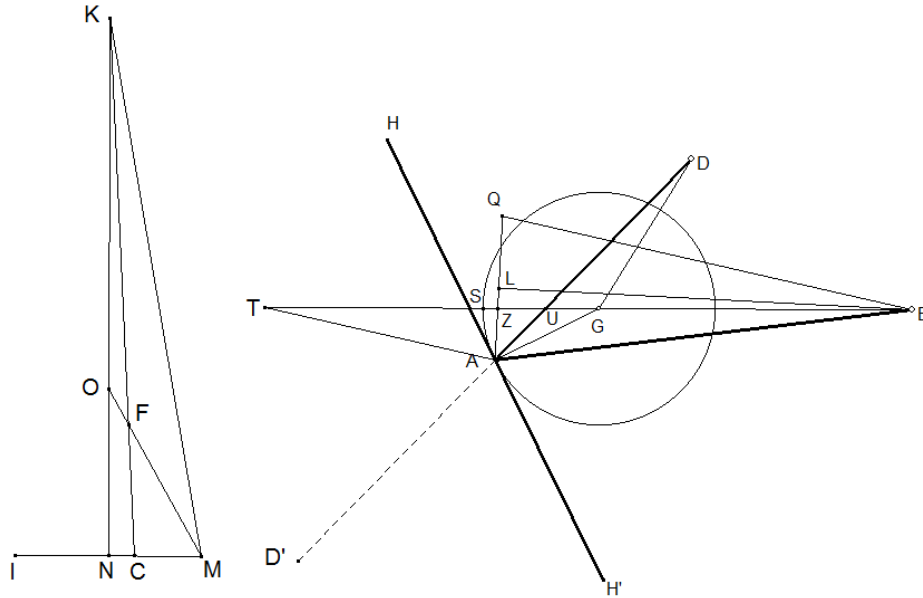


(iii) Demostración



Por cuestiones de espacio, la figura de la izquierda se ha hecho con magnitudes reducidas.

(1) $\triangle AGE \approx \triangle MKF$

(a) $\angle MFK \cong \angle AGE$ por construcción

(b) $\frac{KF}{FM} = \frac{EG}{GS}$ por Lema 3 y como $GS \cong GA$, tenemos

$$\frac{KF}{FM} = \frac{EG}{GA}$$

(2) $\triangle AEL \approx \triangle NMK$

(a) $\angle ALE \cong \angle MNK$ ambos son rectos por construcción

(b) $\angle EAL \cong \angle NMK$ por construcción

(3) $\triangle ELZ \approx \triangle KNC$

(a) $\angle AEL = \angle LEZ + \angle AEG$

(b) $\angle NKM = \angle NKC + \angle MKF$

(c) $\angle LEZ = \angle NKC$ de (a), (b), (1) y (2)

(d) $\angle ELZ \cong \angle KNC$ ambos son rectos por construcción

(4) $\triangle EAZ \approx \triangle KMC$

(a) $\angle EZQ \cong \angle KCI$ por (3)

(b) $\angle EAZ \cong \angle CMK$ por construcción

- (5) $\triangle QLE \approx \triangle IKN$
- (c) $\angle AEZ \cong \angle MKC$ por (1)
- (a) $\frac{QZ}{ZA} = \frac{IC}{CM}$ por construcción
- (b) $\frac{AZ}{ZE} = \frac{MC}{CK}$ por (4)
- (c) $\frac{QZ}{ZE} = \frac{IC}{CK}$ por (a) y (b)
- (d) $\angle QZE \cong \angle ICK$ pues son suplementos de ángulos congruentes (4)
- (e) $\triangle QZE \approx \triangle ICK$ por (c) y (d)
- (f) $EL \perp AZ$
- (g) $KN \perp IC$
- (6) El triángulo AQE es isósceles, luego $EQ \cong EA$
- (a) $\frac{MN}{NI} = \frac{AL}{LQ}$ por (2), (5)
- (b) $MN \cong NI$ por construcción
- (c) $AL \cong LQ$ por (a) y (b)
- (d) $AQ \perp LE$ por construcción
- (7) $\triangle EZQ \approx \triangle ZAT$
- (a) $\angle EQZ \cong \angle LAT$ alternos internos entre paralelas
- (b) $\angle EZQ \cong \angle AZT$ opuestos por el vértice
- (8) $\frac{AE}{AT} = \frac{EG}{GD}$
- (a) $\frac{QZ}{ZA} = \frac{EQ}{AT}$ por (7)
- (b) $\frac{QZ}{ZA} = \frac{AE}{AT}$ por (6) y (a)
- (c) $\frac{QZ}{ZA} = \frac{IC}{CM}$ por construcción
- (d) $\frac{IC}{CM} = \frac{EG}{GD}$ por construcción

(9) $\angle UAT \cong \angle DGU$

(a) $\angle EAL \cong \angle EQZ$ por (6)

(b) $\angle EQZ \cong \angle QAT$ alternos internos entre paralelas

(c) $\angle EAL \cong \angle QAT \cong \angle LAT$ por (a) y (b)

(d) $\angle UAT = \angle UAL + \angle LAT = \angle UAL + \angle EAL$ por composición y por (c)

(e) $\angle UAT = \angle UAL + \angle EAU + \angle UAL$ por composición y por (d)

(f) $\angle UAT = 2\angle UAL + \angle EAU$ por (e)

(g) $\angle UAT = 2\angle UAL + 2\angle UAG$ por construcción

(h) $\angle UAT = 2(\angle UAL + \angle UAG)$ por (g)

(i) $\angle UAT = 2\angle LAG$ por composición

(j) $\angle LAG = \angle EAL - \angle EAG$ por composición

(k) $\angle OMN = \angle NMK - \angle FMK$ por composición

(l) $\angle EAL \cong \angle NMK$ por construcción

(m) $\angle EAG \cong \angle FMK$ (1)

(n) $\angle LAG \cong \angle OMN$ por (j), (k), (l), (m)

(o) $\angle DGU = 2\angle OMN$ por construcción

La conclusión se sigue de (i), (n) y (o)

(10) AU corta a GD en D

Supongamos que AU corta a GD en un punto X ,

(a) $\angle XUG \cong \angle TUA$ opuestos por el vértice

(b) $\angle UAT \cong \angle XGU$ por (9)

(c) $\triangle UGX \approx \triangle UAT$ por (a) y (b)

(d) $\frac{EA}{AU} = \frac{EG}{GU}$ por Euclides VI, 3, pues GA biseca el ángulo UAE (por construcción)

$$(e) \frac{EG}{GD} = \frac{AE}{AT} \text{ por (8)}$$

$$(f) \frac{AT}{AU} = \frac{GD}{DU} \text{ por (d) y (e)}$$

$$(g) \angle DGU \cong \angle UAT \text{ por (9)}$$

$$(h) \triangle UAT \approx \triangle UGD \text{ por (f) y (g)}$$

$$(i) \triangle UGX \approx \triangle UGD \text{ por (h) y (c)}$$

$$(k) GD \cong GX \text{ por (i), } UG \text{ es común}$$

$$(l) D = X \text{ por (k)}$$

$$(11) \quad \angle DGE = 2 \angle LAH$$

$$(a) \quad GAH \text{ es recto por construcción}$$

$$(b) \quad \angle GAL + \angle LAH = 90^\circ \text{ por composición y por (a)}$$

$$(c) \quad \angle DGU + \angle DGE = 180^\circ \text{ por composición y por construcción}$$

$$(d) \quad \angle GAL + \frac{\angle DGE}{2} = 90^\circ \text{ por (9-n), (9-o) y (c)}$$

La conclusión se deriva de (d) y (b)

$$(12) \quad \angle TAD' = 2 \angle LAH$$

$$(a) \quad \angle DGU \cong \angle UAT \cong \angle TAD \text{ por (9) y porque } U \text{ está en la recta } DA$$

$$(b) \quad \angle TAD' \cong \angle DGE \text{ porque son suplementos de ángulos congruentes (a) (aquí tomamos } D' \text{ simétrico a } D \text{ con respecto a } A \text{ porque } U \text{ cae entre } A \text{ y } D)$$

La conclusión se obtiene de (b) y (11)

$$(13) \quad \angle EAT = 2 \angle EAL$$

$$(a) \quad \angle TAZ \cong \angle ZQE \text{ alternos entre paralelas}$$

$$(b) \quad \angle ZQE \cong \angle EAL \text{ pues } \triangle QAE \text{ es isósceles (6)}$$

$$(c) \quad \angle TAZ \cong \angle EAL \text{ por (a) y (b)}$$

$$(d) \quad \angle EAT = \angle TAZ + \angle EAL \text{ por composición}$$

La conclusión se deriva de (d) y (c)

$$(14) \quad \angle EAH' = \frac{\angle EAD'}{2}$$

$$(a) \quad \angle EAH = \angle EAL + \angle LAH \text{ por composición}$$

$$(b) \quad \angle EAH' = 180^\circ - \angle EAH \text{ por construcción}$$

$$(c) \quad \angle EAH' = 180^\circ - (\angle EAL + \angle LAH) \text{ por composición y}$$

(b)

$$(d) \angle EAH' = 180^\circ - \left(\angle EAL + \frac{\angle TAD'}{2} \right) \text{ por (12) y (c)}$$

$$(e) 2\angle EAH' = 360^\circ - (2\angle EAL + \angle TAD') \text{ por (d)}$$

$$(f) 2\angle EAH' = 360^\circ - (\angle EAT + \angle TAD') \text{ por (e) y (13)}$$

$$(g) 2\angle EAH' = 360^\circ - (360^\circ - \angle EAD') \text{ por (f) y por composición}$$

La conclusión se deriva de (g)