

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
FACULTAD DE ECONOMÍA

Taller 7 Teorema de la Envolvente- Aplicaciones Marzo de 2017
Profesores: Andrea Atencio, Juan C. Zambrano y Andres F. Cardenas
Ejercicios para entregar: 1, 4, y 6 en grupos de tres personas.

1. Sea $U(x_1, x_2) = \alpha \log(x_1 - \bar{x}_1) + (1 - \alpha) \log(x_2 - \bar{x}_2)$ $x_1 > \bar{x}_1$ $x_2 > \bar{x}_2$
 - a) Solucione el problema $Max U(x_1, x_2)$ s.a $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$
 - b) Interprete la solución.
 - c) Calcule $V(p_1, p_2, m)$
 - d) Calcule $\frac{\partial V}{\partial m}$ $\frac{\partial V}{\partial p_1}$ $\frac{\partial V}{\partial p_2}$ y verifique la validez de la identidad de Roy.
 - e) Deduzca la función de Gastos y las funciones de demanda hicksianas para la función de utilidad dada.
2. Suponga que la despues del proceso de optimización se obtiene la función de Gasto

$$E(p, \bar{U}) = \left(\frac{1}{3}p_1 + \sqrt{p_1 p_2} + \frac{2}{3}p_2\right)\bar{U}$$

Obtenga de esta expresión :

$$x_1^h; x_2^h; x_1^*; x_2^* \text{ y } V(p, m)$$

3. Verifique el lema de Hotelling para el caso de una tecnología tipo Cobb-Douglas.
4. Una empresa produce un solo producto con ayuda de los factores de producción K y L , la función de producción viene dada por:

$$q = \log(K) + \text{Log}(L)$$

Los precios de K y L son respectivamente r y w .

- a) Encuentre los niveles óptimos de K y L que minimizan los costos dado un nivel de producción q_0
 - b) Muestre que las funciones de demanda óptima $K^*(w, r, q_0)$ y $L^*(w, r, q_0)$ son homogéneas de grado cero en r y w
 - c) Calcule la función de costos óptima $C^*(w, r, q_0)$
 - d) Muestre que si la empresa tiene una función de demanda $p = a - bq$ con $a, b > 0$ el nivel q^* que maximiza el beneficio es positivo si y solo si $a^2 > wr$
5. Compruebe la ecuación de Slutsky par la función de utilidad dada por:

$$U(x_1, x_2) = \alpha \log(x_1) + (1 - \alpha) \log(x_2)$$

6. La función de Utilidad en una industria es $U(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$, considere los siguientes problemas:

$$P1 : \text{Max } U(X) \text{ s.a } px = m \quad P \text{ vector de precios}$$

$$P2 : \text{Max } Px \text{ s.a } U(X) = \bar{U}$$

a) determine la relación entre: $\frac{\partial V_1(p, m)}{\partial m}$ y $\frac{\partial V_2(p, \bar{U})}{\partial \bar{U}}$

donde V_1 y V_2 son las funciones de máximo valor, con los multiplicadores de lagrange asociados a los problemas P_1 y P_2 respectivamente.

- b) Se conoce que $V_2(p, \bar{U}) = -E(p, \bar{U})$ y que $E(p, V_1(p, m)) = m$ muestre que si λ_1 es el multiplicador para P_1 y λ_2 es el multiplicador para P_2 entonces $\lambda_1 \lambda_2 = -1$

7. Considere el problema de un consumidor que debe obtener, al inicio del primer período, las cantidades demandadas de bienes de consumo para los períodos 1 y 2, que se denotan por c_1 y c_2 , respectivamente, y la demanda de activos para el período, b_1 :

$$\text{Max}_{\{c_1, c_2, b_1\}} U(c_1) + \beta U(c_2) \quad 0 < \beta < 1$$

s.a

$$y_1 + r \cdot b_0 = c_1 + b_1 - b_0$$

$$y_2 + (1 + r) \cdot b_1 = c_2$$

Donde y_t y c_t son el ingreso y el consumo en el periodo t , ($t=1,2$), respectivamente. La tasa de interes se denota por r , b_0 son los activos que posee al inicio del primer período y b_1 los activos que demanda en el primer periodo (para llevar al período final). Asuma que la función de utilidad es estrictamente cóncava ($U' > 0$ $U'' < 0$).

A partir de la función de lagrange:

$$L(c_1, c_2, \lambda) = U(c_1) + \beta U(c_2) + \lambda \left[W - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right]$$

Donde $W = y_1 + \frac{y_2}{1+r} + (1+r)b_0$.

- a) Obtenga las condiciones de primer orden
 b) Cómo cambia la utilidad en el máximo si aumenta la riqueza o valor presente del ingreso W ?
 c) A partir de las CPO, estudie cómo varían las cantidades demandadas de bienes de consumo y λ ante la certeza de que el ingreso en el segundo período aumentará.

- d) A partir de los resultados hallados en (b) encuentre cómo cambia la demanda de activos ante el cambio de y_2
8. Un agente determina su demanda de consumo y ocio (u oferta de trabajo) a partir del siguiente problema:
- $$\text{Max}_{\{c,\theta\}} U(c) + V(\theta) \quad (U' > 0, U'' < 0, V' > 0, V'' < 0)$$
- s.a : $p \cdot c = w \cdot (L - \theta)$
- donde: c es el consumo, θ el ocio, p el precio del bien de consumo, w el salario y L la dotación total de tiempo disponible (por lo tanto, $(L - \theta)$ es el tiempo destinado al trabajo). La restricción indica que el gasto en consumo debe ser igual al ingreso.
- a) A partir de las condiciones de primer orden del problema indique cómo cambian la demanda de consumo y de ocio ante un aumento del salario.
- b) Estudie cómo cambia la utilidad en el máximo ante un aumento del salario.