UNIVERSIDAD DEL ROSARIO - FACULTAD DE ECONOMÍA
Economía Matemática 2016-II - Taller 5

Ejercicios para entregar: 2b, 3a, 6c, 7b, 8c, 8h,10 en grupos de tres personas.

1. para las funciones:
   $f(x,y) = x - y$ y $g(x,y) = x^2 + x - y$
   Determine cada caso si los siguientes conjuntos son cerrados y acotados
   (si es posible realice sus graficas)

   (a) $GS_g \cap GI_f$
   (b) $GI_g \cap GS_f$
   (c) $CS_g(1) \cap CI_f(2)$
   (d) $CI_g(1) \cap CS_f(2)$

2. Dados los conjuntos:
   $A = \{(x,y,z)/y^2 + x < yz \leq x + y^2 + z^2\}$
   $B = \{(x,y,z,w)/x + w^2 < y + z^3 \leq x + z^2 + w^3)\}$
   $C = \{(x,y)/ \mid y^2 - y \mid \leq x, \mid y + 2 \mid \leq 1\}$
   Describa cada conjunto en terminos de grafos, supergrafos y subgrafos de funciones adecuadas.

3. Dados los siguientes conjuntos:

   $A = \{(K,L)/5K^{0.2}L^{0.5} \geq 200,\ 0 \leq K \leq 50\}$
   $B = \{(x,y)/P_x x + P_y y \leq I,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$
   $C = \{min\{2K, 3L\} \geq 6\}$
   $D = \{(x,y)/x^2 - 9y^2 = 9\}$

   (a) Interprete los conjuntos como grafos y determine si son cerrados y/o acotados.
   (b) Interprete los conjuntos como contornos

4. Pruebe que un subconjunto de $\Re$ es convexo si y solo si es un intervalo.

5. Muestre que la unión de dos conjuntos convexos no es un convexo.

6. Analice si los siguientes conjuntos son convexos:

   (a) $A = \{(x,y) \in R^2/y \geq x^2\}$
   (b) $B = \{x,y) \in R^2/y \geq |x|\}$
   (c) $C = \{x,y) \in R^2/x^2 + 3y^2 \leq xy + 5\}$
   (d) $D = \{(x,y,z) \in R^3/x + y = 2; z = 5\}$
   (e) $A \cap B$

7. (a) Muestre que $f(x) = kg(x)$ es cuasiconvexa si $g(x)$ es cuasiconvexa y $k > 0$
   (b) Muestre que $f(x) = (h \circ g)(x)$ es convexa si g y h son convexas y h monótona creciente.

8. Calsifique las siguientes funciones con respecto a concavidad y convexidad.

   (a) $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 3$

(b) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$

(c) $f(x,y) = (2x^2-3xy+5y^2)^3 + x^2 + 4y^2 + 2x - 5y + 3$

(d) $f(x,y) = e^x + e^y - x - y$

(e) $f(x,y) = log(xy)$

(f) $f(x,y) = 3x^2 - 7xy + 4y^2$

(g) $f(x,y,z) = zy^2z^3$

(h) $T(p,q,r) = p^3r + q^3r - 5r\, en\, D = \{(p,q,r) \in R^3/p > 0, q > 0, r > 0\}$.

(i) $g(u,v,w) = uln(vw)\, en\, D = \{(u,v,w) \in R^3/u > 0, v > 0, w > 0\}$.

9. Utilice la caracterización mediante las derivadas parciales de segundo orden para determinar si las siguientes funciones $f: R^n \longrightarrow R$ son estrictamente cóncavas o convexas:

   (a) $f(x,y) = x + 3xy + 6x^2 + y^2$

   (b) $f(x,y) = -x^2 - 2xy - y^2$

10. Muestre que la función de producción tipo Cobb-Douglas $f(x,y) = Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}$ es siempre cuasicóncava, y es cóncava si el grado de homogeneidad $r \leq 1$.

11. Estudia si los conjuntos siguientes son convexos. Indica cuáles de ellos son hiperplanos, semiespacios o polítopos:

    (a) $C_1 = \{(x,y,z) \in R^3/2x - 5 + z \leq 5, x < 16\}$.

    (b) $C_2 = \{(x,y,z,w) \in R4/x - 3y = x + 2w\}$.

    (c) $C_3 = \{(x,y) \in R^2/x^2 + y^2 \leq 16\}$.

    (d) $C_4 = \{(x,y) \in R^2/2xy - x^2 - y^2 \geq 4\}$.

    (e) $C_5 = \{(x,y,z) \in R^3/x < 0, y > 0\}$.

12. Indica si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas. Si son verdaderas explica por qué, y si son falsas pon un ejemplo que lo muestre:

    (a) Una función puede ser estrictamente convexa y cóncava.

    (b) Una función puede ser estrictamente convexa y estrictamente cóncava.

    (c) Una función puede ser estrictamente cóncava y convexa.

    (d) Una función no puede ser convexa y cóncava a la vez.

    (e) Una función puede no ser cóncava ni convexa.

    (f) Toda función cóncava es estrictamente cóncava.

    (g) Un conjunto puede ser cóncavo y convexo a la vez.