

## El problema de Alhacén

### 3.11 Lógica del descubrimiento

La solución completa del problema de Alhacén exige, pues, hallar un punto  $S$  que determina que la proporción  $\frac{SP}{PK} = \frac{BG}{GD}$  efectivamente se satisface (Lema 6). Este problema, a su vez, nos conduce a otra dificultad que exige (Lema 2) trazar una recta desde un punto en una circunferencia que corta a un diámetro de la misma en un punto tal que la distancia desde dicho corte hasta el segundo corte de esta recta con la circunferencia coincida con la distancia de un segmento dado previamente. A su turno, esta solución exige la necesaria intervención de una hipérbola, de donde hemos de sospechar que el problema de Alhacén no puede resolverse con el uso exclusivo de regla y compás.

¿Cómo pudo Alhacén concebir un procedimiento tan complejo para dar con la solución del problema? Esta es una pregunta que quizá nunca logremos descifrar. De un lado, los pasos preliminares recuerdan los métodos empleados por los griegos para hallar una media proporcional entre dos segmentos dados: (i) disponerlos uno a continuación del otro sobre una recta; (ii) hallar el punto medio de la composición; (iii) trazar una perpendicular por el punto de reunión de los dos segmentos; y, por último (iv), encontrar un punto sobre dicha perpendicular que satisface condiciones adecuadas para la solución (en este caso, el punto debe ser la intersección con la circunferencia que se centra en el punto medio y pasa por los dos extremos libres de los segmentos reunidos). La familiaridad con los métodos griegos pudo guiar los pasos iniciales. De otro lado, la solución del caso simple, aquel en el que objeto y observador equidistan del espejo, pudo ofrecer las pistas siguientes.<sup>1</sup>

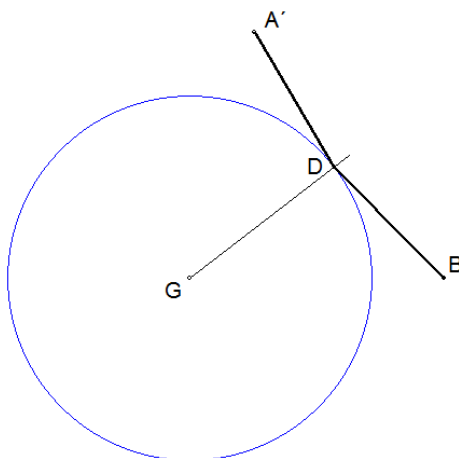
Describiremos a continuación un posible procedimiento heurístico que bien podría conducir a dar con la solución propuesta por Alhacén. Primero, daremos las claves para resolver el caso trivial ajustándonos a un procedimiento similar al de hallar dos medias proporcionales. Cuando encontremos la solución advertiremos que esta es también solución para una familia de casos. A continuación deformaremos este caso (cuya solución ya conocemos) para situaciones en las que si bien observador y objeto no equidistan del centro, la solución coincide con la del caso inicial.

---

<sup>1</sup> Mark Smith propone una estrategia que atiende también a esta segunda recomendación. Sin embargo, Smith no se concentra en la construcción auxiliar inicial, sino en los elementos agregados para ofrecer la prueba final. Esto hace que las dos propuestas subrayen elementos diferentes aunque pudiesen estar emparentados. Cfr. A. M. Smith (2006), xlix-li. Una síntesis del análisis también está presente en A. M. Smith (2008), pp. 146-151.

(a) Caso trivial

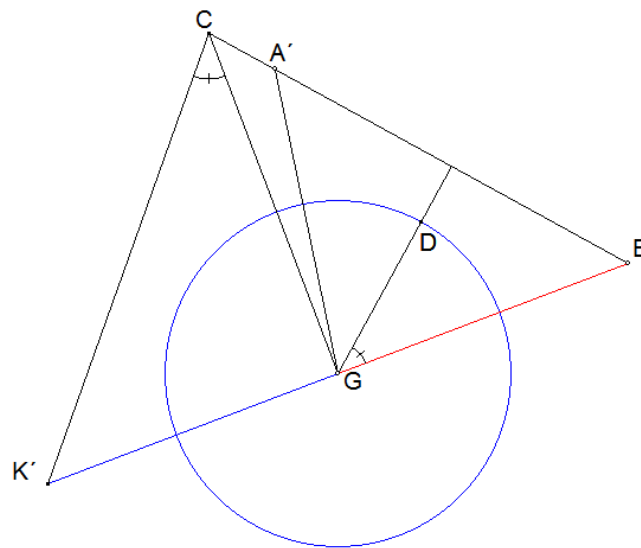
Dados  $B$  y  $A'$  dos puntos libres que equidistan de  $G$ , el centro de una circunferencia de radio conocido. Se pide hallar el punto  $D$  sobre la circunferencia tal que los ángulos  $BDG$  y  $A'DG$  sean congruentes.



- (i) Trazar los segmentos  $GB$  y  $GA'$ . Trazar también el segmento  $GK'$  sobre la misma recta y en el sentido contrario de  $B$ , de forma que  $GK' \cong GA'$ .
- (ii) Construir la bisectriz del ángulo  $A'GB$  y hallar el punto de corte  $D$  con la circunferencia (este es el punto que buscamos).
- (iii) Trazar una perpendicular por el punto de reunión de los dos segmentos, es decir  $G$ .
- (iv) Trazar la recta  $BA'$  y hallar el corte  $C'$  con la perpendicular. Trazar el segmento  $C'K'$ . Dado que los triángulos  $BA'G$  y  $BK'C'$  son isósceles y semejantes los ángulos  $GC'K'$  y  $BGD$  son congruentes.

Así las cosas, cuando contamos con  $B$  y  $A'$ , equidistantes de  $G$ , disponemos  $K'G$ , congruente con  $GA$ , a continuación de  $BG$  sobre la misma recta; trazamos la recta  $BA'$  y obtenemos el corte  $C'$  con la recta perpendicular a  $BG$  trazada en  $G$ . Trazamos  $C'K'$  y construimos el ángulo  $BGD$  ( $D$  sobre la circunferencia) congruente con  $GC'K'$ .  $D$  es el punto buscado.

**Consultar archivo: *Lógica del descubrimiento***  
**Requerimientos: Cabri II-plus**



(b) Caso general

Ahora podemos reconocer que  $D$  es también la solución para una familia completa de casos; a saber: todos los casos con  $B$  y cualquier punto que se encuentre en la recta  $DA'$ . Sea  $A$  un punto sobre la semirrecta  $DA'$ , al cambiar de punto sobre dicha semirrecta es fácil notar que el triángulo  $GDB$  se mantiene invariante mientras la bisectriz al ángulo  $AGB$  varía su posición.

(v) Construir la bisectriz  $AGU$  al ángulo  $AGB$ .

(vi) Encontrar  $K$  sobre  $BG$  de tal manera que  $GK \cong GA$  y los dos segmentos queden uno a continuación del otro. Hallar  $C''$  sobre la perpendicular a  $BG$  a partir de  $G$  de tal manera que el ángulo  $GC''K$  sea congruente con la bisectriz  $AGU$ . Así replicamos los pasos iniciales de la solución del caso trivial. Es claro que este ángulo, a diferencia del caso anterior ya no ofrece información que conduzca directamente a la solución (que de hecho ya conocemos).

- (i) La solución, si insistimos en que sea un ángulo con uno de sus lados sobre  $C''K$ , debe buscarse ahora en una variación de la perpendicular. Hallar el vértice  $P$  sobre  $C''K$  de tal manera que el ángulo  $C''PG$  sea congruente con la solución que ya conocemos, a saber  $BGD$  (o  $K'C'G$ ).
- (ii) Dado que el triángulo  $BDG$  es invariante cuando desplazamos  $A$  sobre  $DA'$ , construimos el ángulo  $SPK$  congruente con  $BGD$  para así forzar la semejanza de los triángulos  $BGD$  y  $SPK$ .

- Ahora bien, resulta que  $O$  es precisamente el punto medio de  $KB$ . Esto se puede demostrar usando las mismas construcciones auxiliares empleadas en la demostración general de la prueba de Alhacén. Así entonces, si tenemos inicialmente los puntos  $B$  y  $A$  (sin restricción alguna) y nos piden hallar el punto  $A'$  o el punto  $D$ , podremos seguir el procedimiento inverso. Es este el procedimiento que coincide con la sugerencia de Alhacén.

