Universidad del Rosario

Escuela de Ciencias Humanas

Programa de Filosofía

Trabajo de grado

"*Tensiones temáticas: controversias a propósito del infinito*"

Juan Diego Patiño Cristancho

Director: Carlos Alberto Cardona Suárez

Bogotá, Colombia

2022

Tensiones temáticas: controversias a propósito del infinito

Juan Diego Patiño Cristancho

Universidad del Rosario

juand.patino@urosario.edu.co

Resumen. A partir del concepto *themata* de Gerald Holton, sugiero la noción de "tensiones temáticas" en un intento por abordar asuntos relacionados con la necesidad de establecer criterios de identidad en la evolución de controversias científicas. Por "tensiones temáticas" entiendo una variedad de presiones de fondo que moldean el desarrollo de ciertas controversias. Aplico la noción a dos disputas distantes en el tiempo para esclarecer su parentesco: la controversia que sostuvieron platónicos y aristotélicos entre los siglos III a.C. y III d.C sobre del modo de existencia del infinito y la controversia que sostuvieron Georg Cantor y Leopold Kronecker a finales del siglo XIX sobre la legitimidad de los números transfinitos.

Palabras clave: controversias, tensiones temáticas, *themata*, infinito.

Abstract. Parting from Gerald Holton's *themata* concept, I suggest the notion of "thematic tensions" in an attempt to tackle issues related to the necessity of establishing identity criteria in the evolution of scientific controversies. By "thematic tensions" I mean a variety of background pressures that shape the development of certain controversies. I apply this notion to two disputes far apart in time to establish their kinship: the controversy that Platonists and Aristotelians held on the mode of existence of the infinite during III_{BC} and III_{AD} centuries and the controversy Georg Cantor and Leopold Kronecker held on the legitimacy of transfinite numbers near the end of the XIX century.

Keywords: controversies, thematic tensions, *themata*, infinite.

***

Introducción

La publicación de la obra matemática de Georg Cantor es un hito importante en la historia de la filosofía y de las matemáticas porque, además de introducir una serie de herramientas técnicas para ocuparse del concepto de "infinito" con cierta rigurosidad, parece reabrir el debate antiguo, que Aristóteles había clausurado, a propósito del modo de existencia del infinito, esto es, en qué sentido decimos que el infinito *es*. No fueron pocos los matemáticos que se opusieron a sus resultados. Entre ellos destaca Leopold Kronecker. A finales del siglo XIX, Cantor y Kronecker sostuvieron una espinosa controversia alrededor de la legitimidad de los números transfinitos, a saber, la manera en la que Cantor denota la cardinalidad (el tamaño) de los conjuntos infinitos.

Distintos autores (Dauben, 1990; Gray, 2008; Drozdeck, 1995; Mentzeniotis y Satamatellos, 2008) insinúan que esta es una controversia que actualiza el debate antiguo entre platónicos y aristotélicos. Dadas las referencias y críticas por parte de Cantor a la obra de Aristóteles y la prevalencia de términos como "infinito actual" e "infinito potencial", parece que existe una suerte de continuidad entre ambas polémicas. De hecho, en su artículo a propósito del infinito, Hilbert se refiere a los trabajos de Cantor valiéndose de los términos "infinito actual" e "infinito potencial" presentes en la obra de Aristóteles:

> Si quisiéramos caracterizar brevemente la nueva concepción del infinito que [Georg] Cantor introdujo, podríamos sin duda decir: en el análisis nos ocupamos de lo infinitamente pequeño o de lo infinitamente grande solo como una noción límite… esto es, como decimos, del *infinito potencial*. Pero este no es el infinito real mismo. Aquel que tenemos cuando, por ejemplo, consideramos la totalidad de los números 1, 2, 3, 4… como una entidad completa, o cuando nos referimos a los puntos de un segmento de línea como una totalidad de objetos realmente dada y completa. Este tipo de infinito es llamado el *infinito actual*[1] (1967, p. 373).

Sin embargo, esto no es suficiente para afirmar que existe algún parentesco entre estas controversias. Es posible, por ejemplo, que aquello que Cantor y Kronecker entienden por "infinito actual" e "infinito potencial" no sea lo mismo que los antiguos tenían en mente. No es muy difícil pecar por anacronismo. Resulta, entonces, de la mayor importancia darnos a

[1] Las traducciones de los textos referenciados en inglés son propias.

la tarea de rastrear qué aspectos de la polémica antigua persisten en la controversia Cantor-Kronecker.

La pregunta por la continuidad o no entre ambas polémicas sobre el infinito nos sirve de excusa para considerar la pregunta general a propósito de los criterios a partir de los cuales establecemos relaciones de identidad entre dos controversias, teniendo en cuenta que "identidad entre dos controversias" no quiere decir que dos controversias sean exactamente las mismas en su desarrollo, temáticas, etc., sino que se ocupan de los mismos problemas con sus particularidades históricas: ¿cuándo estamos autorizados para afirmar que dos controversias convergen en sus temáticas? Esta dificultad es particularmente latente en controversias distantes en el tiempo. En el caso de la polémica antigua y la controversia Cantor-Kronecker, por ejemplo, intentamos emparentar controversias cuya aproximación a la noción de infinito depende de las herramientas conceptuales y técnicas disponibles. Platón y Aristóteles se ocupan del infinito en un horizonte metafísico en el que el problema gira en torno a discusiones acerca del concepto de existencia. Cantor lo hace a partir de la reciente teoría de funciones. ¿Cómo asegurar que ambas discusiones yacen sobre una misma línea continua?

Para responder a estas cuestiones, propongo, al valerme del concepto *themata* de Gerald Holton, la noción de "tensiones temáticas": una variedad de presiones de fondo que moldean el desarrollo, esto es, el transcurso o la dinámica, de algunas controversias, y que, de ser identificadas en controversias distantes, son indicios de continuidad de contenido. Así las cosas, en este artículo pretendo sacar a la luz las tensiones temáticas que podemos encontrar tanto en la polémica antigua como en la controversia Cantor-Kronecker. Espero con esto conseguir dos objetivos: i) mostrar, a través de un caso, en qué consiste la noción de "tensiones temáticas" y ii) establecer de manera clara el tipo de continuidad que existe entre estas dos controversias. Para lograrlo, divido el texto en cuatro secciones. En la primera, y a partir de los *themata* de Holton, desarrollo y defino el término "tensiones temáticas". En la segunda, presento los hitos más importantes de la polémica antigua. En la tercera, reconstruyo la controversia Cantor-Kronecker y las razones que explican el desencuentro. Finalmente, caracterizo las tensiones temáticas que podemos identificar en ambas controversias.

1. *Themata* y "tensiones temáticas".

Para abordar estas preguntas, en el caso particular de las discusiones sobre el infinito, los trabajos de Gerald Holton son de gran utilidad. Holton (1985) dice que en la construcción de teorías científicas intervienen ciertas presuposiciones inverificables e infalsificables que guían el trabajo de los científicos. A estas presuposiciones Holton las llama *themata*. Holton define los *themata* como una serie de presuposiciones fundamentales, nociones, términos, juicios metodológicos o decisiones que no evolucionan de, ni se resuelven en, observaciones objetivas o raciocinios formales (1975, p. 57). Los *themata* intervienen en el proceso de la construcción de las teorías científicas a manera de filtros que decantan cuál es el conjunto de principios básicos que se postula desde el cual se deriva una serie de enunciados que pretenden explicar lo que sucede en el continuo de las experiencias (Holton, 1985). Por ejemplo, si una comunidad científica tiene presente el principio de simplicidad, se decantará por un conjunto de axiomas lo más reducido posible. La simplicidad, en este caso, es un *thema*.

Propongo ahora extender la noción de *themata* de Holton para referirnos a los problemas que atañen a la identidad de algunas controversias distanciadas en el tiempo. Sugiero el concepto de *tensiones temáticas*. Por "tensiones temáticas" entiendo una variedad de presiones de fondo que moldean el desarrollo, esto es, el transcurso o la dinámica, de algunas controversias y que, como sucede con los *themata*, no son en principio resolubles en el horizonte de las controversias. Las tensiones temáticas son una serie de polaridades en conflicto que reaparecen en diferentes momentos de la historia del desarrollo de una disciplina. En otras palabras, son presuposiciones y actitudes implícitas *en oposición* que trazan el camino que las partes de una controversia van a seguir. Adoptando la terminología de Holton, las tensiones temáticas son *themata* en conflicto, que, en tanto conflicto, reaparecen en diversos momentos de la historia de las ciencias. Sin embargo, tales conflictos o polaridades no ocupan un lugar protagónico en la agenda de debates de las controversias (por lo que resultan irresolubles). Al igual que los *themata*, son presuposiciones en conflicto que moldean, por ejemplo, la manera en la que las partes toman posición o la forma en la que un problema se define. Para extender el paralelo con los *themata* de Holton, las tensiones temáticas intervienen en las controversias científicas también a manera de filtros, pero esta vez decantando la manera en la que una controversia toma forma, es decir, la manera en la que el terreno está dispuesto para que las partes den lugar a sus discusiones.

Podemos incluso pensar en algunos ejemplos preliminares de tensiones temáticas que aparecen en distintos momentos en la historia de las ciencias. En algunas discusiones propias de la física acerca de la naturaleza del espacio, encontramos en diferentes ocasiones una tensión entre aquellos que afirman que el vacío existe (vacuistas) y aquellos que sostienen que no existe (plenistas). Otro ejemplo, presente en el desarrollo de las matemáticas, es la tensión entre aquellos que prefieren una aproximación metodológica analítica o una sintética a algunos problemas de la disciplina. Estos casos son una primera imagen de lo que serían las tensiones temáticas.

Las tensiones temáticas, y este es el corazón del asunto, nos pueden ayudar a trazar líneas de continuidad entre dos controversias distanciadas en el tiempo. Si logramos mostrar que detrás de dos controversias diferenciadas convergen ciertas tensiones temáticas compartidas, tendremos indicios de que la dinámica de ambas controversias, así como su contenido temático, es similar, y estaríamos entonces invitados a trazar relaciones de semejanza y parentesco entre ellas. Las tensiones temáticas, no obstante, tal como las entiendo, no son suficientes para equiparar el contenido de dos controversias científicas. Son más bien un primer paso que permite identificar ciertas particularidades compartidas desde las cuales podemos construir lazos entre algunas polémicas en principio alejadas. En el caso de las controversias a propósito del infinito, si logramos sacar a la luz una serie de tensiones temáticas compartidas, tendremos ya el terreno labrado para hablar de continuidad. Comencemos entonces por reconstruir la polémica antigua.

2. La polémica antigua: Platón, Aristóteles y neoplatónicos

Dice Aristóteles: “Algunos, como los pitagóricos y Platón, consideran que el infinito es por sí mismo un principio, no algo accidental a otras cosas, sino que es en sí mismo una substancia” (*Física*, III, 203a-5). El primer hito de la polémica antigua a propósito del modo de existencia del infinito lo encontramos en la postura platónica. Si bien Platón no desarrolla una doctrina completa acerca del infinito, sí encontramos pasajes en su obra que dan a entender, por un lado, que el infinito debe ser presupuesto para dar cuenta del universo y, por el otro, que no concebía problema alguno en hablar del infinito como algo que *es*.

En el *Timeo*, Platón afirma que el origen del cosmos se explica por la intervención del Demiurgo, al inyectar proporción y medida a los elementos que pueblan el universo (53b). Como el universo es uno y está organizado a manera de una esfera (*Timeo* 33b), concluimos que es finito. Lo mismo podemos decir de los elementos que lo constituyen: "Así, el Dios colocó agua y aire en el medio del fuego y la tierra y los puso, en la medida de lo posible, en *la misma relación proporcional mutua*" (*Timeo* 32b, cursivas propias). No tendría sentido hablar de proporciones si los elementos constitutivos del universo fuesen ilimitados (Drozdeck, 2008, p. 85). Sin embargo, Platón deja ver que, si queremos hablar de un mundo ordenado, debemos presuponer el infinito. Por un lado, es necesario que la capacidad del Demiurgo sea infinita en tanto que ordena los elementos de una única manera dadas infinitas posibilidades. Por otro lado, dado que Platón dice que los elementos están moldeados sobre la base de triángulos de distinta magnitud, la cantidad de triángulos a disposición del Demiurgo es igualmente infinita (Drozdeck, 2008, p. 91). "En este sistema [el de Platón], introducir un orden perfecto en el universo requiere de una causa infinita aun cuando la dimensión del universo es limitada" (Drozdeck, 2008, p. 87). En esto consiste el infinito como principio.

Dijimos también que Platón no ve problema alguno con hablar del infinito como algo que existe. Un ejemplo de esto lo encontramos en el *Filebo*. Allí, Platón distingue entre dos géneros: el de lo *ilimitado*, que tiene que ver con "lo mayor" y "lo menor", esto es, con aquello que admite grados, y el de lo *limitado*, que tiene que ver con "…lo igual y lo doble y todo lo que pone fin a la oposición de los contrarios, y que, al imponerles un número, los hace proporcionados y concordantes" (25c-d). Hacen parte del género de lo ilimitado entes como el placer, la rapidez y la humedad. Los elementos que componen el género de lo ilimitado son continuos e indefinidos. Los elementos que componen lo limitado, como la magnitud, la altura, etc., son discretos y definidos. Así, Platón acepta que hay cualidades o propiedades, como el placer, que son infinitas en tanto ilimitadas y continuas. Y, en tanto Platón les atribuye existencia a estas propiedades, lo hace también con el infinito.

Ante la postura platónica, Aristóteles sostiene que no podemos concebir lo infinito como un ente que existe o que está presente en la naturaleza. Aristóteles ofrece varias razones que soportan esto; todas estas ancladas en el hecho de que lo infinito reta la verdad de algunas proposiciones que mentamos en el reino de lo finito. Primero, si hay tal cosa como un cuerpo infinito, sus partes han de ser también infinitas, así como una parte del aire es igualmente aire. Si decimos, por esto, que el infinito es más bien sin partes e indivisible, olvidamos que, si el infinito es en sentido actual, es una cantidad (*Física* III, 204a20-30). Segundo, la misma noción de cuerpo, "lo que está limitado por una superficie", hace imposible que haya algo como un cuerpo ilimitado (*Física* III, 204a5). Finalmente, dado que todo cuerpo cuenta con un "lugar propio", sería absurdo pensar en un cuerpo infinito cuyas partes estarían unas en el centro, otras en un extremo y otras en el otro (*Física* III, 205b25-30). Sin embargo, esto no quiere decir que el infinito no *sea* en ningún sentido. De ser así, habríamos de afirmar que el tiempo cuenta con un inicio y con un final y tendríamos que renunciar a nociones como la de número (*Física* III, 206a10).

Luego, dice Aristóteles:

> Así pues, el infinito no tiene otro modo de realidad que este: en potencia y por reducción. Y existe actualmente en el sentido en que decimos que el día o la competición existen; y existe potencialmente como la materia [que potencialmente puede adquirir múltiples formas]; pero no existe por sí mismo, como existe lo finito (*Física* III, 206b10-15).

Que el infinito existe como lo hace el día lo explica Santo Tomás:

> Todo lo que está en potencia pasa a estar en acto según su modo de ser. Ejemplo: el día no pasa a estar en acto en todo momento sino poco a poco. De la misma forma lo infinito de la multitud no pasa a estar en acto en un solo momento, sino poco a poco, pues tras una multitud cualquiera puede añadirse otra, y así hasta el infinito (*Suma Teológica* I, q. 7, art. 4).

Detrás de esto yace la idea según la cual el infinito no está nunca *completamente* actualizado, como sí lo está una casa, un hombre, etc., sino que *es* a través de la posibilidad, por ejemplo, de dividir una línea una y otra vez. Es decir, para Aristóteles, el infinito *es* en el sentido en que siempre va a haber posibilidades sin actualizar:

> Además, el ser se dice en muchos sentidos, por lo que no hay que tomar el infinito como un individuo particular, como un hombre o una casa, sino en el sentido en que hablamos del día o de la competición, cuyo ser no es como el de algo que llega a ser una substancia, sino que está siempre en generación y destrucción, finito en cada caso, pero siempre diferente (*Física* III, 206a25-30).

La controversia antigua a propósito del infinito encuentra un tercer hito en la filosofía neoplatónica. En las *Enéadas* de Plotino damos con un esfuerzo por conceptualizar lo infinito sin tener en cuenta aquello que se predica de lo finito. Dice Plotino:

> Siendo, pues, Inteligencia universal e intelectiva de todas las cosas incluso una parte de ella debe poseer todo y todas las cosas. Si no, tendría alguna parte que no sería inteligencia, con lo que costaría de no-inteligencias y sería un montón aglomerado a la espera de ser una Inteligencia resultante de todas las partes. *Por eso, de ese modo, la Inteligencia es además infinita, y si algo procede de ella, no por eso sufre merma ni lo que procede de ella, puesto que aun esto mismo es todas las cosas, ni aquella de la cual procede, puesto que no era un compuesto de partes*. (III, VIII, 8, 40-45, cursivas propias).

Aquí, Plotino ofrece una caracterización o definición del infinito: si se dice que algo es infinito, sucede que una de sus "partes" posee todo y todas las cosas. Además, si algo procede de lo infinito, si algo le es arrebatado, ni lo arrebatado ni lo que queda sufre merma alguna (en cantidad, magnitud, perfección, etc.). Esta caracterización, además de ser parecida a la definición de Dedekind de "conjunto infinito", a saber, que un conjunto A es infinito si y solo si A es biyectable con alguno de sus subconjuntos propios, es decir, que un conjunto es infinito si su tamaño es igual al de alguno de sus subconjuntos, muestra que Plotino no ve problema alguno con el hecho de que lo infinito *sea*, así no se comporte necesariamente como lo hace lo finito.

Al concebir lo infinito como un ente que no tiene que, necesariamente, adecuarse a lo que se dice de lo finito, Plotino recompone la postura platónica y vuelve a poner sobre la mesa la idea según la cual el infinito puede ser concebido como un ente completo, que, en este caso, juega un papel fundamental en la elucidación de las entelequias del universo. A pesar de los esfuerzos de Plotino por reivindicar la actualidad del infinito, la prevalencia de la postura aristotélica en la escolástica hizo que el infinito actual fuese rechazado hasta la llegada de Cantor a finales del siglo XIX.

3. La controversia Cantor-Kronecker

De entrada, debemos reconocer que las discusiones acerca del infinito que tuvieron lugar en el siglo XIX surgen gracias a la aparición de nuevas herramientas técnicas en el campo de las matemáticas (teoría de funciones, teoría de conjuntos, etc.). De suyo, esto es ya una muestra de la distancia entre ambas controversias: la antigua, como vimos, versa sobre problemas netamente metafísicos, mientras que la controversia Cantor-Kronecker lo hace sobre la noción de número de transfinito introducida por Cantor. Sin embargo, veremos que estas discusiones están atravesadas por disputas igualmente metafísicas. Más aún, si bien la discusión es posible gracias a las herramientas matemáticas propias del siglo XIX, el núcleo de la discusión no es técnico sino filosófico. Así, podemos identificar tres aspectos centrales que explican el desacuerdo entre Cantor y Kronecker: i) una concepción diferente acerca de la naturaleza de las matemáticas, ii) la disputa entre perspectivas finitistas e infinistas y iii) las discrepancias acerca de los usos y el alcance de las matemáticas.

Comencemos por la discusión acerca de la naturaleza de las matemáticas. Cantor, en sus *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* distingue entre dos tipos de infinito. Por un lado, está el *infinito impropio*, aquel que es aplicado a las diferentes ciencias y que es tomado como una cantidad variable (que crece y decrece sin límite alguno). Por otro lado, está el *infinito propio*, aquel que aparece de manera *definitiva* (o determinada), tal como sucede en el desarrollo de las funciones analíticas de variable compleja (Cantor, 1996, §1, p. 882 [3-5]). Para Cantor, dar con un noción definida y determinada del infinito, esto es, hablar del infinito en sentido *propio*, implica afirmar su existencia o, mejor, su actualidad (Dauben, 1995).

¿Por qué determinar el concepto de infinito equivale a afirmar su existencia o su actualidad? La respuesta la encontramos en la metafísica de Cantor y su concepción de las matemáticas. Cantor distingue entre dos tipos de existencia. Por ejemplo, cuando concebimos los números enteros como habitantes de un lugar determinado de nuestra mente, distinto del lugar que ocupan otros conceptos, nos referimos a ellos como existentes en sentido *inmanente*. Cuando concebimos los números enteros como expresiones de los eventos y relaciones del mundo externo (por ejemplo, para referirnos al conteo), les atribuimos realidad *transitoria* o *pasajera* (Cantor, 1996, §8, p. 895-896 [1]). Estos dos tipos de existencia, a juicio de Cantor, están ligados: todo concepto designado como existente en sentido inmanente posee realidad transitoria (1996, §8, p. 896 [2]).

La relación estrecha entre la existencia en sentido inmanente y la existencia en sentido transitorio la garantiza la unidad del universo (Cantor, 1996, §8, p. 896 [3]). No obstante, la naturaleza de este vínculo no es una preocupación de las matemáticas sino de la filosofía y la metafísica. El matemático no debe perder la cabeza en consideraciones acerca de la realidad transitoria de los objetos que postula; solo debe ocuparse de su realidad inmanente. Es por esto que Cantor concibe a las matemáticas como esencialmente libres:

> Las matemáticas son, en su desarrollo, completamente libres y solo se encuentran atadas en tanto que sus conceptos deben ser tanto consistentes los unos con los otros como también sostenerse en relaciones exactas, ordenadas por definiciones, con aquellos conceptos que previamente han sido introducidos y que ya están a la mano y establecidos (1996, §8, p. 896 [4]).

Si las matemáticas son por esencia libres, todo objeto, o mejor, todo candidato a objeto, debe ser aceptado dentro de la familia de las matemáticas si cuenta con una definición determinada, que lo distinga de los demás objetos, y que no mine la consistencia interna del sistema (Dauben, 1977, pp. 87-89). Es de esta manera, al abanderar una antesala del formalismo, que Cantor justifica la validez del infinito propio, esto es, de los números transfinitos.

Kronecker sostiene una visión distinta de la naturaleza de las matemáticas. Para él, las matemáticas son una suerte de ciencia natural. Luego, la consistencia no es suficiente para determinar si un objeto es matemáticamente legítimo o no. Kronecker se inclina más bien por una fundamentación de las matemáticas a partir de fenómenos y conceptos dados por la experiencia (Boniface, 2005, p. 145). El edificio de las matemáticas se debe construir, según él, sobre los *números ordinales*: aquello que es dado en la experiencia del conteo. Según Kronecker, todos los resultados de la aritmética pueden expresarse en términos de propiedades de los números enteros (1996, p. 955).

Kronecker se opone, así, a la postura de Cantor según la cual las matemáticas son libres de postular objetos siempre y cuando su postulación no conduzca a inconsistencias del sistema completo. De la misma manera, tampoco acepta que las matemáticas deban descuidar la realidad transitoria de sus objetos. Kronecker también afirma que las matemáticas son libres. Sin embargo, las matemáticas no son libres para postular objetos; lo son en cuanto a los *métodos* de los que se sirve el matemático para *descubrir* y *describir* objetos y relaciones del mundo: "…la libertad de los matemáticos consiste en, de acuerdo con Kronecker, la invención de nuevos métodos, mas no en la creación de nuevos objetos, como lo era para

Dedekind y Cantor, por ejemplo" (Boniface, 2005, p. 147). Kronecker sostiene también una disputa con Richard Dedekind acerca de la naturaleza de los nuevos tipos de números que se introducen en el álgebra, porque lo percibe como un intento por crear objetos matemáticos ilegítimos a partir de colecciones infinitas (Gray, 2008):

> Las consideraciones precedentes [acerca de reemplazar sistemas modulares de infinitos elementos por otros de número finito], así me lo parece, se oponen a la introducción de tales conceptos [*concept-formations*] dedekinianos como "módulo", "ideal", etc.; y de manera similar se oponen a la introducción de otros varios conceptos [*concept-formations*] bajo cuya ayuda ciertas personas (siendo Heine probablemente el primero) han repetidamente intentado concebir y cimentar lo "irracional" en general (Kronecker, 1996, p. 947).

Kronecker acepta nuevos objetos matemáticos solo en el caso en el que estos cuenten con definiciones *constructivas* (razón por la que se lo sitúa en la antesala del intuicionismo). Es decir, si bien es cierto que los objetos de las matemáticas no deben entrañar contradicción, es igualmente importante contar con un criterio que permita decidir, para cada caso particular, si un objeto puede o no ser subsumido bajo una cierta definición (Boniface, 2005). Y tal empresa solo es posible si la construcción demanda de una serie *finita* de pasos. Es por esta razón que, para Kronecker, los números transfinitos no son objetos matemáticos. Por ejemplo, para poder demostrar efectivamente que el conjunto de los números reales no es enumerable (que no existe una función biyectiva de los números naturales sobre los números reales), Kronecker exige que la lista de la expansión decimal de los números entre 0 y 1 pueda ser recorrida en aras de determinar, efectivamente, si la expresión decimal que Cantor construye a partir de la diagonal no está ya allí.

La discrepancia alrededor de la naturaleza de las matemáticas nos conduce al siguiente punto de desencuentro entre Kronecker y Cantor: el finitismo e infinitismo de uno y otro. Comencemos por la postura de Kronecker. Kronecker es recordado por el *dictum* "Dios creó los enteros, el resto es obra de los hombres" (Kronecker, citado en Gray, 2008, p. 153). Kronecker, ya dijimos, concibe las matemáticas como una ciencia natural: su fundamento se encuentra en ciertos procesos y actividades que ocurren en el mundo (Boniface, 2005, p. 145). De hecho, Kronecker espera que eventualmente haya éxito en la empresa de "aritmetizar" el contenido de las matemáticas (1996, p. 949), en tanto que la aritmética se asienta sobre la experiencia del conteo. Todo esto lo conduce a sostener que las matemáticas deben restringirse al reino seguro de los números finitos (Dauben, 1990).

Hilbert cuenta una anécdota acerca de Kronecker que resume su finitismo: "Kronecker me dijo personalmente que el enunciado según el cual hay infinitos números primos no tiene sentido hasta que uno haya mostrado que después de cada número primo hay otro número primo dentro de un intervalo numérico determinable…" (1996, p. 944). Si adoptamos una ontología en la que la consistencia es el único requisito, cree Kronecker, los resultados de las matemáticas se convierten en un juego irrelevante:

> Todos ustedes conocen el juego de adivinanzas en el que a los reunidos se les pedía escoger cualquier número que prefiriesen. Se les pedía luego llevar a cabo la misma secuencia de operaciones numéricas sobre su número. Al final, y para sorpresa general, cada participante había obtenido el mismo resultado. Los matemáticos saben que cualquier número elegido puede ser eliminado. Las explicaciones de los conceptos básicos de las matemáticas son similares; resultados importantes terminan siendo completamente independientes de ellos (Kronecker, citado en Boniface, 2005, pp. 152-153).

Por su parte, Cantor considera, no solo que los objetos matemáticos infinitos son legítimos, sino que el temor que se tiene de ellos impide reconocer el infinito absoluto (Dios) (Tapp, 2014, p. 84). Además, si las restricciones de Kronecker fuesen seguidas al pie de la letra, sería imposible dar con resultados matemáticos significativos (Dauben, 1977). Cantor considera que todo esto se debe a que matemáticos, teólogos y filósofos han caído en un perverso error: asumir que las propiedades finitas deben predicarse en todos los casos del infinito (Dauben, 1990, p. 122). Por ejemplo, al referirse a una de las razones por las que se rechazan los enteros infinitos, a saber, que estos habrían de ser tanto pares como impares, dice Cantor:

> …uno aquí está tácitamente asumiendo que características que son exclusivas para los números tradicionales deben serlo también para los números nuevos; y de acuerdo con esto uno concluye que los números infinitos son imposibles. ¿Quién no logra ver el paralogismo a simple vista? (1996, §6, p. 892 [2]).

A partir del finitismo e infinitismo de Kronecker y Cantor se deriva una concepción distinta en cuanto al alcance y uso de las matemáticas. Por su parte, Kronecker restringe las matemáticas al reino de los números finitos en tanto que su deseo es que las proposiciones matemáticas refieran a los fenómenos y relaciones del mundo físico. Luego, los objetos de las matemáticas son tan reales como los de las ciencias naturales (Boniface, 2005, pp. 147-148). ¿Cómo consigue Kronecker que las matemáticas se acerquen a lo real? Kronecker responde al decir que es menester que los matemáticos den con una serie de métodos que permitan restringir la especulación. De la misma manera, como el matemático es quien mejor conoce los métodos, las matemáticas no deben salir de ellas mismas: no deben acudir a la filosofía ni a ninguna otra disciplina para fundamentar sus conceptos. Lo que deben hacer es garantizar que sus métodos sean lo suficientemente robustos para construirlos (Boniface, 2005, p. 146).

Por el contrario, Cantor sí considera que las matemáticas pueden relacionarse con otros campos. En particular, las matemáticas sirven como medio para elucidar lo divino. Es precisamente de allí de donde proviene su convicción acerca de la fuerza de sus resultados:

> Mi teoría se sostiene firme como una roca; cada flecha dirigida hacia ella vuelve rápidamente a su arquero. ¿Cómo sé esto? Porque la he estudiado desde todos sus lados por muchos años; porque he examinado todas las objeciones que alguna vez se han hecho en contra de los números infinitos; y sobre todo, porque he seguido sus raíces, por así decirlo, hasta la primera causa infalible de todas las cosas creadas (Cantor, citado en Dauben, 1995, p. 238).

Cantor cree que su teoría de los transfinitos es una suerte de revelación divina: él es un siervo de la luz que *desoculta* la naturaleza del infinito. ¿En qué consiste la relación entre las matemáticas y lo divino en Cantor? Ya nos ocuparemos de esto.

4. Modos de existencia: tensiones temáticas

¿Cómo comenzar a tejer el parentesco entre ambas controversias? Lo primero que podemos decir, a la luz de lo arrojado por las reconstrucciones anteriores, es que ambas polémicas giran en torno a lo que podemos llamar “modos de existencia”, es decir, en torno a los criterios bajo los que determinamos si un ente relacionado con el infinito existe o no, y, si lo hace, en qué sentido. En cuanto a platónicos y aristotélicos, la disputa consiste en determinar cuál es el sentido del *es* en el enunciado “el infinito *es*”. Cantor y Kronecker discuten a propósito de la legitimidad de los números transfinitos en tanto objetos matemáticos. Y, dado que ambos comparten la postura según la cual las proposiciones matemáticas refieren al mundo (Cantor lo hace al establecer la equivalencia entre realidad inmanente y realidad transitoria; Kronecker hace lo propio al concebir las matemáticas como una suerte de ciencia natural que es reductible a fenómenos), la controversia versa sobre los criterios que tenemos para decidir si un objeto es matemático o no y, por ende, si existe. Esto lo podemos reforzar al entrar a evaluar una serie de tensiones temáticas compartidas que ya podemos divisar.

4.1. La tensión a propósito de la ontología de los objetos matemáticos

De entrada, dado que el principal punto de desencuentro entre Cantor y Kronecker tiene que ver con la naturaleza de los objetos matemáticos, resulta llamativo preguntar si podemos identificar una tensión temática que verse precisamente sobre la naturaleza de los objetos matemáticos. Ya sabemos que la controversia Cantor-Kronecker a propósito de los números transfinitos sí gira en torno a estas cuestiones. ¿Podemos decir lo mismo de la polémica antigua?

Con esto en mente, ¿qué dice Platón acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos? Platón distingue entre dos tipos de aritmética y geometría: de un lado, están la geometría y la aritmética *populares*, aquellas que se ocupan de las aplicaciones al mundo sensible de los postulados matemáticos y que son *aproximadamente* verdaderas; del otro, están la geometría y la aritmética *filosóficas*, aquellas que se ocupan del reino de las ideas y que son *exactamente* verdaderas (Wedberg, 1955). Así, para Platón, las matemáticas que podríamos llamar "puras" se ocupan de las Ideas. El geómetra, en sus investigaciones acerca de las figuras, alza su mirada hacia *la proporción*, aquello que el Demiurgo inyecta en el universo (*Timeo* 31b).

Es claro también que, para Platón, los objetos de las matemáticas no son objetos sensibles. Sin embargo, esto no quiere decir que haya una distancia intransitable entre los objetos matemáticos y los objetos sensibles. Según Wedberg (1955, pp. 47-49), los conceptos de la geometría y de la aritmética no son variables sino propiedades y relaciones apegadas a nuestra percepción en el espacio. Esto puede explicar por qué, para los neoplatónicos, el ser matemático se encuentra entre lo simple (lo eterno, lo invariable) y lo divisible (lo sensible, lo que experimenta movimiento):

> Los objetos matemáticos, y en general los objetos del entendimiento, ocupan una posición intermedia[2]. Están más allá de los objetos del intelecto en tanto divisibles, pero superan las cosas sensibles en tanto desprovistas de materia. Son inferiores a los primeros en simplicidad pero superiores a los últimos en precisión, reflejando la realidad inteligible con mayor claridad que las cosas perceptibles. Sin embargo, son solo imágenes, imitando en su forma dividida lo indivisible y en su forma múltiple los patrones uniformes del ser. En pocas palabras, se encuentran en el vestíbulo de las formas primarias… (Proclo, 1970, p. 4 [5]).

Consideremos ahora la postura de Aristóteles:

> …tenemos que examinar ahora en qué se diferencia el matemático del físico, pues los cuerpos físicos tienen también superficies, volúmenes, longitudes y puntos, de los cuales se ocupa el matemático… Ahora bien, aunque el matemático se ocupa también de estas cosas, no las considera en tanto que límites de un cuerpo físico, ni tampoco estudia los atributos mencionados en tanto que atributos de tales cuerpos. Por eso también los separan, pues por el pensamiento se los puede separar del movimiento, lo cual no introduce ninguna diferencia ni conduce a error alguno (*Física* II, 193b20-25).

Aristóteles dice que el geómetra sí estudia objetos perceptibles pero no en tanto objetos perceptibles. El geómetra *filtra* ciertos predicados. ¿Qué quiere decir que el geómetra estudie, por ejemplo, el volumen pero no en tanto atributo de un cuerpo?

Según Lear, para Aristóteles, los objetos matemáticos efectivamente existen (por eso es que estudiar el volumen por fuera del volumen de un cuerpo no conduce al error), pero en tanto propiedades instanciadas en objetos físicos. A diferencia de Platón, Aristóteles no considera que sea necesario postular objetos ideales para que los enunciados de las matemáticas entrañen verdad. Así como la ciencia de la salud estudia la salud sin tener en cuenta lo accidental, sin que esto signifique que la salud exista más allá de la salud de los hombres, así mismo la geometría no se ocupa de las cosas sensibles, aunque aquello que

[2] Es interesante notar que un platónico más cercano a nosotros como Gottlob Frege (1997, p. 336) llegó a sostener que los pensamientos no son ni cosas del mundo externo ni representaciones (propias del mundo interno).

estudia sea accidentalmente sensible, pero tampoco de otras cosas separadas de estas (Aristóteles, *Metafísica* M, 1077a30-1078b-5).

Sobre este esbozo de las posturas platónicas y aristotélicas a propósito de la naturaleza de los objetos matemáticos, ¿es posible concebir una tensión temática emparentada con la que se exhibe en la controversia Cantor-Kronecker? A mi juicio, no. Tanto Cantor como Kronecker justifican la legitimidad o la no legitimidad de los números transfinitos sobre la base de su concepción ontológica de los objetos matemáticos. Platónicos y aristotélicos, por el contrario, no conciben al infinito como objeto matemático. Para Platón, el infinito se encuentra en lo sensible, tal como dice Aristóteles (*Física* III, 203a5-10). Pero los objetos matemáticos son ideales. Luego, el infinito no es un objeto matemático en tanto objeto sensible. De la misma manera, los objetos matemáticos para Aristóteles existen en tanto instanciados en objetos físicos. Sin embargo, Aristóteles niega que en el mundo físico haya algo que exhibe lo infinito. El infinito no se instancia en objetos físicos porque ni siquiera logra actualizarse. De esta manera, ¿se ve afectado el modo de existencia del infinito por las concepciones platónicas y aristotélicas acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos? Parece que no. El infinito, para Platón y Aristóteles, es un concepto cuyo modo de existencia depende de consideraciones metafísicas que no conciernen a las matemáticas.

Ahora bien, hay razones para considerar que cuando Platón y Aristóteles discuten el infinito sí lo hacen sobre consideraciones matemáticas. El llamado algoritmo de la división (*antyphairesis*)[3], que ya circulaba en las épocas de Platón y Aristóteles, presenta lo infinito (entendido como lo ilimitado) como hecho geométrico: el infinito aparece a la manera de residuo inconmensurable al aplicar ciertas operaciones sobre ciertos objetos geométricos (Knorr, 1973). No sería entonces extraño que Platón, por influencia de los pitagóricos, y Aristóteles, que también discute lo infinito en términos matemáticos en tanto divisibilidad de continuos (tiempo, líneas, etc.) (*Física* VI, 233a20), tengan en mente un tipo de infinito que

[3] La *antyphairesis* funciona así: a partir de dos magnitudes *A* y *B* dadas, substraemos *B* (la menor) de *A*, dando como resultado un residuo *C* y, posteriormente, substraemos *C* de *B* o *B* de *C* (dependiendo de cuál es la magnitud menor) para obtener un nuevo residuo *D*, y así sucesivamente. Si esto lo aplicamos, por ejemplo, a dos líneas, el proceso se puede repetir infinitamente, dando siempre con un nuevo residuo (Knorr, 1973, pp. 29-30).

surge a partir de consideraciones matemáticas. Sin embargo, estas consideraciones sobre el infinito remiten a lo infinitamente pequeño (un residuo inconmensurable), mientras que Cantor y Kronecker discuten sobre lo infinitamente grande (el tamaño de los conjuntos infinitos). De hecho, Cantor se opone a la existencia de lo infinitamente pequeño (2009, p. 465 [112]). Luego, las discusiones sobre la naturaleza de los objetos matemáticos en ambas controversias estarían apuntando a planos diferentes: no es lo mismo aceptar lo infinitamente grande que aceptar lo infinitamente pequeño aun cuando ambos conceptos refieren a lo infinito. De la misma manera, las discusiones sobre la naturaleza de los objetos matemáticos dependen, en ambas controversias, de lo que se entiende por matemáticas. Platón y Aristóteles, por un lado, están situados en un horizonte en el que las matemáticas son equiparables a la geometría. Las discusiones de Cantor y Kronecker refieren a sistemas numéricos y sus particularidades que, en gran medida, resultan desconocidos para los antiguos. Por lo tanto, no es claro que podamos agrupar ambas discusiones acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos bajo una misma tensión temática compartida.

4.2. La tensión a propósito de la dimensión del Absoluto

Si bien es cierto que la naturaleza de los objetos matemáticos en la polémica antigua tiene poco que ver con las diversas concepciones del infinito, sí es importante para el desarrollo de una tensión temática que, ahora sí, encontramos en ambas controversias: aquella que concierne a la dimensión del Absoluto, esto es, la manera en la que el Absoluto es identificado. En el caso de Platón, podemos afirmar que resulta fundamental que las matemáticas puras versen sobre objetos ideales en tanto que este tipo de conocimiento es uno de los pasos necesarios en el camino hacia la idea de Bien (el estadio máximo de la abstracción). Si los objetos de las matemáticas fuesen de naturaleza similar a la que propone Aristóteles, el conocimiento matemático no sería una de las maneras con las que cuenta el filósofo para acercarse a la Verdad.

Comencemos, entonces, por elucidar la dimensión del Absoluto en la filosofía platónica y neoplatónica. Platón, en el *Timeo*, distingue entre el tiempo y lo eterno:

> Entonces, como este [el hacedor del universo] es un ser viviente eterno, intentó que este mundo lo fuera también en lo posible. Pero dado que la naturaleza del mundo ideal es sempiterna y esta cualidad no se le puede otorgar completamente a lo generado, procuró realizar una cierta imagen

> móvil de la eternidad y, al ordenar el cielo, hizo de la eternidad que permanece siempre en un punto una imagen eterna que marchaba según el número, eso que llamamos tiempo (37d).

Platón dice, en este pasaje, que el tiempo es copia de lo eterno. Y, en tanto que el tiempo era usualmente relacionado con lo infinito (*Física* III, 4, 203b15), la distinción entre tiempo y eterno conduce a establecer una diferencia entre lo infinito y lo eterno: lo infinito es lo que se extiende sin fin *sobre* el tiempo; lo eterno es lo que está *por fuera* del tiempo.

Esta distinción es fundamental para la filosofía neoplatónica y su concepción de la idea de Dios. Plotino, explotando la distinción platónica, afirma: "La eternidad es, pues, esto: lo que ni fue ni será, sino que solo es, poseyendo este "es" establemente por el hecho de que ni cambia en el "será" ni ha cambiado" (III, VII, 3, 30-35). Acto seguido, Plotino identifica el ser eterno con lo Absoluto: "Y con toda justeza puede la eternidad llamarse Dios, puesto que se revela y se presenta a sí misma tal cual es, a saber, como el ser en su modalidad de "inconmovible"" (III, VII, 5, 20). Con estas consideraciones, y sobre la base de las ideas platónicas, Plotino construye una imagen del Absoluto en la que su dimensión excede lo infinito.

Si examinamos con detenimiento la obra de Cantor, encontramos algo similar. Ya vimos que Cantor insinúa que existe una relación entre las matemáticas y la divinidad. En esto, Cantor acompaña a los pitagóricos y a Proclo y a todos aquellos que alguna vez han sostenido que las matemáticas cuentan con herramientas que permiten elucidar lo divino. Nos faltaba determinar qué tipo de relación encontramos en la obra de Cantor. La respuesta la encontramos en la distinción que Cantor propone entre dos tipos de infinito actual (2009, p. 434 [81-82]): *el transfinito*, aquel que es susceptible de crecimiento posterior (como sucede con el conjunto potencia de un conjunto infinito y así…), del que se ocupan las matemáticas, y el *infinito absoluto*, aquel que no es susceptible de crecimiento y que encarna la máxima perfección, a saber, Dios, del que se ocupa la teología. El infinito absoluto es *reconocible* pero *no cognoscible*, ni siquiera de manera aproximada (Thomas-Bolduc, 2016; Tapp, 2014). Si esto es así, ¿en qué pueden ayudar las matemáticas y los números transfinitos a la hora de acercarse al Absoluto?

Quisiera proponer la siguiente interpretación: el trabajo de Cantor, más que rasguñar el Absoluto a partir de los retazos de nuestro mundo, se acerca a Dios de manera negativa. Es decir, como Cantor sabe que las matemáticas no son capaces de develar las propiedades del infinito absoluto, su teoría de los transfinitos sirve para mostrar qué no es Dios, esto es, mostrar que no es infinito. En este sentido, me alejo de la tesis de Tapp y muchos otros que ven en los diferentes alefs[4] un "camino hacia el trono de Dios (el Aleph)" y me acerco a interpretaciones como la de Drozdeck (1995), para quien, siguiendo a San Agustín, Cantor entiende a Dios como ente *eterno*. Ofrezco dos razones para sostener esta tesis. Primero, si Cantor concibe al infinito absoluto como aquello que no admite crecimiento y que no puede ser conocido, los diferentes alefs no develan nada de él. Por el contrario, al mostrar que el infinito puede ser perfectamente determinado y definido, Cantor muestra que Dios ha de exceder lo infinito. Segundo, Cantor afirma que el infinito absoluto es una multiplicidad inconsistente, es decir, una multiplicidad que no puede ser pensada como un uno (Thomas-Bolduc, 2016). En ese sentido, el infinito absoluto no es un objeto matemático, ni las matemáticas están en capacidad de ocuparse de él. Luego, las matemáticas solo pueden ayudarnos a mostrar que teólogos y filósofos han caído en el error de pensar a Dios como lo infinito, suponiendo que el infinito no es determinable, cuando sí lo es.

Platón, Plotino y Cantor dirigen sus ojos hacia lo eterno. Esto hace que el infinito no sea concebido como un concepto que supera cualquier posibilidad de ser abarcado. Lo infinito, en tanto no equiparable a lo eterno, es una noción ordinaria, esto es, una noción que se puede determinar, definir y distinguir. Luego, para ninguno de los tres hay problema alguno con sostener que el infinito existe en un sentido actual. Oponerse al infinito dadas las perplejidades que emergen a la hora de ocuparse de él no es más que el resultado de un prejuicio que ha permeado la filosofía, las matemáticas y la teología: asumir que aquello que se sostiene en el plano de lo finito ha de sostenerse también, *necesariamente*, en el plano de lo infinito. Ya volveremos sobre esto.

¿Qué podemos decir con respecto a Aristóteles y Kronecker? En cuanto a Aristóteles, hay quienes dicen (cf. Dombrowski, 2016, p. 118) que la concepción de Dios del estagirita como causa final no está enmarcada en el horizonte de la eternidad en tanto que sus ojos están puestos sobre el mundo natural que está en constante flujo. Si es así, Aristóteles no concibe

[4] Recuerdo haberle escuchado al profesor Fernando Zalamea que la palabra "alefs" (con *f*) hace referencia a los números transfinitos, mientras que "Aleph" (con mayúscula y *ph*) refiere al Absoluto.

cuerpos ni cantidades infinitas porque no cuenta con algo mayor que lo reconcilie con la naturaleza del infinito. Ahora bien, ¿qué podemos decir si no comulgamos con la idea según la cual el Dios de Aristóteles no es eterno, y sostenemos, como lo hace Dombrowski (2016), que el Dios de Aristóteles es similar al de Platón, esto es, eterno, inmutable y completo? En este caso, tenemos que tener en cuenta que el Absoluto en Aristóteles es una necesidad para explicar los fenómenos físicos y dar cuenta de la doctrina de las causas eficientes (Tighe, 2008), lo que nos lleva a preguntar si, como sucede en Platón, la eternidad aristotélica supone un reto para la consistencia propia del mundo finito. De no ser así, aunque el Dios de Aristóteles sea eterno, no cumple con la función de apalancar la naturaleza inconsistente del infinito para aceptar su actualidad.

En lo que respecta a Kronecker, sabemos poco de sus opiniones acerca de la naturaleza de lo Absoluto. Sin embargo, esto no es de mucha relevancia. En tanto que Kronecker no tiene los ojos puestos sobre lo eterno, el infinito se alza como un concepto inabarcable, cuya determinación es imposible si moramos en el horizonte de las definiciones constructivas. No es tanto que Kronecker se oponga a la dimensión eterna de lo Absoluto y que esto lo lleve a no concebir el infinito como un concepto ordinario en el sentido ya mencionado. Es, más bien, la ausencia de una dimensión del Absoluto en su obra lo que puede explicar por qué los números transfinitos resultan objetos inaceptables que exceden los alcances de las matemáticas. Es decir, a diferencia de Cantor, para quien la eternidad del Absoluto prepara el terreno para aceptar las perplejidades que surgen al pensar en el infinito, la ausencia de una concepción acerca de la dimensión del Absoluto puede llevar a que Kronecker no cuente con algo que apalanque y le permita aceptar la naturaleza aparentemente contradictoria del infinito. La eternidad, entonces, cumple con el rol de labrar el terreno para pensar lo infinito por fuera de una noción de límite.

Antes de seguir, vale la pena mencionar por qué lo dicho hasta acá sí nos permite hablar de una tensión temática continua en ambas controversias. Ninguna de las dos controversias sobre el infinito versa propiamente sobre el Absoluto. Sin embargo, la dimensión del Absoluto sí moldea el desarrollo de las controversias. En tanto sostengamos o no un Dios eterno, que reta la consistencia tal como la concebimos, estaremos dispuestos a atribuirle cierta naturaleza al infinito: para Platón, como copia de lo eterno; para Cantor, como concepto ordinario; para Aristóteles, como ente cuya existencia no ocurre en sentido actual; y, para Kronecker, como concepto matemáticamente ilegítimo.

4.3. La tensión entre infinito y consistencia

Tanto Cantor como Hilbert se decantan por una visión de las matemáticas en la que la consistencia garantiza la existencia de los objetos matemáticos. A propósito, dice Hilbert:

> Si la inferencia lógica es fiable, debe ser posible estudiar estos objetos [los que resultan de inferencias lógicas] completamente en todas sus partes, y [así] el hecho de que ocurren, que difieren los unos de los otros, y que se siguen los unos a los otros, o que están concatenados, es inmediatamente dado, junto con los objetos, como hecho que ni puede ser reducido a algo más ni que requiere de reducción alguna (1967, p. 376).

Kronecker, dada su postura constructivista, niega que la consistencia sea suficiente para que un objeto haga parte de la familia de las matemáticas. Para que un objeto sea reconocido como legítimo, este debe poder ser construido en una serie finita de pasos. Así, Cantor y Kronecker nos invitan a pensar en el siguiente problema: ¿qué relación existe entre consistencia y existencia?

La respuesta a esta pregunta, que parece sencilla tanto para Cantor como para Kronecker, se complica cuando tenemos en cuenta objetos relacionados con el infinito. Si para Cantor la consistencia implica existencia, ¿cómo es que podemos decir que los conjuntos infinitos son objetos legítimos si, por definición, van en contra de la verdad de proposiciones como "el todo es mayor que las partes"? Para que la doctrina de Cantor se sostenga, es necesario distinguir entre dos tipos de consistencia: la que aplica a lo finito y la que aplica a lo infinito; o, más bien, afirmar que lo que es inconsistente en el reino de lo finito no lo es necesariamente en el de lo infinito.

Cantor insinúa esta distinción cuando denuncia que la filosofía, las matemáticas y la teología han caído en el perverso error de asumir que lo que es verdadero en el campo de lo finito lo es también en el campo de lo infinito. Kronecker, en tanto que desea restringir las matemáticas al seguro reino de los números finitos (Dauben, 1990), no concibe una distinción de este tipo. Así las cosas, estamos ante una nueva tensión temática que podemos rastrear también en la polémica antigua: ¿debemos reformular o no la consistencia para armonizarla con las perplejidades que trae consigo el infinito?

Cantor acusa directamente a los aristotélicos de caer en el error perverso. Por ejemplo, Cantor dice que un conocido argumento atribuido a los escolásticos acerca de la "aniquilación de los números", según el cual, si partimos de dos números naturales a y b cualesquiera, tenemos que $a+b>a$ y que $b+a>a$, pero, si sucede que b es infinito, sin importar qué valor tome a, $a+b=b$, es falaz porque asume que los números infinitos deben exhibir las mismas características aritméticas que los números finitos (Dauben, 1990). Cantor no se equivoca en dirigir sus críticas directamente a los aristotélicos. Como vimos en la primera sección, una de las razones por las que Aristóteles niega la actualidad del infinito es que, si el infinito es una cantidad, sus partes han de ser también infinitas (*Física* III, 204a20-30). Para Aristóteles no es aceptable que una parte de una cantidad sea igual en magnitud a la cantidad considerada en su totalidad. Esto sería sostener, por un lado, que el todo es mayor que las partes, como sucede en el reino de lo finito, y, por otro lado, que, en las cantidades infinitas, no es cierto que el todo sea mayor a todas sus partes. Aristóteles no está dispuesto a renunciar a la consistencia que rige lo finito. A lo sumo, está dispuesto a aceptar que el infinito es una noción límite sin realizar.

Por su parte, Plotino acompaña a Cantor, o, más bien, Cantor acompaña a Plotino, en su disposición a aceptar que la consistencia varía cuando consideramos lo infinito. El pasaje que citamos en la sección anterior (Plotino III, VIII, 8, 40-45), aquel que ofrece una suerte de definición del infinito, es un ejemplo perfecto de la diferencia entre platónicos y aristotélicos en lo que respecta a la consistencia y el infinito. Plotino no tiene problema con que una substancia infinita sea igual en magnitud a alguna de sus partes; de hecho, esto es lo que la hace ser infinita. Aristóteles, ya dijimos, denuncia esta como una razón para rechazar el infinito actual.

Si consideramos los pasajes de Plotino acerca de la eternidad, también encontramos indicios de un pensamiento que no reduce aquello que está más allá de lo finito a lo que se dice de lo finito. Al refutar una posible definición de eternidad, según la cual la eternidad es "Sustancia inteligible", dice Plotino:

> Además, los Seres contenidos están en una de las dos [en la naturaleza inteligible] a modo de partes, mientras que el contenido total de la eternidad está en ella todo junto, no en calidad de parte, sino en razón de que todo lo que se caracteriza por ser eterno lo es en virtud de la eternidad (III, VII, 2, 15).

Plotino nos dice que lo eterno no debe pensarse de la misma manera como concebimos la naturaleza inteligible. En esta última, aquello que compone a un ser lo hace a manera de parte, es decir, a manera de constituyente que, en su agregado, forma el todo. La eternidad, por el contrario, no es suma de partes: es unidad.

Vemos entonces que ambas controversias están permeadas por una tensión temática a propósito del infinito y la consistencia. Esta presión de fondo moldea el horizonte en el que se desarrolla la controversia, en tanto que determina si estamos o no dispuestos a aceptar las perplejidades del infinito y a rechazarlo o no como objeto. En el caso de Aristóteles y Kronecker, en tanto que prima la consistencia propia de lo finito y lo físico, respectivamente, los entes que postulemos como existentes deben poder acoplarse a esta exigencia. En los platónicos y Cantor, como la consistencia no se limita a lo finito, no hay problema con aceptar objetos que no se acoplan a ella.

Conclusión

La noción de "tensiones temáticas", que ya vimos nos puede ayudar a establecer parentescos entre controversias distantes en el tiempo como aquellas sobre el infinito, sirve también para abordar un problema recurrente en las reflexiones filosóficas sobre las ciencias. El principal riesgo que tenemos cuando intentamos equiparar dos controversias alejadas es asumir que podemos establecer comparaciones. Si dos controversias se ubican en el seno de paradigmas científicos distintos, no es claro que podamos equiparar su sentido dado el contexto particular en el que se desarrollan. Las tensiones temáticas, no obstante, nos ofrecen una salida: en vez de buscar continuidades con los ojos puestos sobre las etapas de desarrollo de las controversias, resulta conveniente dirigir nuestra mirada hacia atrás: hacia aquellas tensiones de fondo que, implícitamente, las moldean. En el caso de las controversias estudiadas es muy difícil intentar equipararlas si nos detenemos en la manera en la que cada una se aproxima al infinito. No podemos siquiera afirmar que la controversia antigua tiene relación alguna con reflexiones matemáticas; reflexiones que, en la controversia Cantor-

Kronecker, son el eje de las discusiones. Sin embargo, al dirigir nuestra mirada hacia los camerinos de las controversias, encontramos algunas presuposiciones en conflicto compartidas que nos sirven para intentar relacionar, ahora sí, su contenido temático. La invitación, entonces, es a dirigir nuestra mirada hacia los camerinos si queremos ocuparnos de controversias en las que hay aspectos presentes que sugieren formas de inconmensurabilidad.

Referencias.

Aristóteles (trad. en 1995). *Física*. Madrid: Gredos. Trad. Guillermo R. de Echandía.

____. (trad. en 1994). *Metafísica*. Madrid: Gredos. Trad. Tomás Calvo Matínez.

Boniface, J. (2005). "Leopold Kronecker´s conception of the foundation of mathematics". *Philosophia Scientiae*, 143-156.

Cantor, G. (1883, 1996). "Foundations of a General Theory of Manifolds: A Mathematico-Philosophical Investigation into the Theory of the Infinite". En W. B. Ewald (Ed.) (1996), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 879-920. Oxford (UK): Oxford University Press.

____. (1887, 2009). "Notas a la teoría de los transfinitos". En C. Gómez (Ed.), *Georg Cantor: Sistema de números y conjuntos*, 434-500. La Coruña: Universidade Da Coruña. Trad. C. Gómez Bermúdez.

Dauben, J. W. (1977). "Georg Cantor and Pope Leo XIII: Mathematics, Theology and the Infinite". *Journal of the History of Ideas* (38) 1, 85-108.

____. (1990). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton (NJ): Princeton University Press.

____. (1995). "The Battle for Cantorian Set Theory". En G. V. Brummelen & M. Kinyon (Eds.) (200), *Mathematics and the Historian´s Craft*, 221-241. Halifax (NS): Springer.

Dombrowski, D. (2016) *A History of the Concept of God. A Process Approach*. New York: (NY) Suny Press.

Drozdek, A. (1995). “Beyond Infinity: Agustine and Cantor”. *Laval théologique et philosophique* (51) 1, 127-140.

____. (2008). *In the Beginning was the Apeiron. Infinity in Greek Philosophy*. Stuttgart: Paligenesia

Frege, G. (1918/1997) “Thought”. En M. Beaney (Ed.), *The Frege Reader*, 325-345. Oxford (UK): Blackwell Publishers.

Gray, J. (2008). Plato´s Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics. Princeton (NJ): Princeton University Press.

Hilbert, D. (1920/1966). “Hilbert´s Göttingen Lectures”. En W. B. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 944-946. Oxford (UK): Oxford University Press.

____. (1925/1967) “On the infinite”. En J. van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Gödel. A Soruce Book in the History of Mathematical Logic, 1879-1931*, 369-392. Cambridge (MA): Harvard University Press.

Holton, G. (1985). “La construcción de una teoría: el modelo de Einstein”. En *La imaginación científica*, 36-65. México D.F.: Fondo de Cultura Económica. Trad. Juan José Utrilla.

____. (1975). “The Thematic Imagination in Science”. En *Thematic Origins of Scientific Thought. Kepler to Einstein*, 47-68. Cambridge (MA): Harvard University Press.

Knorr, W. R. (1973). *The Evolution of the Euclidean Elements*. Boston (MA): D. Reidel Publishing Company.

Kronecker, L. (1887). “On the Concept of Number”. En W. B. Ewald (Ed.) (1996), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 947-955. Oxford (UK): Oxford University Press.

Lear, J. (1982). “Aristotle´s Philosophy of Mathematics”. *The Philosophical Review* (91) 2, 161-192.

Mentzeniotis, D. y Satamatellos, G. “The Notion of Infinity in Plotinus and Cantor”. En J. Dillion y M-E. Zokvo (Eds.), *Platonism and Forms of Intelligence*, 213-230. Berlin: Akademie Verlag.

Platón (trad. en 1992). *Filebo*. Madrid: Gredos. Trad. María Ángeles Durán & Francisco Lisi.

____. (trad. en 1992). *Timeo*. Madrid: Gredos. Trad. María Ángeles Durán & Francisco Lisi.

Plotino (trad. en 1998). *Enéadas,* 3 vols. Madrid: Gredos. Trad. Jesús Igal.

Proclo (trad. en 1970). *A Commentary on the First Book of Euclid´s Elements*. Princeton (NJ): Princeton University Press. Trad. Glenn R. Morrow.

Tapp, C. (2012). “Absolute Infinity. A Bridge between Mathematics and Theology”. En N. Tennant (Ed.) (2014), *Foundational Adventures. Essays in Honour of Harvey M. Friedman*, 77-90. Milton Keynes (UK): College Publications.

Tomás de Aquino (1273/2001). *Suma de Teología I*. Madrid: Biblioteca de Autores Cristianos. Trad. José Martorell Capó.

Thomas-Bolduc, A. R. (2016). “Cantor, God, and Inconsistent Multiplicities”. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric* (44) 57, 133-146.

Tighe, J. (2008) “The God Concept: Aristotle and the Philosophical Tradition”. *Found Sci* (13), 217-228.

Wedberg, A. (1955). *Plato´s Philosophy of Mathematics*. Estocolmo: Almqvist & Wiksell.