# UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
# Facultad de Economía
# Economía matemática 2018-I - Taller 3

1. Para las funciones:
   $f(x,y) = 5x - 7y$
   $g(x,y) = x^2 - y^2 + 3x - 2y$
   Determine si los siguientes conjuntos son cerrados y acotados. Si es posible, realice sus gráficas.

   *a)* $GS_g \cap GI_f$
   *b)* $GI_g \cap GS_f$
   *c)* $CS_g(1) \cap CI_f(2)$
   *d)* $CI_g(1) \cap CS_f(2)$

2. Describa los siguientes conjuntos en términos de grafos, supergrafos y subgrafos de funciones adecuadas:
   $A = \{(x,y,z) \,|\, y^2 + x < yz \leq x + y^2 + z^2\}$
   $B = \{(x,y,z,w) \,|\, x + w^2 < y + z^3 \leq x + z^2 + w^3)\}$
   $C = \{(x,y) \,|\, \mid y^2 - y \mid \leq x, \mid y + 2 \mid \leq 1\}$

3. Dados los siguientes conjuntos:
   $A = \{(K,L) \,|\, 5K^{0,2}L^{0,5} \geq 200,\ 0 \leq K \leq 50\}$
   $B = \{(x,y) \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ P_x x + P_y y \leq I\}$
   $C = \{(K,L) \,|\, min\{2K, 3L\} \geq 6\}$
   $D = \{(x,y) \,|\, x^2 - 9y^2 = 9\}$

   *a)* Interprete los conjuntos como grafos y caractericelos: ¿son cerrados, abiertos, acotados?
   *b)* Interprete los conjuntos como contornos y caractericelos: ¿son cerrados, abiertos, acotados?

4. Encuentre el gradiente y la matriz hessiana para cada una de las siguientes funciones:

   *a)* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 x_3$
   *b)* $g(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2}$
   *c)* $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 x_2 (x_3)^6 - x_1 (x_2)^2$
   *d)* $t(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - \log(x_2 x_3)$
   *e)* $u(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2$

5. Pruebe que si $X$ y $Y$ son conjuntos convexos, entonces su producto cartesiano $X \times Y$ es un conjunto convexo.

6. Determine si los siguientes conjuntos son o no convexos:

   *a)* $\mathbb{N}$
   *b)* $\mathbb{Z}$
   *c)* $\mathbb{Q}$
   *d)* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
   *e)* $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 4\}$

*f*) $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{x}^T\mathbf{p} \leq w\}$[1]. Donde $\mathbf{p}$ es un vector de constantes de orden $k$ y $w \in \mathbb{R}$

*g*) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq |x|\}$

*h*) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

*i*) $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Donde $A$ es una matriz de $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$

7. Muestre que la unión de dos conjuntos convexos no es un conjunto convexo.

8. Dados $v \in \mathbb{R}^3$ 0 y $\epsilon > 0$ entonces sea $K(v,\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \epsilon\|v\|\|x\| \leq \langle v, x\rangle\}$. Muestre que $K(v,\epsilon)$ es convexo.

9. *a*) Muestre que $f(x) = kg(x)$ es cuasiconvexa si $g(x)$ es cuasiconvexa y $k > 0$.

   *b*) Muestre que $f(x) = (h \circ g)(x)$ es convexa, si $g$ y $h$ son convexas y $h$ es monótona creciente.

10. Clasifique las siguientes funciones con respecto a concavidad y convexidad.

    *a*) $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 3$

    *b*) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$

    *c*) $f(x,y) = (2x^2 - 3xy + 5y^2)^3 + x^2 + 4y^2 + 2x - 5y + 3$

    *d*) $f(x,y) = e^x + e^y - x - y$

    *e*) $f(x,y) = log(xy)$

    *f*) $f(x,y) = 3x^2 - 7xy + 4y^2$

    *g*) $f(x,y,z) = zy^2z^3$

    *h*) $T(p,q,r) = p^3r + q^3r - 5r\, en\, D = \{(p,q,r) \in R^3 \,|\, p > 0, q > 0, r > 0\}$.

    *i*) $g(u,v,w) = uln(vw)\, en\, D = \{(u,v,w) \in R^3 \,|\, u > 0, v > 0, w > 0\}$.

11. Utilice la caracterización mediante derivadas parciales de segundo orden para determinar si las siguientes funciones $f : R^n \longrightarrow R$ son estrictamente cóncavas o convexas:

    *a*) $f(x,y) = x + 3xy + 6x^2 + y^2$

    *b*) $f(x,y) = -x^2 - 2xy - y^2$

12. Muestre que la función de producción tipo Cobb-Douglas $f(x,y) = Ax^\alpha y^{1-\alpha}$ es siempre cuasicóncava, y es cóncava si el grado de homogeneidad es menor o igual a 1.

13. Considere el siguiente problema:

$$\min f(x)$$
$$g_i(x) \leq 0$$
$$i = 1, ..., n$$

    Donde todas las funciones $g_i(x)$ son funciones convexas. Demuestre que la región factible $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., n\}$ es convexa.

14. Considere $f$ una función convexa y $S$ un conjunto convexo. Pruebe que

$$X^* = \{x^* : f(x^*) \leq f(x),\ \forall x \in S\}$$

    es convexo.

15. Sea $S$ un conjunto no vacio de $\mathbb{R}^n$, pruebe que:

    *a*) $f(y) = inf\{\|x - y\| : x \in S\}$

    *b*) $g(y) = sup\{y^T x : x \in S\}$

    son convexas.

[1]Denotamos por $\mathbf{x}^T$ a la transpuesta del vector $\mathbf{x}$.