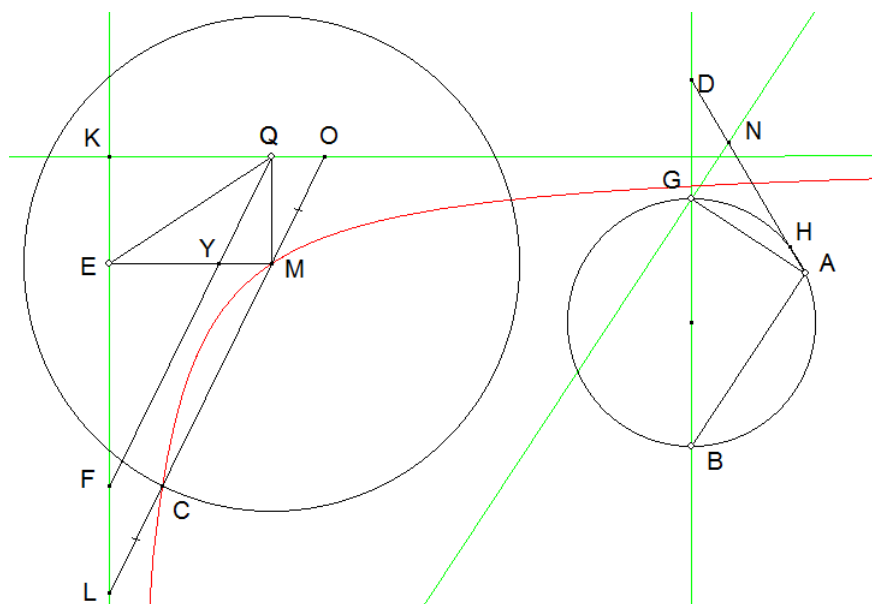


(iii) Demostración



$$(1) \quad \Delta FEY \approx \Delta AGN \text{ luego } \frac{AN}{AG} = \frac{FY}{FE}$$

(a) $\angle GAN \cong \angle EFY$ por construcción

(b) $\angle AGN \cong \angle FEY$ ambos son rectos

$$(2) \quad \Delta AGD \approx \Delta FEQ \text{ luego } \frac{AG}{GD} = \frac{FE}{EO}$$

(a) $\angle AGD \cong \angle QEF$ por construcción

(b) $\angle EFQ \cong \angle GAD$ por construcción

$$(3) \quad \frac{AN}{GD} = \frac{FY}{EQ}$$

(a) por (1) y (2)

$$(4) \quad FY \cong BG$$

(a) QM es paralelo a FL por construcción

(b) FQ es paralelo a ML por construcción

(c) $FQ \cong ML = MC + CL$ por (a) y (b) y por composición

(d) $CL \cong MO$ Apolonio II-8

(e) $FQ = MC + MO = CO$ por (c), (d) y por composición

(f) $FQ = FY + YQ$ por composición

(g) $YQ \cong OM$ pues $OQYM$ es un paralelogramo por construcción

(h) $FY \cong MC$ por (e), (f) y (g)

(i) $MC \cong BG$ por construcción

$$(5) \quad \frac{AN}{GD} = \frac{BG}{EQ}$$

La conclusión se sigue de (3) y (4)

$$(6) \quad \Delta HGD \approx \Delta NDG, \text{ luego } \frac{HD}{DG} = \frac{DG}{DN},$$

es decir $DG^2 = HD \cdot DN$

(a) $\angle AHG + \angle ABG = 180^\circ$ por Euclides III, 22

(b) $\angle NGD \cong \angle ABG$, pues NG y AB son paralelas

(c) $\angle AHG + \angle NGD = 180^\circ$ por (a) y (b)

(d) $\angle AHG + \angle NHG = 180^\circ$ por construcción

(e) $\angle NGD \cong \angle NHG$ por (c) y (d)

(h) $\angle HDG \cong \angle NDG$ se trata de dos etiquetas del mismo ángulo

$$(7) \quad DH \cdot DN + DH \cdot AN = BG \cdot GD + DG^2$$

(a) $AD \cdot DH = BD \cdot DG$ corolario de Euclides III, 37

(b) $AD = DN + NA$ por composición

(c) $AD \cdot DH = DN \cdot DH + AN \cdot DH$ por (b)

(d) $BD = BG + DG$ por composición

(e) $BD \cdot DG = BG \cdot DG + DG^2$ por (d)

La conclusión se sigue de (a), (c) y (e)

$$(8) \quad \frac{AN}{GD} = \frac{BG}{DH}$$

La conclusión se sigue de (6) y (7)

$$(9) \quad EQ \cong DH$$

La conclusión se sigue de (5) y (8)