Universidad del Rosario

Facultad de Economía

ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS CON CONDICIÓN FINAL Y SOLUCIONES DE VISCOSIDAD DE EDPS SEMILINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Rafael Serrano.

SERIE DOCUMENTOS DE TRABAJO

No. 168

Octubre de 2014

Ecuaciones diferenciales estocásticas con condición final y soluciones de viscosidad de EDPs semilineales de segundo orden

Rafael Serrano*

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
Calle 12C No. 4-69
Bogotá, Colombia

8 de octubre de 2014

Resumen

El objetivo de este documento es recopilar algunos resultados clásicos sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) con condición final (en inglés *Backward stochastic differential equations*) con particular énfasis en el caso de coeficientes monótonos, y su conexión con soluciones de viscosidad de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) parabólicas y elípticas semilineales de segundo orden.

Kewywords: backward stochastic differential equation, viscosity solution, semilinear partial differential equation

JEL: C00, C65, Y80

1. Introducción

En contraste con las ecuaciones diferenciales de evolución determinísticas, para las cuales no hay mucha diferencia si se especifica una condición inicial o una condición final, en las *ecuaciones diferenciales estocásticas* (EDEs) hay una notable disimilitud si se fija una condición final. En el caso determinístico, por ejemplo, una ecuación diferencial de evolución de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = f(t, Y(t)), \quad t \in [0, T] \\ Y(T) = \xi \end{cases} \tag{1.1}$$

con $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\xi \in \mathbb{R}$ fijo, se resuelve de manera muy similar si se impone una condición inicial en vez de la condición final $Y(T) = \xi$.

En el caso estocástico, debido a que las soluciones de las EDEs deben ser adaptadas a una filtración dada, no sucede lo mismo. Basta con considerar el caso trivial $f = 0$ en un espacio de probabilidad filtrado

*rafael.serrano@urosario.edu.co

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ y ξ una variable aleatoria real $\mathcal{F}_T-$medible, es decir, la EDE

$$\begin{cases} dY_t = 0\,, & t \in [0,T] \\ Y_T = \xi \end{cases} \tag{1.2}$$

El único candidato para ser solución es el proceso $Y_t \equiv \xi$, $\forall t \in [0,T]$, y dado que este proceso no es $\mathcal{F}_t-$adaptado, a menos que ξ sea constante, la EDE (1.2) no posee solución adaptada.

Existen dos formas de afrontar este inconveniente: la primera es modificar (o remover) el requerimiento de *adaptabilidad* de la solución, la segunda opción es reformular el problema de valor final (1.2) en una EDE cuya solución sí sea adaptada. El primer método requiere de técnicas como el llamado *cálculo estocástico anticipativo,* ver por ejemplo [KUNI 90, NUAL 95]). Por esta razón, usaremos el segundo método. Además será suficiente para las aplicaciones que desarrollaremos más adelante.

Para reformular (1.2) modificaremos la solución de una manera adecuada y veremos qué tipo de ecuación se acomoda a dicha solución. La manera más razonable de modificar la solución $Y_t \equiv \xi$ para que sea $\mathcal{F}_t-$adaptada y satisfaga $Y_T = \xi$ es definir

$$Y_t := E\left[\xi \,|\, \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0,T].$$

Si la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es generada por un movimiento Browniano unidimensional $(W_t)_{t\geq 0}$ y ξ es una variable aleatoria cuadrado integrable, por el teorema de representación de martingalas existe un proceso $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{F}_t-$adaptado tal que

$$Y_t = E[Y_0] + \int_0^t Z_s\, dW_s\,, \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{c.s.} \tag{1.3}$$

En forma diferencial, $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ satisface

$$\begin{cases} dY_t = Z_t\, dW_t\,, & t \in [0,T] \\ Y_T = E\left[\xi \,|\, \mathcal{F}_T\right] = \xi \end{cases} \tag{1.4}$$

De esta manera, si reformulamos ecuación (1.2) como la ecuación (1.4), y buscamos un par (Y, Z) que sea solución de (1.4) en vez de buscar un sólo proceso adaptado que sea solución de (1.2), encontrar ahora una solución que sea adaptada es posible! Adicionalmente, de la igualdad (1.3) se tiene

$$E[Y_0] = Y_T - \int_0^T Z_s\, dW_s = \xi - \int_0^T Z_s\, dW_s$$

Así la ecuación (1.4) toma la forma integral

$$Y_t = E[Y_0] + \int_0^t Z_s\, dW_s = \xi - \int_t^T Z_s\, dW_s\,, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{c.s.} \tag{1.5}$$

De aquí en adelante, no distinguiremos (1.4) de (1.5). Cada una de estas ecuaciones será llamada una *Ecuación diferencial estocástica con condición final* (en breve *EDE con condición final*). Enfatizamos que la integral estocástica en (1.5) es la integral de Itô común y corriente con respecto al movimiento Browniano $(W_t)_{t\geq 0}$, y como se verá más adelante, es precisamente esa integral estocástica el factor clave que hace posible encontrar una solución adaptada.

Por último, observe que si aplicamos la fórmula de Itô al proceso $|Y_t|^2$, integramos entre t y T, y tomamos valor esperado se tiene

$$E\left[|\xi|^2\right] = E\left[|Y_t|^2\right] + E\left[\int_t^T |Z_s|^2\, ds\right], \quad t \in [0,T]. \tag{1.6}$$

Por lo tanto, $\xi = 0$ implica que $Y \equiv 0$ y $Z \equiv 0$ casi siempre. Dado que (1.5) es lineal, de la relación (1.6) se tiene la unicidad de los procesos adaptados que son solución de (1.5). En consecuencia, si ξ es una constante no-aleatoria, por unicidad obtenemos que $Y_t \equiv \xi$ y $Z_t \equiv 0$ es la única solución de (1.5), tal como en el caso determinístico.

El objetivo de este documento es recopilar algunos resultados clásicos sobre EDEs con condición final de la forma

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s\,, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.7}$$

con $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$. Este coeficiente no-lineal generaliza el que aparece en nuestra primera ecuación (1.1), pero ahora depende también de la segunda incógnita Z y de $\omega \in \Omega$. En particular, se presentarán resultados sobre existencia y unicidad de soluciones de EDEs con condición final en horizontes de tiempo fijo y aleatorio, y su conexión con soluciones de viscosidad de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) parabólicas y elípticas semilineales de segundo orden.

El contenido de estas notas está ampliamente basado en resultados obtenidos en los artículos de P. Briand [BRIA 95, BRIA 98], E. Pardoux [PARD1 98, PARD2 98], R.W.R. Darling y E. Pardoux [DA/PA 97] y el libro de J. Ma y J. Yong [MA/YO 99]. Para la lectura de este documento se requiere conocimientos básicos de cálculo estocástico. El lector interesado puede consultar textos como el de I. Karatzas y S. Shreve [KA/SH 91] y Øksendal [ØKSE 98].

2. EDEs con condición final - Horizonte de tiempo determinístico

2.1. Unicidad y existencia de soluciones

Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano $d-$dimensional definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Denote con $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración generada por $(W_t)_{t\geq 0}$ aumentada con los conjuntos $\mathbf{P}-$nulos de Ω, es decir

$$\mathcal{F}_t = \sigma\big(\{W_s : s \in [0,t]\} \cup \mathcal{N}\big), \quad t \geq 0$$

donde $\mathcal{N} = \{E \subseteq \Omega : \exists G \in \mathcal{F},\, G \supseteq E \text{ y } \mathbf{P}(G) = 0\}$. Para un tiempo terminal $T > 0$ fijo, $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ denotará el espacio vectorial de procesos $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ con valores en $\mathbb{R}^k$ *progresivamente medibles* con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ tales que

$$\|Y\|^2_{\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)} := E\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2\right] < +\infty, \tag{2.1}$$

y $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)$ el sub-espacio de los procesos en $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ con trayectorias continuas. También trabajaremos con el espacio vectorial $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ de los procesos $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ con valores en $\mathbb{R}^{k\times d}$ *progresivamente medibles* con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ tales que

$$\|Z\|^2_{\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})} := E\int_0^T \|Z_t\|^2 dt < +\infty, \tag{2.2}$$

donde $\|z\| := \mathrm{Tr}[zz^*]^{1/2}$ para $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$. Note que en $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)$ dos procesos serán 'iguales' si son *indistinguibles* mientras que en $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ lo serán si uno es *modificación* del otro. Conservaremos la misma notación para los espacios cociente, que además son espacios de Banach con las normas (2.1) y (2.2) respectivamente.

A lo largo de esta sección asumiremos que la *condición final* ξ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_T-$medible con valores en $\mathbb{R}^k$, y que existe un proceso $(F_t)_{t\in[0,T]}$ *prog. medible*, con valores en $\mathbb{R}_+$, tal que el coeficiente

$$f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

satisface las siguientes hipótesis

(i) el proceso $\{f(t,y,z)\}_{t\in[0,T]}$ es *progresivamente medible,* $\forall(y,z)\in \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$

(ii) f es *Lipschitz* en $z\in\mathbb{R}^{k\times d}$; es decir, existe $K>0$ tal que c.s.

$$|f(t,y,z)-f(t,y,z')|\le K\|z-z'\|,\ \forall t\in[0,T],\ \forall y\in\mathbb{R}^k,\ \forall z,z'\in\mathbb{R}^{k\times d},$$

(iii) f es *monótona* en $y\in\mathbb{R}^k$; es decir, existe $\mu\in\mathbb{R}$ tal que c.s.

$$\big\langle y-y', f(t,y,z)-f(t,y',z)\big\rangle\le\mu|y-y'|^2,\ \forall t\in[0,T],\ \forall y,y'\in\mathbb{R}^k,\ \forall z\in\mathbb{R}^{k\times d}$$

(iv) Crecimiento lineal en $y\in\mathbb{R}^k$,

$$|f(t,y,0)|\le F_t+K|y|,\ \forall t\in[0,T],\ \ \forall y\in\mathbb{R}^k$$

(v) $E\Big[\,|\xi|^2+\displaystyle\int_0^T F_t^2\,dt\Big]<+\infty$

(vi) $y\mapsto f(t,y,z)$ es continua, $\forall t\in[0,T],\ \forall z\in\mathbb{R}^{k\times d}$ c.s.

Note que si f satisface (ii) y (iv) entonces

$$|f(t,y,z)|\le|f(t,y,z)-f(t,y,0)|+|f(t,y,0)|\le F_t+K\big(|y|+\|z\|\big)\,.$$

Definición 2.1. Diremos que un par de procesos $(Y,Z)=(Y_t,Z_t)_{t\in[0,T]}$ *prog. medibles*, con valores en $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, son solución de la EDE con condición final ξ y coeficiente f si satisfacen

(j) $Z\in\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$

(jj) $Y_t=\xi+\displaystyle\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds-\int_t^T Z_s\,dW_s\,,\quad 0\le t\le T$ c.s.

Proposición 2.2. *Si (Y,Z) es solución de la EDE con condición final ξ y coeficiente f y f satisface*

$$|f(t,y,z)|\le F_t+K\big(|y|+\|z\|\big)\,,\quad\forall t\in[0,T],\ \ \forall(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$$

donde $(F_t)_{t\in[0,T]}$ es un proceso con valores en $\mathbb{R}_+$ prog. medible *tal que*

$$E\int_0^T F_t^2\,dt<+\infty$$

entonces $Y\in\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$.

Demostración. Usando la desigualdad

$$\Big|\int_0^t f(s,Y_s,Z_s)\,ds\Big|^2=\sum_{i=1}^k\Big|\int_0^t f_i(s,Y_s,Z_s)\,ds\Big|^2\le\Big(\sum_{i=1}^k\Big|\int_0^t f_i(s,Y_s,Z_s)\,ds\Big|\Big)^2$$

junto con la hipótesis de crecimiento lineal en $y \in \mathbb{R}^k$ y en $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^t f(s,Y_s,Z_s)\,ds\Big| &\leq \sum_{i=1}^k \Big|\int_0^t f_i(s,Y_s,Z_s)\,ds\Big| \leq \sum_{i=1}^k \int_0^t |f_i(s,Y_s,Z_s)|\,ds \\ &\leq k\int_0^t |f(s,Y_s,Z_s)|\,ds \leq k\int_0^t (F_s + K\|Z_s\|)\,ds + k\int_0^t K|Y_s|\,ds.\end{aligned}$$

Dado que para todo $t \in [0,T]$ se tiene

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)\,ds + \int_0^t Z_s\,dW_s$$

por desigualdad triangular vemos que $|Y_t|$ satisface

$$\begin{aligned}|Y_t| &\leq |Y_0| + k\int_0^t (F_s + K\|Z_s\|)\,ds + k\int_0^t K|Y_s|\,ds + \Big|\int_0^t Z_s\,dW_s\Big| \\ &\leq \zeta + k\int_0^t K|Y_s|\,ds, \quad t\in[0,T] \qquad (2.3)\end{aligned}$$

donde

$$\zeta = |Y_0| + k\int_0^T (F_s + K\|Z_s\|)\,ds + \sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t Z_s\,dW_s\Big|$$

la cual es una variable aleatoria real cuadrado integrable, debido a que Y_0 es constante c.s. por ser $\mathcal{F}_0-$medible, y a las desigualdades

$$\begin{aligned}E\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t Z_s\,dW_s\Big|^2\Big] &\leq 4d\,E\int_0^T \|Z_s\|^2 ds < +\infty \\ E\Big[\Big(\int_0^T (F_s + K\|Z_s\|)\,ds\Big)^2\Big] &\leq T\cdot E\Big[\int_0^T (F_s+K\|Z_s\|)^2 ds\Big] \\ &\leq 2T\cdot E\Big[\int_0^T (F_s^2 + K^2\|Z_s\|^2)\,ds\Big] < +\infty.\end{aligned}$$

Aplicando el lema de Gronwall a (2.3) obtenemos $|Y_t| \leq \zeta e^{kKt}$ para $t\in[0,T]$. Tomando valor esperado

$$E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^2\Big] \leq E(\zeta^2)\cdot e^{2kKT} < +\infty.$$

□

Observación 2.3. Bajo las mismas hipótesis de la proposición anterior se tiene que

$$\begin{aligned}E\int_0^t \|Y_s^*\cdot Z_s\|^2 ds &\leq E\int_0^T \|Y_s^*\cdot Z_s\|^2 ds \leq E\int_0^T |Y_s|^2\|Z_s\|^2 ds \\ &\leq E\int_0^T\Big(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^2\Big)\cdot\|Z_s\|^2 ds \\ &\leq E\Big[\Big(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^2\Big)\cdot\int_0^T\|Z_s\|^2 ds\Big] \\ &\leq \Big\{E\Big(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^2\Big)\Big\}^{1/2}\cdot\Big\{E\int_0^T\|Z_s\|^2 ds\Big\}^{1/2} < +\infty,\end{aligned}$$

y dado que el proceso $(Y_t^* Z_t)_{t\in[0,T]}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, obtenemos

$$E\int_0^t Y_s^* \cdot Z_s\, dW_s = 0, \;\; \forall t \in [0,T].$$

Esto será de mucha utilidad a lo largo de esta sección.

Proposición 2.4. *Si (Y,Z) es solución de la EDE con condición final ξ y coeficiente f que satisface las hipótesis (i)-(v), entonces*

$$|Y_t|^2 \leq E\Big[e^{\alpha(T-t)}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\alpha(s-t)} F_s^2\, ds \;\Big|\; \mathcal{F}_t \Big], \quad t\in[0,T]$$

donde $\alpha = 1+2\mu+K^2$. En particular, si $|\xi|$ y F_t son acotados por una constante C y $\alpha \geq 1$, entonces

$$\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2 \leq 2C^2(e^{\alpha T}-1).$$

Demostración. Aplicando la Fórmula de Itô a la diferencial estocástica

$$dY_t = -f(t,Y_t,Z_t)\, dt + Z_t\, dW_t$$

con la función $F(t,y) = e^{\alpha t}|y|^2,\ t\geq 0,\ y\in \mathbb{R}^k$, y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,y) = \alpha e^{\alpha t}|y|^2,\ \nabla_y F(t,y) = 2e^{\alpha t} y,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2}(t,y) = 2e^{\alpha t},\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(t,y) = 0 \text{ si } i\neq j,$$

obtenemos

$$d(e^{\alpha t}|Y_t|^2) = \{\alpha e^{\alpha t}|Y_t|^2 - 2e^{\alpha t}\langle Y_t, f(t,Y_t,Z_t)\rangle + e^{\alpha t} Tr(Z_t\cdot Z_t^*)\}\, dt + 2e^{\alpha t} Y_t \cdot Z_t\, dW_t.$$

Integrando entre t y T, y reorganizando

$$\begin{aligned} &e^{\alpha t}|Y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\|Z_s\|^2\, ds \\ &\qquad = e^{\alpha T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\big\{-\alpha|Y_s|^2 + 2\left\langle Y_s, f(s,Y_s,Z_s)\right\rangle\big\}\, ds - \int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s^* \cdot Z_s\, dW_s, \end{aligned}$$

y dado que

$$\begin{aligned} 2\langle y, f(t,y,z)\rangle &= 2\langle y, f(t,y,z) - f(t,0,z)\rangle + 2\langle y, f(t,0,z)\rangle \leq 2\mu|y|^2 + 2|y|\,|f(t,0,z)| \\ &\leq 2\mu|y|^2 + 2F_t|y| + 2K|y|\,\|z\| \leq 2\mu|y|^2 + F_t^2 + |y|^2 + K^2|y|^2 + \|z\|^2 \\ &= \alpha|y|^2 + F_s^2 + \|z\|^2, \end{aligned}$$

el proceso $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ satisface

$$e^{\alpha t}|Y_t|^2 \leq e^{\alpha T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\alpha s} F_s^2\, ds - \int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s^* \cdot Z_s\, dW_s. \tag{2.4}$$

Por la propiedad de martingala de la integral estocástica

$$E\Big[\int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s^*\cdot Z_s\, dW_s \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big] = E\Big[\int_0^T 2e^{\alpha s} Y_s^*\cdot Z_s\, dW_s \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big] - E\Big[\int_0^t 2e^{\alpha s} Y_s^*\cdot Z_s\, dW_s \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big] = 0,$$

y debido a que Y_t es $\mathcal{F}_t-$medible, tomando valor esperado condicional con respecto a $\mathcal{F}_t$ en (2.4) se obtiene

$$e^{\alpha t}|Y_t|^2 \leq E\Big[e^{\alpha T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\alpha s} F_s^2\, ds \;\Big|\; \mathcal{F}_t \Big],$$

es decir
$$|Y_t|^2 \leq E\Big[e^{\alpha(T-t)}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\alpha(s-t)} F_s^2\, ds \;\Big|\; \mathcal{F}_t \Big], \quad t \in [0,T].$$

$\square$

Antes de probar existencia y unicidad de soluciones bajo las hipótesis (i)-(vi), es necesario considerar dos casos particulares: el primero es cuando f también es *Lipschitz* en la variable $y \in \mathbb{R}^k$, es decir, f satisface la hipótesis adicional

(ii') $|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq K\big(|y-y'| + \|z-z'\|\big),\ \forall t \in [0,T],\ \forall y,y' \in \mathbb{R}^k,\ \forall z,z' \in \mathbb{R}^{k\times d}$

Note que en este caso f también satisface la condición (iii) de monotonicidad en y con $\mu = K$, mientras que el recíproco no siempre es cierto: por ejemplo, la aplicación $y \mapsto -\sqrt{y^+}$ no es Lipschitz pero sí es monótona con $\mu = 0$.

El siguiente teorema, debido a Pardoux & Peng [PA/PE 90], es al parecer el primer resultado de existencia y unicidad de EDEs con condición final con coeficiente no lineal y tiempo terminal fijo :

Teorema 2.5. *[Pardoux, Peng (1990)] Bajo las hipótesis (i), (ii'), (iv) y (v), la EDE con condición final ξ y coeficiente f posee una única solución (Y,Z).*

Demostración. La idea es definir una *contracción* sobre el espacio de Banach $\mathcal{B}^2 := \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ cuyo punto fijo sea precisamente la solución de la EDE con condición final ξ y coeficiente f.

Dados $(U,V) \in \mathcal{B}^2$, definimos el proceso $(M_t)_{t\in[0,T]}$ en $\mathbb{R}^k$ con componentes

$$M_t^i := E\Big[\xi_i + \int_0^T f_i(s,U_s,V_s) ds \;\Big|\; \mathcal{F}_t \Big], \quad t \in [0,T],\ \ 1 \leq i \leq k.$$

De la desigualdad de Jensen vemos que

$$\begin{aligned}
|M_t|^2 = \sum_{i=1}^k |M_t^i|^2 &\leq \sum_{i=1}^k E\Big[\Big| \xi_i + \int_0^T f_i(s,U_s,V_s)\, ds \Big|^2 \;\Big|\; \mathcal{F}_t \Big] \\
&\leq \sum_{i=1}^k 2\cdot E\Big[|\xi_i|^2 + \Big| \int_0^T f_i(s,U_s,V_s)\, ds \Big|^2 \;\Big|\; \mathcal{F}_t \Big] \\
&\leq \sum_{i=1}^k 2\cdot E\Big[|\xi_i|^2 + T\int_0^T |f_i(s,U_s,V_s)|^2\, ds \;\Big|\; \mathcal{F}_t \Big] \\
&= 2\cdot E\Big[|\xi|^2 + T\int_0^T |f(s,U_s,V_s)|^2\, ds \;\Big|\; \mathcal{F}_t \Big],
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}E\big(|M_t|^2\big) &\leq 2\cdot E\Big[\,|\xi|^2 + T\int_0^T |f(s,U_s,V_s)|^2\,ds\,\Big]\\ &\leq 2\cdot E\Big[\,|\xi|^2 + T\int_0^T \big(F_s + K|U_s| + K\|V_s\|\big)^2\,ds\,\Big]\\ &\leq 2\cdot E\Big[\,|\xi|^2 + 3T\int_0^T (F_s^2 + K^2|U_s|^2 + K^2\|V_s\|^2)\,ds\,\Big] < +\infty,\end{aligned}$$

por lo tanto $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ es un proceso cuadrado integrable y por definición es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Por el teorema de Representación de Martingalas, existe un único proceso $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ en $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ tal que

$$M_t = E[M_0] + \int_0^t Z_s\,dW_s\,,\quad t\in[0,T]$$

y dado que ξ_i y $\int_0^T f_i(s,U_s,V_s)\,ds$ son $\mathcal{F}_T-$medibles (este último por el teorema de Fubini) se tiene que

$$M_T^i = E\Big[\,\xi_i + \int_0^T f_i(s,U_s,V_s)\,ds\,\Big|\,\mathcal{F}_T\Big] = \xi_i + \int_0^T f_i(s,U_s,V_s)\,ds,\ \ 1\leq i\leq k$$

es decir $\quad M_T = E[M_0] + \int_0^T Z_s\,dW_s = \xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)\,ds.$

Definimos

$$Y_t := M_t - \int_0^t f(s,U_s,V_s)\,ds,\quad t\in[0,T].$$

Entonces $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ tiene trayectorias continuas, es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ y satisface

$$\begin{aligned}Y_t &= E[M_0] + \int_0^t Z_s\,dW_s - \int_0^t f(s,U_s,V_s)\,ds\\ &= \xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)\,ds - \int_0^T Z_s\,dW_s + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t f(s,U_s,V_s)\,ds\\ &= \xi + \int_t^T f(s,U_s,V_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dW_s.\end{aligned}\tag{2.5}$$

En virtud de la Proposición 2.4, $Y\in\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$. De esta forma, para cada $(U,V)\in\mathcal{B}^2$ definimos $\Phi(U,V) = (Y,Z)$ como el único par $(Y,Z)\in\mathcal{B}^2$ que satisface (3.12). La aplicación $\Phi:\mathcal{B}^2\to\mathcal{B}^2$ es tal que $(Y,Z)\in\mathcal{B}^2$ es un punto fijo de Φ si y sólo si (Y,Z) es solución de la EDE con condición final (ξ,f).

Veamos que dicho punto fijo existe : Dados $(U,V),\ (U',V')\in\mathcal{B}^2$, notemos $(Y,Z)=\Phi(U,V),\ (Y',Z') = \Phi(U',V')$ y

$$(\widehat{U},\widehat{V}) = (U-U',V-V')\,,\quad (\widehat{Y},\widehat{Z}) = (Y-Y',Z-Z').$$

Con esta notación, el proceso $\widehat{Y}$ se escribe en forma diferencial

$$d\widehat{Y}_t = -\{f(t,U_t,V_t) - f(t,U_t',V_t')\}\,dt + \widehat{Z}_t\,dW_t.$$

Aplicando la Fórmula de Itô al proceso $e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2$ obtenemos

$$d(e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2) = \{\gamma e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 - 2e^{\gamma t}\langle\widehat{Y}_t, f(t,U_t,V_t) - f(t,U_t',V_t')\rangle + e^{\gamma t}Tr(\widehat{Z}_t\widehat{Z}_t^*)\}\,dt + 2e^{\gamma t}\widehat{Y}_t\cdot\widehat{Z}_t\,dW_t.$$

Integrando entre t y T (note que $\widehat{Y}_T = 0$) y reorganizando

$$
\begin{aligned}
&e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 + \int_t^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2\,ds \\
&= \int_t^T e^{\gamma s}\big\{-\gamma|\widehat{Y}_s|^2 + 2\left\langle \widehat{Y}_s, f(s,U_s,V_s) - f(s,U_s',V_s')\right\rangle \big\}\,ds - \int_t^T 2e^{\gamma s}\widehat{Y}_s^*\cdot\widehat{Z}_s\,dW_s \\
&\leq \int_t^T e^{\gamma s}\big\{-\gamma|\widehat{Y}_s|^2 + 2\,|\widehat{Y}_s|\cdot|f(s,U_s,V_s) - f(s,U_s',V_s')|\big\}\,ds - \int_t^T 2e^{\gamma s}\widehat{Y}_s^*\cdot\widehat{Z}_s\,dW_s \\
&\leq \int_t^T e^{\gamma s}\big(-\gamma|\widehat{Y}_s|^2 + 2K|\widehat{Y}_s|\cdot|\widehat{U}_s| + 2K|\widehat{Y}_s|\cdot\|\widehat{V}_s\|\big)\,ds - \int_t^T 2e^{\gamma s}\widehat{Y}_s^*\cdot\widehat{Z}_s\,dW_s.
\end{aligned}
$$

Para todo $\varepsilon > 0,\ 2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$. Usando esta desigualdad con $a = K|\widehat{Y}_s|$ y $b = |\widehat{U}_s|$ (resp. $a = K|\widehat{Y}_s|$ y $b = \|\widehat{V}_s\|$),

$$
\begin{aligned}
&e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 + \int_t^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2\,ds \\
&\leq \int_t^T e^{\gamma s}(-\gamma + 2K^2/\varepsilon)|\widehat{Y}_s|^2 ds + \varepsilon\int_t^T e^{\gamma s}\big(|\widehat{U}_s|^2 + \|\widehat{V}_s\|^2\big)\,ds - \int_t^T 2e^{\gamma s}\widehat{Y}_s^*\cdot\widehat{Z}_s\,dW_s,
\end{aligned}
$$

haciendo $\gamma = 2K^2/\varepsilon$ y definiendo $A_\varepsilon := \varepsilon\displaystyle\int_0^T e^{\gamma s}\big(|\widehat{U}_s|^2 + \|\widehat{V}_s\|^2\big)\,ds$,

$$
e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 + \int_t^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2\,ds \leq A_\varepsilon - \int_t^T 2e^{\gamma s}\widehat{Y}_s^*\cdot\widehat{Z}_s\,dW_s\,,\quad \forall t\in[0,T]. \tag{2.6}
$$

En particular, si tomamos $t = 0$, por la Observación 2.3 se obtiene

$$
E\int_0^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2\,ds \leq E[A_\varepsilon].
$$

De (2.6) se sigue

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 &\leq A_\varepsilon + 4\cdot\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t e^{\gamma s}\widehat{Y}_s^*\cdot\widehat{Z}_s\,dW_s\Big|, \\
E\Big[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2\Big] &\leq E[A_\varepsilon] + 12\cdot E\Big[\Big(\int_0^T e^{2\gamma s}|\widehat{Y}_s|^2\,\|\widehat{Z}_s\|^2 ds\Big)^{1/2}\Big] \\
&\leq E[A_\varepsilon] + E\Big[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t/2}|\widehat{Y}_t|\cdot 12\Big(\int_0^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2 ds\Big)^{1/2}\Big],
\end{aligned}
$$

y dado que $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, tomando $C = 12$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
E\Big[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2\Big] &\leq E[A_\varepsilon] + \frac{1}{2}\cdot E\Big[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2\Big] + \frac{C^2}{2}\cdot E\int_0^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2 ds \\
E\Big[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2\Big] &\leq 2E[A_\varepsilon] + C^2 E\int_0^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2 ds \leq (2 + C^2)E[A_\varepsilon],
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
E\Big[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 + \int_0^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2 ds\Big] &\le (3+C^2)E[A_\varepsilon] \\
&= \varepsilon(3+C^2)\, E\int_0^T e^{\gamma s}\big(|\widehat{U}_s|^2 + \|\widehat{V}_s\|^2\big)\, ds \\
&\le \varepsilon(3+C^2)\, E\Big[T\Big(\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|\widehat{U}_t|^2\Big) + \int_0^T e^{\gamma s}\|\widehat{V}_s\|^2\, ds\Big] \\
&\le \varepsilon(3+C^2)(1\vee T)\, E\Big[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|\widehat{U}_t|^2 + \int_0^T e^{\gamma s}\|\widehat{V}_s\|^2\, ds\Big].
\end{aligned}
$$

Escogiendo $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon(3+C^2)(1\vee T) < 1$, la aplicación Φ es una *contracción* estricta de $\mathcal{B}^2$ en sí mismo, con la norma

$$
\|(Y,Z)\|_\gamma^2 := E\Big[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\gamma s}\|Z_s\|^2 ds\Big], \quad \gamma = 2K^2/\varepsilon
$$

que además satisface

$$
\|(Y,Z)\|_{\mathcal{B}^2}^2 \le \|(Y,Z)\|_\gamma^2 \le e^{\gamma T}\|(Y,Z)\|_{\mathcal{B}^2}^2\,, \quad \forall (Y,Z)\in\mathcal{B}^2
$$

donde $\|(Y,Z)\|_{\mathcal{B}^2}$ es la norma usual de $\mathcal{B}^2$ correspondiente al caso $\gamma = 0$. Por lo tanto Φ posee un único punto fijo $(Y,Z)\in\mathcal{B}^2$ solución de la EDE con condición final ξ y coeficiente f, lo cual prueba el teorema. $\square$

El segundo caso particular que necesitamos considerar es cuando el coeficiente no depende de $z\in\mathbb{R}^{k\times d}$, es decir, EDEs con condición final de la forma

$$
Y_t = \xi + \int_t^T h(s,Y_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \quad 0\le t\le T. \tag{2.7}
$$

En este caso también supondremos que existe un proceso $(H_t)_{t\in[0,T]}$ *prog. medible* con valores en $\mathbb{R}_+$ y que existen $\mu\in\mathbb{R}$ y $K>0$ tales que

(i') el proceso $\{h(t,y)\}_{t\in[0,T]}$ es *prog. medible,* $\forall y\in\mathbb{R}^k$

(iii') $\big\langle y-y', h(t,y)-h(t,y')\big\rangle \le \mu|y-y'|^2$, $\forall t\in[0,T]$, $\forall y,y'\in\mathbb{R}^k$ c.s.

(iv') $|h(t,y)| \le H_t + K|y|$, $\forall t\in[0,T]$, $\forall y\in\mathbb{R}^k$ c.s

(v') $E\Big[|\xi|^2 + \int_0^T H_t^2\, dt\Big] < +\infty$

(vi') $y\mapsto h(t,y)$ es continua, $\forall t\in[0,T]$ c.s.

Observación 2.6. Sea $\bar{h}:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^k$ definida por $\bar{h}(t,\bar{y}) := e^{\lambda t}h(t,e^{-\lambda t}\bar{y}) - \lambda\bar{y}$. Entonces (Y,Z) es solución de la EDE con condición final ξ y coeficiente h si y sólo si $(\bar{Y},\bar{Z})$ definido por

$$
(\bar{Y}_t,\bar{Z}_t) := (e^{\lambda t}Y_t, e^{\lambda t}Z_t), \quad t\in[0,T]
$$

es solución de la EDE con condición final $e^{\lambda T}\xi$ y $\bar{h}$. En efecto, si (Y, Z) satisface (2.7), para cada $1 \le i \le k$ el proceso Y^i se escribe en forma diferencial

$$dY_t^i = -h_i(t, Y_t)\, dt + Z_t^{(i)}\, dW_t$$

(donde $Z_t^{(i)}$ es la i-ésima fila de Z_t). Aplicando Fórmula de Itô a los procesos Y^i, con la función $F(t, y) = e^{\lambda t} y,\ t \in [0, T],\ y \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned} d(e^{\lambda t} Y_t^i) &= \{\lambda e^{\lambda t} Y_t^i - \lambda e^{\lambda t} h_i(t, Y_t)\}\, dt + e^{\lambda t} Z_t^{(i)}\, dW_t\ , \quad 1 \le i \le k \\ \text{i.e.}\quad d(e^{\lambda t} Y_t) &= \{\lambda e^{\lambda t} Y_t - \lambda e^{\lambda t} h(t, Y_t)\}\, dt + e^{\lambda t} Z_t\, dW_t. \end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} Y_t &= e^{\lambda T}\xi + \int_t^T \{\lambda e^{\lambda s} h(s, Y_s) - \lambda e^{\lambda s} Y_s\}\, ds - \int_t^T e^{\lambda s} Z_s\, dW_s, \quad t \in [0, T] \\ \text{i.e.}\quad \bar{Y}_t &= e^{\lambda T}\xi + \int_t^T \bar{h}(s, \bar{Y}_s)\, ds - \int_t^T \bar{Z}_s\, dW_s, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

El recíproco se demuestra igual, tomando $-\lambda$ en vez de λ.

La ventaja de este 'cambio de variable' es que si hacemos $\lambda = \mu$, entonces $\bar{h}$ satisface (iii') pero con constante de monotonicidad $\bar{\mu} = 0$. En efecto, si $y, y' \in \mathbb{R}^k$,

$$\begin{aligned} \langle y - y', \bar{h}(t, y) - \bar{h}(t, y') \rangle &= \langle y - y', e^{\mu t} h(t, e^{-\mu t} y) - \mu y - e^{\mu t} h(t, e^{-\mu t} y') + \mu y' \rangle \\ &= e^{\mu t} \langle y - y', h(t, e^{-\mu t} y) - h(t, e^{-\mu t} y') \rangle - \mu \langle y - y', y - y' \rangle \\ &= e^{2\mu t} \langle e^{-\mu t} y - e^{-\mu t} y', h(t, e^{-\mu t} y) - h(t, e^{-\mu t} y') \rangle - \mu |y - y'|^2 \\ &\le \mu e^{2\mu t} |e^{-\mu t} y - e^{-\mu t} y'|^2 - \mu |y - y'|^2 = 0. \end{aligned}$$

Gracias a esta observación, para demostrar existencia y unicidad de soluciones de EDE con condición final bajo las hipótesis (i') y (iii')-(vi') podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mu = 0$, es decir, que h satisface

(iii") $\langle y - y', h(t, y) - h(t, y') \rangle \le 0\ ,\ \ \forall t \in [0, T],\ \forall y, y' \in \mathbb{R}^k$ c.s.

Proposición 2.7. *Bajo las hipótesis (i'), (iii"), (vi'), (v') y (vi'), existe un único par de procesos* $(Y_t, Z_t)_{t \in [0,T]}$ *con valores en* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$ *y prog. medibles, tales que* $Z \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k \times d})$ *y*

$$Y_t = \xi + \int_t^T h(s, Y_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \quad t \in [0, T]$$

Demostración. Para probar unicidad, considere dos soluciones $(Y, Z),\ (Y', Z')$ y notemos $\widehat{Y} = Y - Y',\ \widehat{Z} = Z - Z'$. Entonces $(\widehat{Y}, \widehat{Z})$ satisface $d\widehat{Y}_t = -\{h(t, Y_t) - h(t, Y_t'\}\, dt + \widehat{Z}_t\, dW_t$. Aplicando Fórmula de Itô a $|\widehat{Y}_t|^2$ obtenemos

$$d(|\widehat{Y}_t|^2) = \{-2\langle \widehat{Y}_t, h(t, Y_t) - h(t, Y_t') \rangle + Tr(\widehat{Z}_t \widehat{Z}_t^*)\}\, dt + 2\widehat{Y}_t^* \cdot \widehat{Z}_t\, dW_t$$

integrando entre t y T, y reorganizando

$$|\widehat{Y}_t|^2 + \int_t^T \|\widehat{Z}_s\|^2 ds = \int_t^T 2\left\langle \widehat{Y}_s, h(s,Y_s) - h(s,Y'_s)\right\rangle ds - 2\int_t^T \widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s \, dW_s$$
$$\leq -2\int_t^T \widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s \, dW_s.$$

En particular, si tomamos $t=0$, por la Observación 2.3 obtenemos $E\int_0^T \|\widehat{Z}_s\|^2 ds = 0$. Por lo tanto $\widehat{Z}_s(\omega) = 0$ para casi todo $(s,\omega) \in [0,T]\times\Omega$, la integral estocástica es 0 y

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2\right] = 0.$$

Se tiene entonces que Y y Y' son *indistinguibles*, y Z es una *versión* de Z'. La prueba de existencia se realizará en dos pasos:

PASO 1. Asuma que existe $C>0$ tal que $|\xi| + \sup\limits_{t\in[0,T]} H_t \leq C$ c.s.

Sea $\rho : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(y) = \begin{cases} J\cdot\exp\left(\frac{1}{|y|^2-1}\right) & \text{si } |y|<1 \\ 0 & \text{si } |y|\geq 1 \end{cases}$$

donde $J>0$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^k} \rho(y)dy = 1$. Con base en ρ se define la sucesión de funciones regularizantes (funciones suavizantes o *mollifiers*) dada por

$$\rho_n(y) = n^k \rho(ny), \;\; y\in\mathbb{R}^k, \; n\geq 1$$

Luego $\rho_1 = \rho$ y $\rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k), \; soporte\,(\rho_n) \subseteq B(0,\frac{1}{n})$ y $\int_{\mathbb{R}^k} \rho_n(y)dy = 1, \; \forall n\geq 1$.

La idea de la prueba en el paso 1 es aproximar $h(t,\cdot)$ mediante funciones globalmente Lipschitz usando la sucesión $(\rho_n)_{n\geq 1}$: para cada $n\geq 1$ definimos $f^n : \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ con componentes

$$f_i^n(t,y) := (\rho_n * h_i(t,\cdot))(y) = \int_{\mathbb{R}^k} \rho_n(y-u)h_i(t,u)\,du = \int_{B(0,\frac{1}{n})} \rho_n(u)h_i(t,y-u)\,du$$

para $1\leq i\leq k$, donde h_i es la $i-$ésima componente de h (note que al igual que en f y h, omitimos la variable ω). Para cada $n\geq 1$, f^n satisface

(i') el proceso $\{f^n(t,y)\}_{t\in[0,T]}$ es *prog. medible,* $\forall y\in\mathbb{R}^k$ c.s.

(iii") $\left\langle y-y', f^n(t,y) - f^n(t,y')\right\rangle \leq 0\,, \; \forall t\in[0,T], \; \forall y,y'\in\mathbb{R}^k$ c.s.

(iv') $|f_i^n(t,y)| \leq C + K(1+|y|), \; \forall t\in[0,T], \;\; 1\leq i\leq k \;\; \forall y\in\mathbb{R}^k$ c.s

(vi') $y\mapsto f^n(t,y)$ es continua, $\forall t\in[0,T]$ c.s.

En efecto, si $y, y' \in \mathbb{R}^k$ y $t \in [0,T]$ entonces

$$\begin{aligned}\big\langle y-y', f^n(t,y)-f^n(t,y')\big\rangle &= \sum_{i=1}^{k}(y_i-y_i')\cdot\big(f_i^n(t,y)-f_i^n(t,y')\big)\\ &= \sum_{i=1}^{k}(y_i-y_i')\int_{\mathbb{R}^k}\rho_n(u)\big(h_i(t,y-u)-h_i(t,y'-u)\big)\,du\\ &= \int_{\mathbb{R}^k}\rho_n(u)\,\big\langle y-y', h(t,y-u)-h(t,y'-u)\big\rangle\,du\\ &= \int_{\mathbb{R}^k}\rho_n(u)\,\big\langle (y-u)-(y'-u), h(t,y-u)-h(t,y'-u)\big\rangle\,du \le 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f_i^n(t,y)| &\le \int_{\mathbb{R}^k}\rho_n(u)|h_i(t,y-u)|\,du \le \int_{\mathbb{R}^k}\rho_n(u)(H_t+K|y-u|)\,du\\ &\le \int_{B(0,\frac{1}{n})}\rho_n(u)(H_t+K|y|+K|u|)\,du \le H_t+K|y|+K\\ &\le C+K(1+|y|),\quad 1\le i\le k\end{aligned}$$

lo cual prueba (iii") y (iv'). Las otras dos se obtienen fácilmente de las propiedades de la convolución y de las sucesiones regularizantes (ver apéndice). Además, para cada $1 \le i \le k$ y para cada $t \in [0,T]$, $f_i^n(t,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$ y

$$\frac{\partial f_i^n}{\partial y_j}(t,y) = \Big(\frac{\partial \rho_n}{\partial y_j} * h_i(t,\cdot)\Big)(y) = \int_{\mathbb{R}^k}\frac{\partial \rho_n}{\partial y_j}(u)h_i(t,y-u)\,du\,,\quad 1\le j\le k$$

(ver apéndice) De la definición de ρ_n se tiene que $soporte\,\big(\frac{\partial\rho_n}{\partial y_j}\big) \subseteq \overline{B(0,1)} = B[0,1]$, luego

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial f_i^n}{\partial y_j}(t,y)\Big| &\le \int_{\mathbb{R}^k}\Big|\frac{\partial\rho_n}{\partial y_j}(u)\Big|\cdot|h_i(t,y-u)|\,du\\ &\le \int_{|u|\le 1}\Big|\frac{\partial\rho_n}{\partial y_j}(u)\Big|\cdot(C+K|y-u|) \le J_n(C+K|y|+K)\end{aligned}$$

donde $J_n = \int_{|u|\le 1}\big|\frac{\partial\rho_n}{\partial y_j}(u)\big|\,du$ (que no depende de j por la simetría de ρ_n con respecto a y). Entonces, para cada $p \in \mathbb{N},\ p \ge 1$:

$$\Big|\frac{\partial f_i^n}{\partial y_j}(t,y)\Big| \le J_n(C+K(1+p)),\quad t\in[0,T],\ |y|\le p.$$

Por lo tanto, el gradiente

$$\nabla_y f_i^n(t,\cdot) = \Big(\frac{\partial f_i^n}{\partial y_1}(t,\cdot),\ldots,\frac{\partial f_i^n}{\partial y_k}(t,\cdot)\Big)$$

es acotado en cada bola cerrada $B[0,p]$ uniformemente con respecto a t y ω. Por el teorema del valor medio y por convexidad de $B[0,p]$, f^n es *Lipschitz* en cada $B[0,p]$ y la constante de *Lipschitz* depende sólo de n y p, es decir, f^n es *localmente Lipschitz* (uniformemente con respecto a t y ω).

Ahora, para cada $p \geq 1$, definimos $f^{n,p}(t,y) := f^n(t, \Pi_p(y))$, donde $\Pi_p : \mathbb{R}^k \to B[0,p]$ está dada por

$$\Pi_p(y) := \frac{p \wedge |y|}{|y|} y = \begin{cases} y & \text{si } |y| \leq p, \\ \frac{p}{|y|}\, y & \text{si } |y| > p. \end{cases}$$

Dado que $|\Pi_p(y) - \Pi_p(y')| \leq |y - y'|$, la aplicación $y \mapsto f^{n,p}(t,y)$ es *globalmente Lipschitz* para todo $n \geq 1,\ p \geq 1$. Dicha función también es acotada (uniformemente con respecto a t y ω), ya que

$$\begin{aligned} & |f_i^{n,p}(t,y)| = |f_i^n(t, \Pi_p(y))| \leq C + K(1+p), \ \ 1 \leq i \leq k \\ \text{es decir} \quad & |f^{n,p}(t,y)| \leq \sqrt{k}(C + K(1+p)). \end{aligned}$$

Entonces $f^{n,p}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.5, y por lo tanto, para cada $n, p \geq 1$ existe un único par $(Y^{n,p}, Z^{n,p})$ tal que $Z^{n,p} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k \times d})$ y

$$Y_t^{n,p} = \xi + \int_t^T f^{n,p}(s, Y_s^{n,p})\, ds - \int_t^T Z_s^{n,p}\, dW_s\,, \quad t \in [0,T]$$

Si $y \neq 0,\ \big\langle y, f^{n,p}(t,y) - f^{n,p}(t,0) \big\rangle = \dfrac{|y|}{p \wedge |y|} \big\langle \Pi_p(y), f^n(t, \Pi_p(y)) - f^n(t, \Pi_p(0)) \big\rangle \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{luego} \quad 2\big\langle y, f^{n,p}(t,y) \big\rangle &= 2\big\langle y, f^{n,p}(t,y) - f^{n,p}(t,0) \big\rangle + \big\langle y, f^{n,p}(t,0) \big\rangle \\ &\leq 2|y|\, |f^{n,p}(t,0)| \leq |y|^2 + k[C + K(1 + \Pi_p(0))]^2 = |y|^2 + k(C+K)^2. \end{aligned}$$

Como en la demostración de la Proposición 2.4, aplicando Fórmula de Itô al proceso $e^t |Y_t^{n,p}|^2$ e integrando entre t y T obtenemos

$$\begin{aligned} & e^t |Y_t^{n,p}|^2 + \int_t^T e^s \|Z_s^{n,p}\|^2\, ds \\ & \quad = e^T |\xi|^2 + \int_t^T e^s \big\{ -|Y_s^{n,p}|^2 + 2\left\langle Y_s^{n,p}, f^{n,p}(s, Y_s^{n,p}) \right\rangle \big\}\, ds - \int_t^T 2 e^s Y_s^{n,p} \cdot Z_s^{n,p}\, dW_s \\ & \quad \leq e^T C^2 + k(e^T - e^t)(C+K)^2 - \int_t^T 2 e^s Y_s^{n,p} \cdot Z_s^{n,p}\, dW_s, \end{aligned}$$

entonces $e^t |Y_t^{n,p}|^2 \leq e^T C^2 + k(e^T - e^t)(C+K)^2 - \displaystyle\int_t^T 2 e^s Y_s^{n,p} \cdot Z_s^{n,p}\, dW_s.$

Por la propiedad de martingala de la integral estocástica

$$E\left[\int_t^T 2 e^s Y_s^{n,p} \cdot Z_s^{n,p}\, dW_s \,\Big|\, \mathcal{F}_t \right] = 0$$

por lo tanto, si tomamos valor esperado condicional con respecto a $\mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned} e^t |Y_t^{n,p}|^2 &\leq e^T C^2 + k(e^T - e^t)(C+K)^2 \\ |Y_t^{n,p}|^2 &\leq e^{T-t} C^2 + k(e^{T-t} - 1)(C+K)^2 \leq e^T C^2 + k(e^T - 1)(C+K)^2 = C'. \end{aligned}$$

Si $p \in \mathbb{N}$ es tal que $p^2 \geq C'$, entonces $|Y_t^{n,p}| \leq p$ y $f^{n,p}(t, Y_t^{n,p}) = f^n(t, Y_t^{n,p})$. Luego

$$Y_t^{n,p} = \xi + \int_t^T f^n(s, Y_s^{n,p})\, ds - \int_t^T Z_s^{n,p}\, dW_s\,, \quad t \in [0,T]$$

para todo $p \in \mathbb{N}$ con $p^2 \geq C'$, y en este caso, por unicidad, $(Y^{n,p}, Z^{n,p})$ no depende de p. Asumiremos entonces que $p^2 \geq C'$ y notaremos la solución por (Y^n, Z^n). Es decir, (Y^n, Z^n) satisface

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f^n(s, Y_s^n)\, ds - \int_t^T Z_s^n\, dW_s, \quad t \in [0,T], \;\; n \geq 1. \tag{2.8}$$

Veamos que la sucesión $(Y^n, Z^n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}^2 = \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$:

Sean $m, n \geq 1$ y sean (Y^m, Z^m), (Y^n, Z^n) las soluciones de (ξ, f^m) y (ξ, f^n) respectivamente. Aplicando Fórmula de Itô al proceso $|Y_t^m - Y_t^n|^2$ e integrando entre t y T obtenemos

$$\begin{aligned}|Y_t^m - &Y_t^n|^2 + \int_t^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2\, ds \\ &= \int_t^T 2\left\langle Y_s^m - Y_s^n, f^m(s, Y_s^m) - f^n(s, Y_s^n)\right\rangle ds - \int_t^T 2(Y_s^m - Y_s^n)^*(Z_s^m - Z_s^n)\, dW_s\end{aligned}$$

como f^m es monótona en y con constante de monotonicidad $\mu = 0$

$$\begin{aligned}&\left\langle Y_s^m - Y_s^n, f^m(s, Y_s^m) - f^n(s, Y_s^n)\right\rangle \\ &\quad = \left\langle Y_s^m - Y_s^n, f^m(s, Y_s^m) - f^m(s, Y_s^n)\right\rangle + \left\langle Y_s^m - Y_s^n, f^m(s, Y_s^n) - f^n(s, Y_s^n)\right\rangle \\ &\quad \leq \left|Y_s^m - Y_s^n\right| \left|f^m(s, Y_s^n) - f^n(s, Y_s^n)\right| \leq 2p \sup_{|y|\leq p} |f^m(s,y) - f^n(s,y)|,\end{aligned}$$

se sigue que

$$|Y_t^m - Y_t^n|^2 + \int_t^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2\, ds \;\leq R_{m,m} - \int_t^T 2(Y_s^m - Y_s^n)^*(Z_s^m - Z_s^n)\, dW_s, \tag{2.9}$$

donde $R_{m,n} := 4p \displaystyle\int_0^T \sup_{|y|\leq p} |f^m(s,y) - f^n(s,y)|\, ds.$

En particular, tomando valor esperado en (2.9) con $t = 0$ obtenemos

$$E\int_0^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2\, ds \;\leq R_{n,m}.$$

También de (2.9) se tiene que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n|^2 &\leq R_{n,m} + 4\cdot \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t (Y_s^m - Y_s^n)^*(Z_s^m - Z_s^n)\, dW_s\right| \\ E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n|^2\Big] &\leq R_{n,m} + 12\cdot E\Big[\Big(\int_0^T |Y_s^m - Y_s^n|^2\, \|Z_s^m - Z_s^n\|^2 ds\Big)^{1/2}\Big] \\ &\leq R_{n,m} + E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n| \cdot 12\Big(\int_0^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2 ds\Big)^{1/2}\Big],\end{aligned}$$

usando la desigualdad $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ y haciendo $C = 12$,

$$\begin{aligned}E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n|^2\Big] &\leq R_{m,n} + \frac{1}{2}E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n|^2\Big] + \frac{C^2}{2}E\int_0^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2 ds \\ E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n|^2\Big] &\leq 2R_{m,n} + C^2 E\int_0^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2 ds \leq (2 + C^2)R_{m,n},\end{aligned}$$

luego

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^m - Y_t^n|^2 + \int_0^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2 ds\right] \leq (3 + C^2)R_{m,n}.$$

Debido a que $y \mapsto h(s,y)$ es continua, por propiedades de las sucesiones regularizantes $f^m(s,\cdot)$ converge a $h(s,\cdot)$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^k$ (ver apéndice), luego

$$\sup_{|y|\leq p}|f^m(s,y) - f^n(s,y)| \leq \sup_{|y|\leq p}|f^m(s,y) - h(s,y)| + \sup_{|y|\leq p}|h(s,y) - f^n(s,y)| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

para todo $s \in [0,T]$. Además

$$\sup_{|y|\leq p}|f^m(s,y) - f^n(s,y)| \leq \sup_{|y|\leq p} 2\sqrt{k}(C + K(1+|y|)) = 2\sqrt{k}(C + K(1+p))$$

Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$R_{n,m} = 4p\int_0^T \sup_{|y|\leq p}|f^m(s,y) - f^n(s,y)|\, ds \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto $(Y^n, Z^n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en el espacio de Banach $\mathcal{B}^2 = \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)\times\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Sea (Y,Z) el límite de esta sucesión, y veamos que (Y,Z) es la solución buscada. De las desigualdades

$$E\big[|Y_t^n - Y_t|^2\big] \leq E\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^n - Y_t|^2\right]$$

$$E\left[\Big|\int_t^T Z_s^n\, dW_s - \int_t^T Z_s\, dW_s\Big|^2\right] \leq 2\cdot E\left[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t (Z_s^n - Z_s)\, dW_s\Big|^2\right] \leq 8\cdot E\int_0^T \|Z_s - Z_s^n\|^2 ds$$

se tiene que Y_t^n y $\int_t^T Z_s^n\, dW_s$ convergen en $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P};\mathbb{R}^k)$ a Y_t y $\int_t^T Z_s\, dW_s$ respectivamente, para todo $t\in[0,T]$. Además

$$\begin{aligned}
\Big|\int_t^T f^n(s,Y_s^n)\, ds - \int_t^T h(s,Y_s)\, ds\Big|^2 &= \sum_{i=1}^k \Big|\int_t^T (f_i^n(s,Y_s^n) - h_i(s,Y_s))\, ds\Big|^2 \\
&\leq T\int_t^T |f^n(s,Y_s^n) - h(s,Y_s)|^2\, ds \\
&\leq T\int_0^T \big(|f^n(s,Y_s^n) - h(s,Y_s^n)| + |h(s,Y_s^n) - h(s,Y_s)|\big)^2\, ds \\
&\leq 2T\int_0^T \big(|f^n(s,Y_s^n) - h(s,Y_s^n)|^2 + |h(s,Y_s^n) - h(s,Y_s)|^2\big) ds
\end{aligned}$$

y dado que $|Y_s^n| \leq p$,

$$\begin{aligned}
&|f^n(s,Y_s^n) - h(s,Y_s^n)| \leq \sup_{|y|\leq p}|f^n(s,y) - h(s,y)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall s\in[0,T] \\
\text{y} \qquad &|f^n(s,Y_s^n) - h(s,Y_s^n)| \leq C + Kp + \sqrt{k}(C + K(1+p)).
\end{aligned}$$

Por convergencia dominada

$$E\int_0^T |f^n(s,Y_s^n) - h(s,Y_s^n)|^2 ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2.10}$$

Por otro lado, la continuidad secuencial de $h(s,\cdot)$ implica que $h(s,Y_s^n) \xrightarrow{L^2} h(s,Y_s)$ para todo $s\in[0,T]$, y dado que $E\big(|h(s,Y_s^n)-h(s,Y_s)|^2\big)\le 4(C+Kp)^2$ también por convergencia dominada obtenemos

$$E\int_0^T |h(s,Y_s^n)-h(s,Y_s)|^2 ds = \int_0^T E\big(|h(s,Y_s^n)-h(s,Y_s)|^2\big)ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{2.11}$$

De (2.10) y (2.11) se sigue que

$$E\left[\Big|\int_t^T f^n(s,Y_s^n)\,ds-\int_t^T h(s,Y_s)\,ds\Big|^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\quad \forall t\in[0,T]$$

es decir

$$\int_t^T f^n(s,Y_s^n)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_t^T h(s,Y_s)\,ds,\quad \forall t\in[0,T].$$

Tomando los límites en $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P};\mathbb{R}^k)$ de cada término en

$$Y_t^n=\xi+\int_t^T f^n(s,Y_s^n)\,ds-\int_t^T Z_s^n\,dW_s,\quad t\in[0,T],\ \ n\ge 1$$

se obtiene finalmente que (Y,Z) satisface

$$Y_t=\xi+\int_t^T h(s,Y_s)\,ds-\int_t^T Z_s\,dW_s,\quad t\in[0,T].$$

PASO 2. Caso general. Para cada $n\in\mathbb{N},\ n\ge 1$ se define

$$\xi^n:=\xi\cdot\mathbf{1}_{\{|\xi|\le n\}},\qquad h^n(t,y):=h(t,y)\cdot\mathbf{1}_{\{H_t\le n\}}.$$

Entonces ξ^n y h^n satisfacen las hipótesis del caso anterior, pues el proceso $\{h^n(t,y)\}_{t\in[0,T]}$ es *prog. medible* para todo $y\in\mathbb{R}^k$, la aplicación $y\mapsto h^n(t,y)$ es continua para todo $t\in[0,T]$,

$$|\xi^n|\le n,\quad |h^n(t,y)|\le n+K|y|,\quad \text{y}\quad \big\langle y-y',h^n(t,y)-h^n(t,y')\big\rangle\le 0.$$

Por el paso 1, la EDE con condición final ξ^n y coeficiente h^n posee una única solución $(Y^n,Z^n)\in\mathcal{B}^2$, y por la proposición 3.4 $|Y_t^n|^2\le 2n^2e^{\alpha T},\ \forall t\in[0,T]$, con $\alpha=1+K^2$. Veamos que la sucesión $(Y^n,Z^n)_{n\ge1}$ es de Cauchy en $\mathcal{B}^2$:

Sean $m,n\ge 1$ y sean (Y^m,Z^m), (Y^n,Z^n) las soluciones de (ξ,f^m) y (ξ,f^n) respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}|Y_t^m-Y_t^n|^2+&\int_t^T \|Z_s^m-Z_s^n\|^2\,ds=|\xi^m-\xi^n|^2\\ &+\int_t^T 2\left\langle Y_s^m-Y_s^n,h^m(s,Y_s^m)-h^n(s,Y_s^n)\right\rangle ds-\int_t^T 2(Y_s^m-Y_s^n)^*(Z_s^m-Z_s^n)\,dW_s\end{aligned}$$

Debido a que

$$\begin{aligned}&2\big\langle Y_s^m-Y_s^n,h^m(s,Y_s^m)-h^n(s,Y_s^n)\big\rangle\\ &\quad=2\big\langle Y_s^m-Y_s^n,h^m(s,Y_s^m)-h^m(s,Y_s^n)\big\rangle+2\big\langle Y_s^m-Y_s^n,h^m(s,Y_s^n)-h^n(s,Y_s^n)\big\rangle\\ &\quad\le 2\big\langle Y_s^m-Y_s^n,h^m(s,Y_s^n)-h^n(s,Y_s^n)\big\rangle\le |Y_s^m-Y_s^n|^2+|h^m(s,Y_s^n)-h^n(s,Y_s^n)|^2\end{aligned}$$

si tomamos valor esperado obtenemos

$$\begin{aligned}E\big(|Y_t^m - Y_t^n|^2\big) + E\int_t^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2\,ds \\ \le E\big(|\xi^m - \xi^n|^2\big) + E\int_t^T |Y_s^m - Y_s^n|^2\,ds + E\int_t^T |h^m(s,Y_s^n) - h^n(s,Y_s^n)|^2\,ds.\end{aligned}$$

En particular

$$E\big(|Y_t^m - Y_t^n|^2\big) \le A_{m,n} + \int_t^T E\big(|Y_s^m - Y_s^n|^2\big)\,ds$$

donde $A_{m,n} = E\big(|\xi^m - \xi^n|^2\big) + E\int_0^T |h^m(s,Y_s^n) - h^n(s,Y_s^n)|^2\,ds.$

Por el lema de Gronwall, $E\big(|Y_t^m - Y_t^n|^2\big) \le A_{m,n}e^{(T-t)} \le A_{m,n}e^T,\ \forall t \in [0,T]$. Luego

$$E\int_0^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2\,ds \le A_{m,n} + TA_{m,n}e^T$$

y dado que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n|^2 \le |\xi^m - \xi^n|^2 + \int_0^T |Y_s^m - Y_s^n|^2\,ds \\ + \int_0^T |h^m(s,Y_s^n) - h^n(s,Y_s^n)|^2\,ds + 4\cdot\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t (Y_s^m - Y_s^n)^*(Z_s^m - Z_s^n)\,dW_s\Big|\end{aligned}$$

como en el paso 1, haciendo $C = 12$ se obtiene

$$E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n|^2\Big] \le A_{m,n} + TA_{m,n}e^T + C\cdot E\Big[\Big(\int_0^T |Y_s^m - Y_s^n|^2\,\|Z_s^m - Z_s^n\|^2 ds\Big)^{1/2}\Big]$$

y dado que

$$C\cdot E\Big[\Big(\int_0^T |Y_s^m - Y_s^n|^2\,\|Z_s^m - Z_s^n\|^2 ds\Big)^{1/2}\Big] \le \frac{1}{2}E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n|^2\Big] + \frac{C^2}{2}E\int_0^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2 ds$$

tenemos $$\begin{aligned}E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n|^2\Big] &\le 2A_{m,n}(1+Te^T) + C^2\,E\int_0^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2 ds \\ &\le (2+C^2)(1+Te^T)A_{m,n}\end{aligned}$$

$$E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m - Y_t^n|^2 + \int_0^T \|Z_s^m - Z_s^n\|^2 ds\Big] \le C' A_{m,n} \quad \text{con } C' = (3+C^2)(1+Te^T).$$

Por convergencia dominada $E\big(|\xi^n - \xi|^2\big) \to 0$ pues ξ^n converge puntualmente a ξ y $|\xi^n - \xi|^2 \le 4|\xi|^2,\ \forall n \ge 1$.

Si $m \geq n$, dado que $\mathbf{1}_{\{H_s \leq m\}} \leq 1 = \mathbf{1}_{\{H_s \leq n\}} + \mathbf{1}_{\{H_s > n\}}$

$$\begin{aligned} |h^m(s, Y_s^n) - h^n(s, Y_s^n)| &= |h(s, Y_s^n)| \, (\mathbf{1}_{\{H_s \leq m\}} - \mathbf{1}_{\{H_s \leq n\}}) \\ &\leq \big(H_s + K|Y_s^n|\big) \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} \\ &\leq H_s \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} + (K\sqrt{2}e^{\alpha T/2}) n \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} \\ &\leq H_s \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} + (K\sqrt{2}e^{\alpha T/2}) H_s \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} \end{aligned}$$

entonces

$$E\int_0^T |h^m(s, Y_s^n) - h^n(s, Y_s^n)|^2 \, ds \leq (1 + K\sqrt{2}e^{\alpha T/2})^2 \, E\int_0^T \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} H_s^2 \, ds$$

y como $H_s(\omega)\mathbf{1}_{\{H_s > n\}}(\omega) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ para todo $(s, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, y $H_s^2 \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} \leq H_s^2$, $\forall n \geq 1$, por convergencia dominada $E\int_0^T |h^m(s, Y_s^n) - h^n(s, Y_s^n)|^2 \, ds \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

En resumen $A_{m,n} \to 0$ cuando $n, m \to \infty$ $(m \geq n)$, y por lo tanto $(Y^n, Z^n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy en $\mathcal{B}^2$. Si (Y, Z) es el límite de esta sucesión, igual que en el paso 1 se demuestra

$$Y_t^n \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} Y_t \quad \text{y} \quad \int_t^T Z_s^n \, dW_s \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} \int_t^T Z_s \, dW_s, \quad \forall t \in [0, T]$$

y que $E\Big[\Big|\displaystyle\int_t^T h^n(s, Y_s^n) \, ds - \int_t^T h(s, Y_s) \, ds\Big|^2\Big]$

$$\leq 2T\, E\int_0^T |h^n(s, Y_s^n) - h(s, Y_s^n)|^2 \, ds + 2T\, E\int_0^T |h(s, Y_s^n) - h(s, Y_s)|^2 \, ds.$$

Para la primera integral, dado que $\mathbf{1}_{\{H_s \leq n\}} - 1 = \mathbf{1}_{\{H_s > n\}}$

$$\begin{aligned} |h(s, Y_s^n) - h^n(s, Y_s^n)| &= |h(s, Y_s^n)| \, (\mathbf{1}_{\{H_s \leq n\}} - 1) \\ &= \big(H_s + K|Y_s^n|\big) \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} \\ &\leq H_s \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} + (K\sqrt{2}e^{\alpha T/2}) n \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} \\ &\leq H_s \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} + (K\sqrt{2}e^{\alpha T/2}) H_s \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} \end{aligned}$$

se obtiene $\quad E\displaystyle\int_0^T |h^n(s, Y_s^n) - h(s, Y_s^n)|^2 \, ds \leq (1 + K\sqrt{2}e^{\alpha T/2})^2 E\int_0^T \mathbf{1}_{\{H_s > n\}} H_s^2 \, ds \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$

Para la segunda integral, la continuidad de $h(s, \cdot)$ implica $h(s, Y_s^n) \xrightarrow{L^2} h(s, Y_s)$ para todo $s \in [0, T]$, y por continuidad de la norma en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbb{R}^k)$

$$E\big(|h(s, Y_s^n)|^2\big) \xrightarrow[n \to \infty]{} E\big(|h(s, Y_s)|^2\big), \quad \forall s \in [0, T]$$

Además, la convergencia de $(Y^n)_{n \geq 1}$ en $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ implica que también converge en $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$. Luego, por continuidad de la norma en $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$

$$E\int_0^T |Y_s^n|^2 \, ds \xrightarrow[n \to \infty]{} E\int_0^T |Y_s|^2 \, ds$$

El hecho de que Y^n converge a Y en $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$ también nos permite escoger una subsucesión, que seguiremos denotando por $(Y^n)_{n\geq 1}$, tal que Y^n converge puntualmente a Y, es decir, $Y^n_s(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} Y_s(\omega)$ para casi todo $(s,\omega) \in [0,T]\times\Omega$. Notemos

$$\begin{aligned} u_n(s) &= E\big(|h(s,Y^n_s)|^2\big), \quad v_n(s) = 2K^2E\big(|Y^n_s|^2\big), \quad n\geq 1 \\ u(s) &= E\big(|h(s,Y_s)|^2\big), \quad v(s) = 2K^2E\big(|Y_s|^2\big) \end{aligned}$$

De la condición (iv') se deduce que $|h(s,Y^n_s)|^2 \leq 2H_s^2 + 2K^2|Y^n_s|^2$ lo cual implica $v_n(s) - u_n(s) \geq -2E[H_s^2]$, $\forall n\geq 1$. Podemos entonces aplicar el Lema de Fatou a las sucesiones $v_n \pm u_n$ y obtener

$$\begin{aligned} \int_0^T \big(v(s)\,ds \pm u(s)\big)\,ds &= \int_0^T \liminf_{n\to\infty}\big(v_n(s)\pm u_n(s)\big)\,ds \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\int_0^T \big(v_n(s)\pm u_n(s)\big)\,ds \\ &= \int_0^T v(s)\,ds + \liminf_{n\to\infty}\int_0^T \pm u_n(s)\,ds \end{aligned}$$

restando $\displaystyle\int_0^T v(s)\,ds$ a cada lado

$$\int_0^T u(s)\,ds \leq \liminf_{n\to\infty}\int_0^T u_n(s)\,ds \leq \limsup_{n\to\infty}\int_0^T u_n(s)\,ds = -\liminf_{n\to\infty}\int_0^T -u_n(s)\,ds \leq \int_0^T u(s)\,ds$$

es decir

$$E\int_0^T |h(s,Y^n_s)|^2\,ds = \int_0^T E\big(|h(s,Y^n_s)|^2\big)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^T E\big(|h(s,Y_s)|^2\big)\,ds = E\int_0^T |h(s,Y_s)|^2\,ds$$

De nuevo, por continuidad de $h(s,\cdot)$, se tiene que $h(s,Y^n_s(\omega)) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(s,Y_s(\omega))$ para casi todo $(s,\omega) \in [0,T]\times\Omega$. Entonces

$$E\int_0^T |h(s,Y^n_s) - h(s,Y_s)|^2\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

y por lo tanto

$$E\left[\left|\int_t^T h^n(s,Y^n_s)\,ds - \int_t^T h(s,Y_s)\,ds\right|^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall t\in[0,T]$$

es decir $\int_t^T h^n(s,Y^n_s)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_t^T h(s,Y_s)\,ds$, para todo $t\in[0,T]$.

Tomando los límites en $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P};\mathbb{R}^k)$ de cada término de la EDE con condición final (ξ^n,h^n), obtenemos finalmente que (Y,Z) satisface

$$Y_t = \xi + \int_t^T h(s,Y_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dW_s, \quad t\in[0,T]$$

lo cual termina la demostración. □

Teorema 2.8. *Bajo las hipótesis (i)-(vi), la EDE con condición final ξ y coeficiente f posee una única solución (Y,Z).*

Demostración. Gracias a la anterior proposición, para cada $V \in \mathcal{M}^2(R^{k\times d})$, existe un único par $(Y,Z) \in \mathcal{B}^2 = \mathcal{S}_c^2(\mathrm{I\!R}^k) \times \mathcal{M}^2(R^{k\times d})$ tal que

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, V_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s, \quad t \in [0,T] \tag{2.12}$$

Basta con considerar el coeficiente $h(t,y) = f(t,y,V_t)$ que claramente satisface las hipótesis de la proposición anterior, con $H_t = K\|V_t\|$. Para cada $(U,V) \in \mathcal{B}^2$ definimos $\Phi(U,V) = (Y,Z)$ como el único par $(Y,Z) \in \mathcal{B}^2$ que satisface (2.12). La aplicación $\Phi : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$ es tal que $(Y,Z) \in \mathcal{B}^2$ es un punto fijo de Φ si y sólo si (Y,Z) es solución de la EDE con condición final (ξ, f).

Veamos que dicho punto fijo existe : Dados $(U,V),\ (U',V') \in \mathcal{B}^2$, notemos $(Y,Z) = \Phi(U,V),\ (Y',Z') = \Phi(U',V')$ y

$$(\widehat{U}, \widehat{V}) = (U - U', V - V'), \quad (\widehat{Y}, \widehat{Z}) = (Y - Y', Z - Z').$$

Con esta notación, el proceso $\widehat{Y}$ se escribe en forma diferencial

$$d\widehat{Y}_t = -\{f(t, Y_t, V_t) - f(t, Y_t', V_t')\}\, dt + \widehat{Z}_t\, dW_t$$

Como siempre, aplicamos Fórmula de Itô al proceso $e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2$ obteniendo

$$d(e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2) = \{\gamma e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 - 2e^{\gamma t}\langle \widehat{Y}_t, f(t,Y_t,V_t) - f(t,Y_t',V_t')\rangle + e^{\gamma t} Tr(\widehat{Z}_t \widehat{Z}_t^*)\}\, dt + 2e^{\gamma t}\widehat{Y}_t \cdot \widehat{Z}_t\, dW_t$$

Integrando entre t y T (note que $\widehat{Y}_T = 0$) y reorganizando

$$\begin{aligned} &e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 + \int_t^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2\, ds \\ &= \int_t^T e^{\gamma s}\big\{-\gamma|\widehat{Y}_s|^2 + 2\left\langle \widehat{Y}_s, f(s,Y_s,V_s) - f(s,Y_s',V_s')\right\rangle\big\}\, ds - \int_t^T 2e^{\gamma s}\widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s\, dW_s \end{aligned}$$

Usando
$$\begin{aligned} &2\left\langle \widehat{Y}_s, f(s,Y_s,V_s) - f(s,Y_s',V_s')\right\rangle \\ &= 2\left\langle \widehat{Y}_s, f(s,Y_s,V_s) - f(s,Y_s',V_s)\right\rangle + 2\left\langle \widehat{Y}_s, f(s,Y_s',V_s) - f(s,Y_s',V_s')\right\rangle \\ &\le 2\mu|\widehat{Y}_s|^2 + 2|\widehat{Y}_s| \cdot K\|\widehat{V}_s\| \end{aligned}$$

y la desigualdad $2ab \le a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2,\ (\varepsilon > 0)$ con $a = K|\widehat{Y}_s|$ y $b = \|\widehat{V}_s\|$, obtenemos

$$\begin{aligned} &e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 + \int_t^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2\, ds \\ &\le \int_t^T e^{\gamma s}(-\gamma + 2\mu + K^2/\varepsilon)|\widehat{Y}_s|^2\, ds + \varepsilon\int_t^T e^{\gamma s}\|\widehat{V}_s\|^2\, ds - \int_t^T 2e^{\gamma s}\widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s\, dW_s \\ &\le \int_t^T e^{\gamma s}(-\gamma + 2\mu + K^2/\varepsilon)|\widehat{Y}_s|^2 ds + \varepsilon\int_t^T e^{\gamma s}\big(|\widehat{U}_s|^2 + \|\widehat{V}_s\|^2\big)\, ds - \int_t^T 2e^{\gamma s}\widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s\, dW_s \end{aligned}$$

haciendo $\gamma = 2\mu + K^2/\varepsilon$ y notando $A_\varepsilon = \varepsilon \displaystyle\int_0^T e^{\gamma s}\big(|\widehat{U}_s|^2 + \|\widehat{V}_s\|^2\big)\, ds\,,$

$$e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 + \int_t^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2\, ds \le A_\varepsilon - \int_t^T 2e^{\gamma s}\widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s\, dW_s\,, \quad \forall t \in [0,T].$$

Igual que en la demostración del Teorema 2.5 se llega a la desigualdad

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|\widehat{Y}_t|^2 + \int_0^T e^{\gamma s}\|\widehat{Z}_s\|^2 ds\right] \leq \varepsilon(3+C^2)(1\vee T)\, E\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|\widehat{U}_t|^2 + \int_0^T e^{\gamma s}\|\widehat{V}_s\|^2\, ds\right]$$

Escogiendo $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon(3+C^2)(1\vee T) < 1$, la aplicación Φ resulta ser una *contracción* estricta de $\mathcal{B}^2$ en sí mismo, con la norma

$$\|(Y,Z)\|_\gamma^2 := E\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\gamma t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\gamma s}\|Z_s\|^2 ds\right], \quad \gamma = 2\mu + K^2/\varepsilon$$

que además satisface

$$\|(Y,Z)\|_{\mathcal{B}^2}^2 \leq \|(Y,Z)\|_\gamma^2 \leq e^{\gamma T}\|(Y,Z)\|_{\mathcal{B}^2}^2\,, \quad \forall (Y,Z)\in\mathcal{B}^2$$

donde $\|(Y,Z)\|_{\mathcal{B}^2}$ es la norma usual de $\mathcal{B}^2$ correspondiente al caso $\gamma = 0$. Por lo tanto Φ posee un único punto fijo $(Y,Z)\in\mathcal{B}^2$ solución de la EDE con condición final ξ y coeficiente f, lo cual prueba el teorema. □

La siguiente proposición muestra la dependencia continua de las soluciones con respecto a los datos (ξ, f).

Proposición 2.9. *Sean* $f, \bar{f} : \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *satisfaciendo las hipótesis (i)-(vi), y* $\xi, \bar{\xi}\in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R}^k)$. *Si las soluciones de las EDEs* (ξ, f) *y* $(\bar{\xi}, \bar{f})$ *son* (Y,Z), $(\bar{Y}, \bar{Z})$ *respectivamente, entonces*

$$\begin{aligned} E\Bigg[&\sup_{t\in[0,T]}|Y_t-\bar{Y}_t|^2 + \int_0^T \|Z_s-\bar{Z}_s\|^2\, ds\Bigg] \\ &\leq C'\cdot E\left[|\xi-\bar{\xi}|^2 + \int_0^T |f(s,Y_s,Z_s)-\bar{f}(s,Y_s,Z_s)|^2\, ds\right]\end{aligned}$$

con C' *una constante dependiendo sólo de* $T>0$ *y de las constantes de Lipschitz y monotonicidad de* f *y* $\bar{f}$.

Demostración. Sean $(\widehat{Y}, \widehat{Z}) = (Y-\bar{Y}, Z-\bar{Z})$, $\widehat{\xi} = \xi - \bar{\xi}$ y

$$h(s) = f(s,Y_s,Z_s) - \bar{f}(s,Y_s,Z_s).$$

Entonces, $\widehat{Y}$ se escribe en forma diferencial $d\widehat{Y}_t = -\{f(t,Y_t,Z_t) - f(t,\bar{Y}_t,\bar{Z}_t)\}\,dt + \widehat{Z}_t\,dW_t$. Aplicando Fórmula de Itô al proceso $|\widehat{Y}_t|^2$ se tiene

$$d(|\widehat{Y}_t|^2) = \{-2\langle\widehat{Y}_t, f(t,Y_t,Z_t)-\bar{f}(t,\bar{Y}_t,\bar{Z}_t)\rangle + Tr(\widehat{Z}_t\widehat{Z}_t^*)\}\,dt + 2\widehat{Y}_t^*\cdot\widehat{Z}_t\,dW_t$$

Integrando entre t y T y reorganizando

$$|\widehat{Y}_t|^2 + \int_t^T \|\widehat{Z}_s\|^2 ds = |\widehat{\xi}|^2 + 2\int_t^T \langle\widehat{Y}_s, f(s,Y_s,Z_s)-\bar{f}(s,\bar{Y}_s,\bar{Z}_s)\rangle\, ds - 2\int_t^T \widehat{Y}_s^*\cdot\widehat{Z}_s\,dW_s$$

Usando

$$\begin{aligned}&\langle Y_s-\bar{Y}_s, f(s,Y_s,Z_s)-\bar{f}(s,\bar{Y}_s,\bar{Z}_s)\rangle \\ &= \langle\widehat{Y}_s, f(s,Y_s,Z_s)-\bar{f}(s,Y_s,Z_s)+\bar{f}(s,Y_s,Z_s)-\bar{f}(s,Y_s,\bar{Z}_s)+\bar{f}(s,Y_s,\bar{Z}_s)-\bar{f}(s,\bar{Y}_s,\bar{Z}_s)\rangle \\ &\leq |\widehat{Y}_s|\cdot|h(s)| + |\widehat{Y}_s|\cdot|\bar{f}(s,Y_s,Z_s)-\bar{f}(s,Y_s,\bar{Z}_s)| + \langle\widehat{Y}_s, \bar{f}(s,Y_s,\bar{Z}_s)-\bar{f}(s,\bar{Y}_s,\bar{Z}_s)\rangle \\ &\leq |\widehat{Y}_s|\cdot|h(s)| + \bar{K}|\widehat{Y}_s|\cdot\|\widehat{Z}_s\| + \bar{\mu}|\widehat{Y}_s|^2\end{aligned}$$

y las desigualdades $2ab \le a^2 + b^2,\ 2cd \le 2c^2 + d^2/2$ con $a = |\widehat{Y}_s|,\ b = |h(s)|,\ c = K|\widehat{Y}_s|$ y $d = \|\widehat{Z}_s\|$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\widehat{Y}_t|^2 + & \int_t^T \|\widehat{Z}_s\|^2 ds \\ & \le |\widehat{\xi}|^2 + \int_t^T \big(|\widehat{Y}_s|^2 + |h(s)|^2 + 2\bar{\mu}|\widehat{Y}_s|^2 + 2\bar{K}^2|\widehat{Y}_s|^2 + \frac{1}{2}\|\widehat{Z}_s\|^2\big)\, ds - 2\int_t^T \widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s\, dW_s \end{aligned}$$

es decir

$$|\widehat{Y}_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T \|\widehat{Z}_s\|^2 ds \le |\widehat{\xi}|^2 + \int_0^T |h(s)|^2 ds + \beta \int_t^T |\widehat{Y}_s|^2 ds - 2\int_t^T \widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s\, dW_s \tag{2.13}$$

con $\beta = 1 + 2\bar{\mu} + 2\bar{K}^2$. Tomando valor esperado, por el teorema de Fubini tenemos en particular que $E\big(|\widehat{Y}_t|^2\big)$ satisface

$$E\big(|\widehat{Y}_t|^2\big) \le A + \beta \int_t^T E\big(|\widehat{Y}_s|^2\big)\, ds, \quad \forall t \in [0,T]$$

con $A = E\big(|\widehat{\xi}|^2\big) + E\int_0^T |h(s)|^2\, ds$. Por el lema de Gronwall $E\big(|\widehat{Y}_t|^2\big) \le Ae^{\beta(T-t)} \le Ae^{\beta T}$, y

$$E\int_0^T \|\widehat{Z}_s\|^2 ds \le 2A + 2AT\beta e^{\beta T}. \tag{2.14}$$

Como ya hemos visto en demostraciones anteriores

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \Big|\int_t^T 2\widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s\, dW_s\Big| &\le 4 \sup_{t\in[0,T]} \Big|\int_0^t \widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s\, dW_s\Big| \\ E\Big[\sup_{t\in[0,T]} \Big|\int_t^T 2\widehat{Y}_s^* \cdot \widehat{Z}_s\, dW_s\Big|\Big] &\le 12 \cdot E\Big[\Big(\int_0^T |\widehat{Y}_s|^2\, \|\widehat{Z}_s\|^2 ds\Big)^{1/2}\Big] \\ &\le \frac{1}{2} \cdot E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |\widehat{Y}_t|^2\Big] + \frac{C^2}{2} \cdot E\int_0^T \|\widehat{Z}_s\|^2 ds \end{aligned}$$

con $C = 12$. Entonces

$$E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |\widehat{Y}_t|^2\Big] \le A + TA\beta e^{\beta T} + \frac{1}{2} \cdot E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |\widehat{Y}_t|^2\Big] + AC^2 + ATC^2\beta e^{\beta T}$$

es decir
$$E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |\widehat{Y}_t|^2\Big] \le 2A + 2AT\beta e^{\beta T} + 2AC^2 + 2ATC^2\beta e^{\beta T} \tag{2.15}$$

Combinando (2.14) y (2.15)

$$E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |\widehat{Y}_t|^2 + \int_0^T \|\widehat{Z}_s\|^2\, ds\Big] \le C'A$$

con $C' = 4 + 2C^2 + T\beta e^{\beta T}(4 + 2C^2)$. □

Proposición 2.10. *Sea (Y, Z) solución de la EDE con condición final ξ y coeficiente f. Sea τ un tiempo de parada con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ tal que $\tau \le T$ c.s. Asuma también que*

(a) ξ es $\mathcal{F}_\tau$−medible,

(b) $f(t,y,z) = 0$ *si* $t > \tau$.

Entonces $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ *y* $Z_t = 0$ *en el intervalo* $(\tau, T]$.

Demostración. Para $t \in [0,T]$ se tiene que

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s$$

en particular

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_\tau^T Z_s\, dW_s = \xi - \int_\tau^T Z_s\, dW_s \tag{2.16}$$

Usando la propiedad de martingala de la integral estocástica y el teorema de paro de Doob obtenemos

$$E\Big[\int_\tau^T Z_s\, dW_s \,\Big|\, \mathcal{F}_\tau\Big] = E\Big[\int_0^T Z_s\, dW_s \,\Big|\, \mathcal{F}_\tau\Big] - E\Big[\int_0^\tau Z_s\, dW_s \,\Big|\, \mathcal{F}_\tau\Big] = 0$$

Debido a que Y_τ es $\mathcal{F}_\tau-$medible, si tomamos valor esperado condicional con respecto a $\mathcal{F}_\tau$ en (2.16) obtenemos $Y_\tau = E[\xi \,|\, \mathcal{F}_\tau] = \xi$, luego $\int_\tau^T Z_s\, dW_s = 0$. Por isometría de Itô

$$E\Big[\Big|\int_\tau^T Z_s\, dW_s\Big|^2\Big] = E\int_\tau^T \|Z_s\|^2\, ds = 0$$

Por lo tanto $Z_s \cdot \mathbf{1}_{s\geq\tau} = 0$, y si $t \geq \tau$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s = Y_\tau + 0 - 0$$

es decir $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ para todo $t \in [0,T]$. □

Observación 2.11. Si ξ y f son *determinísticas* (es decir, no dependen de $\omega \in \Omega$) claramente la solución de la EDO

$$\begin{cases} \dfrac{dY_t}{dt} = -f(t, Y_t, 0)\,, \quad t \in [0,T] \\ Y_T = \xi \end{cases} \tag{2.17}$$

y $Z_t \equiv 0$ satisfacen la EDE con condición final (ξ, f), o sea que si ξ y f no son aleatorias, Y tampoco lo es.

Por lo tanto, lo que hace que la solución de una EDE con condición final sea aleatoria es la aleatoriedad de la condición final y del coeficiente. El papel del termino estocástico $\int_t^T Z_s\, dW_s$ es hacer que el proceso Y sea adaptado, es decir, reducir su aleatoriedad.

2.2. EDEs lineales con condición final. Teorema de comparación

En esta sección nos restringiremos al caso $k = 1$, luego Y será un número real y Z será una matriz de tamaño $1 \times d$, es decir, un vector fila d-dimensional.

Proposición 2.12. *Sean* $(\alpha_t, \beta_t)_{t\geq 0}$ *un par de procesos prog. medibles y acotados con valores en* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$*, y sean* $\gamma = (\gamma_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$*,* $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; \mathbb{R})$*. Entonces la EDE con condición final lineal*

$$Y_t = \xi + \int_t^T (\alpha_s Y_s + Z_s \beta_s + \gamma_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s\ , \quad t \in [0,T] \tag{2.18}$$

tiene una única solución $(Y, Z) \in \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{1\times d})$ *dada explícitamente por*

$$Y_t = \Gamma_t^{-1}\, E\Big[\, \xi \Gamma_T + \int_t^T \Gamma_s \gamma_s ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big]\ , \quad t \in [0,T]$$

donde

$$\Gamma_t = \exp\Big\{ \int_0^t \alpha_s ds - \int_0^t |\beta_s|^2 ds + \int_0^t \beta_s^*\, dW_s \Big\}\ , \quad t \in [0,T]$$

En particular, si ξ *y* γ *son no-negativos, el proceso* Y *es no-negativo.*

Demostración. Dado que los procesos α y β son acotados, $f(t, y, z) := \alpha_t y + z\beta_t + \gamma_t$ satisface las condiciones (i)-(iv) de la anterior sección. Por lo tanto, existe un único par de procesos $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ que verifican (2.18), lo cual se escribe en forma diferencial

$$dY_t = -\left\{ \alpha_t Y_t + Z_t \beta_t + \gamma_t \right\} dt + Z_t\, dW_t\ , \quad Y_T = \xi.$$

Si $X_t = \int_0^t (\alpha_s - \frac{1}{2}|\beta_s|^2)\, ds + \int_0^t \beta_s^* dW_s$, por fórmula de Itô, el proceso $\Gamma_t = e^{X_t}$ satisface

$$d\Gamma_t = \{e^{X_t}(\alpha_t - \frac{1}{2}|\beta_t|^2) + \frac{1}{2} e^{X_t}|\beta_t|^2\}\, dt + e^{X_t}\beta_t^*\, dW_t = \Gamma_t \alpha_t dt + \Gamma_t \beta_t^* dW_t\ ,\ \ \Gamma_0 = 1$$

Aplicando la fórmula de integración por partes a los procesos Γ y Y

$$\begin{aligned} d(\Gamma_t Y_t) &= \{\alpha_t \Gamma_t Y_t - \alpha_t Y_t \Gamma_t - Z_t \beta_t \Gamma_t - \gamma_t \Gamma_t + \Gamma_t \beta_t^* Z_t^*\}\, dt + \{Y_t \Gamma_t \beta_t + \Gamma_t Z_t\}\, dW_t \\ &= -\gamma_t \Gamma_t dt + \{Y_t \Gamma_t \beta_t + \Gamma_t Z_t\}\, dW_t \end{aligned}$$

$$\text{i.e.}\ \ \Gamma_t Y_t + \int_0^t \gamma_s \Gamma_s\, ds = Y_0 + \int_0^t Y_s \Gamma_s \beta_s\, dW_s + \int_0^t \Gamma_s Z_s\, dW_s\ , \quad t \in [0,T] \tag{2.19}$$

Por la propiedad de martingala de la integral estocástica, el proceso en el lado izquierdo de (2.19) es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Por lo tanto

$$E\Big[\, Y_T \Gamma_T + \int_0^T \Gamma_s \gamma_s ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big] = Y_t \Gamma_t + \int_0^t \Gamma_s \gamma_s ds\ , \quad t \in [0,T]$$

y dado que $\int_0^t \Gamma_s \gamma_s\, ds$ es $\mathcal{F}_t-$medible,

$$Y_t \Gamma_t = E\Big[\, \xi \Gamma_T + \int_t^T \Gamma_s \gamma_s\, ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big]\ , \quad t \in [0,T]$$

□

Una consecuencia inmediata de la anterior proposición es el siguiente teorema de comparación unidimensional

Teorema 2.13 (Peng (1992)). *Suponga que $k = 1$ y que (ξ, f), $(\bar{\xi}, \bar{f})$ satisfacen las condiciones (i)-(vi), y sean (Y, Z), $(\bar{Y}, \bar{Z})$ las soluciones de las EDEs con condición final respectivas. Si $\xi \leq \bar{\xi}$ c.s., y*

$$f(t, Y_t, Z_t) \leq \bar{f}(t, Y_t, Z_t) \quad \lambda \otimes \mathbf{P} \text{ c.s.} \quad (\lambda \text{ la medida de Lebesgue})$$

entonces $Y_t \leq \bar{Y}_t$, $\forall t \in [0, T]$ c.s. Si además $Y_0 = \bar{Y}_0$ c.s., entonces $Y_t = \bar{Y}_t$ c.s. para todo $t \in [0, T]$ y

$$f(t, Y_t, Z_t) = \bar{f}(t, Y_t, Z_t), \quad \lambda \otimes \mathbf{P} \text{ c.s.}$$

En particular, si se cumple alguna de las dos condiciones: $\mathbf{P}(\xi < \bar{\xi}) > 0$, ó

$$f(t, Y_t, Z_t) < f(t, \bar{Y}_t, \bar{Z}_t)$$

sobre un conjunto con $\lambda \otimes \mathbf{P}-$medida estrictamente positiva, entonces $Y_0 < \bar{Y}_0$.

Demostración. Sean $U = \bar{Y} - Y$, $V = \bar{Z} - Z$ y $\zeta = \bar{\xi} - \xi$. Entonces

$$U_t = \zeta + \int_t^T (\bar{f}(s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s) - f(s, Y_s, Z_s))\, ds - \int_t^T V_s\, dW_s\,, \quad t \in [0, T] \tag{2.20}$$

Defina el proceso

$$\alpha_t = \frac{\bar{f}(t, \bar{Y}_t, \bar{Z}_t) - \bar{f}(t, Y_t, \bar{Z}_t)}{U_t} \quad \text{si } U_t \neq 0, \quad \text{y } \alpha_t = 0 \text{ si } U_t = 0$$

entonces $\alpha_t \leq \mu$, $t \in [0, T]$. Para $0 \leq i \leq d$, denotemos con $Z_t^{(i)}$ el vector $d-$dimensional cuyas i primeras componentes son iguales a las de Z_t y cuyas $d - i$ últimas componentes son iguales a las de $\bar{Z}_t$. Así, para cada $1 \leq i \leq d$, definimos

$$\beta_t^i = \frac{\bar{f}(t, Y_t, Z_t^{(i-1)}) - \bar{f}(t, Y_t, Z_t^{(i)})}{V_t^i} \quad \text{si } V_t^i \neq 0, \quad \text{y } \beta_t^i = 0 \text{ si } V_t^i = 0$$

Dado que $\|Z_t^{(i-1)} - Z_t^{(i)}\| = |\bar{Z}_t^i - Z_t^i| = |V_t^i|$, de la definición tenemos que $|\beta_t^i| \leq K$ para cada $1 \leq i \leq d$. Note que si $\beta_s := (\beta_s^1, \ldots, \beta_s^d)^*$ entonces

$$\begin{aligned} V_s \beta_s = \sum_{i=1}^d V_s^i \beta_s^i = \sum_{i=1}^d \bar{f}(s, Y_s, Z_s^{(i-1)}) - \bar{f}(s, Y_s, Z_s^{(i)}) &= \bar{f}(s, Y_s, Z_s^{(0)}) - \bar{f}(s, Y_s, Z_s^{(d)}) \\ &= \bar{f}(s, Y_s, \bar{Z}_s) - \bar{f}(s, Y_s, Z_s) \end{aligned}$$

(asumiendo que $V_s^i \neq 0$ para todo i, el caso $V_s^i = 0$ para algún i es análogo). Por lo tanto

$$\begin{aligned} &\bar{f}(s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s) - f(s, Y_s, Z_s) \\ &= \bar{f}(s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s) - \bar{f}(s, Y_s, \bar{Z}_s) + \bar{f}(s, Y_s, \bar{Z}_s) - \bar{f}(s, Y_s, Z_s) + \bar{f}(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y_s, Z_s) \\ &= \alpha_s U_s + V_s \beta_s + \gamma_s \end{aligned}$$

con $\gamma_s := \bar{f}(s, Y_s, Z_s) - (s, Y_s, Z_s) \geq 0$. Entonces, de (2.20), el par $(U_t, V_t)_{t \in [0,T]}$ satisface la EDE con condición final lineal

$$U_t = \zeta + \int_t^T (\alpha_s U_s + V_s \beta_s + \gamma_s)\, ds - \int_t^T V_s\, dW_s\,, \quad t \in [0, T]$$

Usando la proposición 2.12, dado que ζ y γ son no-negativos, el proceso $U = Y - \bar{Y}$ resulta también no-negativo. Para la segunda parte del teorema, si $U_0 = 0$ c.s., por la proposición anterior

$$0 = U_0 = E\left[\zeta\Gamma_T + \int_0^T \Gamma_s\gamma_s\, ds \,\Big|\, \mathcal{F}_0\right],$$

luego $\zeta = 0$ c.s. y $\gamma = 0$, $\lambda \otimes \mathbf{P}$ c.s. □

Observación 2.14. Suponga que

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s,$$
$$\bar{Y}_t = \bar{\xi} + \int_t^T V_s\, ds - \int_t^T \bar{Z}_s\, dW_s,$$

y $\xi \leq \bar{\xi},\ f(t, \bar{Y}_t, \bar{Z}_t) \leq V_t$. Entonces podemos aplicar el teorema 2.13 definiendo

$$\bar{f}(t, y, z) := f(t, y, z) + (V_t - f(t, \bar{Y}_t, \bar{Z}_t)).$$

Más aún, si $f(t, \bar{Y}_t, \bar{Z}_t) < V_t$ sobre un conjunto con $\lambda \otimes \mathbf{P}-$medida estrictamente positiva, entonces $Y_0 < \bar{Y}_0$.

3. EDEs con condición final - Horizonte de tiempo aleatorio

Algunas aplicaciones de las EDEs con condición final requieren que la solución (Y, Z) satisfaga la condición $Y_\tau = \xi$ para un tiempo de parada τ dado. Esto se puede interpretar como una condición *final* en el intervalo aleatorio $[0, \tau]$, y por eso surge la necesidad de considerar EDEs con condición final en las que el tiempo terminal es un tiempo de parada con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

El objetivo de esta sección es extender el resultado de existencia y unicidad de soluciones de EDEs con condición final de la sección anterior al caso en que el tiempo terminal es aleatorio, es decir a ecuaciones de la forma

$$Y_t = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s\, dW_s\,, \quad t \geq 0 \tag{3.1}$$

donde $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ y ξ es una variable aleatoria $k-$dimensional $\mathcal{F}_\tau-$medible. Recuerde que para un tiempo de parada τ con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ se define la $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_\tau$ como

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \geq 0\}.$$

Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano $d-$dimensional definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, y sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración generada por $(W_t)_{t\geq 0}$ aumentada con los conjuntos $\mathbf{P}-$nulos de Ω. A lo largo de la sección τ será un tiempo de parada finito con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Para un $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo, notaremos con $\mathcal{S}_\tau^{2,\alpha}(\mathbb{R}^k)$ el espacio vectorial de procesos $(Y_t)_{t\geq 0}$ con valores en $\mathbb{R}^k$ *prog. medibles* con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ tales que

$$\|Y\|^2_{\mathcal{S}_\tau^{2,\alpha}(\mathbb{R}^k)} := E\left[\sup_{t\geq 0} e^{\alpha(t\wedge\tau)}|Y_t|^2\right] < +\infty, \tag{3.2}$$

y con $\mathcal{M}^{2,\alpha}_\tau(\mathbb{R}^{k\times d})$ el espacio vectorial de los procesos $(Z_t)_{t\geq 0}$ con valores en $\mathbb{R}^{k\times d}$ *prog. medibles* con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ tales que

$$\|Z\|^2_{\mathcal{M}^{2,\alpha}_\tau(\mathbb{R}^{k\times d})} := E\int_0^\infty e^{\alpha t}\|Z_t\|^2 dt < +\infty. \tag{3.3}$$

Conservaremos la misma notación para los espacios cociente, que además son espacios de Banach con las normas (3.2) y (3.3) respectivamente.

Asumiremos que la *condición final* ξ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_\tau-$medible con valores en $\mathbb{R}^k$, y que existe un proceso $(F_t)_{t\geq 0}$ *prog. medible*, con valores en $\mathbb{R}_+$, tal que el coeficiente

$$f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

satisface

(i) el proceso $\{f(t,y,z)\}_{t\geq 0}$ es *progresivamente medible,* $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$

(ii) f es *Lipschitz* en $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$; es decir, existe $K > 0$ tal que casi siempre

$$|f(t,y,z) - f(t,y,z')| \leq K\|z - z'\|,\ \forall t \geq 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^k,\ \forall z, z' \in \mathbb{R}^{k\times d}$$

(iii) f es *monótona* en $y \in \mathbb{R}^k$; es decir, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que casi siempre

$$\big\langle y - y', f(t,y,z) - f(t,y',z)\big\rangle \leq \mu|y - y'|^2,\ \forall t \geq 0,\ \forall y, y' \in \mathbb{R}^k,\ \forall z \in \mathbb{R}^{k\times d}$$

(iv) Crecimiento lineal en $y \in \mathbb{R}^k$,

$$|f(t,y,0)| \leq F_t + K|y|\,,\ \forall t \geq 0,\ \ \forall y \in \mathbb{R}^k$$

(v) $E\Big[e^{\rho\tau}|\xi|^2 + \displaystyle\int_0^\tau e^{\rho t}F_t^2\,dt\Big] < +\infty,$ para algún $\rho > K^2 + 2\mu$,

(vi) $y \mapsto f(t,y,z)$ es continua, $\forall t \geq 0,\ \forall z \in \mathbb{R}^{k\times d}$ c.s.

Definición 3.1. Diremos que un par de procesos $(Y,Z) = (Y_t, Z_t)_{t\geq 0}$ *prog. medibles*, con valores en $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, son solución de la EDE con condición final (τ,ξ,f) si $(Y,Z) \in \mathcal{S}^{2,\rho}_\tau(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^{2,\rho}_\tau(\mathbb{R}^{k\times d})$, satisfacen

$$Y_t = \xi + \int_{t\wedge\tau}^\tau f(s, Y_s, Z_s)\,ds - \int_{t\wedge\tau}^\tau Z_s dW_s\,, \quad t \geq 0 \tag{3.4}$$

y $Z_t = 0$ si $t > \tau$. Más aún, dado que τ es finito c.s., (3.4) implica que $Y_t = \xi$ si $t \geq \tau$.

3.1. Unicidad y existencia de soluciones

Proposición 3.2 (Unicidad)**.** *Bajo las hipótesis (i)-(vi), existe a lo más una solución de la EDE con condición final (3.4) en el espacio* $\mathcal{S}^{2,\rho}_\tau(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^{2,\rho}_\tau(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Demostración. Sean (Y^1, Z^1), (Y^2, Z^2) dos soluciones de (3.4) en el espacio $\mathcal{S}_\tau^{2,\rho}(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}_\tau^{2,\rho}(\mathbb{R}^{k\times d})$. Note primero que $Y_t^1 = Y_t^2 = \xi$ si $t \geq \tau$ y $Z_t^1 = Z_t^2 = 0$ sobre el conjunto $\{t > \tau\}$. Aplicando Fórmula de Itô al proceso

$$d(Y_t^1 - Y_t^2) = -\{f(t, Y_t^1, Z_t^1) - f(t, Y_t^2, Z_t^2)\}\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t)\, dt + (Z_t^1 - Z_t^2)\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t)\, dW_t$$

con la función $e^{\rho t}|y|^2$, integrando entre $t \wedge \tau$ y τ, y reorganizando obtenemos

$$\begin{aligned} &e^{\rho(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\rho s}\|\Delta Z_s\|^2\, ds \\ &= \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\rho s}\big\{-\rho|\Delta Y_s|^2 + 2\left\langle \Delta Y_s, f(s, Y_s^1, Z_s^2) - f(s, Y_s^2, Z_s^2)\right\rangle\big\}\, ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} 2e^{\rho s}\Delta Y_s^* \cdot \Delta Z_s\, dW_s \end{aligned}$$

donde $\Delta Y = Y^1 - Y^2$ y $\Delta Z = Z^1 - Z^2$. Tomando valor esperado -recuerde que el valor esperado de la integral estocástica es cero- se obtiene

$$\begin{aligned} &E\left[e^{\rho(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\rho s}\|\Delta Z_s\|^2\, ds\right] \\ &\qquad = E\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\rho s}\big\{-\rho|\Delta Y_s|^2 + 2\left\langle \Delta Y_s, f(s, Y_s^1, Z_s^2) - f(s, Y_s^2, Z_s^2)\right\rangle\big\}\, ds. \end{aligned}$$

Dado que f es *monótona* en y y *Lipschitz* en z, usando la desigualdad $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$, para cada $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} &2\langle y - y', f(t, y, z) - f(t, y', z')\rangle \\ &\quad = 2\langle y - y', f(t, y, z) - f(t, y', z)\rangle + 2\langle y - y', f(t, y', z) - f(t, y', z')\rangle \\ &\quad \leq 2\mu|y - y'|^2 + K^2/\varepsilon|y - y'|^2 + \varepsilon\|z - z'\|^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Gracias a la desigualdad $\rho > K^2 + 2\mu$, podemos escoger ε tal que $0 < \varepsilon < 1$ y $\rho > K^2/\varepsilon + 2\mu$. Usando la desigualdad (3.5) con este ε se sigue entonces que

$$E\left[e^{\rho(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + (1-\varepsilon)\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\rho s}\|\Delta Z_s\|^2\, ds\right] \leq 0$$

obteniendo el resultado requerido. $\square$

Antes de probar existencia introduzcamos una sucesión de procesos cuya construcción es debida a R.W.R. Darling y E. Pardoux [DA/PA 97]: sea $\lambda = K^2/2 + \mu$ y sea $(\widehat{Y}^n, \widehat{Z}^n)$ la única solución de la EDE con condición final sobre $[0, n]$

$$\widehat{Y}_t^n = E\big[e^{\lambda\tau}\xi|\mathcal{F}_n\big] + \int_t^n \big\{e^{\lambda s} f(s, e^{-\lambda s}\widehat{Y}_s^n, e^{-\lambda s}\widehat{Z}^n) - \lambda\widehat{Y}_s^n\big\}\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\, ds - \int_t^n \widehat{Z}_s^n\, dW_s.$$

En vista de que $E\big[e^{\lambda\tau}\xi|\mathcal{F}_n\big]$ es $\mathcal{F}_{\tau\wedge n}-$medible y

$$\big\{e^{\lambda s} f(s, e^{-\lambda s}\widehat{Y}_s^n, e^{-\lambda s}\widehat{Z}^n) - \lambda\widehat{Y}_s^n\big\}\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) = 0, \quad \text{si } s > \tau \wedge n$$

por la proposición 2.10 tenemos $\widehat{Y}_{t\wedge(\tau\wedge n)}^n = \widehat{Y}_t^n$ y $\widehat{Z}_t^n = 0$ sobre $\{t > \tau \wedge n\}$, es decir

$$\widehat{Y}_{t\wedge\tau}^n = \widehat{Y}_t^n, \;\text{ y }\; \widehat{Z}_t^n = 0 \;\text{ sobre } \{t > \tau\}, \;\text{ para } t \in [0, n].$$

Definamos la martingala $\zeta_t := E\big[e^{\lambda\tau}\xi|\mathcal{F}_t\big],\ t \geq 0$. Dado que $E(e^{2\lambda\tau}|\xi|^2) < \infty$, por el Teorema de Representación de Martingalas existe un proceso $(\eta_t)_{t\geq 0}$ adaptado y con valores en $\mathbb{R}^{k\times d}$ tal que

$$E\big[e^{\lambda\tau}\xi|\mathcal{F}_t\big] = E\big[e^{\lambda\tau}\xi\big] + \int_0^t \eta_s\, dW_s, \quad t \geq 0.$$

Haciendo $t = \tau$ y usando que $e^{\lambda\tau}\xi$ es $\mathcal{F}_\tau-$medible, se obtiene la siguiente representación para $e^{\lambda\tau}\xi$,

$$e^{\lambda\tau}\xi = E\big[e^{\lambda\tau}\xi\big] + \int_0^\tau \eta_s\, dW_s. \tag{3.6}$$

Como sólo nos interesa el proceso $(\eta_s)_{s\geq 0}$ hasta el tiempo τ, asumiremos que $\eta_s = 0$ si $s > \tau$, lo cual no altera la representación (3.6) de $e^{\lambda\tau}\xi$. Para $t > n$ definimos

$$\widehat{Y}_t^n := \zeta_t \quad \text{y} \quad \widehat{Z}_t^n := \eta_t,$$

y para $t \geq 0$

$$Y_t^n := e^{-\lambda(t\wedge\tau)}\widehat{Y}_t^n \quad \text{y} \quad Z_t^n := e^{-\lambda(t\wedge\tau)}\,\widehat{Z}_t^n. \tag{3.7}$$

Este proceso satisface $Y_{t\wedge\tau}^n = Y_t^n$ y $Z_t^n = 0$ sobre $\{t > \tau\}$, y más aún, dado que $d\zeta_t = \eta_t\, dW_t$, usando fórmula de Itô y un argumento análogo al de la observación 2.6, la pareja (Y^n, Z^n) satisface

$$\begin{aligned} dY_s^n &= -\mathbf{1}_{\{s\leq\tau\}} f(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds + Z_s^n\, dW_s, \quad 0 \leq s \leq n, \\ dY_s^n &= -\mathbf{1}_{\{s\leq\tau\}} \lambda Y_s^n\, ds + Z_s^n\, dW_s, \qquad\qquad s > n, \end{aligned}$$

en otras palabras, satisface la EDE con condición final

$$Y_t^n = \xi + \int_{t\wedge\tau}^\tau f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds - \int_{t\wedge\tau}^\tau Z_s^n dW_s\,, \quad t \geq 0 \tag{3.8}$$

con $f_n(t, y, z) := \mathbf{1}_{\{t\leq n\}} f(t, y, z) + \mathbf{1}_{\{t>n\}}\lambda y,\ n \geq 1$.

Lema 3.3. *Para todo $\sigma \geq 0$ tal que $e^{(\sigma/2+\lambda)\tau}\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbb{R}^k)$, los procesos ζ y η satisfacen*

$$E\int_0^\tau e^{\sigma s}\|\eta_s\|^2\, ds + \sigma\cdot E\int_0^\tau e^{\sigma s}|\zeta_s|^2\, ds = E\big[|e^{(\sigma/2+\lambda)\tau}\xi|^2\big] - \big|E[e^{\lambda\tau}\xi]\big|^2.$$

Demostración. Por Fórmula de Itô el proceso $e^{\sigma t}|\zeta_t|^2,\ t \geq 0$, satisface

$$e^{\sigma t}|\zeta_t|^2 = |\zeta_0|^2 + \int_0^t e^{\sigma s}(\sigma|\zeta_s|^2 + \|\eta_s\|^2)\, ds + 2\int_0^t e^{\sigma s}\zeta_s^*\cdot\eta_s\, dW_s, \quad t \geq 0.$$

Defina la sucesión de tiempos de parada $\tau_n := \text{ínf}\{t \geq 0 : e^{\sigma t/2}|\zeta_t| \geq n\} \wedge \tau$. Dado que

$$E\int_0^{n\wedge\tau_n} |e^{\sigma s}\zeta_s^*\cdot\eta_s|^2\, ds \leq n^2 e^{n\sigma}\, E\int_0^n \|\eta_s\|^2\, ds < +\infty$$

el valor esperado de $\int_0^{n\wedge\tau_n} e^{\sigma s}\zeta_s^*\cdot\eta_s\, dW_s$ es cero y

$$E\big[e^{\sigma(n\wedge\tau_n)}|\zeta_{n\wedge\tau_n}|^2\big] = \big|E[\zeta_0]\big|^2 + E\int_0^{n\wedge\tau_n} e^{\sigma s}(\sigma|\zeta_s|^2 + \|\eta_s\|^2)\, ds. \tag{3.9}$$

Para el término de la izquierda se tiene

$$\begin{aligned}
E\Big[e^{\sigma(n\wedge\tau_n)/2}\big|E[e^{\lambda\tau}\xi \mid \mathcal{F}_{n\wedge\tau_n}]\big|^2\Big] &\le E\big[e^{\sigma(n\wedge\tau_n)}E[e^{2\lambda\tau}|\xi|^2 \mid \mathcal{F}_{n\wedge\tau_n}]\big] \\
&= E[e^{\sigma(n\wedge\tau_n)+2\lambda\tau}|\xi|^2] \\
&\le E[e^{\sigma\tau+2\lambda\tau}|\xi|^2] = E\big[|e^{(\sigma/2+\lambda)\tau}\xi|^2\big]
\end{aligned}$$

y por convergencia de martingalas discretas en L^2 (ver [WILL 91]) se sigue que

$$e^{\sigma(n\wedge\tau_n)/2}\zeta_{n\wedge\tau_n} = e^{\sigma(n\wedge\tau_n)/2}E[e^{\lambda\tau}\xi \mid \mathcal{F}_{n\wedge\tau_n}] \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} e^{(\sigma/2+\lambda)\tau}\xi$$

y por lo tanto $E\big[e^{\sigma(n\wedge\tau_n)}|\zeta_{n\wedge\tau_n}|^2\big] \xrightarrow[n\to\infty]{} E\big[|e^{(\sigma/2+\lambda)\tau}\xi|^2\big]$. Para el término de la derecha en (3.9) basta con usar convergencia monótona para obtener

$$E\int_0^{n\wedge\tau_n} e^{\sigma s}(\sigma|\zeta_s|^2+\|\eta_s\|^2)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} E\int_0^{\tau} e^{\sigma s}(\sigma|\zeta_s|^2+\|\eta_s\|^2)\,ds.$$

Tomando entonces el límite cuando $n\to\infty$ en (3.9) se sigue el resultado. □

Teorema 3.4 (Darling, Pardoux (1997))**.** *Bajo las hipótesis (i)-(vi), la EDE con condición final (3.4) tiene una única solución* $(Y,Z)\in\mathcal{S}^{2,\rho}_\tau(\mathbb{R}^k)\times\mathcal{M}^{2,\rho}_\tau(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Demostración. La unicidad ya fue probada en la proposición 3.2. Veamos que la sucesión $(Y^n,Z^n)_{n\ge1}$ definida en (3.7) es de Cauchy en $\mathcal{S}^{2,\rho}_\tau(\mathbb{R}^k)\times\mathcal{M}^{2,\rho}_\tau(\mathbb{R}^{k\times d})$: si $m\ge n$, el proceso $\Delta Y := Y^m - Y^n$ satisface

$$\begin{aligned}
\Delta Y_t &= \Delta Y_0 - \int_0^{t\wedge\tau}\big\{f_m(s,Y^m_s,Z^m_s)-f_n(s,Y^n_s,Z^n_s)\big\}\,ds + \int_0^{t\wedge\tau}\Delta Z_s\,dW_s \\
&= \Delta Y_0 - \int_0^{t}\big\{f_m(s,Y^m_s,Z^m_s)-f_n(s,Y^n_s,Z^n_s)\big\}\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\,ds + \int_0^{t}\Delta Z_s\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\,dW_s.
\end{aligned}$$

donde $\Delta Z = Z^m - Z^n$. Aplicando fórmula de Itô con la función $F(t,y)=e^{\rho t}|y|^2$ se obtiene

$$\begin{aligned}
d(e^{\rho t}|\Delta Y_t|^2) =& \big\{\rho e^{\rho t}|\Delta Y_t|^2 - 2e^{\rho t}\big\langle\Delta Y_t, f_m(t,Y^m_t,Z^m_t)-f_n(t,Y^n_t,Z^n_t)\big\rangle\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t) \\
&+ e^{\rho t}\|\Delta Z_t\|^2\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t)\big\}\,dt + 2e^{\rho t}\Delta Y^*_t\cdot\Delta Z_t\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t)\,dW_t.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

Integrando (3.10) entre $t\wedge\tau$ y $m\wedge\tau$, y usando el hecho de que

$$Y^m_{m\wedge\tau} = Y^m_m = Y^n_{m\wedge\tau} = Y^n_m = e^{-\lambda(m\wedge\tau)}\zeta_m$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
e^{\rho(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 &+ \int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau}\big(e^{\rho s}\|\Delta Z_s\|^2+\rho e^{\rho s}|\Delta Y_s|^2\big)\,ds + 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\Delta Y^*_s\cdot\Delta Z_s\,dW_s \\
=& 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\big\langle\Delta Y_s, f_m(s,Y^m_s,Z^m_s)-f_n(s,Y^n_s,Z^n_s)\big\rangle\,ds
\end{aligned}$$

y dado que para $s \leq m$,

$$\begin{aligned}
&f_m(s, Y_s^m, Z_s^m) - f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) \\
&= \mathbf{1}_{\{s\leq m\}} f(s, Y_s^m, Z_s^m) + \mathbf{1}_{\{s>m\}} \lambda Y_s^m - \mathbf{1}_{\{s\leq n\}} f(s, Y_s^n, Z_s^n) - \mathbf{1}_{\{s>n\}} \lambda Y_s^n \\
&= f(s, Y_s^m, Z_s^m) - f(s, Y_s^n, Z_s^n) + \mathbf{1}_{\{s>n\}} f(s, Y_s^n, Z_s^n) - \mathbf{1}_{\{s>n\}} \lambda Y_s^n
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
e^{\rho(t\wedge\tau)}&|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} \left(e^{\rho s}\|\Delta Z_s\|^2 + \rho e^{\rho s}|\Delta Y_s|^2\right) ds + 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\Delta Y_s^* \cdot \Delta Z_s\, dW_s \\
&= 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\big\langle \Delta Y_s, f(s, Y_s^m, Z_s^m) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)\big\rangle\, ds \\
&\qquad + 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} \mathbf{1}_{\{s>n\}} e^{\rho s}\big\langle \Delta Y_s, f(s, Y_s^n, Z_s^n) - \lambda Y_s^n\big\rangle\, ds \\
&\leq 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\big\langle \Delta Y_s, f(s, Y_s^m, Z_s^m) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)\big\rangle\, ds \\
&\qquad + 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}|\Delta Y_s| \cdot \mathbf{1}_{\{s>n\}} |f(s, Y_s^n, Z_s^n) - \lambda Y_s^n|\, ds
\end{aligned}$$

Dado que $\rho > K^2 + 2\mu$, podemos encontrar ε tal que $0 < \varepsilon < 1$ y $\nu := \rho - K^2/\varepsilon - 2\mu > 0$. Usando la desigualdad (3.5) con este ε y la desigualdad $2ab \leq \theta a^2 + b^2/\theta$ con $\theta < \nu, a = |\Delta Y_s|$ y $b = \mathbf{1}_{\{s>n\}}|f(s, Y_s^n, Z_s^n) - \lambda Y_s^n|$ obtenemos

$$\begin{aligned}
e^{\rho(t\wedge\tau)}&|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\|\Delta Z_s\|^2\, ds + 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\Delta Y_s^* \cdot \Delta Z_s\, dW_s \\
&\leq (K^2/\varepsilon + 2\mu - \rho + \theta)\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}|\Delta Y_s|^2\, ds + \varepsilon\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\|\Delta Z_s\|^2\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\theta}\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\mathbf{1}_{\{s>n\}}|f(s, Y_s^n, Z_s^n) - \lambda Y_s^n|^2\, ds
\end{aligned}$$

Haciendo $\beta = \min(1-\varepsilon, \nu - \theta) > 0$, la anterior desigualdad se reduce a

$$\begin{aligned}
e^{\rho(t\wedge\tau)}&|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2 + \beta\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\left(\|\Delta Z_s\|^2 + |\Delta Y_s|^2\right) ds \\
&\leq \frac{1}{\theta}\int_{n\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}|f(s, Y_s^n, Z_s^n) - \lambda Y_s^n|^2\, ds - 2\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\Delta Y_s^* \cdot \Delta Z_s\, dW_s.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Dado que

$$\int_{t\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\Delta Y_s^* \cdot \Delta Z_s\, dW_s = \int_t^m \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) e^{\rho s}\Delta Y_s^* \cdot \Delta Z_s\, dW_s,$$

por la observación 2.3 la esperanza de la integral estocástica es cero, y en particular tenemos

$$E\int_0^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\left(\|\Delta Z_s\|^2 + |\Delta Y_s|^2\right) ds \leq \frac{1}{\beta\theta} R_{m,n}$$

donde

$$R_{m,n} := E\int_{n\wedge\tau}^{m\wedge\tau} e^{\rho s}|f(s, Y_s^n, Z_s^n) - \lambda Y_s^n|^2\, ds.$$

Volviendo a la desigualdad (3.11), por un argumento ya usado varias veces en la anterior sección se tiene

$$
\begin{aligned}
E\bigg[\sup_{0\le t\le m} e^{\rho(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2\bigg] &\le \tfrac{1}{\theta}R_{m,n} + 4\,E\bigg[\sup_{0\le t\le m}\Big|\int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)e^{\rho s}\Delta Y_s^*\cdot\Delta Z_s\,dW_s\Big|\bigg]\\
&\le \tfrac{1}{\theta}R_{m,n} + 12\,E\bigg[\Big(\int_0^m e^{\rho s}|\Delta Y_s|^2\|\Delta Z_s\|^2\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\,ds\Big)^2\bigg]\\
&\le \tfrac{1}{\theta}R_{m,n} + \tfrac{1}{2}\,E\bigg[\sup_{0\le t\le m\wedge\tau} e^{\rho t}|\Delta Y_t|^2\bigg] + \tfrac{C^2}{2}\,E\int_0^{m\wedge\tau}\|\Delta Z_s\|^2\,ds
\end{aligned}
$$

con $C=12$, y dado que $E\big[\sup_{0\le t\le m} e^{\rho(t\wedge\tau)}|\Delta Y_{t\wedge\tau}|^2\big] = E\big[\sup_{0\le t\le m\wedge\tau} e^{\rho t}|\Delta Y_t|^2\big]$, obtenemos

$$
E\bigg[\sup_{0\le t\le m\wedge\tau} e^{\rho t}|\Delta Y_t|^2\bigg] \le \tfrac{2}{\theta}R_{m,n} + C^2\,E\int_0^{m\wedge\tau}\|\Delta Z_s\|^2\,ds \le \frac{1}{\theta}\left(2+\frac{C^2}{\beta}\right)R_{m,n}
$$

y en consecuencia

$$
E\bigg[\sup_{0\le t\le m\wedge\tau} e^{\rho t}|\Delta Y_t|^2 + \int_0^{m\wedge\tau} e^{\rho s}\big(\|\Delta Z_s\|^2+|\Delta Y_s|^2\big)\,ds\bigg] \le \frac{1}{\theta}\left(2+\frac{C^2+1}{\beta}\right)R_{m,n}.
$$

Dado que $Y_t^m = Y_t^n$ si $t\ge m$, $Y_t^n = Y_t^m = \xi$ sobre $\{t\ge\tau\}$, $Z_t^m = Z_t^n = \eta_t$ si $t\ge m$ y $\eta_t = 0$ sobre $\{t\ge\tau\}$, de la anterior desigualdad se deduce que

$$
E\bigg[\sup_{t\ge 0} e^{\rho(t\wedge\tau)}|\Delta Y_t|^2 + \int_0^\tau e^{\rho s}|\Delta Y_s|^2\,ds + \int_0^\infty \|\Delta Z_s\|^2\,ds\bigg] \le C_{\theta,\beta}R_{m,n} \le C_{\theta,\beta}\Gamma_n
$$

donde $C_{\theta,\beta} = \frac{1}{\theta}\left(2+\frac{C^2+1}{\beta}\right)$ y $\Gamma_n = E\displaystyle\int_{n\wedge\tau}^\tau e^{\rho s}|f(s,Y_s^n,Z_s^n)-\lambda Y_s^n|^2\,ds$. Por hipótesis

$$
\begin{aligned}
|f(s,Y_s^n,Z_s^n)-\lambda Y_s^n|^2 &\le 2\big(F_s + K|Y_s^n| + K\|Z_s^n\|\big)^2 + 2\lambda^2|Y_s^n|^2\\
&\le 6\big(F_s^2 + K^2|Y_s^n|^2 + K^2\|Z_s^n\|^2\big) + 2\lambda^2|Y_s^n|^2
\end{aligned}
$$

luego

$$
\Gamma_n \le 6\,E\int_{n\wedge\tau}^\tau e^{\rho s}F_s^2\,ds + (6K^2+2\lambda^2)\,E\int_{n\wedge\tau}^\tau e^{\rho s}\big(|Y_s^n|^2+\|Z_s^n\|^2\big)\,ds. \tag{3.12}
$$

y dado que

$$
\int_{n\wedge\tau}^\tau e^{\rho s}|F_s|^2\,ds \le \int_0^\tau e^{\rho s}|F_s|^2\,ds,\ \forall n\ge 1 \quad \text{y} \quad E\int_0^\tau e^{\rho s}|F_s|^2\,ds < +\infty,
$$

por convergencia dominada el primer término de (3.12) tiende a cero cuando $n\to\infty$. Volviendo a la definición de $(\widehat{Y}_t^n, \widehat{Z}_t^n)$ para $t>n$ tenemos

$$
E\int_{n\wedge\tau}^\tau e^{\rho s}\big(|Y_s^n|^2+\|Z_s^n\|^2\big)\,ds = E\int_{n\wedge\tau}^\tau e^{(\rho-2\lambda)s}\big(|\zeta_s|^2+\|\eta_s\|^2\big)\,ds,
$$

tomando $\sigma=\rho-2\lambda$ en el lema 3.3 se tiene que

$$
E\int_0^\tau e^{(\rho-2\lambda)s}\big(|\zeta_s|^2+\|\eta_s\|^2\big)\,ds < +\infty
$$

y de nuevo por convergencia dominada

$$E\int_{n\wedge\tau}^{\tau} e^{\rho s}\big(|Y_s^n|^2+\|Z_s^n\|^2\big)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

luego $\Gamma_n \to 0$ cuando $n\to\infty$. En particular la sucesión (Y^n,Z^n) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{S}_\tau^{2,\rho}(\mathbb{R}^k)\times \mathcal{M}_\tau^{2,\rho}(\mathbb{R}^{k\times d})$ y por lo tanto converge en este espacio a un límite (Y,Z).

Veamos que (Y,Z) es solución de la EDE con condición final (3.4. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $2\alpha<\rho$ y fijemos $t\geq 0$. Dado que (Y^n,Z^n) satisface la EDE con condición final (3.8), usando el mismo argumento de la observación 3.6 dicha ecuación se puede escribir de forma equivalente

$$e^{\alpha(t\wedge\tau)}Y_t^n = e^{\alpha\tau}\xi+\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}\{f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)-\alpha Y_s^n\}\,ds-\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}Z_s^n\,dW_s.$$

Por definición de f_n, para $n\geq t$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}\{f_n(s,Y_s^n,Z_s^n)-\alpha Y_s^n\}\,ds &= \int_{t\wedge\tau}^{n\wedge\tau} f(s,Y_s^n,Z_s^n)\,ds-\int_{t\wedge\tau}^{\tau}\alpha Y_s^n\,ds+\int_{n\wedge\tau}^{\tau}\lambda Y_s^n\,ds\\ &=\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}\{f(s,Y_s^n,Z_s^n)-\alpha Y_s^n\}\,ds+\int_{n\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}\{\lambda Y_s^n-f(s,Y_s^n,Z_s^n)\}\,ds\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}e^{\alpha(t\wedge\tau)}Y_t^n =& e^{\alpha\tau}\xi+\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}\{f(s,Y_s^n,Z_s^n)-\alpha Y_s^n\}\,ds-\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}Z_s^n\,dW_s\\ &+\int_{n\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}\{\lambda Y_s^n-f(s,Y_s^n,Z_s^n)\}\,ds,\quad \forall n\geq t,\ n\in\mathbb{N}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Queremos pasar al límite en esta ecuación sabiendo que

$$E\Big[\sup_{t\geq 0} e^{\rho(t\wedge\tau)}|Y_t^n-Y_t|^2+\int_0^{\tau} e^{\rho s}|Y_s^n-Y_s|^2\,ds+\int_0^{\infty}\|Z_s-Z_s^n\|^2\,ds\Big]\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De las desigualdades

$$\begin{aligned}E\big[e^{2\alpha(t\wedge\tau)}|Y_t^n-Y_t|^2\big]&\leq E\big[\sup\nolimits_{t\geq 0} e^{\rho(t\wedge\tau)}|Y_t^n-Y_t|^2\big]\\ E\Big[\Big|\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}(Z_s^n-Z_s)\,dW_s\Big|^2\Big]&\leq E\int_0^{\tau} e^{\rho s}\|Z_s-Z_s^n\|^2\,ds\end{aligned}$$

se obtiene que

$$e^{\alpha(t\wedge\tau)}Y_t^n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} e^{\alpha(t\wedge\tau)}Y_t,\quad \text{y}\quad \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}Z_s^n\,dW_s\xrightarrow[n\to\infty]{L^2}\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}Z_s\,dW_s,$$

y por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}E\Big[\Big|\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}(Y_s^n-Y_s)\,ds\Big|\Big]&\leq E\int_0^{\tau} e^{\alpha s}|Y_s^n-Y_s|\,ds=E\int_0^{\tau} e^{(\alpha-\rho/2)s}e^{\rho s/2}|Y_s^n-Y_s|\,ds\\ &\leq\Big\{E\int_0^{\tau} e^{(2\alpha-\rho)s}\,ds\Big\}^{1/2}\cdot\Big\{E\int_0^{\tau} e^{\rho s}|Y_t^n-Y_t|^2\,dt\Big\}^{1/2}\leq\frac{1}{\sqrt{\rho-2\alpha}}\Big\{E\int_0^{\tau} e^{\rho s}|Y_t^n-Y_t|^2\,dt\Big\}^{1/2}\end{aligned}$$

y

$$E\Big[\Big|\int_{n\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}\{\lambda Y_s^n - f(s,Y_s^n,Z_s^n)\}\,ds\Big|\Big] \le \frac{\Gamma_n}{\sqrt{\rho-2\alpha}}$$

luego

$$\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s} Y_s^n\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s} Y_s\,ds \quad \text{y} \quad \int_{n\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}\{\lambda Y_s^n - f(s,Y_s^n,Z_s^n)\}\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0.$$

Por último

$$\begin{aligned} &E\Big[\Big|\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}\{f(s,Y_s^n,Z_s^n) - f(s,Y_s,Z_s)\}\,ds\Big|\Big] \\ &\le E\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}|f(s,Y_s^n,Z_s^n) - f(s,Y_s^n,Z_s)|\,ds + E\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}|f(s,Y_s^n,Z_s) - f(s,Y_s,Z_s)|\,ds \end{aligned}$$

y dado que f es *Lipschitz* en z,

$$\begin{aligned} E\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}|f(s,Y_s^n,Z_s^n) - f(s,Y_s^n,Z_s)|\,ds &\le K\,E\int_0^{\tau} e^{\alpha s}\|Z_s^n - Z_s\|\,ds \\ &\le \frac{K}{\sqrt{\rho-2\alpha}}\Big\{E\int_0^{\tau} e^{\rho s}\|Z_s^n - Z_s\|^2\,dt\Big\}^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Adicionalmente, usando la continuidad de $y \mapsto f(s,y,z)$, se puede ver que

$$E\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}|f(s,Y_s^n,Z_s) - f(s,Y_s,Z_s)|\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

La demostración emplea argumentos de integrabilidad uniforme y se puede encontrar en [DA/PA 97, BR/CA 00].

En conclusión, dado que la convergencia en L^2 implica convergencia en L^1, tomando el límite en L^1 de cada término en (3.13) obtenemos

$$e^{\alpha(t\wedge\tau)}Y_t = e^{\alpha\tau}\xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s}\{f(s,Y_s,Z_s) - \alpha Y_s\}\,ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\alpha s} Z_s\,dW_s$$

o lo que es lo mismo

$$Y_t = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s\,dW_s.$$

□

4. Soluciones de viscosidad de EDPs semilineales de segundo orden

Esta sección presenta algunos resultados clásicos sobre la relación entre EDEs con condición final y ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) parabólicas y elípticas de segundo orden semilineales. Primero, se expone una generalización de la Fórmula de Feynman-Kăc al caso semilineal, y luego se presenta un recíproco de dicha generalización en un sentido más débil usando el concepto de solución de viscosidad.

Consideraremos EDEs con condición final bajo un contexto markoviano i.e. la aleatoriedad tanto de la condición final como del coeficiente proviene de un proceso de Markov solución de una EDE estándar con condición inicial.

Sea $T > 0$ fijo y sean $b : [0,T]\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,\ \sigma : [0,T]\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ funciones medibles que satisfacen la condición de *Lipschitz* global, (uniformemente con respecto a $t \in [0,T]$) con constante de *Lipschitz* $K > 0$. Bajo estas condiciones, para cada $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, existe un proceso $(X_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ solución de la EDE

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\, dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\, dW_r\ , \quad s \in [t,T]. \tag{4.1}$$

Convenimos $X_s^{t,x} = x$ para $0 \le s \le t$. Suponemos además que

$$g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad \text{y} \quad f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

son funciones continuas y que existen $\mu \in \mathbb{R},\ K > 0$ y $p \ge 1$ tales que

$$\begin{aligned} |g(x)| &\le K(1 + |x|^p) \\ |f(t,x,y,z)| &\le K(1 + |x|^p + |y| + \|z\|) \\ |f(t,x,y,z) - f(t,x,y,z')| &\le K\|z - z'\| \\ \big\langle y - y', f(t,x,y,z) - f(t,x,y',z)\big\rangle &\le \mu|y - y'|^2 \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^d,\ (y,z),(y',z') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$. Entonces el coeficiente

$$(s,y,z) \longmapsto f(t, X_s^{t,x}, y, z)$$

y la condición final $g(X_T^{t,x})$ satisfacen las hipótesis (i)-(vi) de la primera sección, pues

$$|f(t, X_s^{t,x}, y, z)| \le K\big(1 + |X_s^{t,x}|^p + |y| + |z|\big)$$

y

$$E\bigg[|g(X_T^{t,x})|^2 + \int_0^T |X_s^{t,x}|^{2p}\, ds\bigg] \le E\bigg[2K\big(1 + |X_T^{t,x}|^{2p}\big) + \int_0^T |X_s^{t,x}|^{2p}\, ds\bigg] < +\infty$$

luego existe una única solución, que notaremos por $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})_{s\in[0,T]}$, de la EDE con condición final

$$Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\, dr - \int_s^T Z_r^{t,x}\, dW_r\ , \quad s \in [0,T]. \tag{4.2}$$

Observación 4.1. Los procesos $(X_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ y $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ son adaptados a la filtración

$$\mathcal{F}_s^t := \sigma(\mathcal{N} \cup \{W_r - W_t : t \le r \le s\}), \quad s \in [t,T].$$

En particular se tiene que $Y_t^{t,x}$ es constante c.s.

Considere el siguiente sistema de EDPs parabólicas semilineales con condición final

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t}(t,x) + L_t u_i(t,x) + f_i(t,x,u(t,x),(D_x u \cdot \sigma)(t,x)) = 0, &\quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ u_i(T,x) = g_i(x), &\quad x \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \tag{4.3}$$

con $1 \le i \le k$, donde

$$\big(L_t v\big)(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \sum_{i=1}^d b_i(t,x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(t,x), \quad v \in \mathcal{C}^{1,2}\big([0,T] \times \mathbb{R}^d\big)$$

es el operador diferencial de segundo orden asociado al generador infinitesimal del proceso de Markov $(s, X_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$, y $D_x u$ es la *diferencial* de u con respecto a x, es decir, la matriz de tamaño $k \times d$ con componentes $(D_x u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ (la $i-$ésima fila de $D_x u$ es el gradiente $\nabla_x u_i$).

Teorema 4.2 (Generalización de la Fórmula de Feynman-Kăc)**.** *Sea* $u \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times \mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$ *solución del sistema (4.3) tal que para algún* $C>0,\ q\geq 1$

$$\|(D_x u\cdot\sigma)(t,x)\| \leq C(1+|x|^q) \tag{4.4}$$

entonces para cada $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, *la solución* $(Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ *de la EDE con condición final (4.2) está dado por el par de procesos* $(u(s,X_s^{t,x}),(D_x u\,\sigma)(s,X_s^{t,x}))_{s\in[t,T]}$. *En particular,* $u(t,x)=Y_t^{t,x}$.

Demostración. Usando la condición de crecimiento polinomial (4.4), el proceso $(D_x u\cdot\sigma)(s,X_s^{t,x}),\ s\in[t,T]$, satisface

$$E\int_t^T \|(D_x u\cdot\sigma)(s,X_s^{t,x})\|^2\,ds<+\infty.$$

Aplicando fórmula de Itô a $X^{t,x}$ con $u_i:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ obtenemos

$$\begin{aligned} d\left[\,u_i(r,X_r^{t,x})\,\right] &= \left[\frac{\partial u_i}{\partial r}(r,X_r^{t,x})+(L_r u_i)(r,X_r^{t,x})\right]dr+(\nabla_x u_i)(r,X_r^{t,x})\sigma(r,X_r^{t,x})\,dW_r\\ &= -f_i(r,X_r^{t,x},u_i(r,X_r^{t,x}),(D_x u\cdot\sigma)(r,X_r^{t,x}))\,dr+(\nabla_x u_i\cdot\sigma)(r,X_r^{t,x})\,dW_r. \end{aligned}$$

Integrando entre s y T, y usando que $u_i(T,X_T^{t,x})=g_i(X_T^{t,x})$, tenemos para todo $s\in[t,T]$ y para $1\leq i\leq k$ que

$$\begin{aligned} u_i(s,X_s^{t,x}) &= g_i(X_T^{t,x})+\int_s^T f_i(r,X_r^{t,x},u_i(r,X_r^{t,x}),(D_x u\cdot\sigma)(r,X_r^{t,x}))\,dr\\ &\qquad -\int_s^T(\nabla_x u_i\cdot\sigma)(r,X_r^{t,x})\,dW_r\\ \text{es decir}\quad u(s,X_s^{t,x}) &= g(X_T^{t,x})+\int_s^T f(r,X_r^{t,x},u_i(r,X_r^{t,x}),(D_x u\cdot\sigma)(r,X_r^{t,x}))\,dr\\ &\qquad -\int_s^T(D_x u\cdot\sigma)(r,X_r^{t,x})\,dW_r \end{aligned}$$

El resultado se sigue de la unicidad de la solución de (4.2). □

Observación 4.3. Si $k=1$ y $f(t,x,y,z)=c(t,x)y+h(t,x)$ donde c y h son continuas y acotadas, la EDE con condición final (4.2) es lineal. De la proposición 2.12 sabemos que (4.2) tiene una solución explícita dada por

$$Y_s^{t,x}=(\Gamma_s^{t,x})^{-1}\,E\Big[\,g(X_T^{t,x})\,\Gamma_T^{t,x}+\int_s^T h(r,X_r^{t,x})\Gamma_r^{t,x}dr\,\Big|\,\mathcal{F}_s\Big]\ ,\ \ t\leq s\leq T$$

con $\Gamma_s^{t,x}=e^{\int_0^s c(r,X_r^{t,x})\,dr}$. Dado que $(\Gamma_t^{t,x})^{-1}$ es $\mathcal{F}_t$-medible,

$$u(t,x)=Y_t^{t,x}=E\bigg[\,g(X_T^{t,x})\,\Gamma_T^{t,x}(\Gamma_t^{t,x})^{-1}+\int_t^T h(r,X_r^{t,x})\Gamma_r^{t,x}(\Gamma_t^{t,x})^{-1}dr\,\bigg|\,\mathcal{F}_t\bigg].$$

Tomando valor esperado obtenemos

$$u(t,x)=E\bigg[\,g(X_T^{t,x})e^{\int_t^T c(r,X_r^{t,x})\,dr}+\int_t^T h(s,X_s^{t,x})e^{\int_t^s c(r,X_r^{t,x})dr}ds\,\bigg]$$

que es precisamente la *Fórmula de Feynman-Kăc.*

El enfoque usado en el teorema 4.2 es, sin embargo, no del todo satisfactorio, pues es inevitable asumir la existencia *a priori* de una solución $u \in \mathcal{C}^{1,2}\big([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^k\big)$ del sistema (4.3). Es por esto que surge la necesidad de introducir la noción de *solución de viscosidad* como una herramienta que nos permitirá conectar (4.1)-(4.2) con (4.3) en la otra dirección, es decir, probar que (4.1)-(4.2) proveen una solución en cierto sentido de (4.3).

La noción de solución de viscosidad es más débil que la noción de solución clásica de EDPs no-lineales, pues se refiere a soluciones que no son lo suficientemente diferenciables para satisfacer la ecuación en el sentido clásico. Fue introducida en 1981 por Crandall y Lions [CR/LI 83] (ver también [C/E/L 84]) con el fin de resolver ecuaciones de Hamilton-Jacobi de primer orden, y luego fue extendida a ecuaciones de segundo orden en [LIONS1 83, LIONS2 83, LIONS 85].

La siguiente es una motivación del concepto de solución de viscosidad para EDPs de primer orden usando precisamente ecuaciones de Hamilton-Jacobi: considere el problema valor inicial dado por la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + H(x, D_x u) = 0, &\quad \text{en } [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = g, &\quad \text{sobre } \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde el *Hamiltoniano* $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y la función inicial $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ son continuas, y la solución $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ debe ser por lo menos de clase $\mathcal{C}^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$. Para cada $\epsilon > 0$ considere el problema de aproximación

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + H(x, D_x u^\epsilon) - \epsilon \Delta u^\epsilon = 0, &\quad \text{en } [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u^\epsilon(0,\cdot) = g, &\quad \text{sobre } \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{4.6}$$

Se puede ver que el término $\epsilon\Delta$ en (4.6) regulariza la ecuación de Hamilton-Jacobi, y así (4.6) resulta ser una EDP parabólica cuasilineal con solución suave, mientras que la ecuación (4.5) es enteramente no-lineal y no necesariamente tiene solución. Por supuesto lo que se espera es que cuando $\epsilon \to 0$ la solución u^ϵ de (4.6) converja en cierto modo a una solución débil de (4.5). Esta técnica es llamada el *método de viscosidad.*

Sin embargo, cuando $\epsilon \to 0$ podríamos perder el control sobre diversas estimaciones de la función u^ϵ y de sus derivadas: estas estimaciones dependen fuertemente del efecto regularizante de $\epsilon\Delta$ y "explotan" cuando $\epsilon \to 0$. No obstante, muchas veces en la práctica se puede garantizar que la familia $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ sea acotada y equicontinua sobre subconjuntos compactos de $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$. En consecuencia, usando el criterio de compacidad de Arzela-Ascoli

$$u^{\epsilon_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} u, \quad \text{uniformemente sobre compactos de } [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \tag{4.7}$$

para alguna subsucesión $\{u^{\epsilon_j}\}_{j=0}^\infty$ y para alguna función límite $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua. Lo más razonable es esperar a que u sea alguna clase de solución del problema de valor inicial (4.5), pero como solo sabemos que u es continua, y no tenemos información que pueda garantizar que tanto $\frac{\partial u}{\partial t}$ como $D_x u$ existan en algún sentido, tal interpretación es difícil.

Tratemos entonces de encontrar alguna caracterización intrínseca de dicha "solución"para motivar la definición de solución de viscosidad: fijemos una función test φ en $\mathcal{C}^1\big([0,\infty) \times \mathbb{R}^d\big)$ y supongamos que

$$u - \varphi \text{ toma un máximo local estricto en algún punto } (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d. \tag{4.8}$$

Esto significa que $(u-\varphi)(t,x) > (u-v)(t',x')$ para todos los puntos (t',x') suficientemente cercanos a (t,x), con $(t',x') \neq (t,x)$.

En virtud de (4.7), podemos afirmar que para cada $\epsilon_j > 0$ suficientemente pequeño, existe un punto $(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j})$ tal que

$$u^{\epsilon_j} - \varphi \text{ toma un máximo local en } (t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j}) \tag{4.9}$$

y que

$$(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j}) \xrightarrow[j\to\infty]{} (t, x). \tag{4.10}$$

En efecto, note que para un $r > 0$ suficientemente pequeño, (4.8) implica que

$$\max_{\partial B}(u - \varphi) < (u - \varphi)(t, x),$$

donde B es la bola cerrada en $\mathbb{R}^{d+1}$ con centro en (t, x) y radio r. En vista de (4.7) se tiene que $u^{\epsilon_j} \to u$ uniformemente en B, luego

$$\max_{\partial B}(u^{\epsilon_j} - \varphi) < (u^{\epsilon_j} - \varphi)(t, x)$$

para un ϵ_j suficientemente pequeño. En consecuencia, $u^\epsilon - \varphi$ alcanza un máximo local en algún punto en el interior de B. Podemos entonces reemplazar r por una sucesión de radios tendiendo a cero y obtener (4.9), (4.10).

Debido a (4.9) se tiene que

$$D_x(u^{\epsilon_j} - \varphi)(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j}) = 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial(u^{\epsilon_j} - \varphi)}{\partial t}(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j}) = 0, \tag{4.12}$$

$$\Delta(u^{\epsilon_j} - \varphi)(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j}) \leq 0, \tag{4.13}$$

luego

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j}) + H(x_{\epsilon_j}, D_x\varphi(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j}))\\
&\qquad= \frac{\partial u^{\epsilon_j}}{\partial t}(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j}) + H(x_{\epsilon_j}, D_x u^{\epsilon_j}(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j})), \quad \text{por (5.11), (5.12)}\\
&\qquad= \epsilon_j \Delta u^{\epsilon_j}(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j}), \quad \text{por (5.6)}\\
&\qquad\leq \epsilon_j \Delta\varphi(t_{\epsilon_j}, x_{\epsilon_j}), \quad \text{por (5.13).}
\end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \to 0$ y usando (4.10) junto con el hecho de que φ es de clase $\mathcal{C}^1$ y H es continua se obtiene

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x) + H(x, D_x\varphi(t, x)) \leq 0. \tag{4.14}$$

Supongamos ahora que en vez de (4.8) tenemos

$$u - \varphi \text{ toma un máximo local en } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \tag{4.15}$$

no necesariamente estricto. Entonces $u - \tilde{\varphi}$ alcanza un máximo local estricto en (t, x), donde $\tilde{\varphi}(t', x') := \varphi(t, x) + \delta(|x' - x|^2 + (t' - t)^2)$, $\delta > 0$. Igual que arriba se concluye

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x) + H(x, D_x\varphi(t, x)) \leq 0,$$

obteniendo de nuevo (4.14), pues φ y $\tilde{\varphi}$ coinciden en (t, x). En consecuencia (4.15) implica (4.14). De manera similar se deduce la desigualdad

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x) + H(x, D_x\varphi(t, x)) \geq 0 \tag{4.16}$$

siempre y cuando

$$u-\varphi \text{ alcanze un mínimo local en } (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^d. \tag{4.17}$$

Una solución de viscosidad para la ecuación (4.5) se define justamente como una función continua u que satisfaga (4.14) y (4.16) siempre y cuando se cumplan (4.15) y (4.17).

Para sistemas de EDPs parabólicas semilineales de segundo orden de la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t}(t,x)+L_t u_i(t,x)+f_i(t,x,u(t,x),(D_x u\cdot\sigma)(t,x))=0, \quad &(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^d,\\ u_i(T,x)=g_i(x), \quad &x\in\mathbb{R}^d\end{aligned} \tag{4.18}$$

la definición de solución de viscosidad es análoga, salvo la siguiente restricción: para cada $1\le i\le k$, la $i-$ésima coordenada de f debe sólo depender de la $i-$ésima fila de z, es decir

$$f_i(t,x,y,z)=f_i(t,x,y,z^{(i)}), \quad 1\le i\le k$$

donde $z^{(i)}$ es la $i-$ésima fila de z. Así entonces la primera línea de (4.18) se escribe

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(t,x)+L_t u_i(t,x)+f_i(t,x,u(t,x),(\nabla_x u_i\cdot\sigma)(t,x))=0.$$

Definición 4.4. Sea $u\in\mathcal{C}\big([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k\big)$ tal que $u(T,\cdot)=g$. Diremos que u es *sub-solución* (resp. *super-solución) de viscosidad* de (4.18) si para cada $1\le i\le k$, para toda función $\varphi\in\mathcal{C}^{1,2}\big([0,T]\times\mathbb{R}^d\big)$ y para todo $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^d$ tal que $u_i-\varphi$ tiene un máximo local (resp. mínimo local) en (t,x) se verifica

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)+L_t\varphi(t,x)+f_i(t,x,u(t,x),(\nabla_x\varphi_i\cdot\sigma)(t,x))\ge 0, \quad (\text{resp. } \le 0).$$

u es llamada *solución de viscosidad* de (4.18) si es a la vez sub-solución y super-solución de viscosidad de (4.18).

Observación 4.5. Se puede ver que toda solución en el sentido clásico es también solución de viscosidad, y que si u es solución de viscosidad y es de clase $\mathcal{C}^{1,2}\big([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k\big)$ entonces satisface (4.3). Para una completa presentación sobre soluciones de viscosidad y sus aplicaciones ver [C/I/L 92, FL/SO 93].

Teorema 4.6. *La función $u(t,x):=Y_t^{t,x}$ es solución de viscosidad de (4.3).*

Demostración. Es bien sabido que el proceso $X^{t,x}$ es continuo con respecto a (t,x), i.e. si $\{(t_n,x_n)\}_{n\ge1}$ es una sucesión en $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ tal que $(t_n,x_n)\to(t,x)$ entonces

$$\sup_{0\le s\le T}\big|X_s^{t,x}-X_s^{t_n,x_n}\big| \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0, \tag{4.19}$$

y por la continuidad de g,

$$g(X_T^{t_n,x_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} g(X_T^{t,x}).$$

También usando (4.19) y la continuidad de $x\mapsto f(s,x,y,z)$ se puede ver que

$$E\int_0^T |f(s,X_s^{t_n,x_n},Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})-f(s,X_s^{t,x},Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})|^2\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En virtud de la proposición 2.9 se tiene que

$$\begin{aligned}|u(t,x)-u(t_n,x_n)|^2 &= |Y_t^{t,x}-Y_{t_n}^{t_n,x_n}|^2 = E\big[|Y_t^{t,x}-Y_{t_n}^{t_n,x_n}|^2\big] \\ &\le E\big[|g(X_T^{t_n,x_n})-g(X_T^{t,x})|^2\big] + E\int_0^T |f(s,X_s^{t_n,x_n},Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})-f(s,X_s^{t,x},Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})|^2\,ds\end{aligned}$$

lo cual tiende a cero cuando $n\to\infty$, obteniendo así la continuidad de u. Veamos ahora que u es sub-solución de viscosidad de (4.3) (la prueba de que u es supersolución es idéntica):

Sea $1\le i\le k$ y sean $\varphi\in\mathcal{C}^{1,2}\big([0,T]\times\mathbb{R}^d\big)$ y $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$ fijo tal que $u_i-\varphi$ posee un máximo local en (t,x). Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $u_i(t,x)=\varphi(t,x)$ (basta con tomar $\varphi-\varphi(t,x)+u_i(t,x)$ en vez de φ, lo cual no afecta las derivadas de φ). Supongamos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)+L_t\varphi(t,x)+f_i(t,x,u(t,x),(\nabla_x\varphi\cdot\sigma)(t,x))<0$$

y veamos que esto conduce a una contradicción. Como $u_i-\varphi$ posee un máximo local en (t,x), que es nulo, por continuidad existe $0<\alpha\le T-t$ tal que si $s\in[t,T]+\alpha$ y $|x'-x|\le\alpha$

$$\begin{aligned}u_i(s,x')&\le\varphi(s,x'),\\ \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial s}+L_s\varphi\Big)(s,x')+f_i(s,x',u(s,x'),(\nabla_x\varphi\cdot\sigma)(s,x'))&<0,\end{aligned}$$

Defina el tiempo de parada

$$\tau:=\text{ínf}\{s\ge t:|X_s^{t,x}-x|\ge\alpha\}\wedge(t+\alpha).$$

Entonces, para $s\in[t,T]+\alpha$ se tiene que

$$\begin{aligned}Y_{s\wedge\tau}^{t,x}&=g(X_T^{t,x})+\int_\tau^T f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\,dr-\int_\tau^T Z_r^{t,x}\,dW_r\\ &\quad+\int_{s\wedge\tau}^{\tau} f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\,dr-\int_{s\wedge\tau}^{\tau} Z_r^{t,x}\,dW_r\\ &=Y_\tau^{t,x}+\int_s^{t+\alpha} f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\mathbf{1}_{[0,\tau]}(r)\,dr-\int_s^{t+\alpha} Z_r^{t,x}\mathbf{1}_{[0,\tau]}(r)\,dW_r.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Sea $r\in[t,T]$ fijo y notemos por $\big(Y_s^{r,X_r^{t,x}},Z_s^{r,X_r^{t,x}}\big)_{r\le s\le T}$ la solución de la EDE con condición final con coeficiente

$$(u,y,z)\longmapsto f\big(u,X_u^{r,X_r^{t,x}},y,z\big),\qquad (u,y,z)\in[r,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$$

y condición final $g\big(X_T^{r,X_r^{t,x}}\big)$. Dado que $(X_s^{t,x})_{s\ge r}$ y $\big(X_s^{r,X_r^{t,x}}\big)_{s\ge r}$ satisfacen la misma EDE

$$X_s=X_r^{t,x}+\int_r^s b(u,X_u)\,dr+\int_r^s\sigma(u,X_u)\,dB_u,\quad s\ge r$$

resulta por unicidad que $X_s^{t,x}=X_s^{r,X_r^{t,x}}$ c.s. para $s\ge r$. Entonces

$$f\big(u,X_u^{r,X_r^{t,x}},y,z\big)=f(u,X_u^{t,x},y,z),\qquad\text{para }\ r\le u\le T$$

y $g\big(X_T^{r,X_r^{t,x}}\big) = g\big(X_T^{t,x}\big)$. Por unicidad en las soluciones de EDEs con condición final se tiene que $Y_s^{r,X_r^{t,x}} = Y_s^{t,x}$ para $r \leq s \leq T$. En particular para $s = r$,

$$u(r, X_r^{t,x}) = Y_r^{r,X_r^{t,x}} = Y_r^{t,x}.$$

Usando esto en (4.20) junto con la restricción sobre f se obtiene entonces que el par de procesos

$$\overline{Y}_s := (Y_{s\wedge\tau}^{t,x})^i, \qquad \overline{Z}_s := (Z_s^{t,x})^{(i)}\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s), \qquad s \in [t,T] + \alpha,$$

satisfacen la EDE con condición final

$$\overline{Y}_s = u_i(\tau, X_\tau^{t,x}) + \int_s^{t+\alpha} f_i(r, X_r^{t,x}, u(r, X_r^{t,x}), \overline{Z}_r)\mathbf{1}_{[0,\tau]}(r)\,dr - \int_s^{t+\alpha} \overline{Z}_r\,dW_r, \quad t \leq s \leq t+\alpha.$$

De otro lado, aplicando fórmula de Itô a $X^{t,x}$ con φ tenemos

$$d\big[\varphi(r, X_r^{t,x})\big] = \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + L_r\varphi\Big)(r, X_r^{t,x})\,dr + (\nabla_x\varphi\cdot\sigma)(r, X_r^{t,x})\,dW_r,$$

integrando entre $s\wedge\tau$ y $(t+\alpha)\wedge\tau = \tau$, con $t \leq s \leq t+\alpha$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\varphi(\tau, X_\tau^{t,x}) - \varphi(s\wedge\tau, X_{s\wedge\tau}^{t,x}) \\
&\quad = \int_{s\wedge\tau}^{\tau} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + L_r\varphi\Big)(r, X_r^{t,x})\,dr + \int_{s\wedge\tau}^{\tau} (\nabla_x\varphi\cdot\sigma)(r, X_r^{t,x})\,dW_r, \\
&\quad = \int_s^{t+\alpha} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + L_r\varphi\Big)(r, X_r^{t,x})\mathbf{1}_{[0,\tau]}(r)\,dr + \int_s^{t+\alpha} (\nabla_x\varphi\cdot\sigma)(r, X_r^{t,x})\mathbf{1}_{[0,\tau]}(r)\,dW_r.
\end{aligned}$$

Es decir, el par de procesos

$$\widehat{Y}_s := \varphi(s\wedge\tau, X_{s\wedge\tau}^{t,x}), \qquad \widehat{Z}_s := (\nabla_x\varphi\cdot\sigma)(s, X_s^{t,x})\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s), \qquad s \in [t,T] + \alpha$$

verifican la EDE con condición final

$$\widehat{Y}_s = \varphi(\tau, X_\tau^{t,x}) - \int_s^{t+\alpha} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + L_r\varphi\Big)(r, X_r^{t,x})\mathbf{1}_{[0,\tau]}(r)\,dr - \int_s^{t+\alpha} \widehat{Z}_r\,dW_r, \quad t \leq s \leq t+\alpha.$$

De la definición de τ y la elección de α, se tiene que las condiciones finales $u_i(\tau, X_\tau^{t,x})$ y $\varphi(\tau, X_\tau^{t,x})$ satisfacen

$$u_i(\tau, X_\tau^{t,x}) \leq \varphi(\tau, X_\tau^{t,x}),$$

y además

$$\begin{aligned}
f_i(s, X_s^{t,x}, u(s, X_s^{t,x}), \widehat{Z}_s)\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) &= f_i(s, X_s^{t,x}, u(s, X_s^{t,x}), (\nabla_x\varphi\cdot\sigma)(s, X_s^{t,x})\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s))\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) \\
&< -\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial s} + L_s\varphi\Big)(s, X_s^{t,x}),
\end{aligned}$$

para $s \in [t,T] + \alpha$. Con ayuda del teorema de comparación 2.13 (ver observación 2.14) se deduce que

$$u_i(t,x) = (Y_t^{t,x})^i = \overline{Y}_t < \widehat{Y}_t = \varphi(t,x),$$

lo cual contradice nuestras hipótesis. $\square$

Podemos establecer un resultado similar para un sistema de EDPs elípticas semilineales sobre un dominio en $\mathbb{R}^d$, pero usando esta vez EDEs con condición final y tiempo terminal aleatorio: sea G un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$ y sea $(X_t^x)_{t\geq 0}$ la solución de la EDE

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)\,dW_s, \quad t \geq 0$$

con condición inicial $X_0^x = x$, donde $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ no dependen de t y satisfacen la condición de *Lipschitz* global con constante de *Lipschitz* $K > 0$. Suponga además que

$$g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad \text{y} \quad f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

son funciones continuas y que existe $\mu \in \mathbb{R}$ y $p \geq 1$ tales que

$$\begin{aligned} |f(x,y,z)| &\leq K(1 + |x|^p + |y| + \|z\|) \\ |f(x,y,z) - f(x,y,z')| &\leq K\|z - z'\| \\ \big\langle y - y', f(x,y,z) - f(x,y',z)\big\rangle &\leq \mu|y - y'|^2 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d,\ (y,z),(y',z') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$. Para cada $x \in \overline{G}$, definimos el tiempo de parada

$$\tau_x = \text{ínf}\,\{t \geq 0 : X_t^x \notin G\} \quad \text{(tiempo de salida de } G\text{)},$$

y asumiremos que $\mathbf{P}(\tau_x < \infty) = 1$ y que existe $\rho > 2\mu + K^2$ tal que $E[e^{\rho\tau_x}] < +\infty,\ \forall x \in \overline{G}$. Bajo estas hipótesis, el coeficiente

$$(s,y,z) \longmapsto f(X_s^x, y, z)$$

y la condición final $g(X_{\tau_x}^x)$ satisfacen las condiciones (i)-(vi) de la anterior sección, pues

$$|f(X_s^x, y, z)| \leq K\big(1 + |X_s^x|^p + |y| + |z|\big)$$

y

$$E\bigg[\,|g(X_{\tau_x}^x)|^2 + \int_0^{\tau_x} e^{\rho s}|X_s^x|^{2p}\,ds\bigg] < +\infty,$$

luego existe una única solución, que notaremos por $(Y_t^x, Z_t^x)_{t\geq 0}$, de la EDE con condición final

$$Y_t^x = g(X_{\tau_x}^x) + \int_{t\wedge\tau_x}^{\tau_x} f(X_s^x, Y_s^x, Z_s^x)\,ds - \int_{t\wedge\tau_x}^{\tau_x} Z_s^x\,dW_s\,, \quad t \geq 0. \tag{4.21}$$

Dado que Y_0^x es $\mathcal{F}_0-$medible, es constante c.s.

Considere el siguiente sistema de EDPs elípticas semilineales

$$\begin{aligned} Lu_i(x) + f_i(x, u(x), (D_x u \cdot \sigma)(x)) &= 0, \quad x \in G, \\ u_i(x) &= g_i(x), \quad x \in \partial G, \end{aligned} \tag{4.22}$$

con $1 \leq i \leq k$, donde

$$\big(Lv\big)(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^d b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x), \quad v \in \mathcal{C}^2(G)$$

es el generador infinitesimal del proceso de Markov $(X_t^x)_{t\geq 0}$. Primero damos un resultado análogo a la generalización dada en el teorema 4.2 para el problema de Dirichlet y luego establecemos el recíproco usando solución de viscosidad:

Teorema 4.7. *Sea $u \in \mathcal{C}^2(G; \mathbb{R}^k)$ solución del sistema (4.22) tal que para algún $C > 0, q \geq 1$*

$$\|(D_x u \cdot \sigma)(x)\| \leq C(1 + |x|^q) \tag{4.23}$$

entonces, para cada $x \in \overline{G}$, la solución $(Y_t^x, Z_t^x)_{t\geq 0}$ de la EDE con condición final (4.21) está dado por el par de procesos $(u(X_{t\wedge\tau_x}^x), (D_x u \cdot \sigma)(X_t^x))_{t\geq 0}$. En particular, $u(x) = Y_0^x$.

Demostración. La prueba es exactamente la misma que en el teorema 4.2: aplicar Fórmula de Itô al proceso X^x con cada $u_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, integrar entre $t \wedge \tau_x$ y τ_x, usar la condición de frontera $u\big|_{\partial G} = g$ y por último aplicar unicidad de soluciones de EDEs con condición final y tiempo terminal aleatorio. $\square$

De nuevo, para que la noción de solución de viscosidad de (4.22) tenga sentido, se hace la siguiente restricción: para cada $1 \leq i \leq k$, la $i-$ésima coordenada de f depende solo de la $i-$ésima fila de z, es decir

$$f_i(x, y, z) = f_i(x, y, z^{(i)}),$$

donde $z^{(i)}$ es la $i-$ésima fila de z. Así entonces la primera línea de (4.22) se escribe

$$Lu_i(x) + f_i(x, u(x), (\nabla_x u_i \cdot \sigma)(x)) = 0, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Definición 4.8. (a) Una función $u \in \mathcal{C}(\overline{G}; \mathbb{R}^k)$ es llamada *sub-solución de viscosidad* de (4.22) si para cada $1 \leq i \leq k$, para todo $\varphi \in \mathcal{C}^2(G)$ y para todo $x \in \overline{G}$ tal que $u_i - \varphi$ toma un máximo local en x, se verifica

$$\begin{aligned} -(L\varphi)(x) - f_i(x, u(x), (\nabla_x \varphi)(x)) &\leq 0, \quad \text{si } x \in G, \\ \text{mín}\{-(L\varphi)(x) - f_i(x, u(x), (\nabla_x \varphi)(x)), u_i(x) - g_i(x)\} &\leq 0, \quad \text{si } x \in \partial G \end{aligned}$$

(b) Una función $u \in \mathcal{C}(\overline{G}; \mathbb{R}^k)$ es llamada *super-solución de viscosidad* de (4.22) si para cada $1 \leq i \leq k$, para todo $\varphi \in \mathcal{C}^2(G)$ y para todo $x \in \overline{G}$ tal que $u_i - \varphi$ toma un mínimo local en x, se verifica

$$\begin{aligned} -(L\varphi)(x) - f_i(x, u(x), (\nabla_x \varphi)(x)) &\geq 0, \quad \text{si } x \in G, \\ \text{máx}\{-(L\varphi)(x) - f_i(x, u(x), (\nabla_x \varphi)(x)), u_i(x) - g_i(x)\} &\geq 0, \quad \text{si } x \in \partial G \end{aligned}$$

u es llamada *solución de viscosidad* de (4.22) si es a la vez sub-solución y super-solución de viscosidad de (4.22).

Teorema 4.9 (Darling, Pardoux (1997))**.** *La función $u(x) := Y_0^x$ es solución de viscosidad de (4.22).*

Demostración. Para ver que u así definida es continua se necesita que el conjunto

$$\Gamma := \{x \in \partial G : \mathbf{P}(\tau_x > 0) = 0\}$$

sea cerrado (la demostración se puede encontrar en [DA/PA 97]). Veamos que u es sub-solución de viscosidad (la prueba de que es supersolución es idéntica): sea $1 \leq i \leq k$ y sean $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ y $x \in \overline{G}$ máximo local de $u_i - \varphi$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $u_i(x) = \varphi(x)$ (basta con tomar $\varphi - \varphi(x) + u_i(x)$ en vez de φ, lo cual no afecta las derivadas de φ). Si $x \in \Gamma$, entonces $\tau_x = 0$ c.s., y $u(x) = g(x)$. Consideremos ahora el caso en que $x \notin \Gamma$. Entonces $\tau_x > 0$ c.s. Supongamos que

$$(L\varphi)(x) + f_i(x, u(x), (\nabla_x \varphi \cdot \sigma)(x)) < 0$$

y veamos que esto conduce a una contradicción. Como $u_i - \varphi$ posee un máximo local en x, que es nulo, por continuidad existe $\alpha > 0$ tal que si $|x' - x| \leq \alpha$,

$$\begin{aligned} u_i(x') &\leq \varphi(x'), \\ (L\varphi)(x') + f_i(x', u(x'), (\nabla_x \varphi \cdot \sigma)(x')) &< 0, \end{aligned}$$

Defina el tiempo de parada

$$\bar{\tau} := \operatorname{ínf}\{t \geq 0 : |X_t^x - x| \geq \alpha\} \wedge \tau_x \wedge T,$$

para un $T > 0$ fijo. Entonces, para $t \in [0, T]$ se tiene que

$$\begin{aligned} Y_{t\wedge\bar{\tau}}^x &= g(X_{\tau_x}^x) + \int_{\bar{\tau}}^{\tau_x} f(X_s^x, Y_s^x, Z_s^x)\, ds - \int_{\bar{\tau}}^{\tau_x} Z_s^x\, dW_s \\ &\quad + \int_{t\wedge\bar{\tau}}^{\bar{\tau}} f(X_s^x, Y_s^x, Z_s^x)\, ds - \int_{t\wedge\bar{\tau}}^{\bar{\tau}} Z_s^x\, dW_s \\ &= Y_{\bar{\tau}}^x + \int_t^T f(X_s^x, Y_s^x, Z_s^x)\mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(s)\, ds - \int_t^T Z_s^x \mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(s)\, dW_s. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Igual que en la demostración del teorema 4.6 se puede ver que $u(X_t^x) = Y_t^x$ para todo $t \geq 0$. Usando esto en (4.24) junto con la restricción sobre f se obtiene que el par de procesos

$$\overline{Y}_t := (Y_{t\wedge\bar{\tau}}^x)^i, \quad \overline{Z}_t := (Z_t^x)^{(i)}\mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(t), \quad t \in [0, T],$$

satisfacen la EDE con condición final

$$\overline{Y}_t = u_i(X_{\bar{\tau}}^x) + \int_t^T f_i(X_s^x, u(X_s^x), \overline{Z}_s)\mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(s)\, ds - \int_t^T \overline{Z}_s\, dW_s, \quad t \in [0, T].$$

De otro lado, aplicando fórmula de Itô a X^x con φ e integrando entre $t \wedge \bar{\tau}$ y $T \wedge \bar{\tau} = \bar{\tau}$, con $t \in [0, T]$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\varphi(X_{\bar{\tau}}^x) - \varphi(X_{t\wedge\bar{\tau}}^x) \\ &\quad = \int_{t\wedge\bar{\tau}}^{\bar{\tau}} (L\varphi)(X_s^x)\, ds + \int_{t\wedge\bar{\tau}}^{\bar{\tau}} (\nabla_x \varphi \cdot \sigma)(X_s^x)\, dW_s, \\ &\quad = \int_t^T (L\varphi)(X_s^x)\mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(s)\, ds + \int_t^T (\nabla_x \varphi \cdot \sigma)(X_s^x)\mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(s)\, dW_s. \end{aligned}$$

Es decir, el par de procesos

$$\widehat{Y}_t := \varphi(X_{t\wedge\bar{\tau}}^x), \quad \widehat{Z}_t := (\nabla_x \varphi \cdot \sigma)(X_t^x)\mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(t), \quad t \in [0, T]$$

verifican la EDE con condición final

$$\widehat{Y}_t = \varphi(X_{\bar{\tau}}^x) - \int_t^T (L\varphi)(X_s^x)\mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(s)\, ds - \int_t^T \widehat{Z}_s\, dW_s, \quad t \in [0, T].$$

De la definición de $\bar{\tau}$ y la elección de α, se tiene que las condiciones finales $u_i(X_{\bar{\tau}}^x)$ y $\varphi(X_{\bar{\tau}}^x)$ satisfacen

$$u_i(X_{\bar{\tau}}^x) \leq \varphi(X_{\bar{\tau}}^x),$$

y además

$$f_i(X_t^x, u(X_t^x), \widehat{Z}_t)\mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(t) = f_i(X_t^x, u(X_t^x), (\nabla_x\varphi\cdot\sigma)(X_t^x)\mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(t))\mathbf{1}_{[0,\bar{\tau}]}(t)$$
$$< -(L\varphi)(X_t^x),$$

para $t \in [0, T]$. Con ayuda del teorema de comparación 2.13 (ver observación 2.14) se deduce que

$$u_i(x) = (Y_0^x)^i = \overline{Y}_0 < \widehat{Y}_0 = \varphi(x),$$

lo cual contradice nuestras hipótesis. □

Referencias

[BL/MU 03] L. BLANCO, M. MUÑOZ. *Análisis Estocástico.* (2003) Departamentos de Estadística y Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá. *Versión preliminar.*

[BRIA 95] P. BRIAND. Une remarque sur la formule de Feynman-Kac généralisée. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **321**, Série I, vol. 10 (1995) 1315-1318.

[BRIA 98] P. BRIAND. BSDE's and viscosity solutions of semilinear PDE's. *Stochastics and Stochastics Reports* 64 (1998) 1-32.

[BR/HU 98] P. BRIAND, Y. HU. Stability of BSDE's with random terminal time and homogenization of semilinear PDE's. *Journal of Funtional Analysis* **115** (1998) 445-494.

[BR/CA 00] P. BRIAND, R. CARMONA. BSDEs with polynomial growth generators. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 13, No. 3 (2000) 207-238.

[C/E/L 84] M.G. CRANDALL, L.C. EVANS, ISHII, P.L. LIONS. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Transactions of the American Mathematical Society* 282 (1984) 487-502.

[C/I/L 92] M.G. CRANDALL, H. ISHII, P.L. LIONS. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol 27, No.1 (1992) 1-67.

[CR/LI 83] M.G. CRANDALL, P.L. LIONS. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Transactions of the American Mathematical Society* 277 (1983) 1-42.

[DA/PA 97] R.W.R. DARLING, E. PARDOUX. Backwards SDE with random terminal time and applications to semilinear elliptic PDE. *The Annals of Probability*, vol 25, No.3 (1997) 1135-1159.

[DURR 96] R. DURRET. *Stochastic Calculus: A Practical Introduction.* Probability and Stochastics Series (1996) CRC Press.

[EK/MA 97] N. EL KAROUI, L. MAZLIAK (Editores). *Backward stochastic differential equations.* Pitman Research Notes in Mathematics Series 364 (1997) Longman, Harlow.

[EVANS 98] C. EVANS. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathema- tics, vol 19 (1998) American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.

[FL/SO 93] W.H. FLEMING, H.M. SONER. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions.* Applications of Mathematics (1993) Springer-Verlag, New-York.

[HO/MA 00] F. DEN HOLLANDER, H. MAASEN. *Stochastic Analysis.* Mathematical Institute, University of Nijmegen (2000) The Netherlands.

[KAC 49] M. KĂC. On distributions on certain Wiener functionals. *Transactions of the American Mathematical Society* vol 65 (1949) 1-13.

[KAC 51] M. KĂC. On some connections between probability theory and differential and integral equations. *Proc.* 2nd *Berkeley Simp. on Math. Stat. & Probability.* University of California Press (1951) 189-215.

[KALL 97] O. KALLENBERG. *Foundations of Modern Probability.* Probability and its Applications (1991) Springer-Verlag, New York.

[KA/SH 91] I. KARATZAS, S.E. SHREVE. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Gradaute Texts in Mathematics 113. Segunda edición (1991) Springer-Verlag, New York.

[KA/TA 81] S. KARLIN, H.M. TAYLOR. *A Second Course in Stochastic Processes* (1981) Academic Press, New York.

[KOBY 00] M. KOBYLANSKI. Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth. *The Annals of Probability,* vol 28, No. 2 (2000) 558-602.

[KUNI 90] H. KUNITA. *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations* (1990) Cambridge University Press.

[LE/SM 97] J.P. LEPELTIER, J. SAN MARTÍN. Backward stochastic differential equations with continuos coefficient. *Statistics & Probability Letters* 32 (1997) 425-430.

[LE/SM 02] J.P. LEPELTIER, J. SAN MARTÍN. On the existence or non-existence of solutions for certain backward stochastic differential equations. *Bernoulli,* vol 8, No. 1 (2002) 123-137.

[LIONS1 83] P.L. LIONS. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Part I: The dynamic programming principle and applications. *Comm. P.D.E.* 8 (1983) 1101-1174.

[LIONS2 83] P.L. LIONS. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Part II: Viscosity solutions and uniqueness. *Comm. P.D.E.* 8 (1983) 1229-1276.

[LIONS 85] P.L. LIONS. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Part III. *Nonlinear PDE and Appl., Séminaire du Collège de France,* vol V (1985) Pitman.

[MA/YO 99] J. MA, J. YONG. *Forward-Backward stochastic differential equations and their applications.* Lecture Notes in Mathematics, 1702 (1999) Springer-Verlag, New York.

[NUAL 95] D. NUALART. Noncausal Stochastic Integrals and Calculus, *Stochastic Analysis and Related Topics.* Lecture Notes in Mathematics, 1316 Springer Verlag, Berlin (1986) 80-129.

[ØKSE 98] B. ØKSENDAL. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* Universitext. Quinta edición (1998) Springer-Verlag.

[P/W/Z 33] R.E.A.C. PARLEY, N. WIENER, A. ZYGMUND. Note on random functions. *Math. Z.* 37 (1933) 647-668.

[PARD1 98] E. PARDOUX. Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order. *Stochastic analysis and related topics VI (The Geilo Workshop, 1996)*, Editado por: L. Decreusefond, J. Gjerde, B. Øksendal; A.S. Üstünel. Progr. Probab., vol 42, Birkhäuser Boston, Boston MA (1998) 79-127.

[PARD2 98] E. PARDOUX. Quelques méthodes probabilistes pour les équations aux dérivées partielles. *ESAIM Proceedings Actes du 30ème Congrès d'Analyse Numérique: CANum'98s*, vol 6 (1998) 91-109.

[PARD1 99] E. PARDOUX. Homogenization of Linear and Semilinear Second Order Parabolic PDEs with Periodic Coefficients: A Probabibilistic Approach. *Journal of Functional Analysis* 167 (1999) 498-520.

[PARD2 99] E. PARDOUX. BSDE's weak convergence and homogenization of semi linear PDE's. *Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control (Montreal, QC, 1998)*. Editado por: F.H. Clarke, R.J. Stern; Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999) 503-549.

[PA/PE 90] E. PARDOUX, S. PENG. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems & Control Letters* 14, No. 1 (1990) 55-61.

[PENG 97] S. PENG. Backward SDE and related g-expectation. (Backward stochastic differential equations, editado por: N. El Karoui, L. Mazliak). *Pitman Research Notes in Mathematics Series* 364 (1997) Longman, Harlow.

[PROT 90] P. PROTTER. *Stochastic Integration and Differential Equations.* Applications of Mathematics 21 (1990) Springer-Verlag, Berlin.

[TUDOR 97] C. TUDOR. *Procesos Estocásticos*. Aportaciones Matemáticas (1997). Sociedad Matemática Mexicana.

[WILL 91] D. WILLIAMS. *Probability with Martingales* (1991). Cambridge Mathema-tical Textbooks.