UNIVERSIDAD DEL ROSARIO - FACULTAD DE ECONOMÍA
Economía Matemática 2017-II - Taller 5

Juan Carlos Martnez
Andres Felipe Cardenas

February 27, 2018

1. Considere el siguiente problema, donde c es una constante estrictamente positiva

$$\begin{aligned} \max_{\{x,y\}} \quad & \ln(x+1) + \ln(y+1) \\ \text{s.a.} \quad & x + 2y \leq c \\ & x + y \leq 2 \end{aligned}$$

   (a) Escriba las condiciones de KKT
   (b) Resuelva el problema para $c = \frac{5}{2}$
   (c) Denote por $V(c)$ a la funcin de mximo valor. Encuentre $V'(\frac{5}{2})$

2. En este ejercicio buscaremos utilizar lo que hemos aprendido sobre optimizacin para resolver el problema del duopolio de Cournot. Usted no necesita saber nada de microeconoma para resolverlo, simplemente siga los pasos sugeridos cuidadosamente.

   Considere un mercado en el que dos firmas (1 y 2) ofrecen un producto idntico. Cada firma i decide su propio nivel de produccin (q_i). La demanda agregada de este mercado est descrita por $p = a - bQ$, donde $Q = q_1 + q_2$ y p denota el precio del bien. La funcin de costos de la firma i est dada por $C_i = \alpha + \beta_i q_i$.

   (a) Podemos representar el problema de la firma 1 como

$$\max_{\{q_1\}} \pi_1 = pq_1 - C_1 = (a - bQ)q_1 - \alpha - \beta_1 q_1$$

   Demuestre que la eleccin ptima de la firma 1 est dada por:

$$q_1^* = \frac{a - bq_2^* - \beta_1}{2b}$$

   Debe considerar la condicin de segundo orden para aserarse de que lo encuentre es un mximizador.

(b) Dada la simetra del problema, sabemos que la eleccin ptima de la firma 2 est dada por

$$q_2^* = \frac{a - bq_1^* - \beta_2}{2b}$$

Resuelva el sistema de 2×2 ecuaciones dado por q_1^* y q_2^*. Una vez despeje las cantidades de cada firma que slo dependen de los prmetros $(a, b, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ las denotaremos q_1^{NE} y q_2^{NE}. La notacin obedece a que este vector de ofertas ptimas (q_1^{NE}, q_2^{NE}) representa el nico Equilibrio de Nash de este problema. Esto es, ninguna firma desea ofrecer otra cantidad dado lo que est ofreciendo la firma rival.

(c) Denote por π_i^{NE} los beneficios de la firma i cuando las firmas ofrecen (q_1^{NE}, q_2^{NE}), esto es, la funcin valor del problema de maximizacin de la firma i en el equilibrio de Nash.

Utilice el teorema de la envolvente para demostrar que

$$\frac{\partial \pi_1^{NE}}{\partial \beta_1} = -\frac{4}{3}q_1^{NE} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \pi_1^{NE}}{\partial \beta_2} = \frac{2}{3}q_1^{NE}$$

3. Si la funcin de ganacia de la empresa est dada por

$$\prod(p, w) = p \ln\left(\frac{\alpha^\alpha \beta^\beta p^{\alpha+\beta}}{w_1^\alpha w_2^\beta}\right) - (\alpha + \beta)p + w_1 + w_2$$

encontrar

(a) Demandas de factores no condicionados de la empresa
(b) Funcin de oferta
(c) Funcin de produccin
(d) Demandas condicionales de la empresa
(e) Funcin de costo

4. Si la funcin de costo de la empresa est dada por

$$C(w, q) = q^2\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3}\right)^{-1}$$

encontrar

(a) Demandas condicionales de la empresa
(b) Funcin de produccin
(c) Demandas de factores no condicionados de la empresa
(d) Funcin de oferta
(e) Funcin de ganacia de la empresa

5. Suponga que

$$E(p, \bar{U}) = (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2 \bar{U}$$

encontrar

(a) Demandas Hicksianas
(b) Funcin de utilidad indirecta
(c) Demandas Marshallianas
(d) funcin de utilidad directa

6. Si la funcin de utilidad por el consumo de ciertos bienes es,

$$U(x, y, z) = A[\min\{ax, by\}]^{\alpha} z^{\beta}$$

Encontrar las funciones de gasto, utilidad indirecta, demandas marshallianas y hicksianas.