatilidad (diferencias entre nivel y tendencia vs la mortalidad observada). Lo anterior provee explícitamente aplicaciones desde la prespectiva actuarial, es decir, la administración del riesgo. En términos de la ultimá propiedad, estos modelos nos permiten la valoración de opciones anidadas a mortalidad, específicamente a las GAO (Opciones de anualidad garantizada, por sus siglas en ingles) .

Como resultado a lo propuesto, se quiere estudiar y dirigir un modelo multifactorial dinámico de mortalidad con aplicación el riesgo de longevidad, basado en un modelo de estructura de plazos afín (ATSM por sus siglas en Ingles) ¹. El argumento principal mencionado por la bibliografía, que sostiene el uso de esta familia de modelos, es que los modelos afines tiene ventaja sobre los modelos econométricos pues estos nos permiten el uso de herramientas matemáticas desarrolladas para administración de riesgos y valoración de bonos de crédito riesgosos. Por tanto, la curva de edad de supervivencia es modelada de forma similar a la de una estructura de plazos de tasa de interés. No obstante, en el capítulo 2 se profundizará en el hecho, de porque se puede modelar la curva de esta forma. Como se mencionó el modelo será usado bajo un marco de libre arbitraje. Por otro lado, la propiedad de consistencia es en consecuencia muy deseada, dado que nos permitirá hacer proyecciones sobre la curva y la intensidad de mortalidad, además nos libera de la necesidad de re-parametrizar el modelo en cada instante del tiempo.

¹Affine Term Structure Model

En la estimación del modelo se usará una representación de estado espacio, donde los parámetros del modelo serán hallados con un filtro de Kalman para obtener la verosimilitud para un conjunto de parámetros basado en la información histórica. Para finalizar se mostraran los resultados del modelo con datos de mortalidad para Colombia.

2. Curvas de Mortalidad

2.1. Línea Base

En esta subsección se quiere resaltar el argumento de por qué la curva de mortalidad es modelada de manera similar a la curva de estructura de plazos de tasa de interés. Primero desde el punto de vista académico, es enriquecedor para el lector conocer las razones intrínsecas de este hecho. Segundo, en el texto referencia de este trabajo, se hace esta aseveración, se presenta como un hecho y no expone ningún argumento del por qué la existencia y pertinencia de utilizar modelos afines dinámicos de mortalidad aplicados al riesgo de longevidad. En consecuencia, nos basaremos estrictamente a lo expuesto en el trabajo de *Liu* [14] donde este hace una revisión de los modelos de mortalidad estocásticos bajo un marco de no arbitraje.

Fijamos un espacio de probabilidad filtrado (Ω, \mathcal{F}, P) y consideramos que x denota la edad de un individuo en el tiempo $t = 0$, cuyo tiempo de vida restante es aleatorio y se denotara como τ_x . Sea N el número homogéneo de personas pertenecientes a un grupo inicial. Definimos $\mu(t, x+t)$ como la tasa instantánea de mortalidad del individuo a la edad $x+t$ en el tiempo t . Eso también se formaliza teóricamente compilando el número, $N(t)$ de sobrevivientes restantes del grupo en el tiempo t . Específicamente esto se representa como.

$$S(t, x) := \frac{N(t)}{N} \quad (2-1)$$

Si asumimos que $N(t)$ es lo suficientemente grande a las observaciones del periodo t , entonces $S(t, x)$ es una curva con límite a la izquierda y continua a la derecha, lo que nos permite reescribir esta expresión la siguiente manera.

$$S(t, x) = \exp\left(-\int_0^t \mu(s, x+s) ds\right) \quad (2-2)$$

Dado que $\mu(\cdot, x+t)$ es estocástica, entonces $S(\cdot, x)$ es una variable aleatoria. De hecho en este momento solo nos podemos referir a $S(\cdot, x)$ como la probabilidad de supervivencia observada en el tiempo t . Por lo que, se utiliza la ley de esperanzas iterada, para obtener las probabilidades de supervivencia en el tiempo s para el horizonte de tiempo $0 \leq s \leq t \leq T$, dado que $\tau_x > t$.

En consecuencia definamos la probabilidad de supervivencia de un agente x como $P(s, t, T, x)$, es decir es la probabilidad del agente del tiempo t a T medida en el tiempo s . Por ejemplo, $P(0, 0, T, x)$ es la probabilidad de supervivencia del agente x hasta el tiempo T medida en el tiempo 0 y $P(T + 1, T, T + 1, x)$ es la probabilidad de supervivencia del tiempo T a $T + 1$ medida en $T + 1$, lo que ya incorpora información hasta el tiempo $T + 1$. De la siguiente forma, definimos también M_s como la filtración generada por $\mu(u, x + u)$ hasta el tiempo s , esto quiere decir que se incluye información de mortalidad solo hasta el tiempo s . Adicionalmente definamos.

$$Y_x(T) = \begin{cases} 1, & \text{si el individuo esta vivo en el tiempo T} \\ 0, & \text{si el individuo esta muerto en el tiempo T} \end{cases}$$

Entonces tendremos que

$$\begin{aligned} P(s, t, T, x) &= P[\tau_x > T \mid \tau_x > t, M_s] \\ &= P[Y_x(T) = 1 \mid Y_x(t) = 1, M_s] \\ &= E[Y_x(T) \mid Y_x(t) = 1, M_s] \\ &= E[E\{Y_x(T) \mid Y_x(t) = 1, M_T\} \mid M_s] \\ &= E\left[\frac{S(T, x)}{S(t, x)} \mid M_s\right] \\ &= E\left[\exp\left(-\int_t^T \mu(u, x + u) du\right) \mid M_s\right] \end{aligned}$$

Tomando valores específicos para s, t o T , obtendremos

$$\begin{aligned} P(0, 0, T, x) &= P[\tau_x > T] \\ &= E[S(T, x)] \\ &= E\left[\exp\left(-\int_0^T \mu(s, x + s) ds\right)\right] \end{aligned}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} P(t, t, T, x) &= P[\tau_x > T \mid \tau_x > t, M_t] \\ &= E\left[\frac{S(T, x)}{S(t, x)} \mid M_t\right] \\ &= E\left[\exp\left(-\int_t^T \mu(t, x + t) dt\right) \mid M_t\right] \end{aligned}$$

y por ultimo

$$P(T+1, T, T+1, x) = \exp\left(-\int_T^{T+1} \mu(s, x+s) ds\right) \quad (2-3)$$

De esta manera evidenciamos que, existen similitudes en las definiciones y propiedades matemáticas entre la estructura de plazos de tasa de interés y el ajuste de tasas de mortalidad. El ejemplo predilecto en la bibliografía es la tasa forward instantánea o la misma ecuación que relaciona el precio de un bono y la tasa interés corta.

$$D(t, T) = E_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(u) du\right) \middle| F_t\right] \quad (2-4)$$

En donde E_Q denota el valor esperado con respecto a una medida de probabilidad de valoración neutral al riesgo.¹

Adicionalmente, para cada t fijo, podemos asumir que el precio del bono o tasa instantánea de mortalidad $D(t, T)$ es diferenciable con respecto a su madurez T por lo que definimos.

$$\mu(t, T) = \frac{\partial \ln(D(t, T))}{\partial T} \quad (2-5)$$

Con esto concluimos el sustento que tiene el hecho de decir que, la estructura de curvas de supervivencia son modeladas de manera similar a una estructura de plazos.

2.2. Datos de Mortalidad. Implementación para Colombia.

Las primeras tablas de mortalidad conocidas fueron construidas por el inglés Jhon Graunt [10] en 1662, en el libro "Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality" en el que compila y analiza la información de mortalidad de las parroquias en Londres. Por otro lado la bibliografía principal de este trabajo Blackburn & Sherris [3] se basa en tablas de mortalidad de países desarrollados como los de Suecia o el trabajo Xu, Sherris y Ziveyi [20], donde usan datos de Dinamarca, ya que dichos países llevan largos periodos de tiempo recopilando información de mortalidad, lo que asegura la calidad del conjunto de datos. Por ejemplo en Suecia, los datos son censados, pero le hacen seguimiento a sus estimaciones de población desde 1970. Es válido aclarar que la fuente de datos de ambas citas, es

¹Si se desea profundizar sobre el concepto de un mercado generalizado financiero y asegurador referirse a Liu [14] o, a modelos de mortalidad estocástica bajo el marco de no arbitraje buscar a Cairns, Blake y Dowd[5]

"The Human Mortality Data Base" [19] donde, por el momento, no se encuentran datos de Colombia .

Por otro lado, y en términos del sector asegurador Colombiano, se usan diferentes tablas de mortalidad de acuerdo con el ramo que se está utilizando, El matemático, ingeniero, astrónomo y economista político, Julio Garavito fue el encargado de hacer el cálculo de las reservas para diferentes productos de vida, de la Sociedad Nacional de Seguros de Vida, donde tomo la tabla de Estados Unidos "American Experience table of Mortality" la cual fue elaborada con experiencia de mortalidad propia de los Estados Unidos, fue adoptada en 1868 por la entidades regulatorias del Estado de Nueva York como estándar para productos de vida individual, como está descrito en *Ortiz, Villegas y Zarruk* [17]. Todo lo anterior, solo para ejemplificar que tanto en términos del país como del sector, no estamos en posición de recopilar un conjunto de datos de muy robusto.

2.2.1. Curvas de Mortalidad y Supervivencia

Definamos la probabilidad de supervivencia como:

$$S(t, T) = \prod_{s=0}^{T-t} (1 - q(x + s, t))$$

$$q(x, t) = 1 - e^{-m(x, t)} \quad (2-6)$$

Donde un año de probabilidad de muerte $q_{x,t}$ de una persona de edad x en el año t y con $m_{x,t}$ como la tasa central de mortalidad, que se calcula con datos de mortalidad de la siguiente manera.

$$m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}} = \frac{\text{No. de muertes a la edad } x \text{ en el año } t}{\text{Exposición a la edad } x \text{ el año } t} \quad (2-7)$$

2-1.

La fuerza promedio de mortalidad se define de la siguiente forma:

$$\bar{\mu}(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log[S(t, T)] \quad (2-8)$$

2-2.

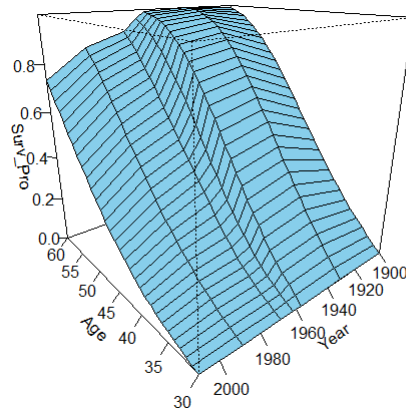


Figura 2-1.: Curva de supervivencia $S(t, T)$ por periodo para Colombia de hombres rentistas desde 1900 a 2009, edad de 30 a 60 años.

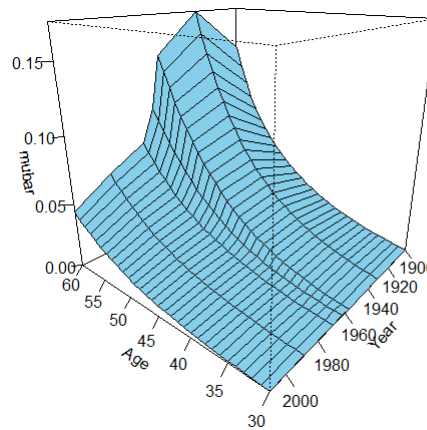


Figura 2-2.: Fuerza promedio de mortalidad $\bar{\mu}(t, T)$ para Colombia de rentistas desde 1900 a 2009, edad de 30 a 60 años .

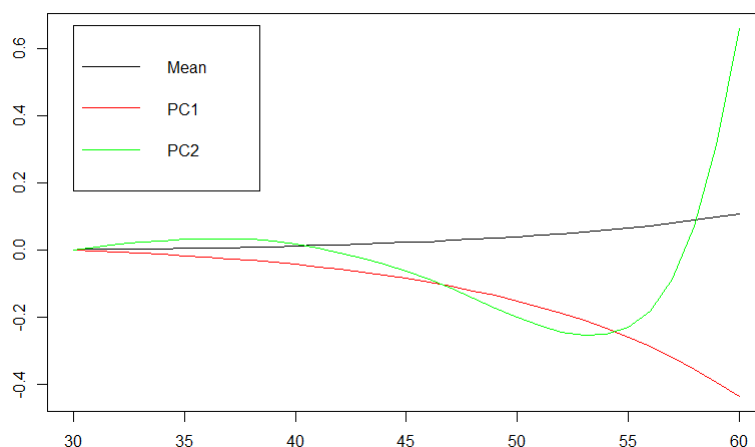


Figura 2-3.: Análisis de componentes principales, para Colombia de rentistas desde 1900 a 2009, edad de 30 a 60 años.

En ambas curvas se evidencia un incremento en la probabilidad de supervivencia o decremento en la probabilidad de muerte, es decir desde 1960 se sigue una tendencia hasta 2009.

2-3

Desde un punto de vista exploratorio, el análisis de componentes principales nos permite evaluar la compatibilidad de los datos con el modelo afín, ya que ambos "análisis" comparten similitudes formales, estas son linealidad e independencia. Por lo tanto, si encontramos resultados prometedores en el ACP, será un buen indicio para implementar un modelo afín de factores independientes.

Los dos primeros componentes principales explican 99.97% de la varianza del conjunto de datos de la curva de mortalidad. Esto en consecuencia sugiere que los modelos de 2 y 3 factores, capturarían las variaciones observadas de la mencionada curva de mortalidad, ya que los componentes principales son ortogonales.

3. Modelo Afín de Mortalidad

En esta sección, presentaremos de manera general el caso de nuestro modelo de mortalidad e ilustramos específicamente como se extiende la estructura afín a un modelo de tasas de mortalidad. En consecuencia nos ceñiremos estrictamente por las definiciones y pruebas hechas, por *Blackburn y Sherris* [3] y *Xu , Sherris y Ziveyi* [20].

Empezamos con nuestro espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, donde \mathbb{P} es la medida de probabilidad real, la información al tiempo t esta dada por $\mathbb{F} = \mathbb{G} \vee \mathbb{H}$, la subfiltración \mathbb{G}_t contiene toda la información financiera y actuarial a excepción del tiempo actual de muerte. La subfiltración \mathbb{H}_t es una σ -álgebra con información de mortalidad. Sea $N(t) = 1_{\tau \leq t}$. Adicionalmente definimos el termino de compensación como, $A(t) = \int_0^t \mu(s; x) ds$ es un proceso predecible de $N(t)$, entonces $dM(t) = dN(t) - dA(t)$, es una \mathbb{P} - Martingala donde $dA(t) = \mu(t; x) dt$, por consiguiente existe otra medida $dM(t)$ que es Q -martingala, donde el termino de compensación se convierte en $dA(t) = \mu^Q(x, t) dt$, donde $\mu^Q(x, t) = (1 + \phi(t)) \mu(x, t)$ y $\phi(t) \geq -1$. Fijaremos $\phi(t) = 0$ y no valoraremos el riesgo no sistemático, entonces $\mu^Q = \mu$. Se usan las mismas técnicas de activos riesgosos de crédito aplicadas a mortalidad, citadas por *Blackburn y Sherris* [3] y expuestas por *Lando* [13]

En ausencia de arbitraje, existe una medida equivalente Q donde $P(t, T; x)$ es el valor en el tiempo t del valor terminal del pago X_T en el tiempo T . El pago X_T que es un proceso G -adaptado, es condicional a la sobrevivencia hasta el periodo T de otro modo el pago será 0.

$$P(t, T; x) = E^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} X_T 1_{\tau \leq T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = 1_{\tau \leq t} E^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) + \mu(s, x) ds} X_T \middle| \mathcal{G}_t \right] \quad (3-1)$$

Usando la ley de esperanzas iteradas podemos ver que si se asume independencia entre tasas interés, mortalidad y el pago terminal $X_T = 1$, la ecuación 4-1 será :

$$P(t, T; x) = 1_{\tau \leq T} E^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \middle| \mathcal{G}_t \right] E^Q \left[e^{-\int_t^T \mu(s, x) ds} \middle| \mathcal{G}_t \right] = 1_{\tau \leq T} B(t, T) S(t, T; x) \quad (3-2)$$

Donde $B(t, T)$ es el precio del bono en al momento t y $S(t, T; x)$ es la probabilidad riesgo neutral de supervivencia de un cohorte x en el momento 0. Esta definición se modela así

misma como una tasa forward bajo el marco de Heath-Jarrow-Morton (HJM), *Heath et al* [11]. La calibración se vuelve complicada cuando se trata de múltiples cohortes y la proyección de cohortes es exógena al modelo. Según *Blackburn y Sherris* [3] *Rather, Chiarella y Kwon* [6] muestran que los ATSM son un caso especial de la estructura HJM con una volatilidad determinística. En este punto nosotros usaremos dicha propiedad para calibrar nuestro ATSM usando datos de mortalidad. Si es el caso que nuestros parámetros riesgo neutrales no varían en el tiempo, un supuesto en este contexto, podremos entonces usar HJM para estimar curvas de supervivencia de cada cohorte. Esto conlleva que, si nos trasladamos de modelo de periodo a un modelo de cohorte, solo requeriría un cambio en la curva forward inicial.

Usando el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, el proceso G adaptado, μ representa la tasa instantánea de mortalidad. Existe una medida martingala equivalente Q tal que la probabilidad de supervivencia se puede representar de la siguiente manera:

$$S(t, T) = E^Q \left[e^{-\int_t^T \mu(s, x) ds} \mid G_t \right] \quad (3-3)$$

Por medio del teorema de Feynman-Kac y el Lema de Itô se llega a la solución de esta EDP, como lo demuestra en sus apéndices *Xu, Sherris y Ziveyi* [20]. Adicionalmente *Duffie y Kann*[8] prueban que esta EDP tiene la siguiente solución cerrada.

$$S_{x,t}(\tau) = e^{-B(\tau)^T Z_t + C(\tau)} \quad (3-4)$$

Donde $B(t, T)$ y $C(t, T; x)$ son las soluciones para nuestro proceso de mortalidad de tasa corta, las siguientes son el conjunto de ODEs o ecuaciones de Ricatti.

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= 1 - \Delta^Q B(t, T) & , B(0) &= 0 \\ \frac{dC}{dt} &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Sigma' B(t, T)' B(t, T) \Sigma & , C(0) &= 0 \end{aligned}$$

La intensidad de mortalidad instantánea es definida como la suma de factores latentes, dado por,

$$\mu(t) = 1' Z \quad (3-5)$$

Para un modelo n factorial, B , es la matriz transpuesta de las cargas de los n factores, $C(t, T)$ es la constante y Z_t son los factores latentes. La fuerza de mortalidad promedio es afín en los factores, esto está dado por.

$$\bar{\mu}(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log[S(t, T)] = \frac{B(t, T) Z_t - C(t, T)}{T-t} \quad (3-6)$$

Los n - factores latentes bajo la medida riesgo neutral están definidos por un proceso Gaussiano.

$$dZ_t = -\Delta^Q Z_t dt + \Sigma dW_t^Q \quad (3-7)$$

Donde $\Delta^Q \in R^{n \times n}$, $\Sigma \in R^{n \times n}$ Esto no es necesariamente una restricción de signo Δ^Q . Los factores riesgo neutrales pueden ser de cualquier caso, reversión a la media 0, sin reversión a la media o caminata aleatoria. La matriz de covarianza Σ es diagonal y el movimiento browniano W_s es independiente.

3.1. Modelos Afines Multifactoriales

En esta subsección se presenta una solución con base en el caso continuo anteriormente expuesto para 3 factores de un ATSM, lo que hace evidente la misma solución para menos dimensiones en términos de número de factores latentes. De este modo, nos basamos en las ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE por sus siglas en Ingles) de la subsección anterior. Según *Blackburn y Sherris* [3], se desarrollaron analíticamente y se probaron varias especificaciones más generales como por ejemplo correlación entre drift y volatilidades del proceso riesgo neutral Z_t pero no se encontró mucha evidencia. En consecuencia, presentamos el modelo de 3 factores independiente y no correlacionados.

Modelo de 3 factores independientes:

$$\begin{bmatrix} dZ_{1,t} \\ dZ_{2,t} \\ dZ_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \\ Z_{3,t} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_{1,t}^Q \\ dW_{2,t}^Q \\ dW_{3,t}^Q \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

Entonces podemos resolver las ODEs tanto para $B(t, T)$ como para $C(t, T)$. De esta forma, para el modelo de factores independientes, el termino de la cargas a dichos factores será el siguiente.

$$B_i(t, T) = \frac{1 - e^{-\delta_i(T-t)}}{\delta_i} \quad (3-9)$$

Y para $C(t, T)$ la solución general para n - factores independientes sería la siguiente.

$$C(t, T) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\delta_i^3} \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-2\delta_i(T-t)}) - 2(1 - e^{-\delta_i(T-t)}) + \delta_i(T-t) \right] \quad (3-10)$$

Citando la ecuación 3-6 podemos reemplazar la ecuación de las dinámicas de los factores, para obtener la solución expuesta. La forma que toma la fuerza de mortalidad promedio será la siguiente, combinando las definiciones y soluciones anteriormente mencionadas.

$$\bar{\mu}(t, T) = \frac{1}{T-t} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1 - e^{-\delta_i(T-t)}}{\delta_i} Z_{i,t} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_i^2}{\delta_i^3} \left(\frac{1}{2} (1 - e^{-2\delta_i(T-t)}) - 2(1 - e^{-\delta_i(T-t)}) + \delta_i(T-t) \right) \right] \quad (3-11)$$

4. Filtro de Kalman

En este punto vamos a introducir el filtro de Kalman como una herramienta idónea para realizar las estimaciones necesarias, con este objetivo en mente la intuición al momento de implementar el algoritmo es pensar que, las series de mortalidad están conducidas por una suma de factores subyacentes no observables, esto ya se profundizó en los capítulos anteriores con el detalle analítico pertinente. Lo anterior nos conduce a dos retos fundamentales en la aproximación de nuestro objetivo, el primero es por supuesto separar las observaciones reales del ruido del sistema y segundo, extraer las dinámicas actuales de los factores no observables Z_t .

Por otro lado, el filtro de Kalman es un estimador lineal óptimo. Este nos provee de una solución recursiva al problema de filtración lineal discreta, particularmente la aplicación financiera de esta metodología ha venido incrementándose incluyendo estimaciones para estructuras de plazo afín *Bolder* [4], *Luciano & Vigna* [15], *Babbs & Nowman* [1] y *Maes* [16]. El filtro de Kalman usa una formulación de estado espacio para recursivamente hacer inferencias sobre los valores no observados (*Sistema de Transición*) de las variables de estado, condicionando a los valores observados de tasas de mortalidad (*Sistema de Medición*). Como paso final, usamos esta inferencia recursiva para construir y maximizar la función de log-verosimilitud, para encontrar el conjunto óptimo de parámetros θ . Lo anterior es una idea vaga del filtro de Kalman, sin embargo se ira haciendo más evidente mientras avanzamos.

4.1. Formulación de Estado - Espacio

La reformulación del modelo en lo que nosotros llamaremos representación de Estado-Espacio implica la especificación del sistema de medida y el sistema de transición. Utilizaremos el modelo de tres factores para ejemplificar el desarrollo de dicha representación. Empezaremos con las ecuaciones de Estado-Espacio compuesta de dos partes, el sistema de medida, el cual representa la relación afín observada entre la fuerza de mortalidad promedio y las variables de estado y decimos que esta es conjuntamente markoviana.

Ya habíamos definido la curva de fuerza promedio de mortalidad del agente de edad x para el siguiente año $x+t$, de acuerdo a la acuación 3-11, es decir.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\mu}(t, t+1) \\ \bar{\mu}(t, t+2) \\ \vdots \\ \bar{\mu}(t, t+n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1 - e^{-\delta_1(t+1-t)}}{\delta_1} & \frac{1 - e^{-\delta_2(t+1-t)}}{\delta_2} & \frac{1 - e^{-\delta_3(t+1-t)}}{\delta_3} \\ \frac{1 - e^{-\delta_1(t+1-t)}}{\delta_1} & \frac{1 - e^{-\delta_2(t+2-t)}}{\delta_2} & \frac{1 - e^{-\delta_3(t+3-t)}}{\delta_3} \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1 - e^{-\delta_1(t+n-t)}}{\delta_1} & \frac{1 - e^{-\delta_2(t+n-t)}}{\delta_2} & \frac{1 - e^{-\delta_3(t+n-t)}}{\delta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \\ Z_{3,t} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\delta_i^3} \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-2\delta_i}) - 2(1 - e^{-\delta_i}) + \delta_i \right] \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\delta_i^3} \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-2\delta_i}) - 2(1 - e^{-\delta_i}) + \delta_i \right] \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\delta_i^3} \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-2\delta_i}) - 2(1 - e^{-\delta_i}) + \delta_i \right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-1)$$

En vez de usar(4 - 1), podemos usar la representación idéntica de la siguiente forma:

$$\mu_t = -BZ_t - C + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim N(0, R) \quad (4-2)$$

Donde

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1 - e^{-\delta_1(t+1-t)}}{\delta_1} & \frac{1 - e^{-\delta_2(t+1-t)}}{\delta_2} & \frac{1 - e^{-\delta_3(t+1-t)}}{\delta_3} \\ \frac{1 - e^{-\delta_1(t+1-t)}}{\delta_1} & \frac{1 - e^{-\delta_2(t+2-t)}}{\delta_2} & \frac{1 - e^{-\delta_3(t+3-t)}}{\delta_3} \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1 - e^{-\delta_1(t+n-t)}}{\delta_1} & \frac{1 - e^{-\delta_2(t+n-t)}}{\delta_2} & \frac{1 - e^{-\delta_3(t+n-t)}}{\delta_3} \end{bmatrix}$$

$$, C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\delta_i^3} \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-2\delta_i}) - 2(1 - e^{-\delta_i}) + \delta_i \right] \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\delta_i^3} \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-2\delta_i}) - 2(1 - e^{-\delta_i}) + \delta_i \right] \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\delta_i^3} \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-2\delta_i}) - 2(1 - e^{-\delta_i}) + \delta_i \right] \end{bmatrix}$$

Con R como la matriz de covarianza entre términos de error, $R \in R_{m \times m}$. Donde m representa el número de edades en el conjunto de datos, según lo descrito por *Xu, Sherris y Ziveyi* [20]. Se asume que la medida de ruido es independiente entre edades, entonces se estimará el error como una curva paramétrica, en vez de estimar la medida de error para cada una de las edades. Esto reduce el número de parámetros a solo 3. Razón por la que la matriz R , se especifica de la siguiente forma:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \sum_{i=1}^{T-t} [r_c + r_1 e^{r_2 * i}] \quad (4-3)$$

Donde los valores de r_c , r_1 y r_2 son estimados como parte del conjunto de parámetros óptimos θ .

El sistema de transición el cual contiene las dinámicas del mundo real, descritas en el capítulo anterior, después del cambio de medida y una discretización de Euler son:

$$Z_{t_i} = e^{-K(t_i - t_{i-1})} Z_{t_{i-1}} + \eta_t \quad , \quad \eta_t \sim N(0, Q_{t_i}) \quad (4-4)$$

Para ver el detalle del cambio de medida, referirse a *Blackburn y Sherris* [3], para el detalle de discretización de ecuaciones diferenciales estocásticas ver el Apéndice B de *Xu, Sherris y Ziveyi* [20].

4.2. Filtro de Kalman en detalle

Ahora que ya tenemos nuestro modelo en forma de estado espacio, podemos construir el filtro de Kalman. Para dar una buena percepción de esta técnica, lo describiremos en detalle. El Filtro de Kalman se originó bajo la literatura de ingeniería de control, con el objetivo de resolver el "Problema de filtrado". La idea principalmente, es tomar un conjunto de datos

observados a través del tiempo que está sujeto a ruido. Este ruido en general se deriva del hecho de la existencia de error en nuestro sistema de medición, esto es nuestro aparato usado para mediar la señal. Evidentemente en este contexto, estos datos son fuerza de mortalidad promedio, la cual puede ser perturbada por varios factores como por ejemplo, actos terroristas e incrementos en la esperanza de vida.

Los siguientes 4 pasos destacarán la expresión específica usada en la recursión del filtro de Kalman. Por ello, es válido definir F_s como la filtración generada por el sistema de medición formalmente como :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(z_0, z_1, \dots, z_t)$$

Paso 1. Iniciación del vector de estado. La primera tarea necesitamos encontrar los valores de la recursión, para ello se utilizará la media y la varianza no condicional de nuestro sistema de transición.

$$E[z_1 | \mathcal{F}_0] \quad , \quad Var[z_1 | \mathcal{F}_0]$$

Paso2. Proyectar la ecuación de medida. La proyección condicional del sistema de medida de la siguiente forma:

$$E[\mu_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] = -C - B * E[Z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]$$

Asociada a la varianza condicional,

$$Var[\mu_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] = B * Var[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] B^T + R$$

Paso3. Inferencia con base a la actualización del vector de estado. Una vez observamos el valor verdadero del sistema z_t . Esto nos arroja una percepción del error en nuestra predicción condicional, que definimos del siguiente modo:

$$\zeta_{t_i} = \mu_{t_i} - E[\mu_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]$$

Lo anterior nos ayuda a actualizar nuestra inferencia sobre el sistema de transmisión no observado. Esta actualización, revisará nuestra esperanza condicional con la siguiente expresión:

$$E[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] = E[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] + K_{t_i} \zeta_{t_i} \quad ,$$

Donde

$$K_{t_i} = Var[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] B^T Var[\mu_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]^{-1}$$

Esto se le llama la ganancia de Kalman y es la que determina la participación a la nueva observación en nuestro sistema de proyección actualizado. También actualizaremos nuestra varianza condicional, del sistema de estado.

$$Var[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] = (I - K_{t_i} B) Var[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]$$

Paso4. Proyección de nuestro vector de estado. En este paso del ciclo recursivo, podremos proyectar los valores no observados de nuestro sistema de estado para el siguiente periodo, condicionándolo a la actualización de los valores del periodo pasado. Entonces la esperanza condicional será.

$$E[z_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}] = A + F * E[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]$$

Y la varianza condicional de la siguiente forma.

$$Var[z_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}] = Var[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] - F Var[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] F^T + Q$$

Adicionalmente, para el caso específico de la formulación de estado espacio expuesta en la sección anterior, $A = 0$ y $F = e^{-K(t_i - t_{i-1})}$.

Bajo el supuesto de un modelo de estado espacio, donde todos los errores de predicción son gaussianos. El filtro de Kalman está en capacidad de calcular la log-verosimilitud, en otras palabras decimos que, paso a paso del proceso anterior, se construye la función de log-verosimilitud. Por lo que resulta de la siguiente forma.

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(Var[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}])^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \zeta_{t_i}^T Var[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]^{-1} \zeta_{t_i}} \right] \quad (4-5)$$

$$= -\frac{nN \ln(2\pi)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\ln(\det(\text{Var}[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}])) + \zeta_{t_i}^T \text{Var}[z_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]^{-1} \zeta_{t_i}]$$

Para poder encontrar el conjunto óptimo de parámetros debemos, en consecuencia maximizar la función expuesta.

$$\hat{\theta} = \text{argmax } l(\theta)$$

5. Resultados de la Calibración

5.1. Estimación de Parámetros

Una vez se mencionaron los hechos teóricos necesarios, se continua con la estimación del modelo. En primera instancia mostramos la Tabla 6-1, donde evidenciamos de manera general la comparación entre modelos de 1 a 3 factores. Empezamos con la Log-Verosimilitud, ya que evidenciamos que es el paso previo, para encontrar el conjunto de parámetros óptimo y continuamos con el residuo cuadrado medio, el número de parámetros y número de factores. El segundo, el residuo cuadrado medio, es el más interesante en nuestro balance, pues nos deja saber que modelos se ajustan de mejor forma a los datos. En este sentido, se evidencia que el modelo que presenta mejor ajuste, es el de tres factores, algo que sin duda es intuitivo. En contraposición el modelo de 2 factores independientes, presenta un menor grado de ajuste que el de un factor.

	3-Factores Independientes	2-Factores Independientes	1-Factor Independiente
Log-Verosimilitud	560.7488	558.376	221.3419
RECM	0.9951583	1.003242	0.9999913
No. de Parámetros	12	9	6
No. de Factores	93	62	31

Tabla 5-1.: Comparación de Log - Versiomilitud, RECM y Número de parámetros estimados.

La metodología que se implementó para la estimación de estos parámetros, fue la siguiente. Primero se especificó la formulación de estado espacio, la cual, por tener una matriz de covarianza no convencional, requirió de su programación manual, para primero encontrar la función de log-verosimilitud y posteriormente usar un método de optimización para maximizar dicha función. Es decir, lo que generalmente requiere de una librería, para este ejercicio se

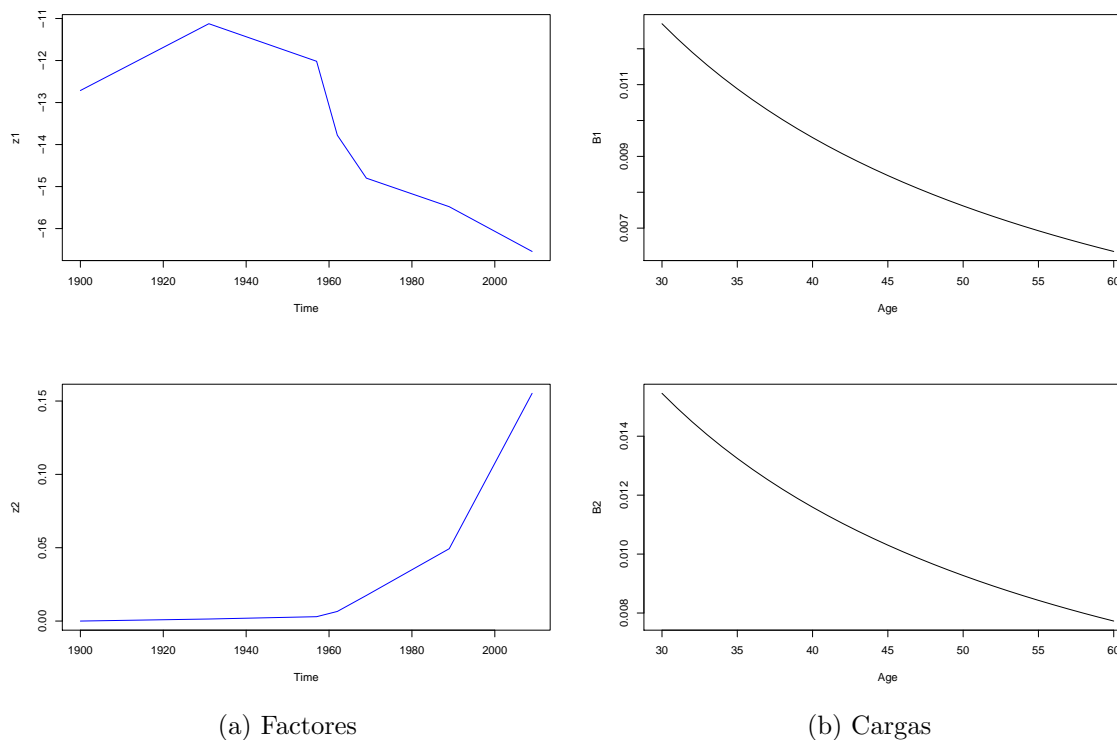
debió especificar cada uno de los elementos de la formulación de estado espacio, empezando con valores iniciales, factores de transición y medida, intercepto, varianza de las innovaciones y para finalizar, varianza de la medida (Ecuación 4 – 3) (a lo que se refirió anteriormente como no convencional). El resultado de este ejercicio se puede ver en la siguiente tabla.

Estimación parámetros	1-Factores Independientes	2-Factores Independientes	3-Factor Independiente
δ_1	1.002782	1.682143	1.191339
δ_2	-	0.787676	4.62903
δ_3	-	-	1.248323
κ_1	-0.125722	0.004536	0.004691
κ_2	-	0.012595	0.805001
κ_3	-	-	1.770241
σ_1	4.564e-075	-0.875367	0.658382
σ_2	-	-0.194567	-0.518778
σ_3	-	-	0.146789
r_1	0.074972	0.204074	-0.104161
r_2	-0.563460	-0.496416	0.451877
r_c	-0.039384	-0.123924	0.163963

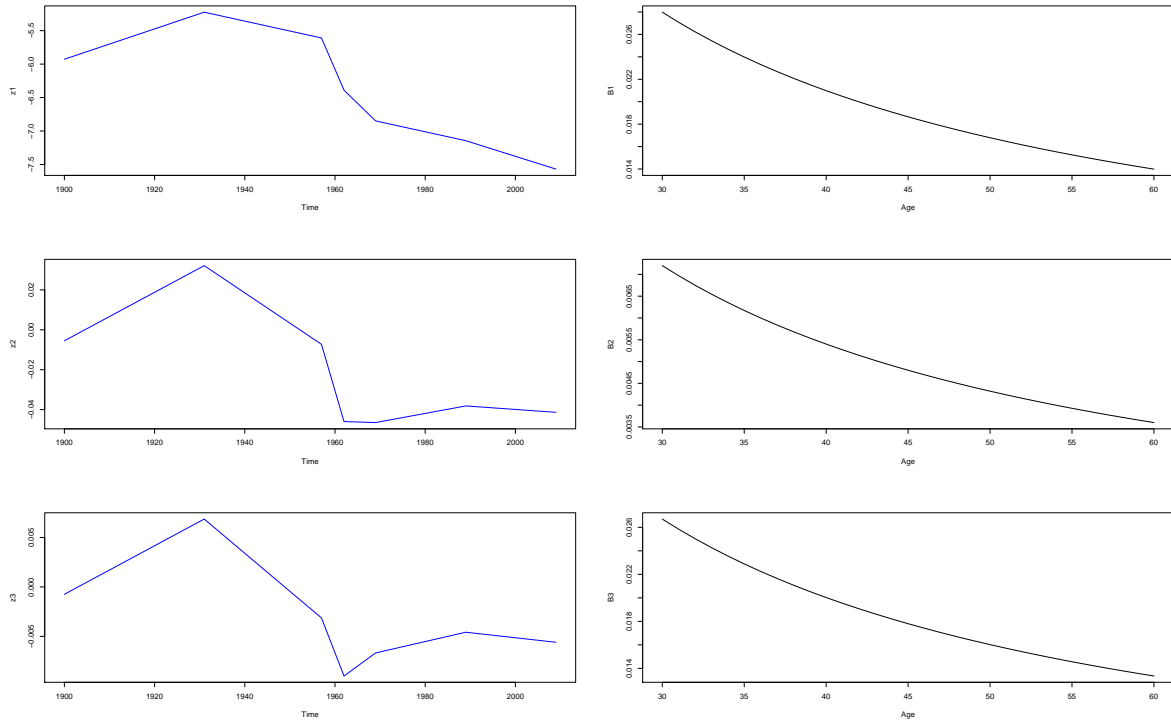
Tabla 5-2.: Resultados de del modelo

5.2. Estimación de factores y cargas

Dentro de la motivación se afirmó que una de las ventajas del uso de estructuras afines es la clara interpretación de sus factores y cargas, por ello mostramos los resultados para el modelo de 2 y 3 factores. De este modo, se evidencia que para el modelo de 2 factores. Donde el primer factor que representa la tendencia, se revela un decrecimiento a partir de 1930, lo que coincide con el análisis de componentes principales expuesto en el capítulo 2 , las tasas de mortalidad han venido mejorando con una variación alta entre años. El segundo factor muestra un aumento a partir de 1960. Su carga correspondiente B_2 decrece lo que señala mayor sensibilidad de su factor a menores edades. Lo anterior se evidencia tanto en la figura 6-1 como en la figura 6-2.

**Figura 5-1.:** Modelo de 2 factores independientes

Ahora el análisis se traslada a el modelo de tres factores, expuesto en la figura 6-2 , las pendientes de las curvas son muy similares, la ruptura de la tendencia desde 1900 a 1930, convirtiéndose en positiva en términos de mortalidad, nos muestra la misma descripción que el modelo de dos factores. De hecho este es el resultado es más fuerte ya que en este sentido los tres factores cumplen la misma tendencia. En términos de las cargas también coincidimos, pues las tres cargas muestran decrecimientos a través de cohortes. Luego, las descripciones primordiales en términos de interpretación de resultados son las mismas, a pesar que el Z_2 en el modelo de dos factores crezca a partir de 1960. Para finalizar, la gran diferencia entre los factores Z_2 de ambos modelos nos pueden dar un parte de poca robustez en esta dimensión.



(a) Factores

(b) Cargas

Figura 5-2.: Modelo de 3 factores independientes

6. Conclusiones

El resultado del presente documento fue mostrar como una estructura de plazos afín (ATSM) es una herramienta ideal para modelar datos de mortalidad (como se expuso en la introducción). Del mismo modo se acepta el modelo bajo el marco de consistencia. Enfocados en el desarrollo teórico de tiempo continuo de dicha clase de modelos. Los conceptos de no arbitraje nos permitieron construir las ecuaciones diferenciales parciales para representar de forma idéntica las dinámicas de las tasas de mortalidad. Este producto clave nos permitió generalizar, usando múltiples variables de estado, a varias dimensiones, lo que en conclusión nos sirvió como herramienta para modelar la evolución intertemporal de curva de mortalidad.

También se clarifica como, por medio del filtro de Kalman y algunos supuestos gaussianos, la representación de estado espacio nos permite estimar dicha estructura afín. El hecho de mostrar cómo se lleva la estructura afín paso a paso, a los requerimientos funcionales del filtro de Kalman es per se un fruto por sí solo.

En términos de estimación, se coincide con la bibliografía base, en cuanto se presentan claros problemas en este sentido, pues es un requerimiento tener un conjunto de datos suficientes para capturar las dinámicas de tendencia (longevidad), nivel (población) y volatilidad. Esto con el fin previsto de que la estructura afín pase a ser una herramienta idónea, para la administración del riesgo y la valoración. Para cerrar observamos las dinámicas de mortalidad para Colombia, la conclusión (ya varias veces mencionadas) es que existe una clara mejora en las tasas de mortalidad, es decir la probabilidad de supervivencia a través del tiempo ha mejorado. Por otro lado, cuando se observaron las cargas son consistentes dentro del estudio de la mortalidad colombiana, sin embargo, difieren con las experiencias de otros países. Por esta razón, afirmamos a manera de conclusión general que esta herramienta es válida para la administración del riesgo de longevidad en Colombia, sin embargo no se recomienda su uso para fines de nivel o volatilidad. Esta editorial considera que el conjunto de datos no es el pertinente para hacer conclusiones determinantes al respecto. Esto significa, que las ultimas conclusiones son parciales y se necesitan mejores datos para obtener robustez

A. Anexo: CDA Models for longevity risk applications - Colombian Insurance

```
1
2 #####
3 ##
4 ## Consitent Dynamic Affine Models for longevity risk
5 ## applications
6 ## ColombianInsurance
7 ## Rosario University - Bogota
8 ## By: Rodrigo Cristancho C.
9 ##
10 #####
11
12
13 # Period Mortality Data Colombian Experience
14 # 2.2 Mortality Data. Implementation for Colombia
15 #-----
16 mort_table_col<- as.data.frame(read.table("Col_Mort_Data.
17     Csv", header=TRUE , sep=",")) #import data
18
19 px_e<-as.data.frame((1-mort_table_col[,2:ncol(mort_table_col
20     ])],row.names = mort_table_col[,1])
21
22 xc<-c(30:60)
23 yc<-as.matrix(c(1900,1931,1957,1962,1969,1989,2009)) # Years
24     of observed mortality
25
26 surv_pro<-as.data.frame(matrix(data=0,nrow=31,ncol=7,
27     dimnames=list(xc,yc)))
28 surv_pro[1,]=1
29
```

```
26     # Populates surv_pro
27
28     for (i in 1:(length(px_e[,1])-1)) {
29       surv_pro[i+1,]=surv_pro[i,]*px_e[i,]
30     }
31
32     # Plots Survival Probability
33     #-----
34     sp_2<-as.matrix(1-surv_pro)
35
36     surv_surf<-persp(xc,yc,sp_2, col= "Skyblue", xlab = "Age",
37                     ylab= "Year", zlab= "Surv_Pro", theta = -128, phi = 20,
38                     scale = TRUE, ticktype = "detailed")
39
40     # Calculate and plots observed Force of Mortality
41     #-----
42
43     tau=xc-29
44     premubar<-as.matrix(-log(surv_pro))/tau
45
46     mubar_surf<-persp(xc,yc,premubar, col= "Skyblue", xlab = "
47                     Age", ylab= "Year", zlab= "mubar", theta = -140, phi =
48                     20,
49                     ticktype = "detailed")
50
51     # Principal Component Analysis
52     #-----
53     pca <-prcomp(t(premubar))
54     par(mar = rep(2, 4))
55
56     sdevpca<- pca$sdev
57     pr_var <- sdevpca^2
58     prop_varex <- pr_var[1:2]/sum(pr_var)
59
60     # Plots PCA and Mean
61
62     meanc<- rowMeans(premubar)
```

```
62 plot(meanc, x=xc,ylim=range(meanc,pca$rotation[1:31,1],pca$
63 rotation[1:31,2]), col="black",type="l", xlab="Edad",
main=legend(30,0.67 , c("Mean", "PC1", "PC2"),text.col = "
64 col = c("black", "red", "green"),merge = TRUE, bg = "white")
65 )
66
67 lines(pca$rotation[1:31,1],x=xc[1:31], col="red")
68 lines(pca$rotation[1:31,2],x=xc[1:31], col="green")
69
70 plot(meanc, x=xc,ylim=range(meanc,pca$rotation[1:31,1],pca$
71 rotation[1:31,2]), col="black",type="l", xlab="Edad")
72 lines(pca$rotation[1:31,1],x=xc[1:31], col="red")
73 lines(pca$rotation[1:31,2],x=xc[1:31], col="green")
74 legend(30,0.67 , c("Mean", "PC1", "PC2"),text.col = "black",
lty = c(1,1,1), col = c("black", "red", "green"),
75 merge = TRUE, bg = "white")
76
77 library(foreach)
78 library(FKF)
79 library(ggplot2)
80 library(gridExtra)
81 library(optimr)
82 library(optimx)
83
84 # Model setup
85 #1 Factor Independent Model
86
87 delta1<- c(0.006)
88 kappa <- c(0.001)
89 sigma <- c(0.002)
90 rc <- c(0.002)
91 r1 <- c(0.002)
92 r2 <- c(0.5)
93
94 #2 Factor Independent Model
95
```

```
96     delta1<- c(0.006, 0.003)
97     kappa  <- c(0.001, 0.002)
98     sigma  <- c(0.002, 0.005)
99     rc     <- c(0.002)
100    r1     <- c(0.002)
101    r2     <- c(0.5)
102
103    #3 Factor Independent Model
104
105    delta1<- c(0.006, 0.003, 0.007)
106    kappa  <- c(0.001, 0.002, 0.004)
107    sigma  <- c(0.002, 0.005, 0.003)
108    rc     <- c(0.002)
109    r1     <- c(0.002)
110    r2     <- c(0.5)
111
112
113
114    #All other parameters
115    T          <- 7 # years
116    delta_t    <- 1 #
117    dt         <- 1 #
118    n          <- T/dt #
119    r_0        <- delta1
120    measurement_error <- 0.001 #
121    m          <- length(delta1) # dimension of state variables
122    maturity   <- xc
123    d          <- length(maturity) # dimension of observations
124    N          <- T/delta_t # number of observations
125
126    premubar1=data.frame(t(premubar),nrow= T,ncol=d)
127    premubar2= split(premubar, rep(1:ncol(premubar), each = nrow
128                    ((preubar))))
129    premubar3=list(t(premubar))
130
131    # PARAMETER ESTIMATION
132    # -----
133    # Random initialization of parameters
```

```
134   init_params_if <- function()
135   {
136   delta1_init <- runif(m, min=0.0, max=1)
137   kappa_init <- runif(m, min=0.0, max=1)
138   sigma_init <- runif(m, min=0.0, max=1)
139   rc_init <- runif(1, min=0.0, max=1)
140   r1_init <- runif(1, min=0.0, max=1)
141   r2_init <- runif(1, min=0.0, max=5)
142   }
143
144   # Manual initialization of parameters
145   init_params_if <- function()
146   {
147   delta1_init <- c(3.2,3.0,2.0)
148   kappa_init <- c(1.7,1.06,3.0)
149   sigma_init <- c(0.2,0.7,-0.015)
150   rc_init <- c(-0.0085)
151   r1_init <- c(1.0)
152   r2_init <- c(-5.0)
153   }
154
155
156   # optimization parameter bounds
157
158   upper_bound <- c(rep(c(Inf, Inf, Inf),each=m), rep(Inf,3))
159   lower_bound <- c(rep(c(-Inf, -Inf, -Inf),each=m), rep(-Inf
160     ,3))
161   actual_param <- c(kappa=kappa, delta1=delta1, sigma=sigma,
162     rc=rep(rc,1), r1=rep(r1,1), r2=rep(r2,1))
163
164   #
165
166   #Kalman Filter for 3 Factor Independent Model
167   Ind_Fact_KF <- function(delta1, kappa, sigma, rc, r1, r2,
168     observations)
169   {
```

```

169     # initial state variable (a0: m x 1)           #
        unconditional mean of state variable
170
171     r_init <- as.vector(c(rep(0,m)))
172
173     # variance of state variable (P0: m x m)       #
        unconditional variance of state variable
174
175     P_init <- (sigma^2/(2*(kappa)))*diag(1,m,m)
176
177     # intercept of state transition equation (dt: m x 1)
178     C <- matrix(0,nrow = m,ncol = 1)
179
180     # factor of transition equation (Tt: m x m x 1)
181     F_ <- array(exp(-kappa*delta_t)*diag(m),dim=c(m,m,1))
182
183     # factor of measurement equation (Zt: d x m x 1)
184     B <- array(1/matrix(rep(delta1,d),d,byrow=TRUE)*(1-exp(-
        matrix(rep(delta1,d),d,byrow=TRUE) * matrix(rep(maturity,
        m),d))),dim=c(d,m,1))
185
186     # intercept of measurement equation (ct: d x 1)
187
188     A <- (1/2)*t(sigma^2/delta1^3)%*%t(((1/2)*(1-exp(-2*(matrix(
        rep(delta1,d),d,byrow=TRUE)*matrix(rep(maturity,m),d))))
189     -2*(1-exp(-2*(matrix(rep(delta1,d),d,byrow=TRUE)*matrix(rep(
        maturity,m),d))))
190     -(matrix(rep(delta1,d),d,byrow=TRUE)*matrix(rep(maturity,m),
        d)))
191
192     A <- matrix(-t(A)/maturity,nrow=length(maturity))
193
194     B <- array(B[, ,1]/matrix(rep(maturity,m),d),dim=c(d,m,1))
195
196     # variance of innovations of transition (HHt: m x m x 1)
197     Q <- array(sigma^2/(2*kappa)*(1-exp(-2*kappa*delta_t))*diag(
        m),dim=c(m,m,1))
198
199     # variance of measurement error (GGt: d x d x 1)

```

```

200
201 R <- array(diag(d)*(rc+r1*exp(r2)),dim=c(d,d,1))
202 #R <- array(diag(d)*(rc),dim=c(d,d,1))
203
204 ##Funcion de filtro de Kalman rapido con base al desarrollo
      del modelo arriba
205 filtered_process <- fkf(a0=r_init, P0=P_init, dt=C, ct=A, Tt
      =F_, Zt=B, HHt=Q, GGt=R, yt=observations)
206 return(filtered_process)
207 }
208
209
210 # Retrieve short rates using Kalman Filter
211 retrieve_short_rates_if4 <- function(rates, optim_controls,
      lower_bound=NULL, upper_bound=NULL)
212 {
213 observations <- rates
214 init_params_if()
215 initial_param <- c(delta1=delta1_init,kappa=kappa_init,
      sigma=sigma_init, rc=rc_init, r1=r1_init, r2=r2_init)
216
217 if_KF_loglik <- function(x)
218 {
219 delta1 <- x[1:m]; kappa <- x[(m+1):(2*m)]; sigma <- x[(2*m
      +1):(3*m)]; rc <- x[(3*m+1):(3*m+1)]; r1 <- x[(3*m+2):(3*
      m+2)];r2 <- x[(3*m+3):length(x)]
220 return(-Ind_Fact_KF(delta1,kappa,sigma,rc,r1,r2,observations
      )$logLik)
221 }
222
223 # optimization of log likelihood function
224 #fitted_model <- nlminb(initial_param, if_KF_loglik, control
      =optim_controls, lower=lower_bound, upper=upper_bound)
225 fitted_model <- optimx(par=initial_param, fn=if_KF_loglik,
      method = "ucminf",
226 control=optim_controls, lower=lower_bound, upper=upper_bound
      )
227 return(fitted_model)
228 }

```

```
229
230
231 #Run The Max Like
232 optim_controls <- list(trace=100)
233
234 results=retrieve_short_rates_if4(rates=preubar , optim_
      controls=optim_controls , upper=upper_bound , lower=lower_
      bound)
235
236 # 3 Factor Parameters results
237 deltaxhat=c(results$delta11 , results$delta12 , results$delta13)
238 kappahat=c(results$kappa1 , results$kappa2 , results$kappa3)
239 sigmahat=c(results$sigma1 , results$sigma2 , results$sigma3)
240
241 # 2 Factor Parameters results
242 deltaxhat=c(results$delta11 , results$delta12)
243 kappahat=c(results$kappa1 , results$kappa2)
244 sigmahat=c(results$sigma1 , results$sigma2)
245
246 # 1 Factor Parameters results
247 deltaxhat=c(results$delta1)
248 kappahat=c(results$kappa)
249 sigmahat=c(results$sigma)
250
251
252 rchat=results$rc
253 r1hat=results$r1
254 r2hat=results$r2
255
256
257 #Evaluation of the model
258 ATSM=Ind_Fact_KF(deltaxhat , kappahat , sigmahat , rchat , r1hat ,
      r2hat , observations=(preubar))
259
260 #First Results for table 1
261 ATSM$logLik
262 old.par <- par(mar = c(0, 0, 0, 0))
263 par(old.par)
264 ATSM_resid=plot.fkf(ATSM , type=c("resid"))
```



```

265 RMSE=sqrt(mean((ATSM_resid$std.resid)^2))
266 ATSM$status
267
268 z1=ATSM$att[1,]
269 z2=ATSM$att[2,]
270 z3=ATSM$att[3,]
271
272 #Plot Factors
273 par(old.par)
274 par(mfrow=c(3,1))
275 plot(z1,x=yc, type="l", col = "blue", xlab="Time")
276 plot(z2,x=yc,type="l", col = "blue", xlab="Time")
277 plot(z3,x=yc,type="l", col = "blue", xlab="Time")
278
279 par(mfrow=c(2,1))
280 plot(z1,x=yc, type="l", col = "blue", xlab="Time")
281 plot(z2,x=yc,type="l", col = "blue", xlab="Time")
282
283
284
285 # Facor Loadings
286 B_hat = array(1/matrix(rep(deltahat,d),d,byrow=TRUE)*(1-exp
      (-matrix(rep(deltahat,d),d,byrow=TRUE) * matrix(rep(
      maturity,m),d))),dim=c(d,m,1))
287 B_hat = array(B_hat[, ,1]/matrix(rep(maturity,m),d),dim=c(d,m
      ,1))
288
289 B1=B_hat[, ,1][1:31]
290 B2=B_hat[, ,1][32:62]
291 B3=B_hat[, ,1][63:93]
292
293 par(mfrow=c(3,1))
294 plot(B1,x=xc,type = "l",xlab="Age")
295 plot(B2,x=xc,xlab="Age",type = "l")
296 plot(B3,x=xc,xlab="Age",type = "l")
297
298 par(mfrow=c(2,1))
299 plot(B1,x=xc,type = "l",xlab="Age")
300 plot(B2,x=xc,xlab="Age",type = "l")

```

```
301
302
303
304   #Intercept of Measurement Equation
305
306   C_hat= (1/2)*t(sigmahat^2/deltahat^3)%*%t(((1/2)*(1-exp(-2*(
307       matrix(rep(deltahat,d),d,byrow=TRUE)*matrix(rep(maturity,
308       m),d))))
309       -2*(1-exp(-2*(matrix(rep(deltahat,d),d,byrow=TRUE)*matrix(
310       rep(maturity,m),d))))
311       -(matrix(rep(deltahat,d),d,byrow=TRUE)*matrix(rep(maturity,m
312       ),d)))
313
314   C_hat<- matrix(-t(C_hat)/maturity,nrow=length(maturity))
315
316   # Plot Inttercept
317   par(mfrow=c(1,1))
318   plot(C_hat,x=xc, type="l", xlab = "Age")
```

B. Dinámicas consistentes de la curva de Supervivencia

El objetivo principal de este trabajo es el de proponer y evaluar modelos consistentes de la curva de probabilidad de supervivencia. En este contexto consistencia significa, que el modelo de riesgo de longevidad generará curvas de supervivencia pertenecientes a la familia parametrizada, dado las dinámicas de la tasa de mortalidad. *Christensen & Bjiörk* [2] desarrollan este concepto bajo el marco de estructuras de plazos para tasas de interés. Lo que de ahora en adelante se llamara ATSM. Por otro lado, además de explicar y ejemplificar el concepto de consistencia, el objetivo del presente trabajo, será llevarlo al contexto del ramo de vida. El problema a considerar en este capítulo es la consistencia entre las dinámicas de la tasa de mortalidad y de la familia de curvas de supervivencia.

Por un momento se asume que el modelo para la tasa de mortalidad es M , ejemplo *Ho-Lee* [12]¹, es decir una imagen exacta del riesgo de longevidad en ese momento. Ahora se piensa en una familia particular de curvas de supervivencia G , ejemplo Nelson y Siegel, y también se asume que el modelo es calibrado utilizando dicha familia. Por lo que se afirma que la pareja (M, G) es consistente, si todas las curvas de supervivencia generadas por el modelo de tasa de mortalidad M están contenidas en la familia G . De lo contrario la pareja (M, G) es inconsistente. Esto significa que si el modelo de tasa de mortalidad genera curvas de mortalidad por fuera de la familia usada en el paso de calibración, entonces esto forzará al analista a cambiar los parámetros del modelo todo el tiempo. Ello no por que el modelo no sea acorde con la realidad sino por que dicha familia no va de forma correcta con el modelo.

La pregunta que se quiere hacer es, dado un modelo de tasa de mortalidad M y una familia de curvas de supervivencia G ¿Cuáles son las condiciones necesaria y suficientes para que se

¹Se introduce este modelo ya que es ampliamente utilizado en Finanzas Cuantitativas para modelar tasas cortas sustentando la sección 2.1. Adicionalmente se lleva la intuición del modelo al contexto de mortalidad. Ambos elementos homologan la intención del Blackburn & Sherris [3] con el uso de un modelo usado de en Finanzas Cuantitativas, Nelson & Siegel llevado al ámbito de vida.

cumpla la consistencia?

B.1. Consistencia de la curva de mortalidad

Asuma que bajo la medida Q martingala, la dinámica de la fuerza de mortalidad es

$$d\mu_{x,t} = \alpha_{x,t}dt + \sigma_{x,t}dW^Q \quad (\text{B-1})$$

Donde W es un movimiento browniano m -dimensional y donde α y σ son coeficientes de tendencia y varianza, respectivamente. De este modo, se define qué está sucediendo con esta ecuación diferencial y que la curva de supervivencia es una variedad G , como el conjunto de posible curvas de la familia parametrizada.

Definición 1. Dado un mapeo suave $G : Z \rightarrow C[0, \infty]$, definimos la variedad de la curva de supervivencia g como:

$$g = \text{Im}G \quad (\text{B-2})$$

Proposición 1. (El modelo de tasa de mortalidad). Bajo la medida de martingala Q , las dinámicas de μ tienen que ser de la forma.

$$d\mu(t, x) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mu(t, x) + \sigma_0(t, x) \int_0^x \sigma_0(t, u)^T du \right\} dt + \sigma_0(t, x) dW(t) \quad (\text{B-3})$$

Entonces el modelo de tasa de mortalidad M está completamente caracterizado por $\sigma_0(t, x)$.

Definición 2. (Variedad invariante) Sea una curva de mortalidad una variedad G y un proceso de tasa de mortalidad dado. Podemos decir que G es invariante bajo la acción de μ , si para cada tiempo s fijo, la condición μ que pertenece a la variedad G implica que $\mu(s, \cdot) \in g, \forall t \geq s$, bajo la medida Q casi siempre. Entonces podemos llevar estas definiciones a nuestro problema principal.

Suponga que tenemos un modelo de tasa de mortalidad M , específicamente un proceso μ y una curva de supervivencia que es una variedad G . Entonces, nos interesa saber bajo qué condiciones G es invariante de μ , pues la pareja (M, G) será consistente si G es invariante bajo las acciones de μ .

Proposición 2.(Invarianza controlada). La variedad G es invariante de la acción de M si y solo si.

$$\mu(t, G(z)) + \sigma(t, G(z))u \in \text{Im}[DG(z)], \forall u \in R^m \quad (\text{B-4})$$

Donde M equivalentemente en ambos términos tienen que pertenecer a la Imagen del Javobiando de $DG(z)$

$$\mu(t, G(z)) \in \text{Im}[DG(z)] \quad (\text{B-5})$$

$$\sigma(t, G(z)) \in \text{Im}[DG(z)] \forall z \in Ryz \in Z \quad (\text{B-6})$$

Christensen & Bjiörk [2] hacen la misma proposición para un proceso controlado, posteriormente también la usan para el caso estocástico de dimensiones finitas. En el caso estocástico de dimensiones finitas se deriva la noción geométrica pero no totalmente cierta de la invarianza de la variedad, será invariante según la siguiente ecuación

$$\mu(t, G(z)) + \sigma(t, G(z))u \in \text{Im}[DG(z)], \forall u \in R^m \quad (\text{B-7})$$

A pesar de que esta ecuación se aleja de la definición de Calculo de Ito, esta discrepancia se puede eliminar si reescribimos el análisis en términos de las integrales de Stratonovich. En consecuencia se presenta la definición así mismo como la implicación de la variación cuadrática del único factor principal de ruido, el proceso de Wiener y del mismo modo utilizando la común regla de la cadena.

El teorema 4.1 de *Christensen & Bjiörk* [2] es directamente aplicable a las derivadas de Fréchet de $\mu_{x,t}(\tau)$ para determinar consistencia.

$$\mu_\tau(\tau, z) + \sigma(\tau) \left(\int_0^\tau \sigma(y) dy \right)^T \in \text{Im}[\mu_z(\tau, z)] \quad (\text{B-8})$$

Las condiciones están entonces basadas en el Manifold o Variedad para las curvas de supervivencia futuras y las derivadas de frechet de la dinámicas de la tasa de mortalidad. Donde μ_τ y μ_z son las derivadas de Fréchet con respecto a τ y z .

Por otro lado, y para poder ver como se relaciona esta base teórica con la implementación podemos citar de nuevo el trabajo de *Blackburn y Sherris* [3] donde realizan todas las pruebas, de si las curvas forward mortalidad, son o no consistentes, particularment para el caso del modelo de Nelson y Siegel, se concluye que dichas curvas no son consistentes.

Bibliografía

- [1] BABBS, Simon H. ; NOWMAN, K B.: Kalman filtering of generalized Vasicek term structure models. En: *Journal of Fin* 34 (1999), Nr. 1, p. 115–130
- [2] BJÖRK, Tomas ; CHRISTENSEN, Bent J.: Interest rate dynamics and consistent forward rate curves. En: *Mathematical Finance* 9 (1999), Nr. 4, p. 323–348
- [3] BLACKBURN, Craig ; SHERRIS, Michael: Consistent dynamic affine mortality models for longevity risk applications. En: *Insurance: Mathematics and Economics* 53 (2013), Nr. 1, p. 64–73
- [4] BOLDER, David J.: Affine term-structure models: Theory and implementation. (2001)
- [5] CAIRNS, Andrew J. ; BLAKE, David ; DOWD, Kevin: Pricing death: Frameworks for the valuation and securitization of mortality risk. En: *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* 36 (2006), Nr. 1, p. 79–120
- [6] CHIARELLA, Carl ; KWON, Oh K.: Classes of interest rate models under the HJM framework. En: *Asia-Pacific financial markets* 8 (2001), Nr. 1, p. 1–22
- [7] DAHL, Mikkel: On Mortality and Investment Risk in Life Insurance. En: *Department of Applied Mathematics and Statistics Institute for Mathematical Sciences, University of Copenhagen* (2005)
- [8] DUFFIE, Darrell ; KAN, Rui: A yield-factor model of interest rates. En: *Mathematical finance* 6 (1996), Nr. 4, p. 379–406
- [9] GERBER, Hans U.: *Life insurance mathematics*. Springer Science & Business Media, 2013
- [10] GRAUNT, John: Natural and political observations mentioned in a following index, and made upon the bills of mortality. En: *Mathematical Demography*. Springer, 1977, p. 11–20

-
- [11] HEATH, David ; JARROW, Robert ; MORTON, Andrew: Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. En: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1992), p. 77–105
- [12] HO, Thomas S. ; LEE, SANG-BIN: Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. En: *the Journal of Finance* 41 (1986), Nr. 5, p. 1011–1029
- [13] LANDO, David: On Cox processes and credit risky securities. En: *Review of Derivatives research* 2 (1998), Nr. 2-3, p. 99–120
- [14] LIU, Xiaoming: *Stochastic mortality modelling*, Tesis de Grado, 2008
- [15] LUCIANO, Elisa ; VIGNA, Elena: Mortality risk via affine stochastic intensities: calibration and empirical relevance. (2008)
- [16] MAES, Konstantijn ; R KULEUVEN, CES: Estimating affine models by Kalman filter. (2000)
- [17] ORTIZ, Fabio ; VILLEGAS, Mauricio ; ZARRUK, Armando: Tablas De Mortalidad (Mortality Tables). (2013)
- [18] SCHRAGER, David F.: Affine stochastic mortality. En: *Insurance: mathematics and economics* 38 (2006), Nr. 1, p. 81–97
- [19] WILMOTH, John R. ; ANDREEV, Kirill ; JDANOV, Dmitri ; GLEI, Dana A. ; BOE, C ; BUBENHEIM, M ; PHILIPOV, D ; SHKOLNIKOV, V ; VACHON, P: Methods protocol for the human mortality database. En: *University of California, Berkeley, and Max Planck Institute for Demographic Research, Rostock. URL: <http://mortality.org> [version 31/05/2007]* 9 (2007), p. 10–11
- [20] XU, Yajing ; SHERRIS, Michael ; ZIVEYI, Jonathan: The Application of Affine Processes in Multi-Cohort Mortality Model. (2015)