

FACULTAD DE ECONOMÍA

Tesis de Maestría

**Teoría espectral de grafos en la formación de
redes: mínimo valor propio**

Tesis presentada por Maykol Rodríguez Prieto para el grado de
maestría en Economía de la Universidad del Rosario

Supervisada por:
Carlos Castro Irigorri & Tomás Rodríguez Barraquer

*Dedicado a mis hermanos, mi constante motivación. A mis padres por siempre
estar a mi lado y a toda mi familia.*

Agradecimientos

Gracias a mis tutores: Carlos y Tomás, por el apoyo y la dedicación que me brindaron para poder realizar este trabajo.

Tabla de Contenido

Agradecimientos	II
Lista de figuras	IV
Introducción	1
1 Preliminares	3
1.1 Redes socio-económicas	3
1.2 Teoría de grafos y teoría espectral de grafos	4
1.2.1 Teoría de grafos	4
1.2.2 Teoría espectral de grafos	5
1.3 Relación entre λ_{min} y la estructura de la red	6
1.4 Planteamiento del problema	9
1.5 Modelo Jackson & Rogers	9
1.5.1 Ejemplo motivacional del algoritmo	10
2 Análisis de los resultados	13
3 Aplicación de resultados	17
3.1 Información	17
4 Conclusiones	21

Lista de figuras

1.1	Grafo Prisma	7
1.2	Grafo Prisma sin una conexión	8
1.3	Grafo Prisma sin dos conexiones	8
1.4	Grafo Bipartito Completo	8
1.5	Grafo Inicial	11
1.6	Grafo con Parent Nodes, indicados en color rojo	11
1.7	Grafo Final	11
2.1	Distribución λ_{min} Erdős-Rényy Vs. Barabási	14
2.2	Mínimo valor propio para diferentes valores de k	14
3.1	Comunidades 1 y 2 sin intercambio de información. $\lambda_{min} = -1$	18
3.2	Comunidades 1 y 2 intercambian información. $\lambda_{min} = -1.73$	18
3.3	Nodo H conectado a través de un proceso aleatorio. $\lambda_{min} = -1.78$	19
3.4	Nodo H conectado a través de un proceso preferential attachment. $\lambda_{min} = -1.96$	19
3.5	Nodo H conectado a través de un proceso aleatoria. Grafo con menor información local. $\lambda_{min} = -2.18$	19
4.1	Grafo con 3 nodos	23

Introducción

Muchas decisiones que realizan los agentes, dependen en gran medida de la relación con otros agentes. Éste componente relacional es de suma importancia y es objeto de estudio, debido a que emergen características y dinámicas que analizadas de manera individual no se evidencian. Adoptar una nueva tecnología, el rendimiento académico[9], tráfico automotor, el desarrollo empresarial y/o comercial; son algunos ejemplos de cómo la teoría de redes es una gran herramienta de estudio que lleva al entendimiento y a la caracterización de procesos existentes en el mundo real, muchos de ellos de alta complejidad. La teoría y el análisis de redes está fundamentado en la teoría de grafos, rama de las matemáticas discretas por que requiere diversos conocimientos en álgebra, combinatoria, geometría, topología etc.

Definir los nodos y sus relaciones constituyen un grafo como objeto de estudio, de esta forma se buscan métricas que condensan información, establezcan propiedades subyacentes y/o propiedades emergentes del grafo, que permitan analizar el comportamiento de dicho sistema, donde existen medidas propias de la teoría de grafos [13]. Por otra parte existen métricas de una red inspiradas en la teoría espectral de grafos [8][18], donde el espectro de la matriz simétrica asociada al grafo, constituye un objeto de estudio como lo plantean [11][1]. Bramoullè, Kranton & D’Amours (2014)[7] se centran en el análisis del mínimo valor propio, denotado λ_{min} de la matriz de adyacencia asociado a un grafo simétrico. Los autores muestran que esta medida permite caracterizar los posibles equilibrios: su estabilidad y unicidad, en juegos sobre redes, hecho que encuentran relacionado a una estructura topológica de la red.

El presente trabajo tiene como objetivo estudiar el mínimo valor propio de grafos generados por la familia de modelos de formación de redes propuesta por Jackson y Rogers (2007)[15], en el tránsito de un modelo de formación aleatorio de Erdős-Rényi[10] en un extremo, a un modelo de PA (preferential attachment), planteado por Barabási (1999)[2], en el otro extremo, y discutir las propiedades del conjunto de equilibrios de juegos con funciones de reacción lineal en estas redes, usando el trabajo de [7]. Informalmente: “En el espectro de modelos de Jackson y Rogers, cuando el mecanismo predominante en la formación de la red es el azar (los encuentros fortuitos entre agentes), los juegos con funciones de reacción lineal tienden a tener pocos equilibrios y estos tienden a ser estables.

En cambio cuando el mecanismo predominante son los encuentros entre agentes mediados por amigos comunes, dichos juegos tienden a tener más equilibrios y estos tienden a ser más inestables”.

El modelo planteado en [15] es simulado, partiendo de un grafo G con dimensión $n \times n$ que expresa, cuantos nuevos nodos podrán ingresar a la red una vez empiece el proceso de formación. De esta forma, a partir del valor esperado de nuevos nodos a conectar, se obtiene el mínimo valor propio del grafo resultante de diferentes procesos de formación. Con respecto a lo descrito en [7] se analiza el λ_{min} del grafo resultante de los diferentes procesos de formación, obteniendo como resultados que la magnitud de $|\lambda_{min}|$ cambia de manera abrupta, si se tiene un proceso de formación basado en Erdős-Rényi frente a un proceso preferential attachment, y por otro lado la magnitud del mínimo valor propio aumenta cuando se tiene un valor esperado mayor de posibles nodos a conectar.

El presente trabajo toma el siguiente orden. El capítulo 1 describe los preliminares que se tuvieron en cuenta para el desarrollo del presente trabajo; se plantea la teoría de redes y cómo esta se ha convertido en una potente herramienta para el estudio de muchas ciencias como la economía, ecología, biología; haciendo énfasis en el análisis de redes sociales. Se estudia la teoría de grafos, rama de las matemáticas discretas y con ella la teoría espectral de grafos que es pieza fundamental en el presente estudio. Se analiza el mínimo valor propio planteado en [7] y su relación con la estructura del grafo G y el número de equilibrios del juego envuelto en la red, se plantea el problema a estudiar y por último se describen los modelos de formación de redes: Erdős-Rényi y preferential attachment (Barabási), los cuales son utilizados en el modelo de formación de Jackson & Rogers [15]; también se describe el algoritmo de este modelo, el cual es utilizado para desarrollar los resultados del presente trabajo. El capítulo 2 muestra los principales resultados obtenidos en las simulaciones del modelo de formación planteado en [15] para diferentes configuraciones que establecen las características del proceso de formación. En este capítulo también se detalla las implicaciones de cada uno de los procesos de formación, contextualizando los resultados obtenidos por los autores en [7]. El capítulo 3 expone los resultados en el capítulo anterior y la aplicación del mínimo valor propio y su relación con el número de equilibrios a una dinámica social.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Redes socio-económicas

La teoría de redes, ha crecido en la última década considerablemente tanto en el mundo académico como en el mundo aplicado [12]. Su análisis se encarga del estudio y la medida de las relaciones entre los nodos (agentes), convirtiéndose en una poderosa herramienta.

La teoría de redes es fundamentada en la teoría de grafos, estructura matemática que tiene su base en las matemáticas discretas. Dos de los campos en donde se encuentra una gran aplicabilidad de dicha teoría es en economía y sociología, como es planteado en [13], donde el autor establece que las redes sociales están presentes en todo escenario, tanto económico como social. Por ejemplo en la transmisión de información, en cómo las personas toman decisiones, cómo las personas realizan movimientos y se transportan, en el éxito de una persona, en crimen, en comercio y muchas otras aplicaciones.

Dicho lo anterior, la principal característica y lo que define una red es la relación que puede existir entre los agentes que la componen, como es precisado en [16], donde estos datos relacionales son de gran interés para identificar cómo los pares de un agente lo influncian y a su vez se ven influenciados por éste; y así entender las características que tienen y emergen de las relaciones, y cómo estas permiten obtener información sobre los mismos agentes y sus comportamientos a través de sus interacciones con otros.

Planteada la red: agentes y conexiones, se realiza un análisis a partir de las diferentes medidas propias de la teoría de redes como lo son: centralidad, asortatividad, diámetro, clustering, entre otras; que permiten identificar el comportamiento y obtener información de los agentes y de la red total.

En redes socio-económicas, por ejemplo en crimen, conocer los nodos cen-

trales de una red criminal, permitirá direccionar la atención hacia estos nodos, puesto que con su captura, la red total podría caer de forma inmediata. En transporte aéreo, los aeropuertos existentes en un país son nodos y los vuelos existentes entre ellos, conexiones; de esta forma se pueden visualizar aspectos como: aeropuertos centrales, conectividad y eficiencia de la red de transporte. Una aplicación del análisis de redes, es observar los comportamientos de los nodos, dadas las conexiones existentes con sus vecinos, [6] afirmando que los individuos en un mismo grupo, se comportan de manera similar, debido a que comparten lugares y experiencias similares, de esta forma estudian los efectos de pares a través de la red.

El presente estudio a diferencia de otros, que se concentran en medidas de la teoría de redes, se basa en el mínimo valor propio de la matriz simétrica asociada al grafo y de esta forma, analizar cómo este valor puede llevar a comprender y detallar comportamientos, características y/o dinámicas de la red. El análisis de redes, desarrollado en el presente trabajo, busca establecer la relación entre propiedades topológicas de la red y el desempeño de la misma [17].

1.2 Teoría de grafos y teoría espectral de grafos

En esta sección se detallará en que consiste la teoría de grafos, se darán algunas definiciones de esta estructura matemática, fundamentada en las matemáticas discretas. A continuación, se introducirá la teoría espectral de grafos, que involucra métodos algebraicos para el estudio y análisis de grafos y consolida una fuerte herramienta para el presente estudio. Esta teoría contiene el concepto de matriz de adyacencia, la cual es una representación del grafo en forma matricial, con la cual se pueden desarrollar distintos análisis.

1.2.1 Teoría de grafos

En [19], el autor describe la teoría de grafos como una rama consolidada de las matemáticas, más específicamente de las matemáticas discretas, encontrando aplicación en diversas ciencias como por ejemplo: genética, lingüística, geografía, sociología, entre otras. A continuación se definirá formalmente dicha estructura:

Definición 1.2.1. *Un grafo, es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto no vacío de vértices, y el conjunto de aristas E es compuesto por pares no ordenados de vértices. Formalmente $E =: \{(x, y) : x, y \in V \wedge x \neq y\}$. La gran mayoría de grafos son considerados finitos, aunque también existen grafos infinitos.*

Ejemplo: $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$. Por lo tanto si un elemento $\{x, y\} \in E$ quiere decir que x es adyacente a y , es decir, están conectados.

Definición 1.2.2. Sea V el conjunto de vértices de G y sea E el conjunto de aristas de G . $|V|$ es el orden de G y $|E|$ es el tamaño de G .

Definición 1.2.3. El grado de un nodo $i \in G$, es definido como: $d(i) := |\{j \in G : \{i, j\} \in E\}|$

Definición 1.2.4. Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito, si existen $V_1, V_2 \subseteq V$ tal que $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $\forall (x, y) \in E$, $(x \in V_1 \wedge y \in V_2) \vee (x \in V_2 \wedge y \in V_1)$.

La definición 1.2.4 será de importancia en el presente trabajo, debido a que la interpretación de λ_{min} , está directamente relacionada con la estructura de bipartitud de un grafo, como se detallará más adelante.

A partir de la definición 1.2.1 se define la matriz de adyacencia. Se asume que un grafo G tiene un conjunto de vertices $V = \{1, 2, \dots, n\}$:

Definición 1.2.5. (Matriz Adyacencia) Las entradas de una matriz de adyacencia de un grafo G , $a_{i,j}$, son definidas de la siguiente forma:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin E \end{cases} \quad (1.1)$$

1.2.2 Teoría espectral de grafos

La teoría espectral de grafos, se basa en asociar un grafo a su matriz de adyacencia, luego computar y estimar los valores propios de esta matriz. Con los valores propios ya establecidos, se relacionan a la estructura y propiedades del grafo; siendo así una herramienta algebraica combinatorial, [8][21].

La matriz de adyacencia de un grafo G , es simétrica, con entradas no negativas, de esta forma tiene un conjunto de valores propios reales (no necesariamente distintos) denotado por:

$$\lambda_{min}(G) = \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 = \lambda_{max}(G), \quad (1.2)$$

siendo $\lambda_{min}(G)$ el mínimo valor propio de la matriz de adyacencia de G y $\lambda_{max}(G)$ el máximo valor propio de la matriz de adyacencia de G , [1]. A través del Teorema de Perron-Frobenius [20] se tiene que:

$$0 < -\lambda_{min}(G) \leq \lambda_{max}(G). \quad (1.3)$$

De esta forma el mínimo valor propio λ_{min} del espectro de la matriz asociada al grafo G , siempre es negativo. Este valor propio será asociado a la estructura y al número de posibles equilibrios del grafo G .

1.3 Relación entre λ_{min} y la estructura de la red

En lo descrito en la teoría espectral de grafos, si una matriz es simétrica con entradas reales, se tiene que: $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, donde $\lambda_1 = \lambda_{min}$. En [7] los autores analizan la importancia del mínimo valor propio en resultados económicos y sociales. Este capítulo tiene como objetivo estudiar la relación entre el mínimo valor propio y la estructura de la red.

En un juego sobre redes, se tiene un conjunto de $N = V$ jugadores (agentes), conectados a través de una red (N, G) . Cada agente i , toma una acción x_i , formando el conjunto de acciones $X = (x_1, \dots, x_n)$. Para cada agente i su función de utilidad es de la forma $U_i(x_i, x_{-i}; \delta, G)$. El parámetro $\delta \geq 0$ mide cuanto se afectan los pagos de los individuos i y j dado que están conectados (la influencia de un agente en el otro y viceversa). Puesto que en [7] se caracteriza la función de utilidad de cada individuo i sobre la estructura de la red G . Dado que cada agente i quiere maximizar U_i , la acción que maximiza, toma la forma $x_i = f_i(x_{-i}; \delta, G)$ ¹.

x^* denota el conjunto de acciones que son mejor respuesta para cada individuo i . Las cuales consolidan un equilibrio de Nash.

Un caso particular de este tipo de juegos es donde la función de mejor respuesta $x_i^* = f_i(x_{-i}^*, \delta, G)$, para todo $i = 1, \dots, n$, es lineal:

$$f_i(x_i, \delta, G) = \begin{cases} \bar{x}_i - \delta \sum_j g_{ij} x_j & \text{si } \delta \sum_j g_{ij} x_j < \bar{x}_i \\ 0 & \text{si } \delta \sum_j g_{ij} x_j \geq \bar{x}_i. \end{cases} \quad (1.4)$$

Donde $g_{ij} = g_{ji} = 1$ indica que i y j están conectados. Por ejemplo en el caso de la provisión local de bienes públicos [5], \bar{x}_i iguala los beneficios marginales con los costos marginales, entonces el agente i solo contribuye (agente activo) en el caso en que la provisión agregada del bien público esté por debajo de su beneficio marginal sobre el consumo del bien público. En caso contrario no tiene un incentivo a contribuir (agente inactivo).

El equilibrio en la provisión de bienes públicos en este contexto depende: primero, de la sustituibilidad δ entre los bienes públicos que provee i o su vecino j y segundo en la medida en que la provisión del bien público es local, el individuo i se beneficia únicamente de la provisión del bien público de un vecino, donde el parámetro g_{ij} indica si el individuo j es vecino de i ; el conjunto de todos los g_{ij} está representado por la matriz de contigüidad G .

Los autores encuentran que el conjunto de equilibrios depende del mínimo valor propio de la red G y del parámetro de sustituibilidad δ . Obteniendo los siguientes resultados:

¹La función maximizadora puede no existir bajo ciertas condiciones relativamente débiles.

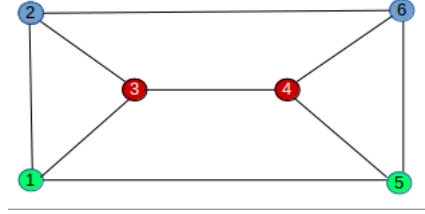


Figura 1.1: Grafo Prisma

- Si $|\lambda_{min}(G)| < \frac{1}{\delta}$ hay un único equilibrio de Nash.
- Si $|\lambda_{min}(G)| > \frac{1}{\delta}$ hay posiblemente múltiples equilibrios.

Por tal razón el mínimo valor propio es una métrica que dada la estructura de la red G y el nivel de sustituibilidad de los agentes δ , permite caracterizar el número de equilibrios en juegos como el ilustrado anteriormente. Es importante indagar: en qué medida diferentes formas de configuración de la red G , generan diferentes valores propios. De esta forma en [7] los autores utilizan redes bipartitas y no bipartitas para explorar los cambios sobre el mínimo valor propio. Los autores afirman que este valor tiende a ser más grande en magnitud cuando la estructura de la red es más bipartita².

Para corroborar lo anterior se toma el siguiente ejemplo. Se toma el grafo prisma G_P , Figura 1.1.

Observando las conexiones de este grafo, se tiene que no es un grafo con estructura bipartita, de acuerdo con la Definición 1.2.4. Dado que los nodos 3 y 4, comparten conexiones con dos diferentes grupos de nodos $\{2, 5\}$ y $\{1, 6\}$. Hallando el mínimo valor propio de este grafo se tiene: $\lambda_{min}(G_P) = -2$.

Quitando la conexión entre 2 y 3 el grafo prisma se convierte en el grafo representado en la Figura 1.2.

Hallando el mínimo valor propio de este grafo 1.3, se tiene que: $\lambda_{min}(G) = -2.2$. Esto muestra que al quitar esta conexión el grafo prisma, toma una estructura con más tendencia a la definición de bipartitud, puesto el nodo 3 tendría conexiones solo con un grupo.

Quitando al último grafo, la conexión entre el nodo 4 y el nodo 6 se tiene el grafo de la Figura 1.3. Donde $\lambda_{min}(G) = -2.6$.

²En la literatura no existe una definición de ser “más o menos bipartito” (dado que bipartito es una propiedad binaria: se tiene o no se tiene). Uno de los aportes importantes del trabajo de Bramoullé et al., Consiste en mostrar que el mínimo valor propio de la matriz de adyacencia puede ofrecer la posibilidad de definir formalmente la idea de ser “más o menos bipartito”, pero dicha tarea está fuera de las pretensiones del presente trabajo

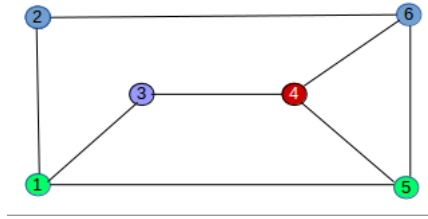


Figura 1.2: Grafo Prisma sin una conexión

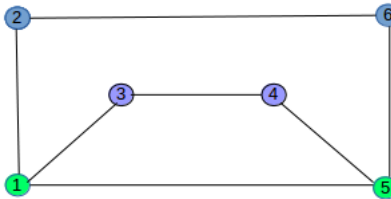


Figura 1.3: Grafo Prisma sin dos conexiones

Removiendo estas dos conexiones, se puede interpretar que el grafo prisma inicial, toma una estructura más bipartita, puesto que los nodos 3 y 4 ya no son nodos con conexiones entre dos diferentes grupos, puesto tienen conexiones con un solo grupo, lo que se acerca más a la definición de bipartitud 1.2.4.

Del otro lado tomando el grafo completamente bipartito G_{BC} , Figura 1.4. Se observa que los nodos 1, 2, 3 conforman un grupo y los nodos 4, 5, 6 otro; siguiendo la Definición 1.2.4. Al hallar su mínimo valor propio, se tiene: $\lambda_{min}(G_{BC}) = -3$, siendo éste el mínimo valor propio de mayor magnitud que se pueda encontrar en un grafo con 6 nodos.

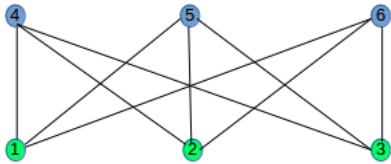


Figura 1.4: Grafo Bipartito Completo

1.4 Planteamiento del problema

Los autores en [7], plantean cuatro preguntas: i.) dada una red con n nodos y un número limitado de conexiones, ¿cuál es el grafo que tiene asociado el mínimo valor propio más grande en magnitud ($|\lambda_{min}|$), cuya respuesta es el grafo completamente bipartito, como el mostrado en la Figura 1.4. ii.) si una red tiene n agentes y adicional a esto tiene un número ilimitado de conexiones, ¿cuál es el grafo G cuyo mínimo valor propio asociado es el de mayor magnitud posible?. Esta pregunta se responde en [3][4]. iii.) cuál es la relación entre λ_{min} y la estructura de bipartitud, esta pregunta es respondida de manera directa en el mismo artículo. iv.) ¿Cómo son los mínimos valores propios de redes generadas por distintos procesos de formación?.

Para resolver esta pregunta, se estudian aquellas redes generadas por la parametrización del modelo de Jackson y Rogers [15], que se detallará a continuación; la cual se centra en la transición de un modelo de Erdős-Rényi, el cual plantea que un nuevo nodo se enlaza con igual probabilidad con el resto de la red, a un modelo “preferential attachment”, el cual genera nuevas conexiones libre de escala, donde pocos nodos en la red tienen un grado alto de conexión y los demás grado bajo, de esta forma, nodos con más conexiones atraen nuevos nodos. Este modelo es simulado para diferentes configuraciones y para el grafo generado en cada caso se halla el mínimo valor propio; estos valores se asocian a los resultados obtenidos en [7].

1.5 Modelo Jackson & Rogers

El proceso de formación de redes propuesto en [15], dentro de la literatura de la formación de redes, tiene un valor agregado, debido a que los nodos pueden formar múltiples conexiones al mismo tiempo a través de procesos aleatorios o Network Based Meeting (NBM), es decir, a través de la red. El resultado del modelo es un grafo G , el cual tiene un número de nodos limitados a entrar, es decir, finito y un valor esperado de las posibles conexiones que los nuevos nodos pueden establecer.

El algoritmo que simula dicho proceso de formación de redes se plantea de la siguiente forma:

- Se tiene una población sobre una cantidad finita de nodos.
- Cada tiempo (date) t un nuevo nodo es adicionado a la población.

De esta forma definimos:

- N_t := Conjunto de todos los nodos presentes al final del tiempo t .
- $g(t)$:= La red formada por conexiones sobre N_t al final del tiempo t .

- $d_i(g) := |\{j \in N : g_{j,i} = 1\}|$, el grado del nodo i .

El algoritmo entonces comienza de la siguiente forma:

- Nace un nodo t , éste identifica m_r nodos aleatoriamente de N_{t-1} . Los cuales se denominarán *Parent Nodes*.
- $p_r :=$ Probabilidad que un nuevo nodo se conecte con un parent node.
- El nuevo nodo t también encuentra un total de m_n nodos a través de la red.
- $p_n :=$ Probabilidad que el nuevo nodo t se conecte a algún nodo a través de la red.

1.5.1 Ejemplo motivacional del algoritmo

Se tienen $N = 7$ nodos, con los cuales se realiza una primera red aleatoria, la cual constituye el grafo inicial G , Figura 1.5, representado por la siguiente matriz simétrica:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & & & & & & &
 \end{array}
 \end{array} \tag{1.5}$$

Al entrar el nodo 8 a la red, lo primero que realiza este nodo, es escoger su conjunto de *parent nodes*, es decir, escoge de los siete nodos existentes, con cuales se conectaría dada la probabilidad p_r . Este proceso hace referencia a la parte aleatoria del modelo. De esta forma, los parent nodes del nodo 8 son: $parentnodes_8 := \{1, 3, 5\}$. Figura 1.6, de esta forma se obtiene la matriz simétrica 1.6.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & & & & & & & &
 \end{array}
 \end{array} \tag{1.6}$$

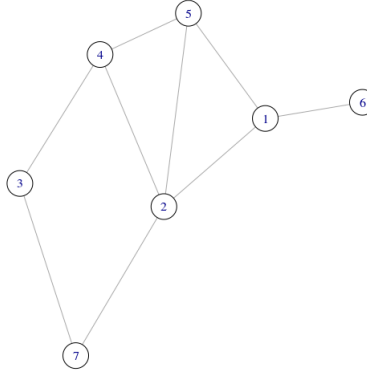


Figura 1.5: Grafo Inicial

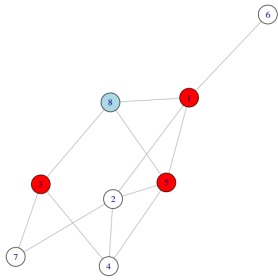


Figura 1.6: Grafo con Parent Nodes, indicados en color rojo

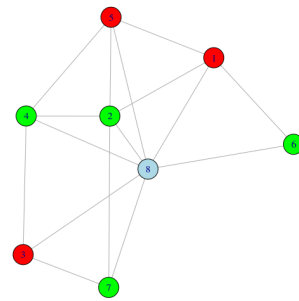


Figura 1.7: Grafo Final

Luego, para captar la parte NBM del modelo, se identifican los vecinos de los *parent nodes*, en este caso, los vecinos de los nodos 1, 3, y 5. Sin tomar el nodo 8, el cual fue el último en ingresar.

$$v_1^0 = \{2, 5, 6\}, v_3^0 = \{4, 7\}, v_5^0 = \{1, 2, 3\}$$

Para construir el conjunto de nodos conectados a través de la red, el cual se definirá como: $Ngbdparent8$, se analizarán v_1^0 , v_3^0 y v_5^0 :

- Para $v_1^0 := \{2, 5, 6\}$ como 5 ya es un parent node de 8, es decir, ya existe una conexión entre 5 y 8. Entonces $v_1^1 := \{2, 6\}$, tendrá a 2 y 6 como

posibles nodos a ser $Ngbhdparent8$.

- Para $v_3^0 := \{4, 7\}$. El nodo 3 no tiene vecinos que ya sean parent nodes, luego los nodos 4 y 7 son candidatos de estar en $Ngbhdparent8$.
- Para $v_5^0 := \{1, 2, 3\}$ Los nodos 1 y 3 ya están conectados con el nodo 8, debido a que son Parent Nodes, luego $v_5^1 := \{2\}$, siendo el nodo 2 el único candidato a ser $Ngbhdparent8$.

De esta forma $Ngbhdparent8 := v_1^1 \cup v_3^1 \cup v_5^1 = \{2, 4, 6, 7\}$. Esto quiere decir que si p_n es grande, el nodo 8 se conectará a los nodos 2, 4, 6 y 7.

Obteniendo como resultado del modelo de formación el grafo Figura 1.7 representado por la matriz simétrica 1.7.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 1 & & & & & & & & \\
 2 & & & & & & & & \\
 3 & & & & & & & & \\
 4 & & & & & & & & \\
 5 & & & & & & & & \\
 6 & & & & & & & & \\
 7 & & & & & & & & \\
 8 & & & & & & & &
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
 \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array} \tag{1.7}$$

Los *parent nodes* están representados en rojo, los nodos conectados a través de vecinos de la red, están en verde y el nodo 8, que representa el último nodo en ingresar a la red, está de color azul.

Capítulo 2

Análisis de los resultados

Al realizar 10.000 simulaciones en el espectro de modelos de formación planteados en [15] donde en un extremo, se tiene un modelo de formación aleatorio de Erdős-Rényi y en el otro extremo un proceso preferencial attachment (Barabási); fijando los mismos parámetros en cada simulación de cada proceso: el mismo número de nodos y el mismo número de conexiones, se obtiene que la distribución de λ_{min} del grafo formado a través de Erdős-Rényi domina estocásticamente en primer orden a la distribución de λ_{min} del grafo formado a través del proceso de Barabási, Figura 2.1. De igual forma, las simulaciones muestran que los resultados obtenidos en cada uno de los procesos de formación son independientes de la configuración de los parámetros en cada proceso de formación de la red.

Por otra parte, el modelo de formación de redes en [15], plantea que el valor esperado de conexiones de un nuevo nodo que ingresa a la red, viene dado por:

$$k = m_n p_n + m_r p_r \quad (2.1)$$

Donde m_r y m_n son los nodos identificados por este nuevo nodo de manera aleatoria y a través de la red respectivamente, de igual forma p_r y p_n son las probabilidades que este nuevo nodo establezca la conexión respectivamente para cada proceso.

Utilizando este proceso de formación para encontrar λ_{min} del grafo resultante G , se precisa que al simular dicho proceso formativo, se tenga el mismo valor esperado de posibles conexiones. De esta forma, fijando un k se quiere ver cómo cambia $\lambda_{min}(G)$ cuando varían p_r y p_n .

Luego despejando p_n de (2.1), se tiene:

$$p_n = \frac{k}{m_n} - \frac{m_r p_r}{m_n} \quad (2.2)$$

Puesto que p_n es una probabilidad con la cual una conexión a través de la

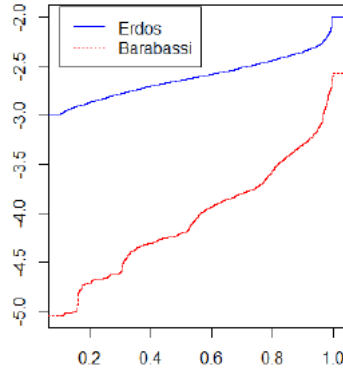


Figura 2.1: Distribución λ_{min} Erdős-Rényi Vs. Barabási

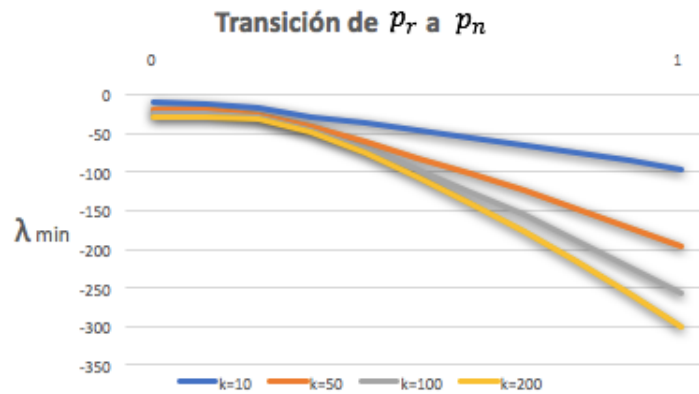


Figura 2.2: Mínimo valor propio para diferentes valores de k .

red con el nuevo nodo se obtiene, debe ir de 0 a 1. Fijando $k = m_r = m_n$, la ecuación (2.2) toma la forma:

$$p_n = 1 - p_r \quad (2.3)$$

En la simulación del modelo, fijando los datos $m_r = m_n = k$ y un número de nodos de 1000 para el grafo resultante, se tienen resultados para diferentes valores de k , es decir, diferentes valores esperados de posibles conexiones¹, Figura 2.2.

Donde en la gráfica se tiene que cuando $p_r = 1$ y $p_n = 0$ el proceso de formación es aleatorio(Erdős-Rényi). Y para $p_r = 0$ y $p_n = 1$ el proceso de formación es preferential attachment(Barabási). Analizando los resultados

¹Para cada valor de k , se realizaron 10000 simulaciones para generar validez de los resultados.

obtenidos, se observa que en el modelo simulado cuando no se tienen conexiones a través de la red, es decir, solamente de forma aleatoria, $|\lambda_{min}|$ es mucho menor en magnitud, en comparación a la magnitud del mínimo valor propio obtenido de una red en la cual su proceso de formación es a partir de conexiones a través de la red; como también se observó en el resultado anterior, Figura 2.1. Por otra parte, en los resultados de las simulaciones, se puede observar que a medida que el valor esperado de nodos k es mayor, $|\lambda_{min}|$ crece en magnitud. Y para cualquier k el mínimo valor propio obtenido de un proceso aleatorio a uno basado en la red, cambia de forma lineal, de esta forma se tiene que:

$$|\lambda_{min}^{PA}| \approx 10 \cdot |\lambda_{min}^E|, \quad (2.4)$$

donde $|\lambda_{min}^{PA}|$ es el mínimo valor propio de una red formada a través de preferential attachment y $|\lambda_{min}^E|$ es el mínimo valor propio de una red formada a través de un proceso Erdős-Rényi. Por lo tanto:

$$|\lambda_{min}^{PA}| > |\lambda_{min}^E|.$$

Las simulaciones realizadas en el presente trabajo llevan al resultado planteado en (2.4). Dicho resultado muestra que los grafos formados mediante preferential attachment se acercan más a tener una estructura bipartita, debido a que su mínimo valor propio es mucho más grande en magnitud frente a un mínimo valor propio de un grafo formado a través de Erdős-Rényi.

Por otra parte los resultados obtenidos en [7] planteados en el capítulo 1, establecen una relación del número de equilibrios del juego sobre la red a través del mínimo valor propio:

1. Si $|\lambda_{min}(G)| < \frac{1}{\delta}$ existe un único equilibrio.
2. Si $|\lambda_{min}(G)| > \frac{1}{\delta}$ existen posiblemente múltiples equilibrios.

De esta forma, la estructura de la red G y el nivel de sustituibilidad de los agentes δ , permite caracterizar el número de equilibrios.

Para corroborar lo establecido por los autores, se utilizó el algoritmo propuesto en [7] ². Se plantean dos grafos con un mismo número de nodos y un mismo número de arcos: el grafo prisma(G_P) Figura 1.2 y el grafo completamente bipartito(G_{BC}) Figura 1.4. Para los cuales, el mínimo valor propio es -2 y -3 respectivamente.

Al simular el algoritmo, se tienen los siguientes resultados para diferentes valores de δ :³

²Ver apéndice para la descripción del algoritmo.

³Para cada configuración de δ y cada grafo se realizaron 1000 simulaciones del algoritmo.

- $\delta = 0.1$

Grafo	$ \lambda_{min} $	Desigualdad	$1/\delta$	N° Equilibrios
Bipartito	3	<	10	1
Prisma	2	<	10	1

- $\delta = 0.4$

Grafo	$ \lambda_{min} $	Desigualdad	$1/\delta$	N° Equilibrios
Bipartito	3	>	2.5	2
Prisma	2	<	2.5	1

- $\delta = 1$

Grafo	$ \lambda_{min} $	Desigualdad	$1/\delta$	N° Equilibrios
Bipartito	3	>	1	12
Prisma	2	>	1	8

Interpretando las tablas de resultados, cuando el nivel de sustituibilidad es alto ($\delta = 1$), hay menos agentes activos, los cuales no se ven en la necesidad de proveer al bien público local, configurando múltiples equilibrios, esto se evidencia tanto en el grafo bipartito como en el grafo prisma. Analizando el otro caso extremo, cuando el nivel de sustituibilidad es bajo ($\delta = 0.1$); el grafo prisma y el grafo bipartito presentan un único equilibrio y la razón es que la sustituibilidad es tan baja, que lo más probable es que todos los agentes sean activos y solo va a existir una configuración que lo permita, llevando a un único equilibrio.

Cuando se tiene una sustituibilidad media, se presenta el caso interesante, debido a que el mínimo valor propio y por consiguiente la topología de la red, más o menos bipartita toma mayor relevancia. Para el ejemplo estudiado, se toma $\delta = 0.4$, puesto que $|\lambda_{min}(G_P)| = |-2| < \frac{1}{0.4} = 2.5 < |-3| = |\lambda_{min}(G_{BC})|$. De esta forma se encuentra que al estar $1/\delta$ en el borde de los dos mínimos valores propios de cada grafo, la bipartitud conlleva a que se establezcan múltiples equilibrios y un único equilibrio, para el caso del grafo prisma.

Lo encontrado y analizado anteriormente lleva a plantear, que teniendo en cuenta una sustituibilidad media de los agentes, un grafo formado a través de preferential attachment al tener un mínimo valor propio mayor en magnitud, tiende a tener una estructura más bipartita y a presentar un múltiple equilibrio en una dinámica de juegos sobre redes. Mientras que un grafo generado de manera aleatoria muestra un estructura menos bipartita y tenderá a tener un único equilibrio. Concluyendo que cuando δ toma un valor medio, λ_{min} se considera de gran importancia para encontrar el número de equilibrios.

Capítulo 3

Aplicación de resultados

El planteamiento y simulación del modelo de formación de redes [15], llevan a responder la pregunta planteada en [7] la cual fue el motivo y principal objetivo del presente trabajo. En este artículo, los autores describen ejemplos de aplicación, en relación a la importancia del mínimo valor propio en identificar el posible número de equilibrios en un juego sobre redes. A continuación se expone la aplicación del presente trabajo a una dinámica social, como lo es la provisión de información.

3.1 Información

La información es un bien público que es proporcionado de manera privada y es consumido solo por los agentes que tienen conexiones sociales y/o geográficas. El intercambio de información, se da entre los distintos agentes y puede beneficiar o perjudicar los mismos. Un modelo que puede captar esta dinámica es el siguiente:

Sea x_i la información generada por el agente i y sea:

$$U_i(x_i, x_{-i}) = b(x_i + \delta \sum_j g_{ij} x_j) - cx_i \quad (3.1)$$

Donde $b()$ es el beneficio de información, c es el costo marginal y δ es la sustituibilidad entre los vecinos, es decir, mide la influencia de la información de un agente en sus vecinos y viceversa, siempre y cuando estén conectados.

Sean dos comunidades pesqueras: La Comunidad 1, tiene 3 botes pesqueros: A, B y C. La comunidad 2 tiene 3 botes pesqueros: X, Y, Z. Las conexiones entre los diferentes agentes denotan si hay intercambio de información entre los agentes: mercados, tecnología, bienestar, [14].

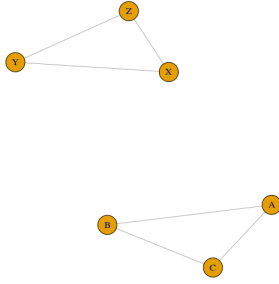


Figura 3.1: Comunidades 1 y 2 sin intercambio de información. $\lambda_{min} = -1$

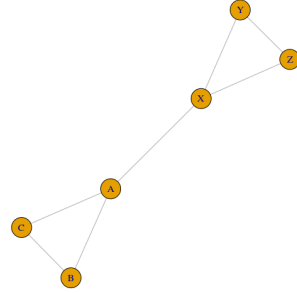


Figura 3.2: Comunidades 1 y 2 intercambian información. $\lambda_{min} = -1.73$

Si las comunidades 1 y 2 no se relacionan entre sí, ninguno de los botes pesqueros de una comunidad intercambia información con otro bote de otra comunidad, Figura 3.1. Sea $P1$, la matriz de adyacencia del grafo que representa la anterior dinámica, de esta forma $\lambda_{min}(P1) = -1$. Cuando existe intercambio entre dos agentes de diferente comunidad, Figura 3.2, su matriz de adyacencia es definida como $P2$ y $\lambda_{min}(P2) = -1.73$

Siguiendo entonces el modelo de formación de redes, planteado por Jakson & Rogers, el cual fue simulado anteriormente. Si un nuevo nodo ingresa a la red, se enfrenta a dos procesos, realizar conexiones de manera aleatoria y/o a través de la red.

Supongamos que un nodo H entra a la red pesquera. Si este nodo se conecta de modo aleatorio, tendrá la misma probabilidad de conectarse con cualquiera de los nodos existentes. Supongamos que H se conecta al nodo B, Figura 3.3, siendo $PH1$ la matriz que representa dicha dinámica, $\lambda_{min}(PH1) = -1.78$. Si el nodo H se conecta a través de un proceso preferential attachment, tendrá una probabilidad mayor de conectarse a los nodos A ó X, puesto que estos nodos tienen mayor grado de conexión, luego contienen más información. A manera de ejemplo, el nodo H se conecta al nodo A, Figura 3.4. Sea $PH2$ la matriz que representa este grafo, luego $\lambda_{min}(PH2) = -1.96$.

Adicional a lo anterior, si entre los agentes de una misma comunidad no se transmite gran cantidad de información, Figura 3.5. $\lambda_{min}(PH3) = -2,18$, siendo $PH3$ la matriz de adyacencia del grafo. Para este caso, el nodo H se conecta a través de preferential attachment, y los nodos A y X tienen una probabilidad aún mayor de conectarse a H que en el caso anterior, debido a que contienen una mayor concentración de información, lo que llevaría a que sean menos activos en la provisión de información, generando distintas configuraciones. De esta forma, se tiene que:

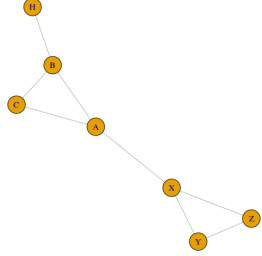


Figura 3.3: Nodo H conectado a través de un proceso aleatorio. $\lambda_{min} = -1.78$

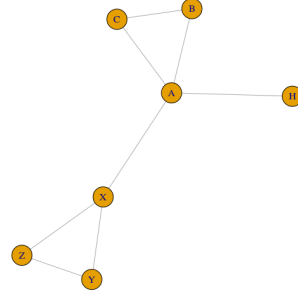


Figura 3.4: Nodo H conectado a través de un proceso preferential attachment. $\lambda_{min} = -1.96$

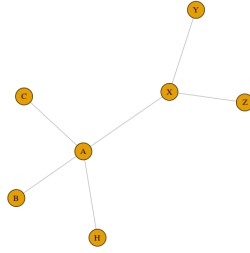


Figura 3.5: Nodo H conectado a través de un proceso aleatoria. Grafo con menor información local. $\lambda_{min} = -2.18$

$$|\lambda_{min}(PH3)| > |\lambda_{min}(PH2)| > |\lambda_{min}(PH1)| \quad (3.2)$$

Lo que concluye que un grafo con poca información local entre sus agentes, y formado de una manera menos aleatoria, presentará una topología más bipartita y corrobora el hecho de tener el mínimo valor propio más negativo.

Por otra parte al relacionar los resultados en (3.2) con el número de equilibrios que se podrían encontrar en el juego sobre redes, se considera la función de utilidad planteada en (3.1), donde U_i debe ser estrictamente creciente. Luego se utiliza el algoritmo planteado en [7], para los grafos $PH1$ y $PH3$. Como se mostró en el análisis de resultados, cuando existe alta sustituibilidad en el juego, los dos grafos tendrán múltiples equilibrios y cuando hay baja sustituibilidad se encontrará un único equilibrio. El caso interesante se presenta con una sustituibilidad media, para el ejemplo se tomo $\delta = 0.5$, de esta forma se tiene que:

Grafo	$ \lambda_{min} $	Desigualdad	$1/\delta$	N° Equilibrios
PH1	1.78	<	2	1
PH3	2.18	>	2	2

Para este caso, se retorna a lo encontrado en el ejemplo del análisis de resultados, al presentarse una sustituibilidad media, el mínimo valor propio y por ende la topología y el proceso de formación de la red toman relevancia. El grafo *PH3* al formarse a través de un proceso preferential attachment, presenta una topología más bipartita y un mínimo valor propio de mayor magnitud, esto debido a que los agentes A y X tienen mayor grado de conexión y de esta forma contienen más información, la cual permite que sean menos activos en la generación de información, llevando a que se planteen diferentes configuraciones, donde unos agentes pueden proveer más que otros y se obtengan múltiples equilibrios.

Por otra parte el grafo *PH1* tiene un mínimo valor propio de menor magnitud, que se asocia a una topología menos bipartita y a un proceso de formación aleatorio, entonces los agentes en su mayoría serán activos, es decir, aportarán información de manera similar, lo que generará una única configuración y un único equilibrio.

Capítulo 4

Conclusiones

La teoría de redes se ha convertido en una poderosa herramienta para analizar sistemas que modelan fenómenos del mundo real, es como de esta forma, dicha teoría es aplicada en ecología, biología, física, computación entre muchas otras ramas; teniendo una gran aplicabilidad en dinámicas socio-económicas. La visualización y análisis de las dinámicas establecidas por los agentes que al relacionarse e interactuar entre ellos generan propiedades emergentes, son estudiadas a través de las diferentes medidas como: centralidad, diámetro, asortatividad, etc. Debido a que la teoría de redes es basada en la teoría de grafos, estructura perteneciente a las matemáticas discretas, las redes son plateadas como matrices de adyacencia y de esta forma son estudiadas mediante la teoría espectral de grafos, método que utiliza el espectro, conjunto de valores propios para identificar características de la red en sí.

El presente trabajo se basa en el estudio del mínimo valor propio de la matriz de adyacencia asociada al grafo. Bramoullé, Kranton & D'Amours(2014)[7], estudian como esta medida está relacionada con la estructura topológica de la red y al número de equilibrios del juegos sobre la red; estableciendo que una red con un mínimo valor propio de mayor magnitud está asociado a una red bipartita y a su vez dependiendo de la sustituibilidad de los agentes, presenta múltiples equilibrios en el juego sobre la red; contrario a una red no bipartita, la cual tendrá un mínimo valor propio de menor magnitud y tiende a tener un único equilibrio.

Partiendo de esta idea, el valor agregado del presente trabajo es analizar qué sucede con el mínimo valor propio de un grafo resultante ante diferentes procesos de formación; de esta forma se considera el modelo planteado por Jackson & Rogers [15] el cual se basa en un extremo en el proceso de formación de Erdős-Rényi, donde los nodos se conectan de forma aleatoria y en el otro extremo el proceso de formación preferential attachment, donde las conexiones se presentan a través de la red, amigos de amigos.

Los resultados de las simulaciones generadas del modelo de formación de-

scrito en [15], muestran que una red generada por preferential attachment tiene un mínimo valor propio de mayor magnitud en comparación a una red generada a través de Erdős-Rényi. Adicionalmente, muestran que una red generada por un modelo híbrido presenta un mínimo valor propio más cercano en magnitud al generado por preferential attachment. Estos resultados concluyen que el proceso de formación preferential attachment genera una red con estructura más bipartita a diferencia de un proceso de formación Erdős-Rényi que genera un grafo menos bipartito.

Al relacionar estos resultados con la cantidad de equilibrios que se pueden presentar en el juego sobre la red, se tiene que dependiendo del valor de sustituibilidad se presenta un único equilibrio o múltiples equilibrios. Cuando el nivel de sustituibilidad es medio, la topología y el proceso de formación de la red toman relevancia; luego, un mínimo valor propio de mayor magnitud y por lo tanto con una estructura más bipartita tiende a presentar múltiples equilibrios y un grafo con mínimo valor propio y una estructura menos bipartita presenta un único equilibrio.

Los resultados obtenidos, son aplicados a una dinámica social de intercambio de información entre dos comunidades pesqueras, encontrando que ante diferentes procesos de formación y dependiendo del nivel de sustituibilidad de los agentes, se puede establecer la relación mínimo valor propio-bipartitud-número de equilibrios.

Apéndice

A1: Algoritmo para computar todos los equilibrios:

Dado un grafo G sobre un conjunto finito de N agentes, considerar $S \subset N$. Si $|\mathbf{I} + \delta G_S| \neq 0$, computar el perfil $X_S = |\mathbf{I} + \delta G_S|^{-1} \mathbf{1}$ y sea $X_{N-S} = \mathbf{0}$. Se chequea si $X_S \geq \mathbf{0}$ y $\delta G_{N-S,S} X_S \geq \mathbf{1}$. Si ambas desigualdades se satisfacen, \mathbf{X} es un equilibrio, en caso contrario, no lo es. La repetición de este procedimiento para cada subconjunto de N produce todos los equilibrios para G y casi cualquier δ .

Ejemplo:

Como ejemplo del algoritmo, se hallarán los equilibrios del grafo, Figure 4.1. Para que \mathbf{X} sea un Equilibrio debe satisfacerse:

- $X_S \geq 0$
- $\delta G_{N-S,S} X_S \geq \mathbf{1}$

Sea $N = \{A, B, C\}$ y sea $S = \{B, C\}$. Sea,

$$G_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fijando $\delta = 0.3$, se calcula $|\mathbf{I} + \delta G_S|$:

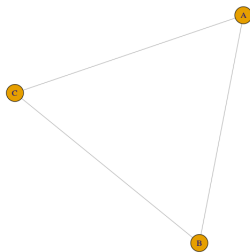


Figura 4.1: Grafo con 3 nodos

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix} \right| \neq 0.$$

Como el valor absoluto es diferente de cero. Se encuentra:

$$X_S = |\mathbf{I} + \delta G_S|^{-1} \mathbf{1}$$

$$X_S = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.769 \\ 0.769 \end{bmatrix},$$

se fija:

$$X_{N-S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte,

$$G_{N-S,S} = [1 \quad 1]$$

$$\delta G_{N-S,S} = [0.3 \quad 0.3]$$

$$\delta G_{N-S,S} X_S = [0.461]$$

En conclusión:

- $X_S \geq 0$
- $\delta G_{N-S,S} X_S < \mathbf{1}$

Luego $\mathbf{X} = (0, 0.769, 0.769)$ no es un equilibrio.

Así se procedería para los otros subconjuntos propios de N:

- $S_2 = \{A, C\}$
- $S_3 = \{A, B\}$
- $S_4 = \{A\}$
- $S_5 = \{B\}$
- $S_6 = \{C\}$

A2: Tablas de resultados de las simulaciones para diferentes k

En cada una de las siguientes tablas se tiene que cuando $p_r = 1$ y $p_n = 0$ el proceso de formación es aleatorio(Erdős-Rényi). Y para $p_r = 0$ y $p_n = 1$ el proceso de formación es preferential attachment(Barabási).

- $k = 10$

p_r	p_n	λ_{min}
1	0	-10.78368
0.9	0.1	-12.54683
0.8	0.2	-17.73655
0.7	0.3	-28.1041
0.6	0.4	-36.73147
0.5	0.5	-46.5636
0.4	0.6	-55.14797
0.3	0.7	-65.47157
0.2	0.8	-76.23785
0.1	0.9	-85.7516
0	1	-96.17414

- $k = 50$

p_r	p_n	λ_{min}
1	0	-19.63463
0.9	0.1	-20.04667
0.8	0.2	-25.96347
0.7	0.3	-40.76186
0.6	0.4	-60.43226
0.5	0.5	-81.57226
0.4	0.6	-102.2771
0.3	0.7	-124.7786
0.2	0.8	-148.2573
0.1	0.9	-172.5879
0	1	-197.2636

- $k = 100$

p_r	p_n	λ_{min}
1	0	-24.04086
0.9	0.1	-24.40785
0.8	0.2	-29.15866
0.7	0.3	-46.60228
0.6	0.4	-71.30305
0.5	0.5	-98.12607
0.4	0.6	-125.6989
0.3	0.7	-156.2541
0.2	0.8	-188.2776
0.1	0.9	-221.7593
0	1	-256.0260

- $k = 200$

p_r	p_n	λ_{min}
1	0	-28.3938
0.9	0.1	-28.27086
0.8	0.2	-30.53615
0.7	0.3	-49.81779
0.6	0.4	-75.40501
0.5	0.5	-107.1048
0.4	0.6	-141.4230
0.3	0.7	-176.7872
0.2	0.8	-215.4612
0.1	0.9	-257.0543
0	1	-299.933

Referencias

- [1] Allouch, N.(2015): “On the private provision of public goods on networks”, *Journal of Economics Theory* 157(527-552).
- [2] Barabási, A-L., Albert, R.(1999): “Emergence of scaling in random networks”, *Science* 286:509–512, pmid:10521342.
- [3] Bell, F. K., Cvetkovic, D., Rowlinson, P., Slobodan K.S.(2008a): “Graphs for which the Least Eigenvalue is Minimal, I.” *Linear Algebra and its Applications* 429 (1): 234–41.
- [4] Bell, F. K., Cvetkovic, D., Rowlinson, P., Slobodan K.S. (2008b): “Graphs for which the least eigenvalue is minimal, II.” *Linear Algebra and its Applications* 429 (8-9): 2168–79.
- [5] Bergstrom, Th., Lawrence B., y Varian H. (1986): “On the private provision of public goods.” *Journal of Public Economics* 29 (1): 25–49.
- [6] Bramoullé, Y., Djebbari, H. y Fortin, B. (2009): “Identification of peer effects through social networks”, *Journal of Econometrics* 150 (2009) 41–55.
- [7] Bramoullé, Y., Kranton, R, and D’Amours, M. (2014): “Strategic interaction and networks”, *American Economic Review* 2014, 104(3): 898–930.
- [8] Brouwer, A.E., Haemers, W.H.(2011): “Spectra of graphs”, Monograph, Springer.
- [9] Calvo-Armengol, A., Patacchini, E. and Zenou, Y. (2008): “Peer effects and social networks in education”, IZA discussion papers, No. 3859, <http://nbnresolving.de/urn:nbn:de:101:1-20081202188>.
- [10] Erdős, P., Rényi, A. (1959): “On random graphs. I.”, *Publicationes Mathematicae* 6: 290–297.
- [11] Golub, B., Jackson, M.(2010): “Naïve learning in social networks and the wisdom of crowds” *American Economic Journal: Microeconomics*, 2:1, 112–149.
- [12] Goyal, S. (2007), *Connections: “An introduction to the economics of networks*, Princeton: Princeton University Press.

- [13] Jackson, M.O. (2008): “Social and economic networks”, Princeton University Press: NJ.
- [14] Jensen, R. (2007): “The digital divide: Information(technology), market performance, and welfare in the south indian fisheries sector”, The Quarterly Journal of Economics, Vol CXXII, Issue 3.
- [15] Jackson M., Rogers, B. (2007): “Meeting strangers and friends of friends: How random are social networks”, American Economics Review 2007, 97(3): 890-915.
- [16] John P. Scott(2000): “Social network analysis: A handbook”, Sage Publications Ltd.
- [17] Lee, David S. and Kalb, Jeffrey L. (2008): “Network topology analysis”, Sandia National Laboratories.
- [18] Nica, B. (2016): “A brief introduction to spectral graph theory”, arXiv:1609.08072 [math.CO]
- [19] Robin J. Wilson. (1996): “Introduction to graph theory”, Prentice hall.
- [20] Smith, R. (2006), “A Spectral Theoretic Proof of Perron–Frobenius”, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, 102 (1): 29–35.
- [21] Spielman, D.(2012): “Spectral graph theory and its applications. Online lecture notes”. <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/eigs/>
- [22] Wasserman, S. and K. Faust (1994), “Social network analysis. Methods and applications”, Cambridge: Cambridge University Press.