



UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

FACULTAD DE ECONOMÍA

CALIBRACIÓN Y SIMULACIÓN DEL
MODELO DE BLACK-SCHOLES PARA
TRM CON TASAS DE INTERÉS
ESTOCÁSTICAS

TESIS PRESENTADA POR SERGIO ANTONIO BARRERA RODRÍGUEZ
PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MASTER EN FINANZAS CUANTITATIVAS

Tutor: Hugo Ramirez

2019

Resumen

El presente documento propone el modelo HW1-BSFX para simular la TRM contemplando estocasticidad en las tasas de interés para la valoración de derivados. El modelo HW1-BSFX consta de emplear el modelo de Black-Scholes FX, cuyo spot corresponde a la TRM, incorporando el modelo de Hull-White de un factor para el cálculo de la tasa de interés doméstica (COP) y foránea (USD). La calibración del modelo HW1-BSFX se realiza con información histórica del mercado colombiano y estadounidense de instrumentos derivados swaps y opciones sobre la tasa de cambio USDCOP. Finalmente se emplea el método de Monte Carlo, con el cual se comparan resultados sobre la TRM simulada del modelo propuesto HW1-BSFX contra el modelo de Black-Scholes FX de tasas de interés constantes, evidenciando similitud en las simulaciones de los dos modelos.

Palabras clave: Black-Scholes, Calibración, Cambio de numerario, Hull-White de un factor, Monte Carlo, Tasa de interés estocástica, TRM, Volatilidad.

Abstract

The following document proposes the HW1-BSFX model to simulate TRM considering the stochasticity of FX rates used in derivatives valuation. The HW1-BSFX model is constructed using the Black-Scholes FX model with spot rate TRM and domestic (COP) and foreign (USD) interest rates as the results of the one factor Hull-White estimates. The calibration of the model is done using historic data from Colombian and American swap derivatives markets and USDCOP exchange rate options. To conclude, a Monte Carlo simulation is used to generate values of TRM with the proposed HW1-BSFX model vs the Black-Scholes FX with constant interest rates, noticing great similarities between the results for both models.

Key words: Black-Scholes, Calibration, Change of Numerarie, Hull-White one factor, Monte Carlo, Stochastic interest rates, TRM, Volatility.

Índice general

1. Introducción	4
2. Especificación del modelo	6
2.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDE)	6
2.2. Cambio de numerario	11
3. Calibración y Datos	16
3.1. Calibración	16
3.1.1. Parámetros k_u y $\sigma_u(t)$	16
3.1.2. Correlaciones Históricas	19
3.1.3. Volatilidad FX	19
3.2. Datos	21
3.2.1. Tasas de Interés	22
3.2.2. Volatilidad de opciones USDCOP	22
4. Simulación de la TRM	24
5. Resultados y conclusiones	27
5.1. Resultados	27
5.2. Conclusiones	32
Bibliografía	33

Capítulo 1

Introducción

Ante la necesidad de realizar mecanismos de cobertura para mitigar el riesgo sobre el alza de las diversas tasas de interés, tanto locales como extranjeras, y tasas de cambio de pesos colombianos contra una moneda extranjera, el mercado de derivados en Colombia ha crecido considerablemente en los últimos años. En este se encuentran negociaciones de instrumentos derivados tales como forwards, opciones, swaps, y productos estructurados. Este último hace referencia a un contrato en el que el emisor del producto pacta, en general, pero no siempre tiene esta modalidad, pagar un componente fijo y vender un componente derivado a cambio de un precio determinado¹. Las negociaciones de productos estructurados, forwards y opciones sobre divisas peso-dólar en el mercado colombiano en general utiliza como subyacente de valoración la TRM². Dónde, la adecuada valoración de este tipo de instrumentos financieros implica utilizar modelos que permitan simular el comportamiento del subyacente y particularmente la TRM.

Adicionalmente, las negociaciones de los derivados en el mercado OTC (Over The Counter)³ permiten que se presenten riesgo de incumplimiento al momento de liquidar el contrato, incentivando de esta manera incorporar el riesgo en la valoración del contrato. Así mismo al realizar un ajuste por riesgo de crédito CVA (Credit

¹En general el derivado corresponde a la opción de compra o venta de uno o más subyacentes.

²La Tasa Representativa del mercado TRM es un indicador económico que expresa el valor promedio diario de la tasa de cambio entre el peso colombiano y el dólar norteamericano

³El mercado OTC se caracteriza por realizar negociaciones fuera de la BVC (Bolsa de Valores de Colombia).

Valuation Adjustment) al valor razonable del contrato en un marco libre de riesgo, se debe simular con la mayor precisión posible el comportamiento del subyacente.

El mercado colombiano utiliza como mecanismo de simulación el modelo de (Black y Scholes, 1973). En este se considera que el cambio de la tasa de cambio futura se distribuye en un componente estocástico y una tendencia determinística dependientes del tiempo. Así mismo se considera que la tasa de interés del país doméstico y la tasa de interés del país foráneo que conforman la tendencia del proceso son constantes en el tiempo. Sin embargo las tasas de interés también fluctúan en el tiempo y su respectiva simulación futura se podría realizar utilizando modelos de tasa de interés cortas tales como el modelo de Vasicek (1977), CIR (1985), Hull-White (1990), Dothan (1978), entre otros.

Por estas razones el objetivo del presente documento es proponer un modelo en el que se estime la TRM, de manera similar a como lo presenta (Black y Scholes, 1973), pero considerando estocasticidad en las tasas de interés tales que permitan simular el modelo con mayor precisión. Así mismo, el modelo consta de combinar el modelo de Black para la simulación de la TRM con el modelo de (Hull y White, 1990) de un factor, para la simulación de la tasa de interés cero cupón que capte los pesos y la tasa de interés cero cupón que capte los dólares. El nombre y la notación de este modelo corresponderá a *Hull-White one factor with Black Scholes Foreign exchange*, HW1-BSFX. El documento está compuesto por: 1) La Presente Introducción en la que se comento la motivación de calibrar y simular el la TRM, 2) Especificación del modelo en el que se describirá la construcción del modelo, 3) Calibración del modelo y descripción de los datos que se utilizarán, 4) Simulación del modelo por método el de Monte Carlo y finalmente 5) Resultados y conclusiones.

Capítulo 2

Especificación del modelo

El presente capítulo describirá las ecuaciones diferenciales parciales que se utilizarán en el modelo propuesto, el cual, como se expresó anteriormente, consta de emplear el modelo de (Hull y White, 1990) para la tasa de interés doméstica y foránea en el modelo de (Black y Scholes, 1973) para tasa de cambio modelo (HW1-BSF). Este apartado consta de dos secciones, en la primera se describirá cómo se componen los procesos de tasa de cambio, la tasa de interés doméstica y foránea. En la segunda sección se describirá el cambio de numerario que se debe realizar con el objetivo que los tres procesos se encuentren sobre la misma medida neutral al riesgo.

2.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDE)

Para la modelación de la tasa de la TRM denominada Z_t se propone usar el modelo de Black – Scholes FX, el cual sigue un proceso exponencial. Así mismo se asume que en la ecuación (2.1) el coeficiente del dt , $Z_t\mu_t$ corresponde a la tendencia del proceso, siendo esta la tasa media de retorno y σ_t la varianza. Estas son dependientes del tiempo t y W_t es un movimiento Browniano estandar.

$$dZ_t = Z_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) \tag{2.1}$$

Para simplificar el modelo se realiza el cambio de variable de $y_t := \ln Z_t$ y obtenemos un modelo en términos logarítmicos. En este modelo se incorporarán los

subíndices d y f , los cuales denotarán la variable o el parámetro en el país doméstico y foráneo respectivamente. Adicionalmente, se incorpora la medida neutral al riesgo Q_d , la cual utiliza como numerario la tasa de interés doméstica, de modo que $\mathcal{N}_{Q_d} := \left[e^{\int_0^t r_d(s) ds} \right]$, teniendo de esta manera:

$$dy(t) = (r_d(t) - r_f(t) - \frac{1}{2}\sigma_y^2(t))dt + \sigma_y(t)dW_y^{Q_d}(t) \quad (2.2)$$

En la ecuación (2.2) el drift, componente que acompaña a dt , está compuesto por la tasa de interés del país doméstico $r_d(t)$ (Colombia), la tasa de interés del país foráneo $r_f(t)$ (Estados Unidos) y $\sigma_y(t)$ la volatilidad de Black-Scholes de la tasa de cambio, donde este último hace referencia la volatilidad de la misma volatilidad en la ecuación (2.1). El componente $dW_y^{Q_d}(t)$ corresponde al diferencial de un movimiento Browniano estándar asociado a la variable y sobre la medida neutral al riesgo Q_d .

Al considerar que el proceso de la tasa de cambio es dependiente de las tasa de interés variable en el tiempo, se debe simular también la tasa de interés corta de Colombia y de Estados Unidos. Por consecuente se propone utilizar el modelo HW de un factor propuesto en (Hull y White, 1990) para simular las tasas de interés $r_d(t)$ y $r_f(t)$. En (Brigo y Mercurio, 2006) se especifica que el modelo de HW de un factor propone que el diferencial de la tasa de interés sigue el proceso:

$$dr_t = (\Theta_t - kr_t)dt + \sigma_t dW_t \quad (2.3)$$

Donde el parámetro constante k hace referencia a la velocidad con la cual la tasa de interés corta se revierte a su valor de largo plazo. El componente σ_t corresponde a la volatilidad dependiente del tiempo de corto plazo de la tasa de interés, diferente al de la ecuación (2.1). El componente determinístico Θ_t determina la trayectoria media de largo plazo. Este permite que el modelo se ajuste a la estructura temporal de las tasas de interés y a la estructura temporal de las volatilidades de esta misma. Finalmente W_t es un movimiento Browniano estándar. Así mismo aplicando el lema de Ito a la ecuación (2.3) se obtiene que la tasa de interes es:

$$r_t = \underbrace{r_0 e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-s)} \Theta_s ds}_{\theta_t} + \underbrace{\int_0^t \sigma_s e^{-k(t-s)} dW_s}_{x_t} \quad (2.4)$$

Donde,

$$\theta_t = r_0 e^{-kt} + \int_0^t \Theta_s e^{-k(t-s)} ds, \quad (2.5)$$

$$x_t = \int_0^t \sigma_s e^{-k(t-s)} dW_s \quad (2.6)$$

Por otra parte, consideraremos el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (OU)¹ el cual se caracteriza por ser un proceso de Markov con incrementos normalmente distribuidos y tener una distribución aleatoria estacionaria, es decir que a medida que aumenta el tiempo el proceso tiende a inclinarse a su media de largo plazo con mayor fuerza cuando los valores se encuentran lejos de esta misma. En cambio, el proceso de un camino aleatorio en tiempo continuo (Proceso de Wiener), es un proceso inestable donde los valores divergen a infinito (Vasicek, 1977). Así mismo se tiene que el proceso g_t sigue:

$$dg_t = -kg_t dt + \sigma_t dW_t, \quad g_0 = 0$$

Aplicando el lema de Itô se tiene que:

$$g_t = \int_0^t \sigma_s e^{-k(t-s)} dW_s \quad (2.7)$$

Tomando las ecuaciones (2.6) y (2.7) se puede afirmar que $g_t = x_t$, lo cual permite afirmar de la ecuación (2.4) que $r_t = \theta_t + x_t$. No obstante el componente determinístico θ_t es dependiente del parámetro dependiente del tiempo Θ_t descrito por (Hull y White, 1990), el cual se definirá a continuación. Para esto se supone el modelo G1++ propuesto por (Francesco, 2012), el cual plantea que la tasa de interés sigue $r(t) = \theta(t) + x(t)$ donde el diferencial $x(t)$ sigue un proceso OU

¹(?)

$dx(t) = -kx(t)dt + \sigma_t dW_t$. Así mismo, aplicando el lema de Ito se tiene que:

$$x(T) = x(t)e^{-k(T-t)} + \int_t^T \sigma(s)e^{-k(T-t)} dW(s) \quad ; \quad x(0) = 0 \quad (2.8)$$

$$r(T) = \theta(T) + x(t)e^{-k(T-t)} + \int_t^T \sigma(s)e^{-k(T-t)} dW(s) \quad (2.9)$$

en el cual se tiene que la media y la varianza del componente Gaussiano toman el valor de:

$$\mathbb{E}\{r(T)|\mathcal{F}_t\} = \theta(t) + x(t)e^{-k(T-t)} \quad ; \quad \text{Var}\{r(T)|\mathcal{F}_t\} = \int_t^T \sigma^2(s)e^{-2k(T-s)} ds$$

Según (Brigo y Mercurio, 2006) se tiene que un bono cero cupón con maduración T sigue la ecuación $P(0, T) = \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_0^T r(s) ds} \right\}$, donde en nuestro caso:

$$\begin{aligned} P(0, T) &= \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_0^T r(s) ds} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_0^T (\theta(s) + x(s)) ds} \right\} \\ &= e^{-\int_0^T \theta(s) ds} \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_0^T x(s) ds} \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ante una variable z que sigue una distribución normal se tiene que $\mathbb{E} \{ e^z \} = e^{\mu z + 0,5\sigma^2 z}$. Por lo tanto, con el objetivo de resolver la ecuación (2.10), en primera instancia se debe calcular $\int_0^T x(s) ds$ para el cual se usará el teorema de Fubini, donde se tiene que integrando la ecuación (2.8):

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) dt &= \int_0^T \int_0^t \sigma(s) e^{-k(t-s)} dW(s) dt \\ &= \int_0^T \sigma(s) e^{ks} \int_s^T e^{-kt} dt dW(s) \\ &= \int_0^T \frac{\sigma(s)}{k} (1 - e^{-k(T-s)}) dW(s). \end{aligned} \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) sigue también una distribución Normal con media cero y

varianza:

$$\text{Var} \left\{ \int_0^T x(t) dt | \mathcal{F}_0 \right\} = \int_0^T \frac{\sigma^2(s)}{k^2} (1 - e^{-k(T-s)})^2 ds = V(0, T) \quad (2.12)$$

Continuando con la solución de la ecuación (2.10) tenemos que:

$$P(0, T) = e^{-\int_0^T \theta(s) ds} e^{0+0,5V(0,T)} \quad (2.13)$$

Separando el componente $\theta(s)$ a la izquierda,

$$e^{-\int_0^T \theta(s) ds} = P(0, T) e^{-0,5V(0,T)} \quad (2.14)$$

No obstante en (Brigo y Mercurio, 2006) se define que la tasa instantanea forward $f^M(0, t)$ es igual a:

$$P(0, T) = e^{-\int_0^T f^M(0,t) dt}$$

por lo tanto al remplazar este resultado en la ecuación (2.14) tenemos que:

$$e^{-\int_0^T \theta(s) ds} = e^{-\int_0^T f^M(0,t) dt} e^{-0,5V(0,T)}$$

Finalmente eliminando el exponencial, remplazando el termino de ecuación (2.12) y derivando la ecuación a ambos lados se tiene que:

$$\theta(T) = f^M(0, T) + \int_0^T \frac{\sigma^2(s)}{k} (1 - e^{-k(T-s)}) e^{-k(T-s)} ds \quad (2.15)$$

Definiendo de esta manera un proceso estacionario para la tasa de interés de cada país, en la cual se tiene un proceso determinístico $\theta(t)$ y un proceso estocástico OU $x(t)$ de la siguiente forma:

para el pais domestico

$$r_d(t) := \theta_d(t) + x_d(t), \quad (2.16a)$$

$$\theta_d(t) = f_d(0, t) + \int_0^t \frac{\sigma_d^2(s)}{k_d} (1 - e^{-k_d(t-s)}) e^{-k_d(t-s)} ds \quad (2.16b)$$

$$dx_d(t) = -k_d x_d(t) dt + \sigma_d(t) dW_d^{Q_d}(t), \quad \text{donde } x_d(0) = 0 \quad (2.16c)$$

para el país foraneo,

$$r_f(t) := \theta_f(t) + x_f(t) \quad (2.17a)$$

$$\theta_f(t) = f_f(0, t) + \int_0^t \frac{\sigma_f^2(s)}{k_f} (1 - e^{-k_f(t-s)}) e^{-k_f(t-s)} ds \quad (2.17b)$$

$$dx_f(t) = -k_f x_f(t) dt + \sigma_f(t) dW_f^{Q_f}(t), \quad \text{donde } x_f(0) = 0 \quad (2.17c)$$

Cada proceso se encuentra sobre las medidas Q_d y Q_f neutrales al riesgo respectivas a cada país, cuyo numerarios corresponden a $\mathcal{N}_{Q_d} := \left[e^{\int_0^t r_d(s) ds} \right]$ y $\mathcal{N}_{Q_f} := \left[e^{\int_0^t r_d(s) ds} \right]$. Los parámetros k_d y k_f hacen referencia a la velocidad con la cual la tasa de interés corta se revierte a su valor de largo plazo respectiva a cada país. Las variables dependientes del tiempo $\sigma_d(t)$ y $\sigma_f(t)$ corresponden a la volatilidad de corto plazo respectiva de cada país. Los componentes determinísticos $\theta_d(t)$ y $\theta_f(t)$ determina la trayectoria media de largo plazo de cada tasa de interes respectiva a su país. Adicionalmente, las funciones $f_d(t, T) = -\frac{\partial \ln P_d(t, T)}{\partial T}$ y $f_f(t, T) = -\frac{\partial \ln P_f(t, T)}{\partial T}$ representan la tasa instantánea forward de su respectivo mercarcado. Aplicando el lema de Ito bajo su respectiva medida neutral al riesgo y utilizando el subíndice $u = d, f$ para denotar el país al cual pertenece la variable o el parámetro se tiene que:

$$x_u(T) = x_u(t) e^{-k_u(T-t)} + \int_t^T e^{-k_u(T-s)} \sigma_u(s) dW_u^{Q_u}(s) \quad (2.18)$$

utilizando ecuación (2.16a) y ecuación (2.18),

$$r_u(T) = \theta_u(T) + x_u(t) e^{-k_u(T-t)} + \int_t^T e^{-k_u(T-s)} \sigma_u(s) dW_u^{Q_u}(s) \quad (2.19)$$

2.2. Cambio de numerario

Aunque cada proceso estocástico se encuentra bajo su propia medida neutral al riesgo Q_u , cuando se unen los tres procesos para construir el modelo HW1-BSFX, el cual modele la TRM, se desea correlacionar los tres proceso de tal manera que contemplen los mismos factores de riesgo y no se presenten oportunidades de arbitraje. Por lo tanto, se procede a aplicar una medida y numerario en común tal que

al correlacionar los tres procesos de Wiener el modelo HW1-BSFX sea Q martingala libre de arbitraje.

Así mismo se supone que la correlación de los movimientos Brownianos entre cada tasa de interés y la tasa de cambio son:

$$dW_d^{Q_d} \cdot dW_f^{Q_f} = \rho_{df} dt, \quad (2.20a)$$

$$dW_d^{Q_d} \cdot dW_y^{Q_d} = \rho_{dy} dt, \quad (2.20b)$$

$$dW_f^{Q_f} \cdot dW_y^{Q_d} = \rho_{fy} dt, \quad (2.20c)$$

Existen varios numerarios que permiten que el modelo HW1-BSFX no tenga oportunidades de arbitraje, sin embargo en el presente documento se utilizará el numerario que (Brigo y Mercurio, 2006) proponen en los modelos de tasa corta de un factor, tales como (Vasicek, 1977) y (Hull y White, 1990). Se utiliza la medida T -forward Q^T , cuyo numerario es un bono cero cupón $P_u(0, T)$ con vencimiento T , esta medida permite que el valor esperado de la tasa de interés spot instantánea sea igual a su tasa de interés forward (Brigo y Mercurio, 2006). Como consecuente el numerario en el modelo HW1-BSFX (para cada uno de los tres procesos) corresponderá al bono cero cupón del país doméstico $P_d(0, T)$, es decir que la medida libre de riesgo utilizará la nomenclatura Q_d^T .

De esta manera, aplicando el teorema de Girsanov, el cual halla una medida de probabilidad equivalente a la del proceso estocástico, se tienen los dos siguientes ajustes. Primero se debe unificar la medida de los tres procesos el mercado doméstico libre de riesgo en el cual se establecerá el numerario, para lo cual se debe realizar el siguiente cambio de medida del proceso estocástico del mercado extranjero (ecuación (2.17c)).

$$dW_f^{Q_d} = dW_f^{Q_f}(t) + \rho_{fy}\sigma_y(t)dt,$$

teniendo así como resultado:

$$dx_f(t) = [-k_f x_f(t) - \sigma_f(t)\rho_{fy}\sigma_y(t)]dt + \sigma_f(t)dW_f^{Q_d}(t) \quad (2.21)$$

En este, $W_f^{Q_d}$ representa el movimiento Browniano- Q_d .

En segunda instancia se deben ajustar los tres movimientos Brownianos $W_d^{Q_d}(t)$, $W_f^{Q_d}(t)$ y $W_y^{Q_d}(t)$ que se encuentran sobre la medida Q_d , con el objetivo de incorporar la medida $T - forward Q_d^T$ descrita anteriormente. Por ende se utilizará el modelo G1++, expuesto en el capítulo 2, con el cual se calculará el nuevo drift que permita que el modelo sea Q^T martingala. Para esto se utilizará el teorema de Fubini utilizado en la ecuación (2.11) y se tendrá en cuenta que $P(0, T) = e^{\int_0^T -f(0,t)ds}$. Por lo tanto similar a Brigo se obtiene que la probabilidad de medida sobre la derivada de Radon-Nikodym corresponde a:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ^T}{dQ} &= \frac{\exp\left\{-\int_0^T r(s)ds\right\}}{P(0, T)} = \frac{\exp\left\{-\int_0^T x(s)ds - \int_0^T \theta(s)ds\right\}}{P(0, T)} \\
&= \frac{\exp\left\{-\int_0^T \int_0^t \sigma(s)e^{-k(t-s)}dW(s)dt - \int_0^T f(0, t)dt + \int_0^T \int_0^t \frac{\sigma^2(s)}{k}(1 - e^{-k(t-s)})e^{-k(t-s)}dsdt\right\}}{P(0, T)} \\
&= \frac{\exp\left\{-\int_0^T \frac{\sigma(s)}{k}(1 - e^{-k(T-s)})dW(s) - \int_0^T f(0, t)dt - \int_0^T \frac{\sigma^2(s)}{k^2}(1 - e^{-k(T-s)})^2 ds\right\}}{P(0, T)} \\
&= \exp\left\{-\int_0^T \frac{\sigma(s)}{k}(1 - e^{-k(T-s)})dW(s) - \int_0^T \frac{\sigma^2(s)}{k^2}(1 - e^{-k(T-s)})^2 ds\right\}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por otro lado la derivada de Radon-Nikodym infiere que el proceso es Q martin-gala cuando:

$$\left. \frac{dQ}{dQ_0} \right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s)ds - \int_0^t \lambda(s)dW^0(s)\right)$$

donde por el teorema de Girsanov se tiene que el cambio de drift corresponde a,

$$dW = dW^0 + \lambda(t)dt$$

de la ecuación (2.22) se evidencia que.

$$\lambda(t) = \frac{\sigma(t)}{k}(1 - e^{-k(T-t)})dt \quad (2.23)$$

teniendo así como resultado el cambio de medida para el país doméstico:

$$dW_d^{Q_d^T}(t) = dW_d^{Q_d}(t) + \frac{\sigma_d(t)}{k_d}(1 - e^{-k_d(T-t)})dt$$

Finalmente hallando el cambio de medida para cada uno de los procesos descritos anteriormente obtenemos que:

$$dW_d^{Q_d^T}(t) = dW_d^{Q_d}(t) + \sigma_{P_d}dt \quad (2.24a)$$

$$dW_f^{Q_d^T}(t) = dW_f^{Q_d}(t) + \rho_{df}\sigma_{P_d}dt \quad (2.24b)$$

$$dW_y^{Q_d^T}(t) = dW_y^{Q_d}(t) + \rho_{dy}\sigma_{P_d}dt \quad (2.24c)$$

Donde la varble σ_{P_d} corresponde a la volatilidad de un bono en el país doméstico $P_d(t, T)$ con vencimiento T . Siendo este equivalente a $\lambda(t)$ obtenido en la ecuación (2.23):

$$\sigma_{P_d} := \sigma_d(t) \frac{1 - e^{-k_d(T-t)}}{k_d}$$

Por consiguiente se tiene que las ecuaciones diferenciales parciales (2.16c), (2.21) y (2.2) para las variables dx_d , dx_f y dy respectivamente sobre la misma medida Q_d^T corresponden a,

$$dx_d(t) = [-k_d x_d(t) - \sigma_d(t)\sigma_{P_d}(t)]dt + \sigma_d(t)dW_d^{Q_d^T}(t) \quad (2.25a)$$

$$dx_f(t) = [-k_f x_f(t) - \rho_{fy}\sigma_f(t)\sigma_y(t) - \rho_{df}\sigma_f(t)\sigma_{P_d}(t)]dt + \sigma_f(t)dW_f^{Q_d^T}(t) \quad (2.25b)$$

$$dy(t) = [r_d(t) - r_f(t) - \frac{1}{2}\sigma_y(t)^2 - \rho_{dy}\sigma_y(t)\sigma_{P_d}(t)]dt + \sigma_y(t)dW_y^{Q_d^T}(t) \quad (2.25c)$$

Finalmente se aplica el lema de Itô a las ecuaciones diferenciales estocásticas para

obtener como resultado:

$$x_d(T) = e^{-k_d(T-t)}x_d(t) + \int_t^T e^{-k_d(T-s)}\sigma_d(s)dW_d^{Q_d^T}(s) - \int_t^T e^{-k_d(T-s)}\sigma_d(s)\sigma_P(s)ds, \quad (2.26a)$$

$$x_f(T) = e^{-k_f(T-t)}x_f(t) + \int_t^T e^{-k_f(T-s)}\sigma_f(s)dW_f^{Q_d^T}(s) - \int_t^T e^{-k_f(T-s)}[\rho_{fy}\sigma_f(s)\sigma_y(s) + \rho_{df}\sigma_f(s)\sigma_{P_d}(s)]ds, \quad (2.26b)$$

$$y(T) = y(t) + \int_t^T \sigma_y(s)dW_y^{Q_d^T}(s) + \int_t^T [r_d(s) - r_f(s) - \frac{1}{2}\sigma_y(s)^2 - \rho_{dy}\sigma_y(s)\sigma_{P_d}(s)]ds. \quad (2.26c)$$

Capítulo 3

Calibración y Datos

3.1. Calibración

La calibración consta de tres etapas: primero se calibrarán los parámetros asociados a cada mercado local independientemente. Los parámetros k_d y $\sigma_d(t)$ se calibrarán utilizando el modelo HW1 con insumos del mercado colombiano y los parámetros k_f y $\sigma_f(t)$ se calibraran utilizando el mercado estadounidense. Segundo se hallaran las correlaciones ρ_{df} , ρ_{dy} y ρ_{fy} con datos históricos. Tercero y último se calibrará la volatilidad $\sigma_y(y)$ FX del modelo HW1-BSFX utilizando información de mercado sobre las opciones USDCOP.

3.1.1. Parámetros k_u y $\sigma_u(t)$

El documento de (Bloomberg, 2016) y la mayoría de literatura argumenta que la mejor manera de calibrar los parámetros σ_t y k , los cuales representan la volatilidad de las tasas de interés en el corto plazo y la velocidad con la cual la tasa se revierte a su media de largo plazo, es utilizando la información que provenga del mercado de Swaptions, cuyo subyacente es una tasa de interés. Sin embargo, en el mercado colombiano no existen este tipo de instrumentos a diferencia de los países desarrollados. Esto nos conduce a abordar métodos alternativos de calibración (Restrepo y Botero, 2007). Por ende siguiendo a (Brigo y Mercurio, 2006) donde se argumenta que el modelo de (Hull y White, 1990) es una extensión del modelo de (Vasicek, 1977) en

el cual el diferencial de las tasas de interés de estos dos modelos está definido por:

$$\text{Vasicek,} \quad dr(t) = k[\Theta - r(t)]dt + \sigma dW(t) \quad (3.1)$$

$$\text{Hull-White,} \quad dr(t) = [\Theta(t) - kr(t)]dt + \sigma dW(t) \quad (3.2)$$

Estos dos modelos dependen de tres parámetros, el parámetro de reversión a la media Θ , la volatilidad de corto plazo σ y la velocidad con la cual se revierte la tasa a su media k . Se evidencia que en el modelo de Vasicek, ecuación (3.1), el parámetro de reversión a la media Θ es constante en el tiempo, mientras que Hull-White, ecuación (3.2), considera que el parámetro de reversión a la media $\Theta(t)$ es variable en el tiempo y determinístico, donde este es el mismo parámetro descrito en apartado 2.1. Así mismo, se puede inferir que los parámetros σ y k del modelo Vasicek son los mismos que los del modelo Hull-White. Por lo tanto, se supone que el resultado de cualquier método de estimación sobre los parámetros σ y k en el modelo de Vasicek es equivalente a la estimación de estos dos parámetros en el modelo de Hull-White. De modo que, se procederá a emplear el método de Máxima Verosimilitud (MV) en el modelo de Vasicek para calcular los parámetros σ y k utilizando información histórica sobre las tasas de interés.

El proceso de calibración mediante el método de MV, considera que la ecuación (3.1) no contempla un escenario libre de riesgo, permitiendo una estimación adecuada de los parámetros σ y k , pues al no incorporar una medida neutral al riesgo, cuando se realice el proceso de estimación de la tasa, los parámetros permitirán modelar el verdadero comportamiento de las tasas de interés. Esto indica que no se realizará un cambio de medida a la ecuación (3.1) (Brigo y Mercurio, 2006). Siguiendo a Brigo, se aplica el lema de Itô a la ecuación diferencial del modelo de Vasicek ecuación (3.1), teniendo así que la tasa de interés esta definida por,

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \Theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u), \quad (3.3)$$

Donde $r(t)$ es normalmente distribuida con media y varianza,

$$\mathbb{E}\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = r(s)e^{-k(t-s)} + \Theta\left(1 - e^{-k(t-s)}\right) \quad (3.4)$$

$$\text{Var}\{r(t)|\mathcal{F}_s\} = \frac{\sigma^2}{2k}\left[1 - e^{-2k(t-s)}\right] \quad (3.5)$$

Por lo tanto las ecuaciones de los parámetros corresponden a $\alpha := e^{-k\delta}$, y $V^2 = \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k\delta})$. El parámetro δ denota los días analizados para un marco de tiempo en el cual se tiene información histórica de la tasa de interés corta observable.

Aplicando el método de MV a la ecuación (3.3) se tiene al igual que en (Brigo y Mercurio, 2006) que los parámetros de máxima verosimilitud V , Θ y α son,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{n \sum_{i=1}^n r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2 - (\sum_{i=1}^n r_{i-1})^2}, \\ \hat{\Theta} &= \frac{\sum_{i=1}^n [r_i - \hat{\alpha} r_{i-1}]}{n(1 - \hat{\alpha})}, \\ \hat{V}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [r_i - \hat{\alpha} r_{i-1} - \hat{\Theta}(1 - \hat{\alpha})]^2 \end{aligned}$$

Despejando se tienen los valores óptimos de $\hat{\sigma}$ y \hat{k} tales que,

$$\hat{k} = \frac{-\log(\hat{\alpha})}{dt} \quad (3.6)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2kV^2}{(1 - e^{-2\hat{k}\delta})} \quad (3.7)$$

Este resultado hace referencia al valor constante de los parámetros σ y k que modelan el comportamiento de la tasa de interés corta. Sin embargo, el modelo HW1-BSFX planteado anteriormente considera una volatilidad $\sigma(t)$ dependiente del tiempo, lo cual implica, que dada la inexistencia del mercado de swaptions, se asume una volatilidad constante en el modelo HW1-BSFX para cada tasa de intres, $r_d(t)$ y $r_f(t)$. Adicionalmente, utilizando estos parámetros se grafica el modelo Hull-White para cada tasa de interés sobre su respectiva medida neutral al riesgo Q_u teniendo como resultado las siguientes curvas.

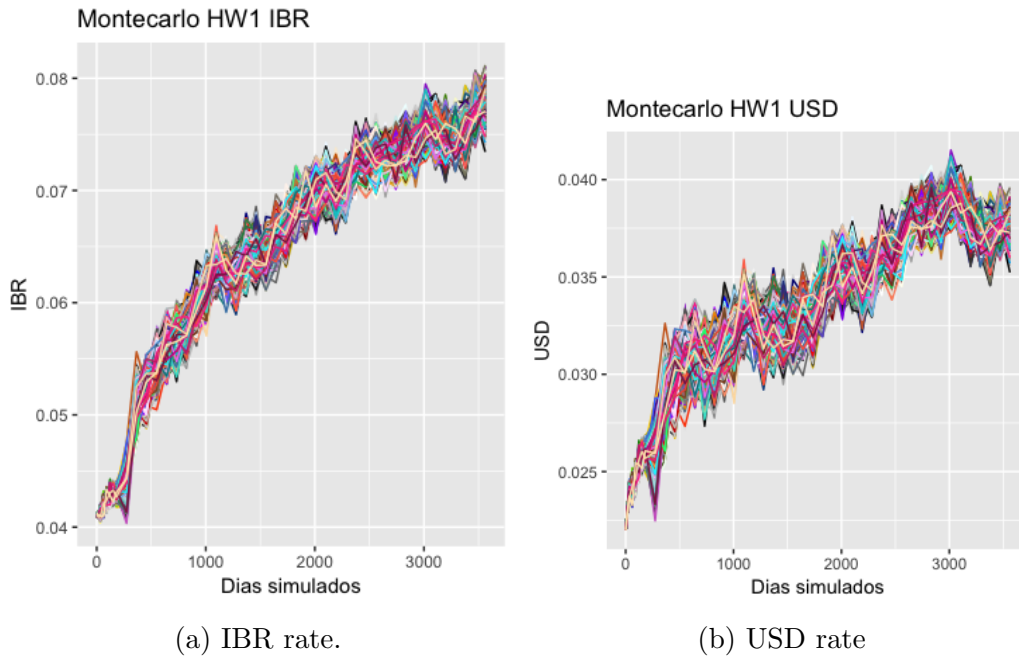


Figura 3.1: Modelo Hull-White sobre la tasa IBR y USD.

3.1.2. Correlaciones Históricas

Para el cálculo de las correlaciones ρ_{df} , ρ_{dy} y ρ_{fy} se considerará una serie de datos históricos sobre cada tasa de interés corta observable (doméstica y foránea). De esta manera se calculará una correlación ρ_{df} , ρ_{dy} y ρ_{fy} que haga referencia a, la correlación promedio de la curva de la tasa de interés doméstica respecto a la foránea, la curva de la tasa de interés doméstica respecto a la tasa de cambio y la tasa de interés foránea respecto a la tasa de cambio.

3.1.3. Volatilidad FX

En el último paso se calibrará la volatilidad del modelo de (Black y Scholes, 1973) $\sigma_y(t)$ utilizando el mercado de opciones ATM de USDCOP a diferentes plazos (Bloomberg, 2016). En el modelo de Black al considerarse que las tasas de interés son constantes, la volatilidad del proceso σ_y es equivalente a la volatilidad implícita del mercado FX. Sin embargo en el modelo propuesto HW1-BSEFX la volatilidad del proceso FX difiere a la de Black, ya que en este se consideran la volatilidad de las

tasas de interés. Por consiguiente, el objetivo de este paso de calibración corresponde a encontrar el valor óptimo de σ_y tal que minimice la diferencia entre la volatilidad implícita de la tasa de cambio, observable en el mercado, con la volatilidad estimada del proceso forward de la tasa de cambio, en la cual se contempla estocasticidad en las tasas de interés. Para esto, en primera instancia se empleará el proceso forward de la tasa de cambio, para que luego se calcule la variación cuadrática del proceso. En segunda instancia se realizará el paso de optimización. La tasa de cambio forward FX esta definido por,

$$\hat{Z}(t) = Z(t) \frac{P_f(t, T)}{P_d(t, T)}$$

Sobre la medida Q_d^T en la cual el proceso tiene cero drift, se tiene que la ecuación diferencial de la tasa de cambio corresponde a,

$$\begin{aligned} d\hat{Z}(t) = & \hat{Z}(t) \left[\sigma_d \frac{1 - e^{-k_d(T-t)}}{k_d} dW_d^{Q_d^T}(t) \right. \\ & - \sigma_f \frac{1 - e^{-k_f(T-t)}}{k_f} dW_f^{Q_d^T}(t) \\ & \left. + \sigma_y(t) dW_y^{Q_d^T}(t) \right] \end{aligned}$$

Para este proceso se tiene que la volatilidad depende de,

$$\boldsymbol{\sigma}(t, T) := \left[\frac{\sigma_d}{k_d} (1 - e^{-k_d(T-t)}), \frac{\sigma_f}{k_f} (1 - e^{-k_f(T-t)}), \sigma_y(t) \right]$$

Se evidencia que similar a (Bloomberg, 2016) la volatilidad de este proceso depende de las volatilidades de los procesos de las tasas de interés, de esta manera se tiene que la variación cuadrática del proceso FX es igual a,

$$\sigma^{est}(t_i)^2 t_i = \int_0^{t_i} \langle \boldsymbol{\sigma}(t, t_i), \boldsymbol{\rho}_M \boldsymbol{\sigma}(t, t_i) \rangle dt, \quad i = 1, 2, \dots$$

En esta ecuación se puede identificar que la volatilidad estimada σ^{est} es variable en el tiempo t_i . Donde i denota el tenor o plazo al vencimiento de la superficie de volatilidad observada en el mercado y t_i hace referencia al plazo de días del tenor, por ejemplo si $i = 3M$ entonces $t_{3M} = 90$. Adicionalmente, se supone que la volatilidad

de Black $\sigma_y(t)$ es constante para cada intervalo del tiempo t_i .

Resolviendo la variación cuadrática de manera similar que en artículo de (Zeng)¹ y utilizando la misma notación de Brigo para simplificar el álgebra $H_u(T-t) = \frac{1}{k_d}[1 - e^{-k_u(T-t)}]$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\sigma^{est}(t_i)^2 t_i &= (t_i - t_{i-1}) \sigma_y(t_i)^2 \\
&+ 2\sigma_y(t_i) \left[\rho_{dy} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_d H_d(t_i - s) ds - \rho_{fy} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_f H_f(t_i - s) ds \right] \\
&+ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_d^2 H_d^2(t_i - s) ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_f^2 H_f^2(t_i - s) ds \\
&- 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \rho_{df} \sigma_d \sigma_f H_d(t_i - s) H_f(t_i - s) ds \\
&+ \sigma^{est}(t_{i-1})^2 t_{i-1}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

El proceso de optimización constará de hallar el valor óptimo de la volatilidad $\sigma_y(t)$ tal que minimice la sumatoria de las diferencias al cuadrado, para cada plazo al vencimiento o tenor, de la volatilidad implícita del mercado sobre opciones ATM de la tasa de cambio USDCOP y la volatilidad estimada en la ecuación (3.8), resultado de la variación cuadrática del proceso de la tasa forward FX. Por consiguiente la ecuación a optimizar corresponde a,

$$\sum_{i=1W}^{n=2Y} [\sigma^{est}(t_i) - \sigma^{mkt}(t_i)]^2; \quad i = \{1W, 1M, \dots, 18M, 2Y\} \tag{3.9}$$

3.2. Datos

Se utilizarán dos grupos de datos provenientes de Precia². El primer grupo de datos se empleará en la estimación de los parámetros de Hull-White. El segundo conjunto de datos se realiza con el objetivo de calibrar la volatilidad de Black σ_y en la anterior sección, por la cual se acudirá al mercado de las Opciones.

¹El cálculo se encuentra detallado en el apartado *Pricing cross-currency European contingent claims under HW1F*.

²Entidad colombiana proveedora de precios para la valoración de instrumentos financieros

3.2.1. Tasas de Interés

Los modelos de (Vasicek, 1977) y (Hull y White, 1990) son instrumentos para simular la tasa de interés, por lo tanto al calibrar sus respectivos parámetros con una serie histórica, se requiere usar series sobre las tasas de interés corta observable del mercado. De esta manera se tomará para un marco de tiempo de dos años el IBR, Indicador Bancario de Referencia, para calibrar los los parámetros k_d y σ_d asociados al país doméstico, Colombia y la FEER Federal Funds Effective Rate para calibrar los los parámetros k_f y σ_f asociados al país foraneo, Estados Unidos. Los datos históricos obtenidos se observan en la siguiente figura 3.2:

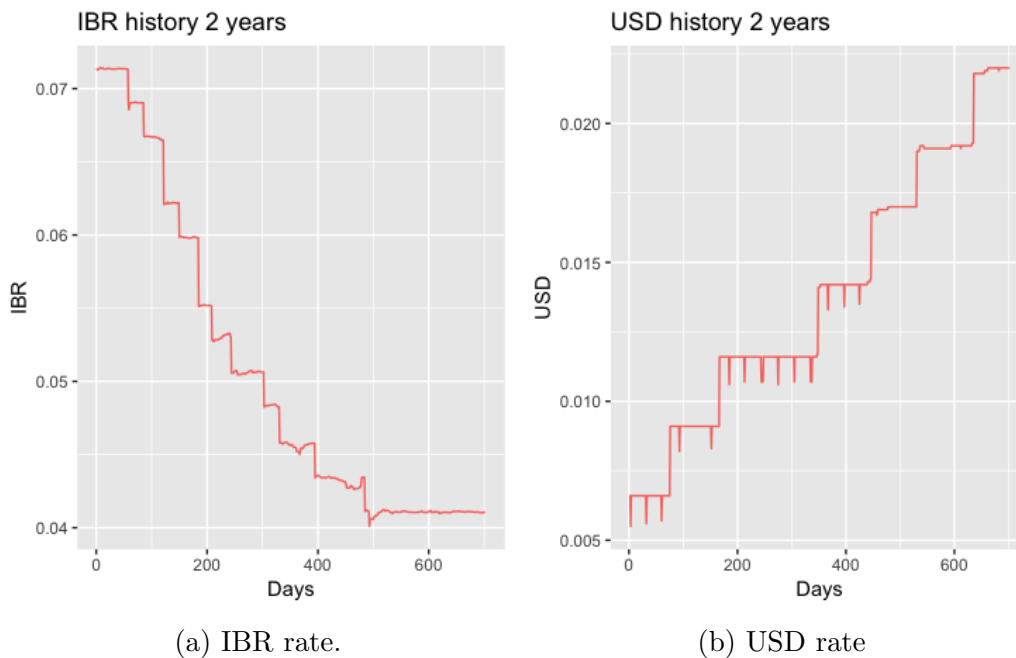


Figura 3.2: Histórico sobre la tasa IBRON y USDON.

3.2.2. Volatilidad de opciones USDCOP

Para calibrar la volatilidad $\sigma_y(t_i)$ descrita en apartado 3.1.3, se tomará la superficie de volatilidad implícita sobre opciones USDCOP publicada por Precia, donde esta recoge negociaciones del mercado OTC. La volatilidad $\sigma^{mkt}(t_i)$ en la ecuación (3.9) corresponde a la volatilidad implícita que se utiliza en las negociaciones de primas sobre opciones *Call Europeas Play Vanilla*, cuyo subyacente es la tasa de cambio

USDCOP, adicionalmente el método de valoración de la prima es la formula de Black Scholes FX. En la presente superficie, solo se tendrá en cuenta las opciones ATM a diferentes plazos al vencimiento o tenor.

Capítulo 4

Simulación de la TRM

El proceso de simulación de la TRM se realizará utilizando el método de Monte Carlo. Este método consta de simular un activo financiero en una o varias fechas futuras determinadas (Brigo y Mercurio, 2006). El proceso de simulación consiste en crear diversos destinos del activo financiero mediante la simulación de trayectorias aleatorias dependientes de una tendencia y volatilidad establecida, donde seguido a esto se calcula el promedio aritmético de todas las trayectorias. Con el objetivo de simular resultados favorables, cada uno de los escenarios simulados dependen del punto de partida (spot) y la función de propagación del activo financiero.

En el presente documento se simulará la tasa de cambio a diferentes fechas futuras, en las cuales la tasa de cambio simulada a mayor vencimiento es dependiente en cada una de sus trayectorias simuladas a menores vencimientos; de este modo se puede observar como se comportan los caminos o trayectorias a medida que transcurre el tiempo.

La función a simular es la función $y(T)$ 2.26c, la cual se evidencia que es dependiente de $r_d(s)$ y $r_f(s)$, unificando las ecuaciones (2.16a) y (2.17a) sobre el indicador u , $r_u(t) = \theta_u(t) + x_u(t)$ y se supone que la volatilidad de cada tasa de interés σ_d y σ_f son constantes, por lo tanto se tiene que,

$$y(T) = y(t) + \int_t^T \sigma_y(s) dW_y^{Q_d^T}(s) + \int_t^T \left[(\theta_d(t) + x_d(t)) - (\theta_f(t) + x_f(t)) - \frac{1}{2} \sigma_y(s)^2 - \rho_{dy} \sigma_y(s) \sigma_{P_d}(s) \right] ds.$$

Seguido a esto se utilizan las ecuaciones (2.26a) y (2.26b), adicionalmente se utiliza la notación $h_u(T-s) = e^{-k_u(T-s)}$ para simplificar el álgebra, obteniendo de esta manera y similar a (Bloomberg, 2016), se tiene como gran resultado que,

$$\begin{aligned}
y(T) &= y(t) + \int_t^T \sigma_y(s) dW_y^{Q_d^T}(s) \\
&+ \int_t^T \left[\theta_d(t) - \theta_f(t) - \frac{1}{2} \sigma_y(s)^2 - \rho_{dy} \sigma_y(s) \sigma_{P_d}(s) \right] ds \\
&+ \int_t^T h_d(T-s) x_d(s) ds + \int_t^T h_f(T-s) x_f(s) ds \\
&+ \int_t^T \int_t^z h_d(z-s) \sigma_d dW_d^{Q_d^T}(s) dz + \int_t^T \int_t^z h_f(z-s) \sigma_f dW_f^{Q_d^T}(s) dz \\
&- \int_t^T \int_t^z h_d(T-s) \sigma_d \sigma_{P_d}(s) ds dz \\
&- \int_t^T \int_t^z h_f(t-s) [\rho_{fy} \sigma_f \sigma_y(s) + \rho_{df} \sigma_f \sigma_{P_d}(s)] ds dz
\end{aligned}$$

Donde aplicando el teorema de Fubini tal como se realizó en la ecuación (2.11) se tiene que¹,

1

$$\begin{aligned}
\int_t^T \int_t^z h_u(z-s) \sigma_u(s) dW_u^{Q_d^T}(s) dz &= \int_t^T \int_s^T h_u(z-s) \sigma_u(s) dz dW_u^{Q_d^T}(s) \\
&= \int_t^T \sigma_u(s) \int_s^T h_u(z-s) dz dW_u^{Q_d^T}(s) = \int_t^T \sigma_u(s) H_u(z-s) dW_u^{Q_d^T}(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(T) &= y(t) + \int_t^T \sigma_y(s) dW_y^{Q_d^T}(s) \\
&+ \int_t^T \left[\theta_d(t) - \theta_f(t) - \frac{1}{2} \sigma_y(s)^2 - \rho_{dy} \sigma_y(s) \sigma_{P_d}(s) \right] ds \\
&+ H_d(T-t)x_d(t) + H_f(T-t)x_f(t) \\
&+ \int_t^T H_d(T-s) \sigma_d dW_d^{Q_d^T}(s) + \int_t^T H_f(T-s) \sigma_f dW_f^{Q_d^T}(s) \\
&- \int_t^T H_d(T-s) \sigma_d \sigma_{P_d}(s) ds \\
&- \int_t^T H_f(T-s) [\rho_{fy} \sigma_f \sigma_y(s) + \rho_{df} \sigma_f \sigma_{P_d}(s)] ds
\end{aligned}$$

Donde la media y la varianza son,

$$\begin{aligned}
E\{y(T)|\mathcal{F}_t\} &= y(t) \\
&+ \int_t^T \left[\theta_d(t) - \theta_f(t) - \frac{1}{2} \sigma_y(s)^2 - \rho_{dy} \sigma_y(s) \sigma_{P_d}(s) \right] ds \\
&+ H_d(T-t)x_d(t) + H_f(T-t)x_f(t) - \int_t^T H_d(T-s) \sigma_d \sigma_{P_d}(s) ds \\
&- \int_t^T H_f(T-s) [\rho_{fy} \sigma_f \sigma_y(s) + \rho_{df} \sigma_f \sigma_{P_d}(s)] ds \\
\text{Var}\{y(T)|\mathcal{F}_t\} &= \int_t^T \sigma_y(s) ds + \int_t^T H_d^2(T-s) \sigma_d^2 ds + \int_t^T H_f^2(T-s) \sigma_f^2 ds \\
&+ \int_t^T \rho_{yd} H_d(T-s) \sigma_y(s) \sigma_d ds + \int_t^T \rho_{yf} H_f(T-s) \sigma_y(s) \sigma_f ds \\
&+ \int_t^T H_d(T-s) H_f(T-s) \rho_{dy} \sigma_d \sigma_f ds
\end{aligned}$$

Finalmente en el proceso de simulación consta de hallar trayectorias aleatorias con la media y varianza calculadas, en el cual se estimara la TRM al vencimiento t y así sucesivamente hasta llegar al mayor plazo al vencimiento T .

Capítulo 5

Resultados y conclusiones

5.1. Resultados

A continuación se ilustra los resultados obtenidos de la calibración y simulación descrita en los capítulos 3 y 4. Una vez realizados los procesos de calibración sobre las correlaciones descritas en la sección 3.1.2 y los parámetros σ_u y k_u en la sección 3.1.1 tenemos que:

Cuadro 5.1: Resultados de correlaciones, velocidad de reversión y volatilidad

Parámetro	Valor
ρ_{dy}	-0.1017906
ρ_{df}	-0.8866104
ρ_{yf}	0.2722641
k_d	0.9917077
k_f	0.5003195
σ_d	0.006870005
σ_f	0.005428643

Luego utilizando estos parámetros se calibra la volatilidad FX descrita en el apartado 3.1.3, ilustrando de esta manera,

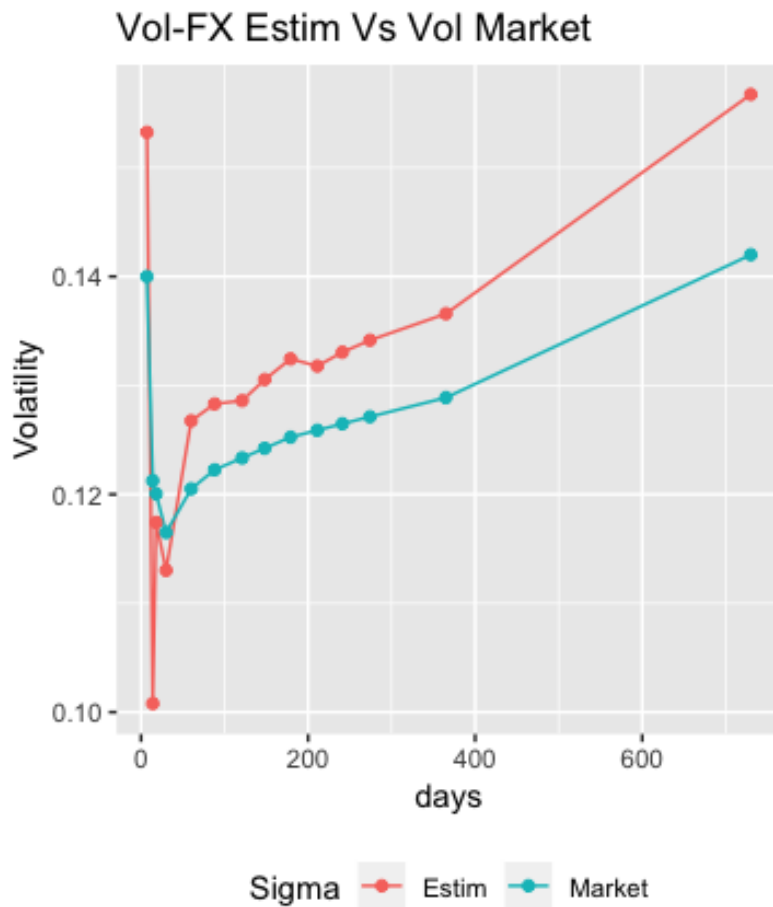
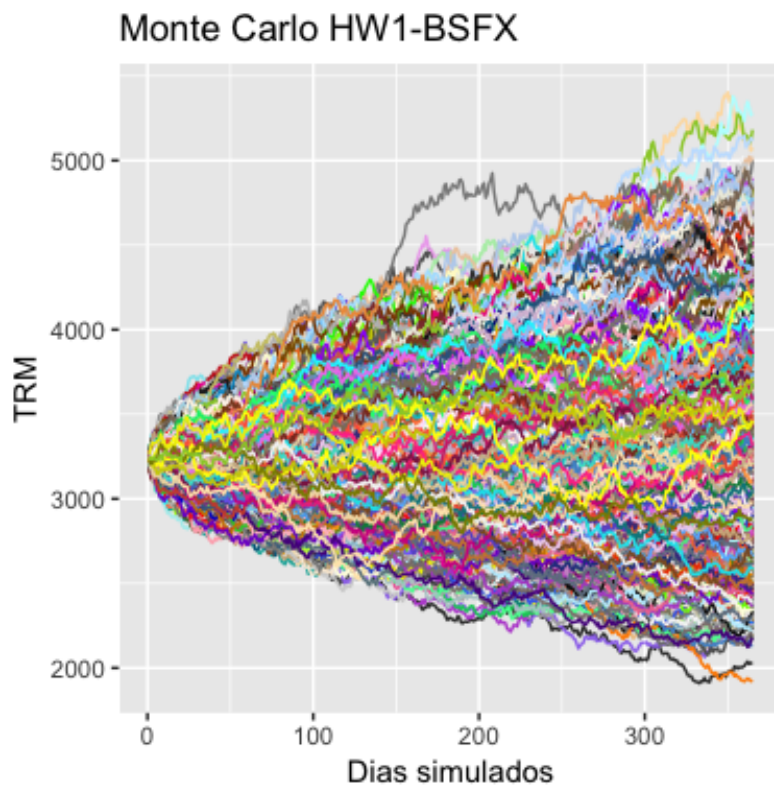


Figura 5.1: Los indicadores MTM y Optim hacen referencia a la volatilidad del mercado estimada respectivamente.

En esta se puede evidenciar que la volatilidad estimada es mayor a la del mercado, esto se puede presentar porque la volatilidad del mercado implícita es valorada con (Black y Scholes, 1973) utilizando tasas de interés constantes, mientras que la volatilidad optima considera la volatilidad de cada tasa de interés causando así una mayor volatilidad.

En el proceso de simulación se calculan 10000 caminos proyectados por el método de Monte Carlo para un marco de tiempo de los próximos 365 días, tomando como fecha de inicio el 2 de diciembre de 2018. En el siguiente gráfico se observa una tendencia alcista en la TRM.



A continuación se compara el método de Monte Carlo del modelo HW1-BSFX con el modelo BSFX, calculando la media aritmética de diez mil simulaciones para cada uno. Donde en la figura 5.2 se muestra el resultado de la comparación realizada.

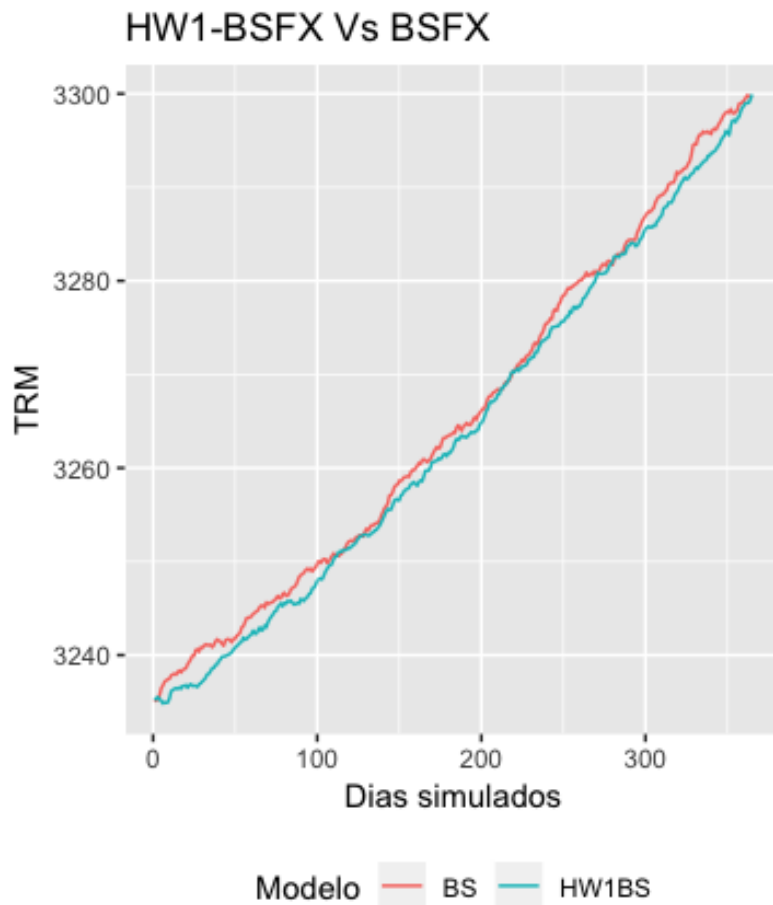
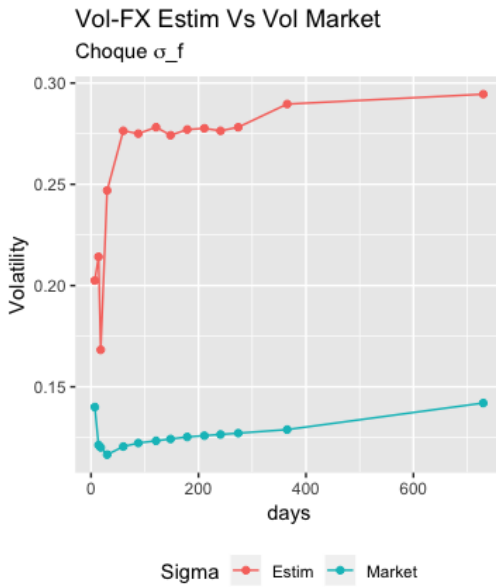


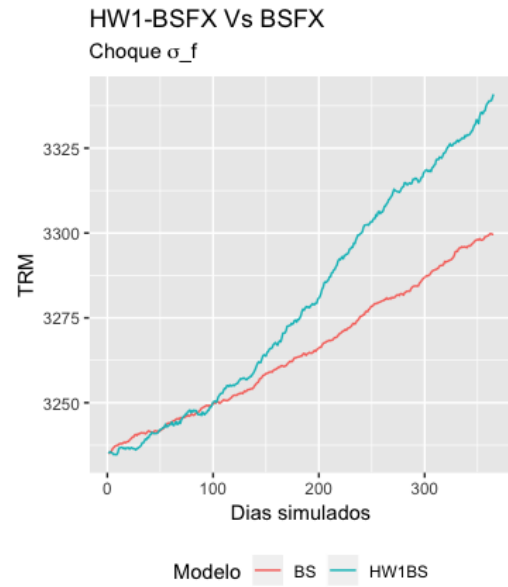
Figura 5.2: Comparación de modelos

En esta se evidencia que el camino de la TRM simulado por el modelo de HW1-BSFX es similar al de BSFX, lo cual puede ser causado por la baja volatilidad de las tasas de interés, cuyos valores son muy cercanos a cero. Cómo se ilustra en la figura 3.2, en el marco de la calibración de dos años la tasa IBR (FEER) ha estado bajando (subiendo) sus niveles con una tendencia clara, pero con niveles de volatilidad bajos, disminuyendo de esta manera el efecto estocástico sobre las tasas de interés.

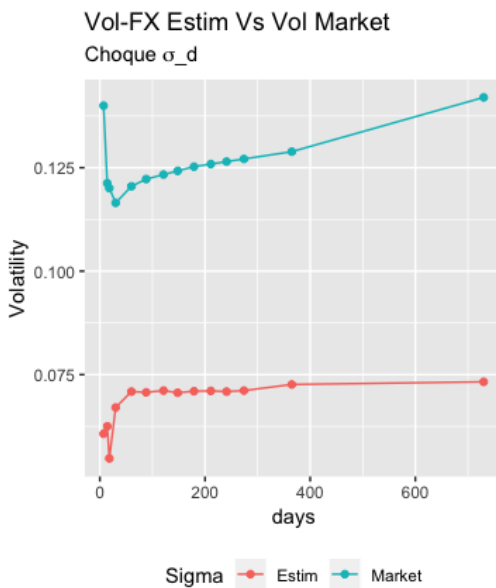
Finalmente se realizó un choque en la volatilidad de las tasas de interes con el objetivo de identificar si el modelo HW1-BSFX replica adecuadamente movimientos estocásticos en la tasas de interes teniendo de esta manera los siguientes resultados,



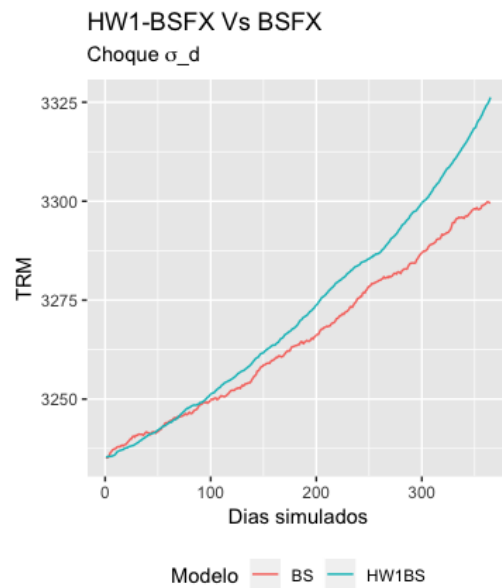
(a) Vol-FX $\sigma_f * 100$.



(b) TRM $\sigma_f * 100$



(c) Vol-FX $\sigma_d * 100$.



(d) TRM $\sigma_d * 100$

Figura 5.3: Resultado sobre la volatilidad FX y la TRM ante choques en la volatilidad de las tasas de interés.

Se puede identificar que incrementos en la volatilidad de las tasas de interés aumentan la TRM simulada, evidenciando diferencias con el modelo de BSFX con

tasas de interés constantes y siendo estas mayores al ante un choque en la volatilidad de la tasa de interés del país foráneo. No obstante la calibración y las condiciones actuales del mercado no permiten que el modelo tenga este tipo de volatilidades causando así una similitud entre los dos modelos.

5.2. Conclusiones

Se tienen resultados consistentes con el modelo de (Black y Scholes, 1973), donde el nivel de la curva y su comportamiento es semejante al modelo HW1-BSFX. Sin embargo los bajos niveles en la volatilidad, dadas las condiciones de mercado, de las tasas de interés puede que estén neutralizando o suavizando el componente estocástico que le daría una mayor precisión al modelo. No obstante, si alguno de los dos mercados se encuentra en crisis económica y hay incertidumbre sobre el alza de las tasas de interés el modelo BSFX con tasas de interés constantes no captaría adecuadamente los movimientos de la TRM en el futuro, a diferencia del modelo HW1-BSFX.

El presente modelo, es sensible a los datos históricos que este utiliza para calibrar, incentivando de esta manera tomar una muestra más grande siempre y cuando se presente liquidez en el mercado colombiano de derivados; o por otra parte se puede utilizar el mercado de swaptions cuando el mercado colombiano sea más desarrollado.

Una extensión del modelo puede ser incorporar el modelo de Heston al modelo HW1-BSFX expuesto, en cual se considera que, además de contemplar estocasticidad en las tasas de interés, se asume que la volatilidad de la tasa de cambio sigue también un comportamiento estocástico.

Bibliografía

Fischer Black y Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.

Bloomberg. Fx black-scholes model with stochastic rates using the hull-white one-factor short-rate models. *Bloomberg database*, 2016.

Damiano Brigo y Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*, tomo 2. 2006.

Marvo Di Francesco. A general gaussian interest rate model consistent with the current term structure. *International Scholarly Research Network*, 2012.

John Hull y Alan White. Pricing interest-ratederivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4), 1990.

Diego Alexander Restrepo y Juan Carlos Botero. Modelos unifactoriales de tipos de interes: Aplicacion al mercado colombiano., 2007.

Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, 1977.

Yan Zeng. Elements of hull-white model.