UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
Facultad de Economía
Economía matemática 2017-II - Taller 3

Ejercicios para entregar: 2b, 3b,4, 6c, 7, 8b,9c,9e, 14a en grupos de tres personas.

1. Para las funciones:
   $f(x,y) = x - y$
   $g(x,y) = x^2 + x - y$
   Determine si los siguientes conjuntos son cerrados y acotados. Si es posible, realice sus gráficas.

   a) $GS_g \cap GI_f$
   b) $GI_g \cap GS_f$
   c) $CS_g(1) \cap CI_f(2)$
   d) $CI_g(1) \cap CS_f(2)$

2. Describa los siguientes conjuntos en términos de grafos, supergrafos y subgrafos de funciones adecuadas:
   $A = \{(x,y,z) \,|\, y^2 + x < yz \leq x + y^2 + z^2\}$
   $B = \{(x,y,z,w) \,|\, x + w^2 < y + z^3 \leq x + z^2 + w^3)\}$
   $C = \{(x,y) \,|\, \mid y^2 - y \mid \leq x, \mid y + 2 \mid \leq 1\}$

3. Dados los siguientes conjuntos:
   $A = \{(K,L) \,|\, 5K^{0,2}L^{0,5} \geq 200,\ 0 \leq K \leq 50\}$
   $B = \{(x,y) \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ P_x x + P_y y \leq I\}$
   $C = \{(K,L) \,|\, min\{2K, 3L\} \geq 6\}$
   $D = \{(x,y) \,|\, x^2 - 9y^2 = 9\}$

   a) Interprete los conjuntos como grafos y caractericelos: ¿son cerrados, abiertos, acotados?
   b) Interprete los conjuntos como contornos y caractericelos: ¿son cerrados, abiertos, acotados?

4. Pruebe que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es convexo si y sólo si es un intervalo.

5. Muestre que la unión de dos conjuntos convexos no es un conjunto convexo.

6. Analice si los siguientes conjuntos son convexos:

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq x^2\}$
   b) $B = \{x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq |x|\}$
   c) $C = \{x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 3y^2 \leq xy + 5\}$
   d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = 2; z = 5\}$
   e) $A \cap B$
   f) $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - 5 + z \leq 5, x < 16\}$.
   g) $C_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x - 3y = x + 2w\}$.
   h) $C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 16\}$.
   i) $C_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2xy - x^2 - y^2 \geq 4\}$.

7. Dados $v \in \mathbb{R}^3$ 0 y $\epsilon > 0$ entonces sea $K(v,\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \epsilon\|v\|\|x\| \leq \langle v, x\rangle\}$. Muestre que $K(v,\epsilon)$ es convexo.

8. *a*) Muestre que $f(x) = kg(x)$ es cuasiconvexa si $g(x)$ es cuasiconvexa y $k > 0$.

   b) Muestre que $f(x) = (h \circ g)(x)$ es convexa, si g y h son convexas y h es monótona creciente.

9. Clasifique las siguientes funciones con respecto a concavidad y convexidad.

   a) $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 3$

   b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$

   c) $f(x, y) = (2x^2 - 3xy + 5y^2)^3 + x^2 + 4y^2 + 2x - 5y + 3$

   d) $f(x, y) = e^x + e^y - x - y$

   e) $f(x, y) = log(xy)$

   f) $f(x, y) = 3x^2 - 7xy + 4y^2$

   g) $f(x, y, z) = zy^2z^3$

   h) $T(p, q, r) = p^3r + q^3r - 5r \, en \, D = \{(p, q, r) \in R^3 \mid p > 0, q > 0, r > 0\}$.

   i) $g(u, v, w) = uln(vw) \, en \, D = \{(u, v, w) \in R^3 \mid u > 0, v > 0, w > 0\}$.

10. Utilice la caracterización mediante derivadas parciales de segundo orden para determinar si las siguientes funciones $f : R^n \longrightarrow R$ son estrictamente cóncavas o convexas:

    a) $f(x, y) = x + 3xy + 6x^2 + y^2$

    b) $f(x, y) = -x^2 - 2xy - y^2$

11. Muestre que la función de producción tipo Cobb-Douglas $f(x, y) = Ax^\alpha y^{1-\alpha}$ es siempre cuasicóncava, y es cóncava si el grado de homogeneidad es menor o igual a 1.

12. Considere el siguiente problema:

$$\min f(x)$$
$$g_i(x) \leq 0$$
$$i = 1, ..., n$$

    Donde todas las funciones $g_i(x)$ son funciones convexas. Demuestre que la región factible $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, \; i = 1, ..., n\}$ es convexa.

13. Considere f una función convexa y S un conjunto convexo. Pruebe que

$$X^* = \{x^* : f(x^*) \leq f(x), \, \forall x \in S\}$$

    es convexo.

14. Sea S un conjunto no vacio de $\mathbb{R}^n$, pruebe que:

    a) $f(y) = inf\{\|x - y\| : x \in S\}$

    b) $g(y) = sup\{y^T x : x \in S\}$

    son convexas.

15. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas explique por qué, y si son falsas ponga un ejemplo que lo muestre:

    a) Una función puede ser estrictamente convexa y cóncava.

    b) Una función puede ser estrictamente convexa y estrictamente cóncava.

    c) Una función puede ser estrictamente cóncava y convexa.

    d) Una función no puede ser convexa y cóncava a la vez.

    e) Una función puede no ser cóncava ni convexa.

    f) Toda función cóncava es estrictamente cóncava.

    g) Un conjunto puede ser cóncavo y convexo a la vez.