UNIVERSIDAD DEL ROSARIO - FACULTAD DE ECONOMÍA
Economía Matemática 2017-II -Examen Final

Andrés Felipe Cárdenas T.
Juan Carlos Zambrano J.

Diciembre 7 de 2017

1. **(20 puntos)** Demuestre las siguientes afirmaciones:
   a) Muestre que la unión de dos conjuntos convexos no es un conjunto convexo.
   b) Muestre que $f(x) = (h \circ g)(x)$ es convexa, si g y h son convexas y h es monótona creciente.

2. **(30 %)** Sea $f(x, y) = \alpha x^2 - y$ $\alpha \in \mathbf{R}$, y el conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq x^2 - 1,\ y \leq 2\}.$$

   a) Para los diferentes valores de α estudia la convexidad o concavidad de f en X.
   b) ¿Para qué valores de α cumple el punto $(0, -1)$ las condiciones de Kuhn-Tucker?
   c) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, indica para qué valores de α podemos asegurar que el punto $(0, -1)$ es máximo de f en X.
   d) Utilizando los teoremas de Kuhn-Tucker, indica para qué valores de α podemos asegurar que el punto $(0, -1)$ no es mínimo de f en X.

3. *a*) En el R.J. Ball y E. Smolensky se satisfacen las ecuaciones

$$C_t = cY_{t-1}, \quad K_t = \sigma Y_{t-1}, \quad Y_t = C_t + K_t - K_{t-1},$$

   en donde C_t, K_t y Y_t denotan, respectivamente, el consumo, el capital y el producto nacional neto en el período t, mientras que c y σ son constantes positivas tales que $(c + \sigma)^2 > 4\sigma$ Deduce una ecuación de segundo orden para el ingreso Y_t y luego encuentra su solución general en los casos: $i)(c + \sigma)2 > 4\sigma$, $\quad ii)(c + \sigma)^2 = 4\sigma$.

   b) Encuentre la solución al siguiente sistema lineal, donde $X_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$

$$X_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} X_t + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. **(30 puntos)** Se desea maximizar la siguiente función de ganancias:

$$\text{máx } V = \int_0^1 -\frac{1}{2}(y^2 + u^2)dt \quad s.a$$

$$y'(t) = u - y$$

Se tiene que inicialmente $y(0) = 1$ y $y(1) = libre$.

5. Considere el siguiente modelo de crecimiento. Suponga que el agente representativo elige la secuencia $\{c_t; k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ con el objetivo de

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t)$$

$$\text{s.a.} \quad k_{t+1} = Ak_t - c_t, \quad k_o\text{dado.}$$

a) (8 puntos) Especifique la ecuación de Bellman, e identifique las variables de control y las variables de estado.

b) (9 puntos) Caracterice las condiciones de optimalidad de este problema (ecuación de Euler). Explique sus resultados.

c) (5 puntos) Encuentre las funciones de política para k_{t+1} y c_t, nuevamente asumiendo que $K_{t+1} = \gamma Ak^{\alpha}$.