

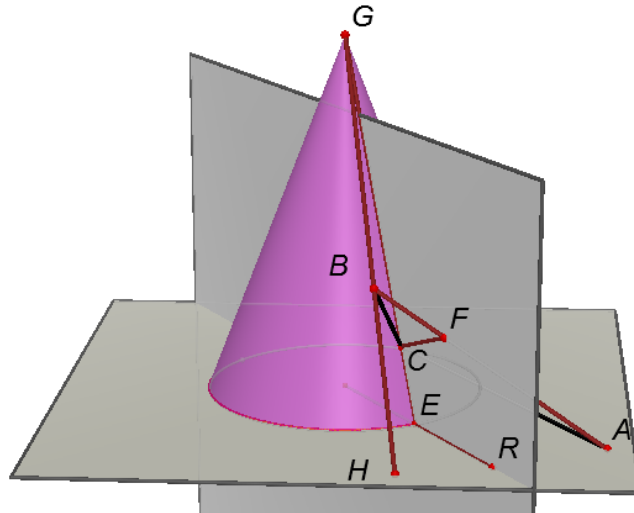
(ii) Esquema general de la construcción y demostración

Para llevar a cabo el análisis de los espejos cónicos, Alhacén distingue seis casos que dependen de las posiciones del objeto y el observador con respecto a un plano paralelo a la base y levantado en el vértice del cono. (1) Objeto y observador están ambos debajo del plano, (2) ambos están en el plano, (3) ambos están encima del plano, (4) uno de ellos está en el plano y el otro debajo del plano, (5) uno de ellos está en el plano y el otro encima del plano, (6) uno de ellos está encima y el otro debajo del plano.

Espejos cónicos: caso 1

Imaginemos que los puntos A (observador) y B (objeto) se encuentran por debajo del plano superior. Puede ocurrir que ambos estén en un plano que contiene el eje del cono. Así, la intersección de dicho plano con la superficie del cono es una recta y la ubicación del punto de reflexión se hace idéntica al caso de los espejos planos. De otra parte, si A y B están en un plano paralelo a la base y diferente del plano superior la intersección del plano y el cono resulta ser una circunferencia y, en ese orden de ideas, la situación se hace análoga a la ubicación del punto de reflexión en un espejo esférico. Si los dos puntos, en el último caso, equidistan del eje la solución es simple, el caso contrario exige el protocolo complejo presentado para dichos espejos. Si A y B difieren en posición de los dos casos anteriores la solución exige un procedimiento semejante al descrito para la condición análoga en los espejos cilíndricos. A saber, se obtiene una imagen de B en el plano que contiene a A y es paralelo a la base del cono. Esta imagen se obtiene proyectando a B desde el punto G . Después se resuelve el problema de Alhacén para el caso de los puntos A y H (imagen de B). Sea E dicha solución. Después se construye el plano que contiene a E y a G (vértice del cono) y es ortogonal al plano tangente que contiene a EG . Luego se traza la recta AB y se halla el corte con el plano anterior. Sea F dicho corte. Se proyecta F ortogonalmente sobre GE y el punto de base de dicha ortogonal, que en la figura se denomina C , es el punto que satisface las condiciones buscadas (Alhacén (2006), V, 2.271 – 2.278).

Consultar archivo: *Espejos cónicos caso 1*
Requerimientos: Cabri III D

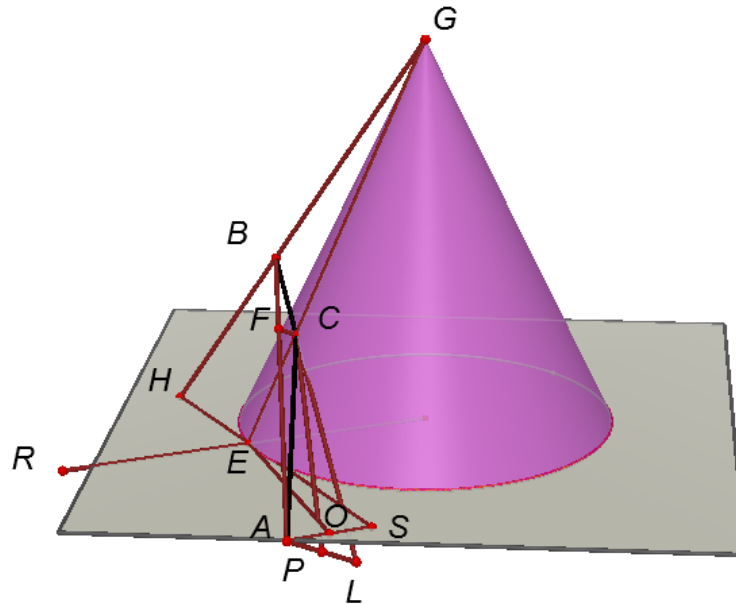


Espejos cónicos: caso 1

Para efectos de la justificación se agregan los siguientes elementos. S es la imagen de A como si fuese contemplada desde H . EO es la tangente a la circunferencia en E . AL es la paralela a FC en el plano ABC . L es la intersección de BC con AL . Este plano es paralelo al plano formado por el eje del cono y GE .

- | | |
|---|--|
| (1) $\angle ESA \cong \angle REA$, luego $\triangle EAS$ es isósceles | (a) $\angle HER \cong \angle REA$ por construcción ajustada a la segunda ley de la reflexión |
| | (b) $\angle HER \cong \angle ESA$ alternos entre paralelas |
| | (c) $\angle REA \cong \angle ESA$ alternos entre paralelas |
| (2) $AO \cong OS$ | EO es la altura sobre la base de un triángulo isósceles |
| (3) $AP \cong PL$ | (a) $\triangle AOP \approx \triangle ASL$ porque OP es paralelo a CE que es paralelo a SL . |
| | (b) $AS = 2 AO$ por (2) |
| (4) $\triangle CAL$ es isósceles, por tanto $CL \cong CA$ y $\angle CLA \cong \angle CAL$ | (a) CP es perpendicular a AL , porque CP es perpendicular a CF y este paralelo a AL (por construcción) |
| | (b) (3) |
| (5) $\angle BCF \cong \angle FCA$ | (a) $\angle CAL \cong \angle FCA$ alternos entre paralelas |

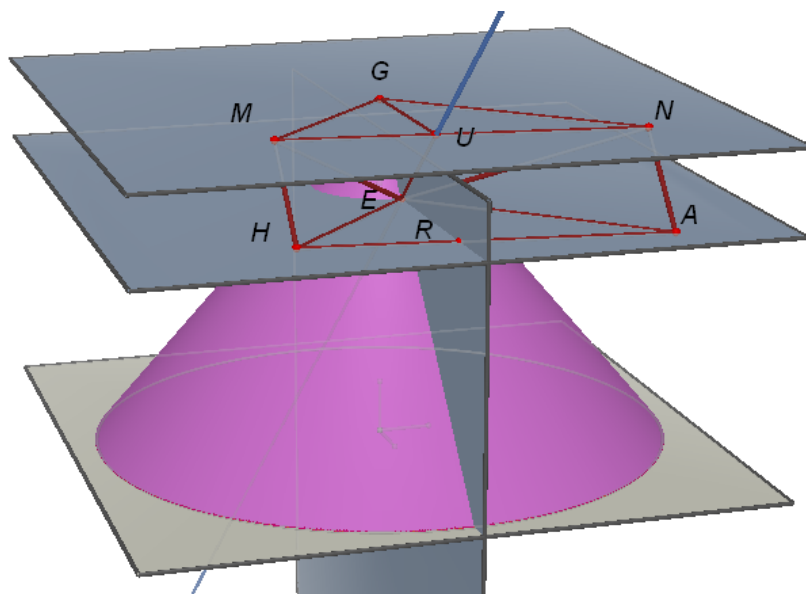
(b) $\angle CLA \cong \angle BCF$ alternos entre paralelas



Espejos cónicos: caso 1

Espejos cónicos: casos 2 y 3

Sean M y N dos puntos en el plano paralelo a la base y que contiene al vértice G . GU es la bisectriz del ángulo MGN (U en el corte con MN). G es una solución trivial y degenerada del problema de Alhacén en las condiciones planteadas. El plano que contiene al eje de simetría y al punto U corta simétricamente al cono –de hecho lo corta en las rectas que delimitan el cono (hipérbolas degeneradas)–. Ahora se traza la perpendicular a dicho corte pasando por U . Sea E el punto que sirve de base para dicha perpendicular. A continuación se concibe el plano paralelo a la base y que contiene a E . Sobre este plano se proyectan los puntos M y N usando paralelas a GE . Sean H y A las proyecciones mencionadas. R es la proyección de U siguiendo el mismo esquema. Construyendo el argumento en forma análoga al caso 1 se puede mostrar que los ángulos HER y REA son congruentes. Por lo tanto E es el punto de reflexión que permitiría contemplar a A desde H . Explotando más allá la analogía también se puede mostrar que los ángulos MEU y UEN son también congruentes. EU es perpendicular al plano tangente en E , ME , EU y EA están en el mismo plano. Por lo tanto E es la solución no-degenerada al problema planteado (Alhacén (2006), V, 2.279 – 2.287). Cuando los dos puntos se encuentran por encima del plano paralelo a la base y que contiene a G (vértice), Alhacén concibe una duplicación especular del cono inferior y procede a aplicar un algoritmo completamente análogo al anterior.



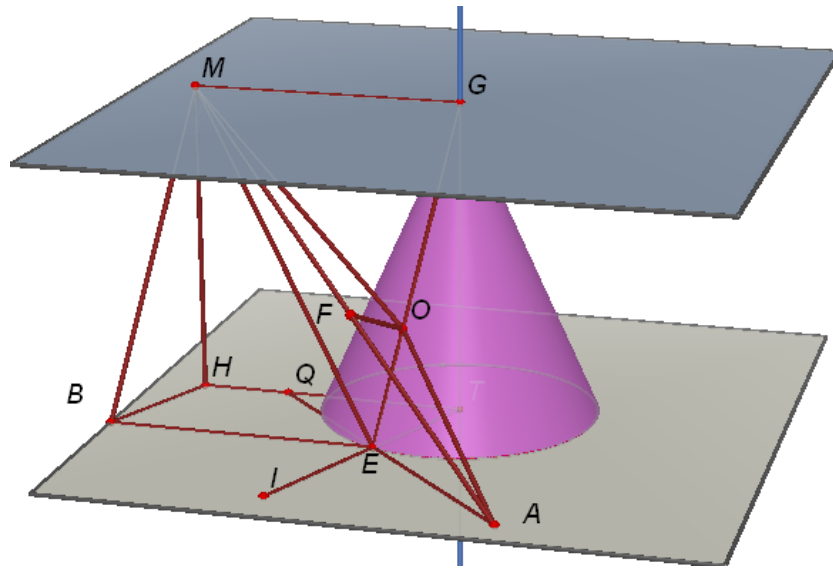
Espejos cónicos: casos 2 y 3

Consultar archivo: *Espejos cónicos casos 2 y 3*
Requerimientos: Cabri IIID

Espejos cónicos: casos 4 y 5

Sea M (observador) en el plano superior y A (objeto) por debajo de dicho plano. Se construye el plano que contiene al punto A y es paralelo a la base. M se proyecta ortogonalmente sobre dicho plano. Sea H dicha proyección. Desde A se traza una recta que corta la circunferencia en el punto E de tal manera que $EQ \cong QT$ (T es el centro de la circunferencia). Este paso exige hacer uso del Lema 5. A continuación se construye BH paralelo y congruente a TE . Se traza BE y luego AM quien debe cortar en F al plano GTE . TI es normal a la circunferencia en E . Ahora se traza la perpendicular a GE que pasa por F . Sea O la base de dicha perpendicular. A continuación se mostrará que O es el punto buscado (Alhacén (2006), V, 2.289 – 2.293).

Consultar archivo: *Espejos cónicos casos 4 y 5*
Requerimientos: Cabri IIID



Espejos cónicos: casos 4 y 5

- | | |
|---|--|
| <p>(1) $MB \cong GE$ y, además, MB es paralelo a GE</p> | <p>(a) $HT \cong BE$ y además son paralelos. Pues $HTEB$ es un paralelogramo por construcción.</p> <p>(b) $HT \cong MG$ y además son paralelos. Pues $MHTG$ es un paralelogramo</p> |
| <p>(2) $\angle IEB \cong \angle IEA$, luego A se refleja en B por E</p> | <p>(a) $\angle IEB \cong \angle ETQ$ alternos entre paralelas</p> <p>(b) $\angle ETQ \cong \angle TEQ$ el triángulo TEQ es isósceles por Lema 5</p> <p>(c) $\angle TEQ \cong \angle IEA$ opuestos por el vértice</p> |
| <p>(3) $\angle MOF \cong \angle FOA$</p> | <p>Se replica en forma análoga el procedimiento final del caso 1</p> |

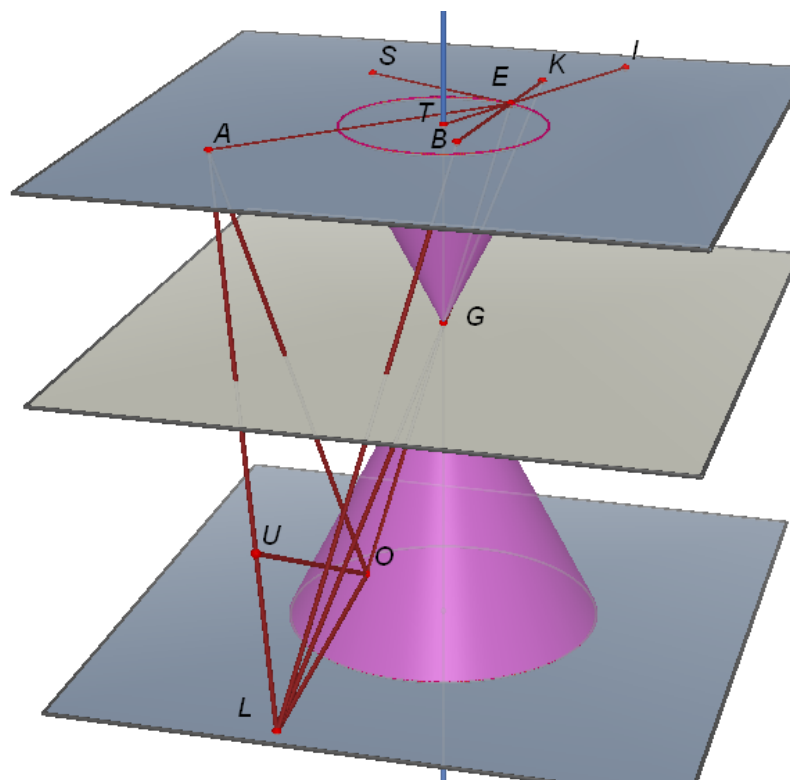
Si A se encuentra por encima del plano paralelo a la base en el vértice se replica el procedimiento anterior agregando la imagen especular del cono con respecto a dicho plano.

Espejos cónicos: caso 6

Por último, si A (punto de vista) se encuentra encima del plano que contiene a G (vértice) y este plano es paralelo a la base y, además, L (objeto) se encuentra debajo del mismo, el procedimiento para hallar el punto de reflexión, aunque análogo a los anteriores, exige las siguientes variaciones. Se construye la imagen especular del cono inicial y se concibe el plano que contiene a A y es paralelo a la base. La intersección de dicho plano con el cono es la circunferencia de centro T . Ahora se traza la recta LG y se busca la intersección con el plano mencionado. Sea K dicha intersección. Ahora se busca el punto E , sobre la circunferencia, tal que la tangente ES a la circunferencia biseca al ángulo AEK . Este paso exige atender las indicaciones del Lema 4.¹ Se traza por L una paralela a GE y se busca la intersección de dicha paralela con el plano AEK . Sea B dicho punto. Se traza la recta AL y se determina el corte U con el plano GTE . Desde U se traza la perpendicular a GE y se determina el punto de corte de dicha perpendicular. Sea O dicho punto. Este es, pues, el punto buscado (Alhacén (2006), V, 2.294 – 2.299).

Consultar archivo: *Espejos cónicos caso 6*
Requerimientos: Cabri IID

¹ Si hay solución para L (en el caso del espejo cónico), no debe haber solución para K y A vistos como objetos frente a un espejo esférico convexo. Por tal razón Alhacén busca una solución que ahora compromete una tangente que biseca un ángulo y no una normal. Este hecho garantiza la satisfacción de las condiciones matemáticas aun cuando se suavizan las exigencias físicas.



Espejos cónicos: caso 6

(1) $\angle AET \cong \angle TEB$

(a) $\angle AES \cong \angle SEK$ por construcción

(b) $\angle AET \cong \angle KEI$ son complementos de ángulos congruentes

(a)

(c) $\angle KEI \cong \angle TEB$ son opuestos por el vértice

(2) $\angle AOU \cong \angle UOL$

Se replica en forma análoga el procedimiento final del caso 1