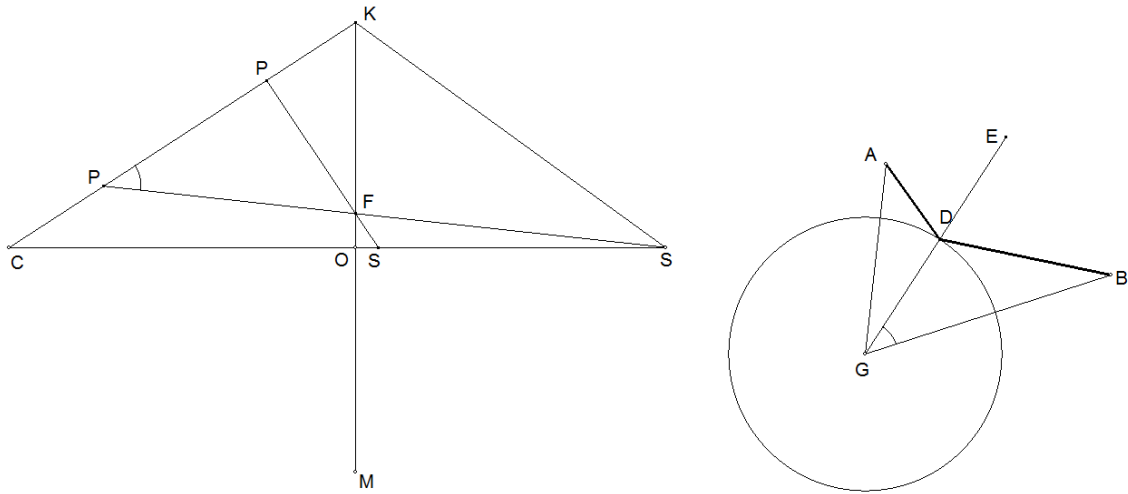
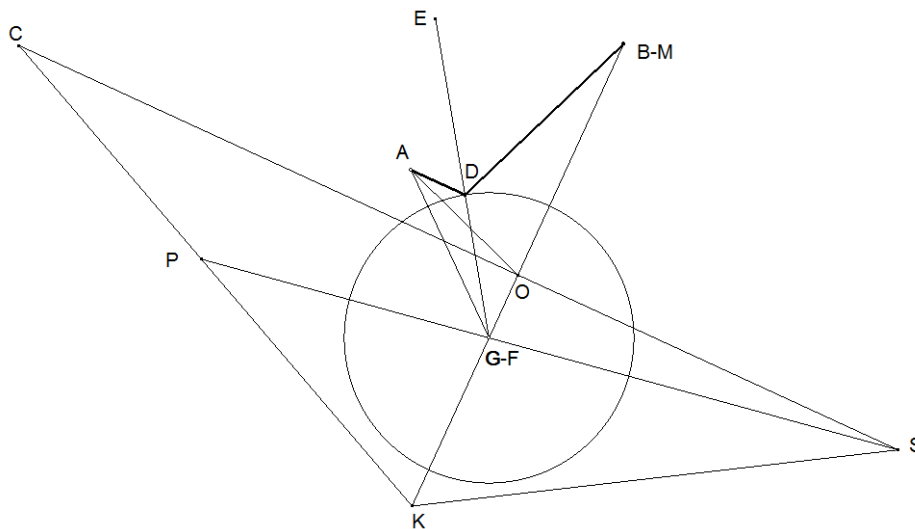


(iii) Demostración

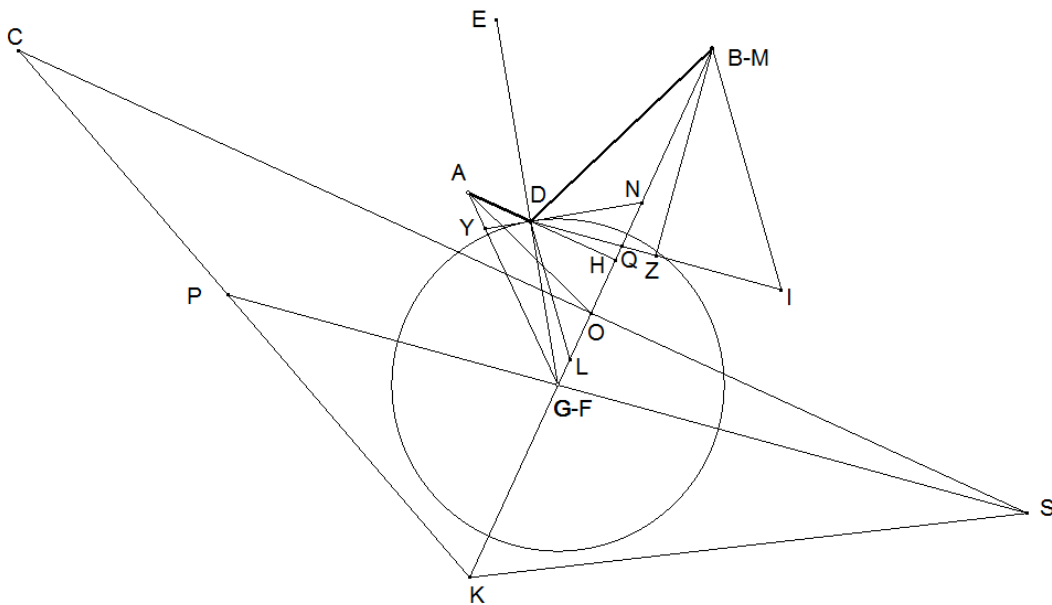


La ubicación de la construcción al margen es completamente irrelevante. En consecuencia y a diferencia de Alhacén, haremos la construcción sobre la disposición inicial para facilitar la contemplación de primera mano de las congruencias requeridas (Obviamos la solución descartada por Alhacén). Para ello, construimos el segmento GK , a continuación de BG , de tal manera que $AG \cong KG$. Para que el lector pueda seguir la variación propuesta, rebautizaremos los puntos G y B con las alusiones $G-F$, $B-M$. De esa manera se pueden seguir las descripciones en uno u otro esquema. Después replicamos todas las construcciones enunciadas en la presentación de la prueba.



Construcciones auxiliares para la justificación:

- La tangente a la circunferencia por D que corta a BG y GA en los puntos N y Y .
- El punto Q sobre BG de tal manera que los ángulos QDG y PKF sean congruentes.
- La perpendicular BZ a QD ; el punto I sobre DZ de tal manera que $DZ \cong ZI$.
- DL paralela a BI , con L sobre BG .
- El punto H sobre BG , de tal manera que los ángulos HDL y BGA sean congruentes.



$$(1) \quad \angle QDN = \frac{\angle HDL}{2}$$

- $\angle QDN + \angle GDQ = \angle GDN$ (recto por construcción)
- $\angle OCK + \angle OKC$ es recto ($\triangle OCK$ es rectángulo)
- $\angle OKC \cong \angle GDQ$ (por construcción)
- $\angle QDN \cong \angle OCK$ (por (a), (b) y (c))
- $\angle OCK = \frac{\angle BGA}{2}$ (por construcción)

- (f) $\angle BGA \cong \angle HDL$ (por construcción)
- (2) $\angle BDQ = \frac{\angle BDL}{2}$
- (a) $\angle BDL = \angle BDQ + \angle QDL$
- (b) $\angle QDL \cong \angle QIB$ (alternos entre paralelas)
- (c) $\angle QIB \cong \angle BDQ$ ($\triangle DBI$ es isósceles)
- (d) $\angle BDL = 2\angle BDQ$ (por (a), (b) y (c))
- (3) $\angle BDN \cong \angle NDH$
- (a) $\angle BDN + \angle QDN = \angle BDQ$
- (b) $\angle BDN = \frac{\angle BDL - \angle HDL}{2}$ (reemplazando (1) y (2) en (a))
- (c) $\angle BDN = \frac{\angle BDH}{2}$, (pues $\angle BDL - \angle HDL = \angle BDH$)
- (d) $\angle BDH = \angle BDN + \angle NDH$
- (4) $\angle BDE \cong \angle HDG$ Sus ángulos complementarios (BDN y NDH) son congruentes (3)
- (5) H, D y A son colineales Conjetura
- (6) $\angle BDE \cong \angle EDA$
- (a) $\angle EDA \cong \angle HDG$ (dado (5), ellos son opuestos por el vértice)
- (b) $\angle HDG \cong \angle BDE$ (por (4))

Demostración de la Conjetura (5)

- (f) Prolongamos HD hasta cortar GA en un punto W , por tanto W es colineal con H y D . Mostraremos que W coincide con A . Sea el triángulo GHW . Trazamos HT paralelo a BD (con T sobre GD).

(c) $\frac{DH}{DL} = \frac{HG}{GW}$ (pues $\triangle HDL \approx \triangle HWG$, ya que W, L y H son colineales y $\angle HDL \cong \angle HGA$ (por construcción))

(d) $\frac{BD}{HT} = \frac{BG}{GH}$ (pues BD es paralelo a TH)

(e) $HD \cong HT$ (pues, $\triangle THD$ es isósceles, considerando que $\angle BDE \cong \angle HDG$ ((4) en la prueba anterior) y $\angle BDE \cong \angle HTD$ (alternos entre paralelas))

(f) $\frac{BD}{HD} = \frac{BG}{HG}$ (sustituyendo (e) en (d))

(g) (4) se obtiene sustituyendo (a) y (f) en (b)

(5) $\frac{BG}{GA} = \left(\frac{BG}{HG}\right)\left(\frac{HG}{GW}\right)$ (a) sustituyendo (3) en (4)

(6) $\frac{BG}{GA} = \left(\frac{BG}{HG}\right)\left(\frac{HG}{GA}\right)$ (a) tomando HG como media proporcional entre BG y GA

(7) $W=A$ (a) $GW \equiv GA$ de (5) y (6)