

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
FACULTAD DE ECONOMÍA

Taller 9 Economía Matemática Noviembre 6 de 2016

Profesores: Juan C. Zambrano- Andrés F. Cardenas

Se deben realizar todos los ejercicios, y el profesor asistente clasificará al azar algunos puntos.

1. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:

(a)
$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x + 3y - 7 \\ y'(t) &= -x - 2y + 5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x'(t) &= -x + y \\ y'(t) &= -x - y \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x$$

(e)
$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} x$$

2. Encuentre la solución general de los siguientes problemas de valor inicial

(a)
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 25 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{asociado a} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(b) $x' = Ax + b$ con $x(0) = (0, -2, 1)^T$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c)
$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \text{asociado a } X(0) = 0$$

3. Encuentra un sistema lineal autónomo, de la forma $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$, cuya solución sea:

(a)
$$\vec{X}(t) = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

(b)
$$\vec{X}(t) = k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Suponga el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X$, asociado a la condición inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3w \end{pmatrix}$, donde w es una constante real.

(a) Resuelva el sistema de ecuaciones.

(b) ¿cuál debe ser el de w si se desea que $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$?

5. Determine las condiciones sobre las constantes, a, b, c, y, d de modo que en el problema de valor inicial

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$$

la matriz tenga como valores propios λ , y $-\lambda$, donde λ es un valor real. En este caso en particular las curvas solución $x(t)$, $y(t)$, reciben el nombre de curvas catenarias. ¿cuales son dichas curvas en el problema?

6. Resuelva el sistema $\vec{X}' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \vec{X}$, con $\beta > 0$, supiendo que $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de α la solución converge a largo plazo ($t \rightarrow \infty$)?

7. Considera el sistema $\vec{X}' = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{X}$, en donde c , es real, y $c \neq -1$.

- Demuestra que los valores propios del sistema son $\lambda_1 = c$, y $\lambda_2 = -1$
- Encuentra la solución general del sistema.
- Analiza la estabilidad del sistema en los casos
 - $-1 \neq c < 0$, $c = 0$, y $c > 0$

8. Considere los sistemas de ecuaciones diferenciales de los puntos 1 y 2.

- Determine los puntos de equilibrio de cada sistema y caraterícelos.
- Haga un diagrama de fase que describa el comportamiento de la solución al rededor de los puntos de equilibrio en cada caso.

9. Considere el sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden dado por

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x \\ y' &= 5x - 4y \end{aligned}$$

- Encuentre la solución del sistema de ecuaciones, asociadas a las condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -2$.
- ¿Cuál es el punto de equilibrio del sistema?.¿De que tipo es?.
- Realice un diagrama de fase que describa el comportamiento de la solución al rededor del punto de equilibrio.

10. Demuestre que si v es un vector propio de A con valor propio λ y w es un vector propio generalizado de A , asociado a v , $X(t) = e^{\lambda t}(v + w)$, es solución del sistema $X' = AX$.

11. Considera el siguiente sistema lineal

$$\pi' = \beta\pi + y, \quad y' = -\pi - \alpha, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- (a) Determina el intervalo de valores de β tales que el punto fijo es un nodo atractor.
- (b) Determina el intervalo de valores de β tales que el punto fijo es un punto de silla.

12. El ingreso y y el índice de precios p se relacionan de acuerdo con

$$y' = ay - p, \quad p' = y - bp + ab - 1, \quad a, b > 0$$

- (a) ¿ Para qué valores de a y b se tiene un comportamiento cíclico de las variables?
 - (b) ¿ para qué valores de a y b es estable el sistema.
13. Encuentra y clasifica los puntos fijos de cada uno de los sistemas del problema 1 y realiza con todo detalle (*isoclinas, flechas, etc..*) el diagrama de fase correspondiente.