UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

Economía matemática - Parcial 1

2 de marzo de 2017

Profesores: Andrea Atencio De León, Andrés Cárdenas Torres, Juan Carlos Zambrano.

1. Demuestre que si $x \in \mathbb{R}$, y, $z \in \mathbb{R}$, con $x < z$ entonces, existe un $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < z$.

2. *a*) Demuestre que si $A \subseteq X$, entonces $intA$ es un conjunto abierto.

   b) Para las funciones: $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x - x^2$ determine si el conjunto $(CS_g(0) \cap CI_f(5))$ es cerrado.

3. *a*) Muestre que si f es convexa, entonces para todo y en el rango de f, el conjunto $CI_f(y)$ es convexo.

   b) Caracterice la función $f(x, y) = -x^2 - 2xy - y^2$ con respecto a concavidad o convexidad.

   c) Qué puede afirmar de la función $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ con respecto a cuasiconcavidad o cuasiconvexidad.

4. *a*) Demuestre que si f es cóncava decreciente y g es convexa, entonces $h = f \circ g$ es cóncava.

   b) Encuentre las condiciones sobre la elasticidad de sustitución (ρ) y σ para que la siguiente función de utilidad sea cóncava:

   $$U(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1^{-\rho} + \alpha_2 x_2^{-\rho})^{-\sigma/\rho},$$

   donde x_i representa las cantidades consumidas de cada bien y no se admiten consumos negativos $(x_i > 0)$, y α_i son parámetros que representan las preferencias relativas sobre los bienes y en el análisis se admiten bienes neutrales $(\alpha_i \geq 0)$; para $i = 1, 2$.

5. Sea $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ convexa con $I \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que para cualquier $x_1, x_2, x_3 \in I$, con $x_1 < x_2 < x_3$, se tiene que

   $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$