UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
Facultad de Economía
Economía matemática 2017-II - Taller 4

Ejercicios para entregar: 1b, 1j, 3b,5, 6c, 7, 8b,8g, 9c,9b , 12b en grupos de tres personas.

1. Encuentre los extremos relativos de las siguientes funciones y determine su naturaleza (máximo, mínimo o punto de silla) Use el criterio de la matriz Hessiana.

   a) $f(x,y) = x^3 + x^2y + y^2 + 2y$.

   b) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

   c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

   d) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$.

   e) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$.

   f) $f(x,y) = 1 + 2x^2 + 8xy + 8y^2$.

   g) $f(x,y) = (x^3 - y)^2 - x^8$.

   h) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$.

   i) $f(x,y) = x^4 - 2ax^2 - y^2 + 3;\ a \in \mathbb{R}$.

   j) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

   k) $f(x,y) = ln(x^2 + y^2 + 1)$.

   l) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xyz$.

   m) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

   n) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z};\quad x > 0,\quad y > 0,\quad z > 0.$

2. Determinar los extremos relativos de la función $z = f(x,y)$ definida implicitamente por la ecuación $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0;\quad z > 0$

3. Encuentre los extremos absolutos de las siguientes funciones en los conjuntos indicados:

   a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ sobre el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2\}$.

   b) $f(x,y) = x^2y$ sobre el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

   c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ sobre el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

   d) $f(x,y) = senx + seny + sen(x+y)$ sobre el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2};\quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

   e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sobre el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2;\quad -1 \le y \le 2\}$.

4. Suponga que la ecuación de demanda para un producto es $P = 400 - 2Q$ y que la función de costo promedio es $\overline{C} = 0{,}2Q + 4 + \dfrac{400}{Q}$, donde Q es el número de unidades, P y C se expresan en dólares por unidad. Determine el precio en el que la utilidad es máxima.

5. Considere que en una empresa se tiene, para un cierto producto, la siguiente función de ganancia:

$$\pi = PQ - wL - rK$$

Donde P: Precio, Q: Nivel de producción, L: Mano de obra , K: Capital $w, r =$ Precio de los insumos para L y K, además suponga que $Q = L^{\alpha} K^{\beta}$ con $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$. Determine el nivel optimo (L^*, K^*) que maximiza la ganancia de la empresa.

6. Una empresa de dos productos, con precios P_1 y P_2 respectivamente, enfrenta las siguientes funciones de demanda y costo:
   $Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2 \quad Q_2 = 35 - P_1 - P_2 \quad C = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 10$
   a) Determine una expresión para la ganancia de la empresa, en términos de los niveles de producción Q_1 y Q_2
   b) Encuentre los niveles de producción que maximizan la ganancia.
   c) Cuál es la ganancia máxima?

7. La función de producción de un cierto bien Q que se produce con los insumos q_1,q_2 y q_3 (cantidades) es:

$$Q(q_1, q_2, q_3) = 150 - (q_1 - 3)^2 - (q_2 - 8)^2 - (q_3 - 5)^2$$

   Se desea determinar la combinación de insumos que maximice la producción del bien Q
   a) Encuentre el punto crítico(q_1^*, q_2^*, q_3^*) de Q, a partir de las condiciones de primer orden.
   b) Muestre, a través del criterio de la matriz hessiana, que el punto crítico obtenido corresponde a un máximo de Q.
   c) Calcule Q^*.

8. Use el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de las siguientes funciones sujetas a las condiciones dadas:
   a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{s.a} \quad x + y - 1 = 0.$
   b) $f(x, y) = 1 - \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) \quad \text{s.a} \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$
   c) $f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{s.a} \quad 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0.$
   d) $f(x, y) = 1 - x - y \quad \text{s.a} \quad x^2 + y^2 - 2 = 0.$
   e) $f(x, y, z) = x + y + z \quad \text{s.a} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$
   f) $f(x, y) = x^2y^2 \quad \text{s.a} \quad x^2 + y^2 = 1 \ (x, y \geq 0)$
   g) $f(x, y) = e^x + e^y \ s.a \ x + y = 2$
   h) $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{s.a} \ x + y = 0$ y $y + z = 6.$
   i) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z \quad \text{s.a} \quad x - y + z = 1$ y $x + 3y = 2.$
   j) Determinar la distancia mínima del punto $P(1, 0)$ a la parábola $y^2 = 4x$.
   k) Calcular la distancia mínima del punto $P(0, 0)$ a la curva $(x - 1)^3 - y^2 = 0$.
   l) Para qué valores de $b \in \mathbb{R}$ el punto $P(1, 1, -1)$ es un mínimo de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + bxy + x + y + 2z$ restringida a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9. En cada punto del Problema anterior, si se da un aumento pequeño ΔC en el valor de la constante que aparece en las restricciones, determine si aumenta, disminuye o permanece constante el valor óptimo de f, así como su cambio df^* a primer orden.

10. Una planta de fabricación de productos químicos puede producir z unidades de un producto Z dadas x unidades del compuesto químico X e y unidades del compuesto Y , donde $z = 500x^{0,6}y^{0,3}$. El producto X cuesta 10 EUR por unidad, mientras que el producto Y cuesta 25 EUR por unidad. La compañia desea maximizar la producción de Z con una restricción presupuestaria de 2000 EUR. Establece el problema de optimización en términos de multiplicadores de Lagrange y calcula cuál es la producción máxima de Z. cuántas unidades de los productos X e Y son necesarias para alcanzar dicho máximo?

11. Dada la función de utilidad $U(x, y) = (x + 2)(y + 1)$. Determine los niveles óptimos de compra x^*, y^* para U, sujeto a la condición $4x + 6y = 130$

12. Derive las condiciones del teorema de Kuhn-Tucker para los siguientes problemas y halle su solución:

    a) máx $(x-1)^2 + (y-2)^2$ S.a.
    $-x + y = 1$
    $x + y \leq 2$ para $x, y \geq 0$

    b) mín $-3x + y - z^2$
    S.a. $x + y + z \leq 0$
    $-x + 2y + z^2 = 0.$

    c) máx $-x^2 - 3y^2 + 3xy + x + y$ S.a.
    $2x + y \leq 2$
    $-x + y \leq -1$ para $x, y \geq 0$

    d) máx $-8x^2 - 10y^2 + 12xy - 50x + 80y$ S.a.
    $x + y \leq 1$
    $8x^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}$ para $x, y \geq 0$

    e) mín $x^2 + y^2$ S.a.
    $x + y = 5$
    $4 - xy \leq 0$
    $(x-4)^2 + (y-2)^2 - 1 \leq 0$

    f) mín$(x-3)^2 + (y-5)^2$ S.a.
    $x + y \leq 7$ para $x, y \geq 0$

13. La función de Cobb-Douglas es muy utilizada en Economía para representar la relación entre los inputs y los outputs de una firma. Toma la forma $Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$, donde Y representa los outputs, L el trabajo y Kel capital. Esta formulación puede ser aplicada a la utilidad y toma la forma $u(x) = x^{\alpha_1}...x^{\alpha_n}$, donde los exponentes son positivos y suman 1. Considere el problema de maximización de la utilidad:

$$\text{máx}\, x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

$$S.a \quad p_1 x + p_2 y = w$$

$$x, y \geq 0$$

    donde $p_1, p_2 > 0$ son los precios y $w > 0$ el presupuesto.

    a) Escriba las condiciones de KKT y encuentre una solución de ellas, en función dep_1, p_2, w y a.

    b) Se puede decir que esta solución es óptima para el problema original? Justifique.

    c) Encuentre el multiplicadorλ , en función de $p1, p2, w$ ya.

14. Se disponen semanalmente de un total de 160 horas de mano de obra a 15 dólares la hora. Se puede conseguir mano de obra adicional a 25 dólares la hora. Se puede obtener capital en cantidades ilimitadas a un costo de 5 dólares la unidad de capital. Si se disponen de K unidades de capital y de$L$ horas de mano de obra, entonces se pueden producir$L^{1/2}K^{1/3}$ máquinas. Se vende cada máquina a 270 dólares. Cómo puede la empresa maximizar sus ganancias? Indique:

    a) el total de horas de mano de obra a utilizar

    b) el total de unidades de capital

    c) el total de máquinas a producir.