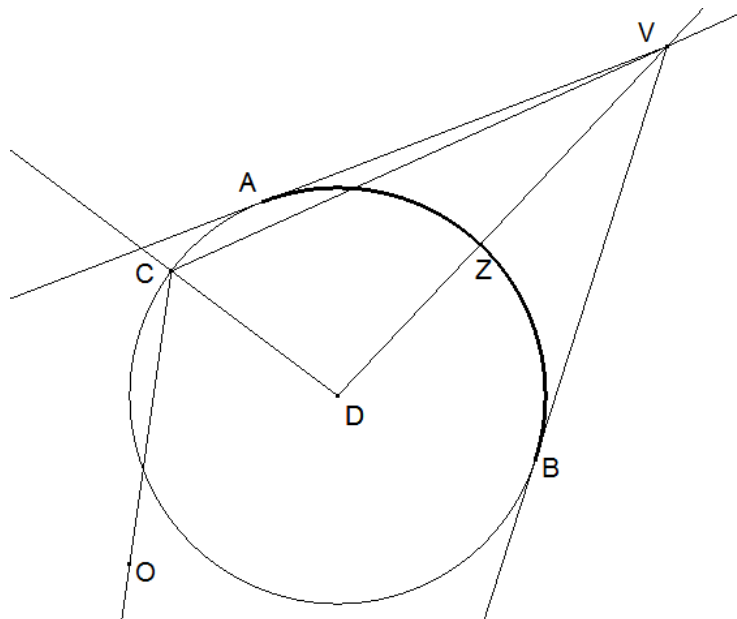


(ii) Esquema general de la construcción

El problema no tiene solución para todas las posibles ubicaciones de observador y objeto. Por eso, en la primera parte estudiamos las condiciones que definen el umbral de posibles soluciones. También exponemos las características generales de la formación de imágenes. En la segunda parte resolvemos el problema para una situación trivial. Por último enfrentamos el problema para un caso general.

(a) Sector de reflexión efectiva y formación de imágenes

Si V determina la ubicación del observador al frente del espejo esférico convexo de centro D , VZD es normal a la circunferencia en el punto Z y BZA define la intersección del espejo con el plano de observación,¹ el sector efectivo de reflexión ha de quedar comprendido en AZB siempre que AV y VB sean tangentes a la circunferencia AZB . Si el punto de reflexión cae por fuera de ese sector, digamos en C , el objeto tendría que hallarse en algún punto de la semirrecta CO a condición de que $\angle VCD \cong \angle OCD$. En este caso los rayos de luz OC y CV tendrían que atravesar el interior del espejo.



Consultar archivo: *Imágenes en espejos convexos*
Requerimientos: Cabri II-plus

¹ Es decir el plano en el que se encuentran el rayo incidente, el reflejado y la normal.

El comportamiento de la imagen varía de acuerdo con el hecho de que el punto de reflexión caiga sobre uno de dos puntos particulares H , o caiga entre los dos puntos H , o lo haga entre H y B o H y A . H es el punto peculiar en el que HK coincide en longitud con el radio de la esfera (K es el otro punto de intersección de la recta VH con la circunferencia del espejo).² El comportamiento de la imagen se puede seguir en la modelación en Cabri. El lector puede manipular tanto C (el punto de reflexión), como O (ubicación del objeto) para observar el comportamiento de la imagen I . Siguiendo el principio de Ptolomeo, esta imagen se obtiene en la intersección de la prolongación del rayo reflejado y la normal que contiene el objeto. Analicemos primero el caso en el que el punto de reflexión coincide con el punto H . Dado que el observador recibe el rayo en la dirección HV , el objeto sólo puede ubicarse sobre la recta OH de tal manera que el ángulo OHM sea congruente con el ángulo MHV .³ OH resulta paralelo a KD . Este último resultado se puede ver de la siguiente manera:⁴

$$\angle OHM \cong \angle MHV$$

Segunda ley de la reflexión

$$\angle MHV \cong \angle KHD$$

Son opuestos por el vértice

$$\angle KHD \cong \angle HDK$$

HDK es equilátero, toda vez que
 $KH \cong HD$ por construcción

$$\angle OHM \cong \angle HDK$$

Por transitividad

Dado que el objeto se puede ubicar en cualquier punto sobre la semirrecta HO , cuando este se acerca al punto H , su imagen I se pliega sobre H . Cuando O se aleja al infinito, I se pliega sobre K . En cualquier caso, la imagen se restringe a un punto sobre el segmento KH (en el interior de la esfera). Aclaro que no sigo fielmente el argumento de Alhacén aun cuando el resultado y la intención del análisis coinciden con los del filósofo árabe (Alhacén (2006), V, Proposición 9, caso 1, 2.82 – 2.84).

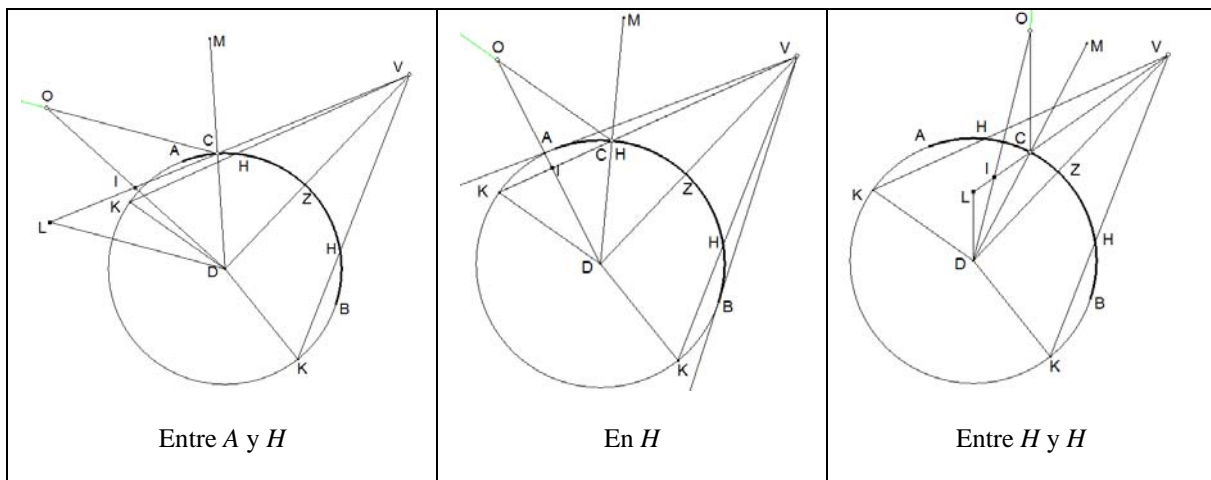
En el segundo caso, cuando el punto de reflexión cae entre H y H el análisis conduce a lo siguiente. Sea C el punto de reflexión, MCD normal a la esfera en

² La existencia del punto H queda garantizada por el siguiente argumento. Si hacemos girar en el plano la semirrecta VK en torno a V , el segmento de intersección con la circunferencia (cuando existe tal intersección) varía entre dos extremos: máximo, cuando la semirrecta cae ortogonalmente, en ese caso VK coincide con VZ y el segmento de intersección coincide con un diámetro ($2R$); y mínimo, cuando la semirrecta coincide con una tangente, ora VA , ora VB , en ese caso la longitud del segmento de intersección se hace cero. En ese orden de ideas, ha de existir una posición intermedia para la cual el segmento de intersección coincide con la longitud del radio de la circunferencia.

³ MD es la normal a la superficie trazada en H .

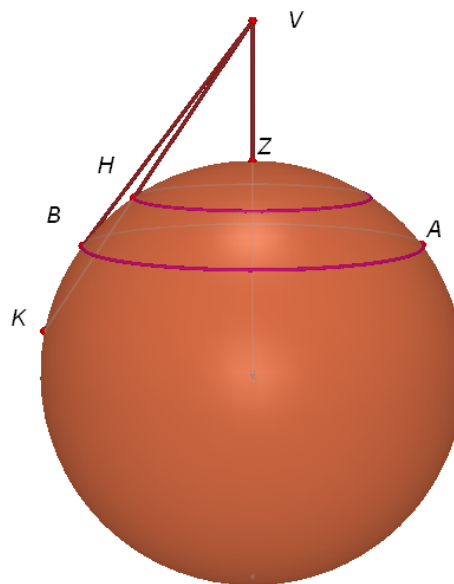
⁴ Sigo una argumentación ligeramente diferente a la exhibida por Alhacén aunque equivalente.

En el tercer caso, el punto de reflexión C se encuentra en el arco HB o en el arco HA . El análisis coincide con el del caso anterior, salvo que en este caso el segmento CL contiene una parte en el interior de la esfera y la otra parte en el exterior. En ese caso hay posiciones de O que generan imágenes en el interior y posiciones que generan la imagen en el exterior. La situación límite se obtiene cuando la normal OD corta la circunferencia en el mismo punto en donde lo hace CL . Como en los casos anteriores, el argumento no coincide con el de Alhacén aun cuando respeta la intención y las conclusiones (Alhacén (2006), V, Proposición 9, caso 3, 2.88 – 2.91).



⁵ Cuando el objeto se aleja al infinito, la imagen converge al punto L . En ese caso $CI \cong ID$. Por eso Alhacén concluye que no se puede ubicar el objeto en una posición tal que la distancia de la imagen al centro de la esfera coincida con la distancia de la imagen al punto de reflexión (Alhacén (2006), V, proposición 10, 2.96 – 2.102).

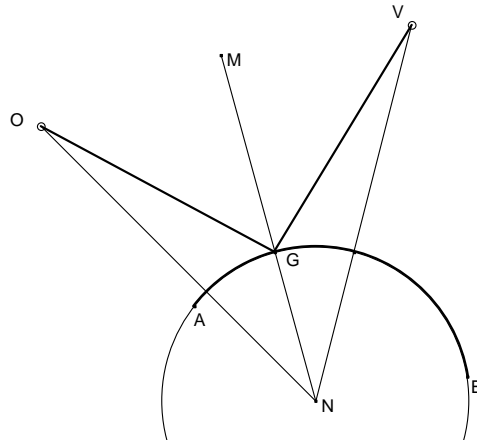
La siguiente figura muestra una superficie reflectante esférica, y el punto V en donde se puede concebir un observador. VZ es ortogonal a la esfera. Si el segmento VK , atendiendo a las especificaciones de las demostraciones inmediatamente anteriores, se hace rotar alrededor del eje VZ se define un corte sobre la esfera tal que si el punto de reflexión cae sobre dicho sector, la imagen del objeto visto será contemplada en el interior del espejo sin importar la ubicación del objeto (casos 1 y 2). Si se hace rotar el segmento VB en torno a VZ se define un nuevo corte que determina un nuevo sector. Si el punto de reflexión cae en este sector ocurre que, dependiendo de la distancia a la que se encuentre el objeto, la imagen podrá formarse en el interior de la esfera, en la superficie de la esfera, o por fuera de la esfera (caso 3) (Alhacén (2006), V, 2.93 – 2.94). Si el punto de reflexión cae por fuera de estos dos sectores, no hay imagen que pueda ser contemplada desde V .



(b) Caso trivial

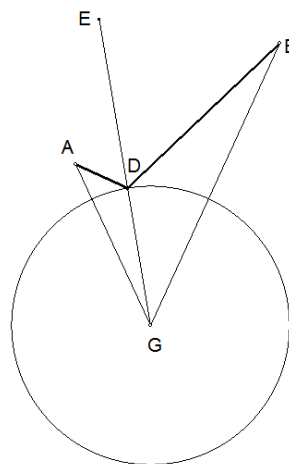
Alhacén divide el problema en dos casos. En el primero caso se establece como condición que tanto objeto como observador se encuentren a la misma distancia del centro del espejo. Imaginemos que O representa la posición del objeto y V la del observador frente a un espejo esférico convexo de centro en N . Imaginemos también que $ON \cong VN$. La circunferencia AGB define el corte de la esfera con el único plano que contiene a los puntos O , V y N . Los puntos A y B definen los límites del sector efectivo para la reflexión. Se traza la bisectriz NGM al ángulo ONV . Esta bisectriz se encuentra en el plano ONV y corta

ortogonalmente la circunferencia en G . Los triángulos OGN y VGN son obviamente congruentes y, en consecuencia, los ángulos OGM y MGV son congruentes. De otra parte, OG , GV y GM se encuentran en el mismo plano ONV .



(c) Caso general

Retomamos el problema propuesto inicialmente: dada una circunferencia de centro G y los puntos exteriores B (objeto) y A (observador), se pide hallar la ruta del rayo de luz que va desde B hasta A pasando por D (un punto en el espejo cuya normal es DE) de tal manera que los ángulos BDE y ADE sean congruentes. He procurado ser fiel a las líneas de argumentación pero me aparto totalmente de los esquemas retóricos de presentación. Trato de ofrecer una presentación un poco más amable aunque lo escabroso del camino seguido por Alhacén hace muy difícil encontrar una presentación amena.



Consultar archivo: *Problema Alhacén esféricos convexos*
Requerimientos: Cabri II-plus

Esquema general de la construcción:

La solución exige las siguientes construcciones. Estas construcciones se pueden seguir en la modelación en Cabri activando los botones correspondientes a la numeración que aquí se presenta.

- (i) Se construyen los segmentos auxiliares FM y FK , uno a continuación del otro sobre la misma recta, de tal manera que $FM \cong BG$ y $FK \cong GA$.
- (ii) O es el punto medio de MK y OC es una perpendicular a MK . El punto C se elige de tal manera que el ángulo OCK es la mitad del ángulo BGA .
- (iii) A continuación se halla un punto S sobre CO que satisface la siguiente condición: si desde ese punto se traza la recta SF , ésta va a cortar la recta CK en un punto P tal que $\frac{SP}{PK} = \frac{BG}{GD}$, siendo GD el radio de la esfera. Este paso se lleva a cabo con la ayuda del lema 6. No hay sólo un punto que satisface la condición impuesta en la construcción auxiliar. Hay dos puntos S y S' . Alhacén demuestra que si ninguno de los ángulos CKS o CKS' es mayor que un ángulo recto, no habrá, entonces, solución para el problema de Alhacén. Imaginemos, pues, que CKS es mayor que un ángulo recto. En la modelación en Cabri se ofrecen las dos soluciones.
- (iv) A continuación se construye el ángulo BGE igual al ángulo SPK . La intersección de GE con la circunferencia es el punto buscado D .