



Universidad del
Rosario

Facultad
de Economía

Papel del aprendizaje de expectativas en la amplificación y
persistencia del ciclo económico

by

Carlos Andrés Giraldo Rendón

Submitted in Partial Fulfillment
of the
Requirements for the Degree
Doctor of Philosophy

Supervised by
Fernando Jaramillo

Facultad de Economía
Doctorado en Economía
Universidad del Rosario

Bogotá - Colombia

2022

Curriculum Vitae

Carlos Giraldo is a Colombian Economist from the Universidad de Antioquia, where he graduated as a fellow with honors. He earned master's degrees in Economics at the Universidad de los Andes and in Environmental Economics and Natural Resources at the Universidad de los Andes and the University of Maryland (USA).

Mr. Giraldo has served as Director of Economic Studies at the Latin American Reserve Fund since 2016. Previously, at the same entity, he served as Director of Research and Development, Deputy Director of Economic Studies, and International Economist at the Directorate of Economic Studies. He served as advisor to the Congress of the Republic of Colombia, Young Researcher at the Center for Economic Research at the Universidad de Antioquia, and professor of Macroeconomics at the Universidad de los Andes and the Universidad de of Antioquia.

Carlos Giraldo es colombiano y Economista de la Universidad de Antioquia, de donde se graduó como becario con honores. Realizó estudios de Maestría en Economía en la Universidad de los Andes, y en Economía Ambiental y Recursos Naturales en la Universidad de los Andes y en la Universidad de Maryland (Estados Unidos).

Desde 2016, se desempeña como Director de Estudios Económicos en el Fondo Latinoamericano de Reservas. Previamente, en la misma entidad, fue Director de Investigación y Desarrollo; Director Adjunto de Estudios Económicos; y Economista Internacional de la Dirección de Estudios Económicos. Ha sido Asesor del Congreso de la República de Colombia; Joven Investigador del Centro de Investigaciones Económicas de la Universidad de Antioquia; y profesor de Macroeconomía en la Universidad de los Andes y en la Universidad de Antioquia. Es autor de publicaciones en libros y revistas especializadas en Macroeconomía.

Acknowledgments

I am extremely grateful to each of the people who have directly and indirectly contributed to this work, for me to opt for the Doctor's degree in Economics. Many were the moments where I needed strength, help and support, when I felt I could not make it, and they were always beside me.

I thank Fernando Jaramillo for his invaluable guidance and support throughout the entire work process. I thank those who helped and supported me during each and every stage, from the initial idea to the development and feedback on the paper. Among them, I would like to convey my special thanks to Nicolás Moreno, Darío Perdomo, Julián Parra, Oscar Valencia, Viviana Monroy, Iader Giraldo, Fredy Castañeda, Daniela Gómez and Camilo Contreras. And likewise, I thank Oscar Ávila, Jesús Otero, Pablo Cuba and Eduardo Morón, my thesis committee members, for their valuable comments and contributions to the quality of this research project.

Thanks to Marisela, my wife, for her infinite patience, support, love and understanding throughout these years. I thank my mother for her endless prayers, filled with her unwavering faith. I thank my daughter Amelia (coming soon!) for giving me additional motivation, our pet (Lupita) always accompanying me during long working days. And I thank my great friends, Jair and Alfonso.

I thank the Universidad del Rosario for its substantial support, as well as the Latin American Reserve Fund (FLAR), where I have grown, both professionally and personally.

Estoy muy agradecido con cada una de las personas que directa e indirectamente han contribuido a este trabajo para optar al título de Doctor en Economía. Fueron muchos los momentos en los cuáles necesité fuerza, ayuda y apoyo, en los que pensé que no podía más y ahí estuvieron.

Agradezco a Fernando Jaramillo su gran guía y apoyo a lo largo de todo el proceso de trabajo. A quienes me ayudaron y apoyaron en cada etapa del trabajo, desde la idea inicial hasta el desarrollo y comentarios sobre el trabajo. Entre ellos destaco

a Nicolás Moreno, Darío Perdomo, Julián Parra, Oscar Valencia, Viviana Monroy, Iader Giraldo, Fredy Castañeda, Daniela Gómez y Camilo Contreras. También a mis jurados, Oscar Ávila, Jesús Otero, Pablo Cuba y Eduardo Morón, por sus valiosos comentarios y aportes a la calidad del presente trabajo.

A Marisela, mi esposa, doy gracias por su infinita paciencia, apoyo, amor y comprensión a lo largo de estos años. A mi mamá, agradezco por sus infinitas oraciones con su fe inquebrantable. A mi hija Amelia (en camino) por darme motivación extra, a nuestra mascota (Lupita) siempre acompañándome durante largas jornadas de trabajo. A mis grandes amigos Jair y Alfonso.

Agradezco a la Universidad del Rosario por su gran apoyo, al igual que al FLAR dónde he crecido profesional y personalmente.

Resumen

El interés por analizar el papel del sector financiero en el ciclo económico ha resurgido a partir de las últimas crisis financieras, dado que, cuando las disrupciones se originan en este mercado, pueden generar mayor volatilidad y persistencia de las variables macroeconómicas (Queralto (2020)). En este sentido, la modelación macroeconómica de los ciclos económicos reales ha tenido el reto de emular la volatilidad y persistencia observadas en estas variables, especialmente el producto.

A partir de la dificultad que presentan los modelos de ciclos de negocios reales estándar para generar el comportamiento observado del producto sin tener que recurrir a choques exógenos de tecnología (Eichenbaum and Singleton (1986); Milani (2007); Galí and Rabanal (2004)), la modelación macroeconómica ha presentado importantes avances metodológicos como los hábitos de consumo y fricciones financieras, entre otros. En estos, el supuesto ampliamente dominante ha sido la racionalidad de expectativas, el cual implica que los agentes conocen la estructura y los parámetros del modelo macroeconómico subyacente a su realidad.

Sin embargo, la dominancia en el uso de la hipótesis de expectativas racionales contrasta con la evidencia empírica que presenta resultados mixtos sobre el cumplimiento de esta hipótesis. Por ejemplo, Friedman (1980), Jongen and Willem (2008), Miah et al. (2016) y Prat and Uctum (2018) no encuentran evidencia a favor de la racionalidad en las encuestas de tasas de interés para los EE.UU. Esto ha motivado el análisis de la racionalidad limitada de los agentes y sus efectos en la modelación macroeconómica (Kozłowski et al. (2020)).

Esta temática general enmarca el presente trabajo, el cual está desarrollado en tres capítulos que no están necesariamente conectados o presentan causalidad entre ellos, puesto que cada uno está motivado de forma individual y está autocontenido.

El primer capítulo evalúa la hipótesis del cumplimiento de las expectativas racionales para las encuestas de tasas de interés de los bancos centrales de Brasil, Chile y Colombia. Con base en un análisis cuantitativo, concluye que no hay evidencia que sustente el cumplimiento de la hipótesis de expectativas racionales en las encuestas.

Este resultado aporta evidencia a la escasa literatura sobre el tema en América Latina, a partir del uso de un conjunto de métricas para garantizar la robustez de los resultados para medidas de consenso como la media y la mediana. Asimismo, contribuye a la evidencia existente en el ámbito global que sustenta la importancia de la racionalidad limitada para el análisis y la modelación macroeconómica.

El segundo capítulo analiza si la implementación del aprendizaje adaptativo (una forma de racionalidad limitada) en un modelo de ciclo de negocios estándar tiene un efecto diferenciado sobre la volatilidad y persistencia del producto según el mercado (laboral o financiero) de origen de dicho aprendizaje, calibrado para cifras observadas de los EE.UU. Este análisis parte de lo hallado por Eusepi and Preston (2012), y de forma novedosa separa y analiza la fuente de aprendizaje de expectativas por tipo de mercado. El estudio muestra con claridad la importancia del aprendizaje en el mercado financiero (de capital) como factor que más contribuye a la volatilidad del producto por medio de la mayor volatilidad de la inversión, así como su capacidad de ajuste a las cifras observadas. Estos resultados son robustos ante dos tipos de ganancia de aprendizaje utilizados (constante y decreciente).

En línea con el segundo capítulo, el tercer capítulo analiza los efectos del aprendizaje de expectativas sobre dos modelos con fricciones financieras de Carlstrom and Fuerst (1997) y Carlstrom and Fuerst (1998), que presentan una visión específica más cercana a cómo funciona el mercado financiero en la realidad. En particular, se pregunta si el aprendizaje de expectativas le agrega mayor volatilidad al producto en los modelos con fricciones financieras de Carlstrom and Fuerst (1997) y Carlstrom and Fuerst (1998) sin alterar la persistencia generada por estos modelos. Los resultados aportan en varios sentidos. En primer lugar, muestran la relevancia del aprendizaje de expectativas en un mercado financiero con fricciones derivadas de la asimetría de información (Carlstrom and Fuerst (1997)). En segundo lugar, el aprendizaje de expectativas le agrega volatilidad al producto simulado por el modelo de Carlstrom and Fuerst (1997) sin alterar su persistencia, generando una ganancia adicional con respecto a los modelos de ciclo de negocios reales estándar. Finalmente, se genera mejor ajuste a la volatilidad observada del producto para los EE.UU., asociada al mejor ajuste en la volatilidad observada de la inversión y de la tasa de retorno. Estos resultados son robustos al usar dos tipos de ganancia de aprendizaje (constante y

decreciente).

Introduction

Interest in analyzing the role of the financial sector in the economic cycle has resurfaced following the latest financial crises since, when disruptions originate in this market, they can cause greater volatility and persistence in the macroeconomic variables (Queralto (2020)). In this sense, the macroeconomic modeling of real business cycles has faced the challenge of emulating the volatility and persistence observed in these variables, particularly output.

Based on the difficulty that standard real business cycle models have for generating the observed output behavior without the need to resort to exogenous technology shocks (Eichenbaum and Singleton (1986); Milani (2007); Galí and Rabanal (2004)), macroeconomic modeling has featured major methodological advances such as consumption habits and financial frictions, among others. In these, the broadly dominant assumption has been the rationality of expectations, which implies that agents know the structure and parameters of the macroeconomic model underlying their reality.

However, dominance in the use of the rational expectations hypothesis contrasts with the empirical evidence that shows mixed results on the fulfillment of this hypothesis. For instance, Friedman (1980), Jongen and Willem (2008), Miah et al. (2016) and Prat and Uctum (2018) find no evidence in favor of rationality in interest rate surveys for the United States. This has encouraged the analysis of the limited rationality of agents and its effects on macroeconomic modeling (Kozłowski et al. (2020)).

This general theme is the framework for this paper, developed in three chapters that are not necessarily connected or linked by causality between them, since each one is individually motivated and self-contained.

The first chapter evaluates the hypothesis on meeting rational expectations on the interest rate surveys of the central banks of Brazil, Chile and Colombia. Based on a quantitative analysis, it concludes that there is no evidence to support the fulfillment of the rational expectations hypothesis in the surveys. This result provides evidence

to the scarce literature on the subject in Latin America, by using a set of metrics to ensure the robustness of the results for consensus measures such as the mean and the median. Likewise, it also contributes to the existing global evidence that supports the importance of bounded rationality for macroeconomic analysis and modeling.

The second chapter discusses whether the implementation of adaptive learning (a form of bounded rationality) in a standard business cycle model has a differentiated effect on output volatility and persistence depending on the market (labor or financial) of origin of such learning, gauged for the observed U.S. figures. This analysis is based on the findings by Eusepi and Preston (2012), and in a novel way separates and analyzes the source of learning expectations by market type. The study clearly shows the importance of learning in the financial (capital) market as the factor that contributes the most to output volatility by way of increased investment volatility, as well as its ability to adjust to the observed figures. These results are robust to two types of learning gain used (constant and decreasing).

In line with the second chapter, the third chapter analyzes the effects of learning expectations on two models with financial frictions by Carlstrom and Fuerst (1997) and Carlstrom and Fuerst (1998), which present a specific vision which is closer to how the financial market actually works. In particular, it asks whether learning expectations adds greater volatility to the output in the models with financial frictions of Carlstrom and Fuerst (1997) and Carlstrom and Fuerst (1998) without altering the persistence generated by these models. The results offer contributions in several senses. First, they show the relevance of learning expectations in a financial market with frictions arising from information asymmetry (Carlstrom and Fuerst (1997)). Second, learning expectations adds volatility to the output simulated by the Carlstrom and Fuerst (1997) model without altering its persistence, generating additional gains over standard real business cycle models. Lastly, a better adjustment to the observed output volatility for the U.S. is achieved, associated to a better adjustment in the volatility seen in both investment and rate of return. These results are robust since they use two types of learning gains (constant and decreasing).

Contents

Curriculum Vitae	ii
Acknowledgments	iii
Resumen	v
Introduction	viii
Gráficas	xiv
Tablas	xvii
1 Evaluación de la racionalidad de las expectativas de tasa de interés en Brasil, Chile y Colombia	1
1.1 Introducción	2
1.2 Encuestas de expectativas de tasas de interés	6
1.3 Metodología para evaluar la racionalidad	13
1.4 Pruebas de racionalidad y resultados	14
1.5 Conclusiones	24
2 El aprendizaje de expectativas y los canales endógenos de amplificación y persistencia del ciclo económico según el mercado de origen del proceso de formación de expectativas	26
2.1 Introducción	27
2.2 Modelo	30
2.3 Introducción del aprendizaje de expectativas	34
2.5 Conclusiones	46
3 Implicaciones del aprendizaje de expectativas sobre la volatilidad y persistencia en un modelo con fricciones financieras	48
3.1 Introducción	49
3.2 El modelo	53

3.4	Parametrización	73
3.5	Conclusiones	83
Appendices		92
A	Capítulo 1	93
A.1	Resultados de las pruebas de debilidad y de eficiencia	93
B	Capítulo 2	96
B.1	Solución del modelo en niveles	96
B.1.1	Hogares	96
B.1.2	Firmas	98
B.1.3	Ecuaciones de cierre	99
B.2	Estacionariedad de las variables	99
B.2.1	Hogares	99
B.2.2	Firmas	101
B.2.3	Otras ecuaciones	103
B.3	Sistema de ecuaciones estacionarizadas	103
B.3.1	Ecuación intratemporal de consumo-trabajo	103
B.3.2	Ecuación de Euler	104
B.3.3	Horas trabajadas	104
B.3.4	Rendimientos del capital	104
B.3.5	Inversión	105
B.3.6	Utilización del capital	105
B.3.7	Función de producción	105
B.3.8	Externalidad de la producción	106
B.3.9	Capital de los hogares	106
B.3.10	Crecimiento tecnológico	106
B.4	Proceso de log-linealización	106
B.4.1	Ecuación intratemporal de consumo-ocio (trabajo)	106
B.4.2	Ecuación de Euler	110
B.4.3	Horas trabajadas	113
B.4.4	Rendimientos del capital	113
B.4.5	Inversión	114
B.4.6	Utilización del capital	114

B.4.7	Función de producción	115
B.4.8	Externalidad de la producción	115
B.4.9	Capital de los hogares	116
B.4.10	Crecimiento tecnológico	117
B.5	Resumen de ecuaciones log-linealizadas que se emplean en la programación	118
B.6	Introducción de las expectativas de aprendizaje por medio de la ecuación de Euler	118
B.6.1	Log-linealización de la restricción presupuestaria de hogares	119
B.6.2	Iteración hacia el futuro de la restricción presupuestaria	123
B.7	Iterar hacia el pasado la ecuación de Euler	126
B.7.1	Combinación de las ecuaciones iteradas hacia el futuro	130
B.7.2	Despeje de la variable consumo	131
B.8	Formación de creencias de los agentes en el contexto de aprendizaje dentro del modelo	133
B.8.1	Conexión con el modelo original de expectativas racionales	133
B.8.2	Formación de las creencias o expectativas de los agentes	135
B.8.3	Ejemplo ilustrativo del proceso de actualización de expectativas	138
C	Capítulo 3	146
3.1	Desarrollo matemático y metodología del modelo con fricción en el mercado de inversión	149
3.1.1	Solución del modelo en niveles	149
3.1.2	Linealización del sistema de ecuaciones	159
3.1.3	Introducción de las expectativas de aprendizaje por medio de la ecuación de Euler de los hogares	168
3.1.4	Formación de creencias de los agentes en el contexto de aprendizaje dentro del modelo	176
3.1.5	Función de distribución normal	187
3.2	Desarrollo matemático y metodología del modelo con fricción en el mercado de bienes	191
3.2.1	Solución del modelo en niveles	191
3.2.2	Linealización del sistema de ecuaciones	202
3.2.3	Introducción de las expectativas de aprendizaje por medio de la ecuación de Euler de los hogares	210

3.2.4	Formación de creencias de los agentes en el contexto de aprendizaje dentro del modelo	216
-------	---	-----

List of Figures

1	Gráfico 1.1 Tasas de interés esperada y observada	10
2	Cuadro 3.3 Calibración con respecto a la desviación estándar del producto de los EE.UU. 1959-2019, con ganancia constante	76
3	Gráfico 3.3 Impulsos respuesta ante un choque de tecnología	78
4	Cuadro 3.4 Indicador Half-Life para persistencia	79
5	Cuadro 3.5 Calibración con respecto a la desviación estándar del producto de los EE.UU. 1959-2019, con ganancia constante	80
6	Cuadro 3.6 Calibración con respecto a la desviación estándar del producto de los EE.UU. 1959-2019, con ganancia constante (persistencia)	81

List of Tables

1	Cuadro 1.1 Características de las series de expectativas de tasas de interés	8
2	Cuadro 1.2 Características de las encuestas de expectativas de tasas de interés	9
3	Cuadro 1.3 Estadísticas descriptivas de la diferencia entre la tasa de interés pronosticada y la tasa de interés observada, como porcentaje de la tasa de interés observada	12
4	Cuadro 1.4 Pruebas de raíz unitaria para las series de tasas de interés en niveles (Hipótesis nula: no hay estacionariedad)	13
5	Cuadro 1.5 Pruebas de endogeneidad (Hipótesis nula: las variables son exógenas)	15
6	Cuadro 1.6 Prueba de Insesgamiento (PI) (Hipótesis nula: hay insesgamiento)	16
7	Cuadro 1.7 Prueba de correlación serial (Hipótesis nula: no hay correlación serial)	17
8	Cuadro 1.8 Prueba de eficiencia (Hipótesis nula: hay eficiencia)	19
9	Cuadro 1.9 Prueba de endogeneidad (Hipótesis nula: las variables son exógenas)	20
10	Cuadro 1.10 Prueba de ortogonalidad (PO) (Hipótesis nula: hay racionalidad)	21
11	Cuadro 1.11 Resumen de los resultados de los dos grupos de pruebas de racionalidad	22
12	Gráfico 1.2 Error de la expectativa media o mediana Vs. Brecha del producto	23
13	Cuadro 2.1 Calibración con respecto a la desviación estándar del componente cíclico producto de los EE.UU. 1959-2019	29
14	Cuadro 2.2 Resumen de las ecuaciones estacionarizadas del modelo	34

15	Cuadro 2.3 Principales parámetros del modelo	39
16	Cuadro 2.4 Calibración con respecto a la desviación estándar del componente cíclico del producto de los EE.UU. 1959-2019, con ganancia constante	41
17	Gráfico 2.1 Impulsos respuesta ante un choque de tecnología	43
18	Cuadro 2.5 Indicador Half-Life	44
19	Cuadro 2.6 Calibración con respecto a la desviación estándar del componente cíclico del producto, con ganancia constante	45
20	Cuadro 2.7 Análisis de sensibilidad del producto y la inversión antes cambios en la ganancia de aprendizaje	46
21	Gráfico 3.1 Impulsos respuesta del producto ante un choque de tecnología – Carlstrom y Fuerst (1998)	50
22	Cuadro 3.1 Calibración con respecto a la desviación estándar del producto de los EE.UU 1959-2019	51
23	Gráfico 3.2 Esquema y flujo del modelo con fricción en el mercado de inversión	56
24	Cuadro 3.2 Principales parámetros del modelo	74
25	Cuadro 3.7 Sensibilización del parámetro de ganancia de aprendizaje en el modelo calibrado por el producto	82
26	Cuadro 3.8 Sensibilización del parámetro de riesgo de los proyectos de inversión (desviación estándar de la distribución log normal)	83
A.1	Prueba de debilidad de la variable instrumental para evaluar endogeneidad de la ecuación de insesgamiento (Hipótesis nula: variable instrumental es débil)	93
A.2	Prueba de Eficiencia (PE) sobre la ecuación con constante y variable en primeras diferencias (Hipótesis nula: hay eficiencia)	94
A.3	Pruebas de debilidad de las variables instrumentales para evaluar endogeneidad de ecuación de insesgamiento (Hipótesis nula: variable instrumental es débil)	95
B.1	Otros parámetros empleados	143
B.2	Calibración con respecto a la desviación estándar del componente cíclico del producto de los EE.UU. 1959-2019, con ganancia decreciente	144
B.3	Variables empleadas y fuentes	145

C.1	Estadísticas de la calibración con respecto a la desviación estándar del producto y posterior simulación, con ganancia decreciente	146
C.2	Estadísticas de la calibración con respecto a la desviación estándar del producto y posterior simulación, con ganancia decreciente	146
3.3	Valores de estado estacionario del modelo con fricción en el mercado de inversión	147
3.4	Valores de estado estacionario del modelo con fricción en el mercado de bien final	148
3.5	Resumen de las ecuaciones linealizadas	167
3.6	Resumen de las ecuaciones linealizadas	210

Capítulo 1

Evaluación de la racionalidad de las expectativas de tasa de interés en Brasil, Chile y Colombia

Resumen. El presente capítulo hace una evaluación de la hipótesis del cumplimiento de expectativas racionales para las encuestas de expectativas de tasas de interés de los bancos centrales de Brasil, Chile y Colombia, con base en técnicas econométricas para la evaluación tanto del insesgamiento como del uso eficiente de la información, comúnmente empleadas por la literatura empírica. Este es el primer estudio que evalúa de forma separada y conjunta las propiedades de insesgamiento y uso eficiente de la información para encuestas de tasas de interés en América Latina. Encuentra que no hay evidencia que sustente que las expectativas de tasas de interés cumplan con el supuesto de racionalidad. En particular, no se cumple con la condición necesaria de insesgamiento en el proceso de formación de las expectativas de los agentes. Tampoco se encuentra evidencia en favor del uso eficiente de la información. Estos resultados se obtienen a partir de un conjunto de pruebas usadas en la literatura para analizar su robustez. Asimismo, se observa que el comportamiento de los errores de pronóstico de las encuestas analizadas es heterogéneo tanto en magnitud como en tendencia. Estos resultados contribuyen a la evidencia sobre la existencia de racionalidad de expectativas de tasas de interés en América Latina, así como a la discusión sobre la pertinencia de los análisis a partir del supuesto racionalidad limitada.

1.1. Introducción

De acuerdo con Muth (1961), las expectativas son predicciones o pronósticos informados sobre eventos futuros. Estas expectativas son claves porque soportan las decisiones de los hogares y las empresas en la economía (Elliott et al. (2008)), así como de las autoridades económicas.

La modelación macroeconómica está basada en el supuesto de expectativas racionales (Lucas (2013); Sargent (1973); Ilek (2017)). Las expectativas racionales implican que los agentes conocen la estructura y los parámetros del modelo que gobierna la economía, por lo que los pronósticos son insesgados e incorporan toda la información disponible, lo cual conduce a resultados específicos en términos de las características de volatilidad y persistencia del ciclo económico. Sin embargo, la literatura empírica sobre la existencia de la hipótesis de expectativas racionales ofrece resultados mixtos, y varían según la metodología, país, período y variable analizada. La variable más estudiada es la inflación, seguida de lejos por las tasas de interés, objeto del presente trabajo.

Hay razones por las cuales es valioso evaluar la racionalidad de las expectativas de las tasas de interés, tanto desde la dimensión de la modelación macroeconómica como de los mercados financieros y la política monetaria. En primer lugar, hay estudios que han mostrado que trabajar con racionalidad limitada además de ser pertinente, tiene impacto sobre los resultados de los modelos macroeconómicos en términos de las características del ciclo económico (Eusepi and Preston (2012) y Rychalovska (2015)). En segundo lugar, las tasas de interés capturan los factores de percepción de riesgo e ineficiencias de mercado que se reflejan en el proceso de formación de expectativas de los agentes. Estas, a su vez, afectan el comportamiento de la inversión, el consumo y la actividad económica. En tercer lugar, desde el punto de vista de la política monetaria, el cumplimiento del supuesto de racionalidad es clave para la estabilidad de las reglas de política monetaria de varios modelos (Carvalho and Minella (2012)), al tiempo que la formación de las expectativas de tasa de interés descansa en las acciones de los bancos centrales Prat and Uctum (2018).

En las últimas décadas, diversos bancos centrales han tenido varios cambios

institucionales, entre los que se encuentran la búsqueda de mayor transparencia y predictibilidad de sus decisiones a través de comunicados oficiales, reportes periódicos y comunicados de prensa, como parte de una estrategia de ofrecer señales de futuros cambios en la política monetaria (*forward guidance*), proveyendo información sobre la senda esperada de la tasa de política futura y, en tal sentido, incidir en el proceso de formación de expectativas de los agentes.

En tal sentido, el presente estudio aporta a la escasa literatura empírica sobre la racionalidad de las encuestas de expectativas de tasas de interés, especialmente en América Latina. El objetivo es evaluar la racionalidad de las expectativas de tasas de interés de las encuestas de los bancos centrales de Brasil, Chile y Colombia. Se escogen estas tres economías porque tienen la disponibilidad de la información con expectativas para un horizonte fijo de 12 meses, al tiempo que tienen como su principal instrumento de política monetaria la tasa de interés, al operar bajo un esquema de inflación objetivo. De acuerdo con la disponibilidad, se tienen las encuestas de tasas de interés de mercado para Colombia y Chile, y las tasas de interés de política monetaria para Brasil y Chile.

El aporte a la literatura empírica del estudio se presenta en varios sentidos. En primer lugar, contribuye al estudio de la eficiencia de mercado en economías con mercados emergentes, tanto desde el punto de vista de tasas de interés de mercado como de política monetaria. En segundo lugar, aporta al entendimiento de la formación de expectativas de tasas de interés, que es variable clave para la modelación macroeconómica y las decisiones de política económica. Finalmente, realiza un análisis transversal de varias economías de América Latina, buscando obtener puntos comunes y diferencias provenientes de la heterogeneidad de los mercados y de las encuestas.

En general, la literatura existente sobre la evaluación de la hipótesis del cumplimiento de las expectativas racionales en las encuestas de expectativas de tasas de interés para países latinoamericanos no evalúa todas las propiedades de la racionalidad al tiempo o no lo hace tanto de forma individual como conjunta para chequear robustez. En tal sentido, el presente estudio aporta a la literatura existente en la medida en que aplica diversas pruebas que analizan diferentes propiedades de la racionalidad de expectativas para tres economías latinoamericanas.

La mayor parte de estudios que evalúan la racionalidad en las encuestas se centran en la inflación y obtienen resultados mixtos sobre su existencia. Entre estos se encuentran Kokoszczynski et al. (2006), Pfajfar and Santoro (2007), Dias et al. (2010), Lyziak (2013), Erjavec et al. (2015), Drakos et al. (2020), Guillén (2008), Da Silva Filho (2013), Gaglianone et al. (2016), Iregui-Bohórquez et al. (2021), Brissimis and Migiakis (2016), Miah et al. (2016a) y Araujo and Gaglianone (2010).

Por su parte, hay un menor grupo de estudios que evalúan la racionalidad de las expectativas de tasas de interés, especialmente en América Latina. En el ámbito global, Miah et al. (2016) evalúan insesgamiento y eficiencia de las tasas de 3 a 12 meses de títulos valores para 10 economías desarrolladas¹ y 20 economías emergentes². Los resultados varían según el país, y destaca que no hay evidencia en favor de la racionalidad de expectativas en Brasil³, Colombia y EE.UU. En la muestra no incluyen a Chile. Cuando analizan la muestra agregada por medio de un panel de datos, concluyen que no hay racionalidad. Sin embargo, estos autores no emplean pruebas individuales para evaluar el uso eficiente de la información de los agentes en la formación de sus expectativas.

Para EE.UU., Friedman (1980), Jongen and Willem (2008), Kim (2010) y Chortareas et al. (2012) no encuentran evidencia en favor de la racionalidad en las encuestas de expectativas de tasas de interés. Por su parte, Ball and Croushore (1995) también evaluaron el poder predictivo de los cambios en la política monetaria por medio de cambios en las encuestas de expectativas de la tasa de fondos federales, producto e inflación, al tiempo que proveen evidencia que rechaza fuertemente la hipótesis de expectativas racionales para los EE.UU.

Galindo (1995) analiza la tasa de interés del mercado de Cetes⁴ en México y sus resultados rechazan la hipótesis de expectativas racionales. Esta autor tampoco

¹Australia, Canadá, Dinamarca, Eurozona, Japón, Noruega, Suecia, Suiza, Reino Unido y EE.UU.

²Brasil, China, Colombia, República Checa, Hungría, Hong Kong, India, Indonesia, México, Filipinas, Polonia, Rusia, Singapur, Sudáfrica, Corea del Sur, Taiwán, Tailandia, Turquía y Venezuela.

³El insesgamiento se refiere a que los agentes no cometen errores de forma sistemática. Stekler (2002) plantea que el insesgamiento es una condición necesaria más no suficiente para lograr eficiencia.

⁴Los Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes) son un instrumento de deuda del gobierno federal de México. Se emiten desde 1978 y son altamente transados en el mercado bursátil local.

evalúa de forma simultánea insesgamiento y uso eficiente de la información por medio de pruebas individuales y conjuntas.

En la literatura reciente hay una creciente línea de trabajo que utiliza cifras de pronosticadores individuales (datos micro) para el análisis de las propiedades de la racionalidad. En el ámbito regional, destacan estudios recientes como el de Iregui-Bohórquez et al. (2021) y Iregui et al. (2021) que emplean datos de las encuestas mensuales individuales del Banco de la República para inflación y para la inflación y la tasa de cambio, respectivamente. En el primer caso se evalúa insesgamiento y la eficiencia de las expectativas de inflación para horizonte de tiempo fijo y evento fijo, mientras que en el segundo estudio se evalúa la eficiencia débil y la eficiencia fuerte con base en expectativas de evento fijo. El presente estudio no pertenece a esta línea de trabajo, puesto que no utiliza datos micro, al tiempo que solo trabaja con expectativas de horizonte fijo a 12 meses.

En términos metodológicos, la mayor parte de la literatura revisada emplea pruebas econométricas estándar para evaluar la hipótesis de expectativas racionales sobre expectativas agregadas, fundamentadas en las propiedades de insesgamiento y uso eficiente de la información disponible. Gran parte de estas se concentran en revisar solo el sesgo de las expectativas, es decir, que los agentes no cometan errores de tipo sistemático; pero varios autores agregan pruebas para chequear eficiencia, es decir, el uso de toda la información disponible en el momento de formar las expectativas. Estas metodologías se pueden presentar en tres grupos: los que usan pocas pruebas simples, principalmente de insesgamiento; los que usan varias pruebas econométricas con el fin de analizar robustez de los resultados, incluyendo pruebas de ortogonalidad; y los que usan técnicas menos comunes y con cierto grado de complejidad, como es el caso de las funciones de pérdida cuadráticas simétricas y asimétricas.

Dentro del primer grupo de metodologías se encuentran los estudios de Pfajfar and Santoro (2007), Kokoszczynski et al. (2005a), Dias et al. (2010), Lyziak (2013), Erjavec et al. (2015), Brissimis and Migiakis (2016), Carvalho and Minella (2012), Kohlscheen (2012), Guillén (2008), Da Silva Filho (2013), Gaglianone et al. (2016), Galindo (1995) y Carvalho and Minella (2012). En el segundo grupo de estudios, se encuentran investigaciones como las de Da Silva Lopes (1998), Stekler (2002), Zarate et al. (2012)

y Jalil et al. (2010). Este grupo se caracteriza por realizar diversas pruebas de las propiedades de insesgamiento y uso eficiente de la información, incluyendo pruebas de ortogonalidad. Dentro de este grupo de aproximaciones metodológicas se encuentra el presente estudio. En el tercer grupo, se encuentran estudios como los de Pierdziocha et al. (2015), Drakos et al. (2020), Ulu (2015), Brissimis and Migiakis (2016) y Carvalho and Minella (2012).

Este trabajo aporta evidencia que contribuye a la pertinencia del uso de la racionalidad limitada en la modelación macroeconómica, en línea con lo planteado por Kozlowski et al. (2020), Marcet and Nicolini (2003), Collard and Dellas (2004), Milani (2007), Carceles-Poveda and Giannitsarou (2007), Marcet et al. (2012), Slobodyan and Wouters (2012), Rychalovska (2015) y Adam et al. (2016). Aunque hay consciencia que la racionalidad no es binaria, el presente estudio no tiene como alcance analizar los grados de racionalidad de las encuestas.

A parte de la introducción, este capítulo explica las principales características de las encuestas y series empleadas; la metodología de evaluación de racionalidad y los resultados de su implementación. Finalmente, se presentan las conclusiones.

1.2. Encuestas de expectativas de tasas de interés

1.2.1 Principales características

Las encuestas de expectativas de tasas de interés de los bancos centrales de Brasil (Focus Market), Chile (Encuesta de Expectativas Económicas - EEE) y Colombia (Encuesta Trimestral de Expectativas Económicas - ETE) comparten el hecho de contar información sobre las expectativas de horizonte fijo a 12 meses. El horizonte analizado fijo de 12 meses se debe a varias razones. En primer lugar, porque los modelos macroeconómicos teóricos se formulan en estructura de horizonte fijo. En segundo lugar, por la coincidencia en la disponibilidad de las series de expectativas de tasa de interés en términos del horizonte de 12 meses entre los bancos analizados. El grueso de la literatura ha trabajado con horizonte fijo no solo por la estructura de los modelos macroeconómicos teóricos, sino también por la popularidad de encuestas de

expectativas con ese tipo de estructura (Winkelried (2017)).

El horizonte de pronóstico es 12 meses en todos los casos. En general, los encuestados responden sobre cual será la respectiva tasa de interés 12 meses o cuatro trimestres adelante (Cuadro 1.2)⁵. En el caso del Banco Central de Brasil, la encuesta está dirigida a bancos, administradores de portafolio, agentes corredores de bolsa, consultoras y otras instituciones del sector real. Por su parte, la EEE del Banco Central de Chile está dirigida a un grupo de académicos, consultores y ejecutivos o asesores de instituciones financieras. Finalmente, la ETE del Banco de la República está dirigida a encuestados de los sectores de industria manufacturera y minería, financiero, grandes cadenas de almacenes, transporte y comunicación, académicos, consultores y sindicatos ⁶.

Adicionalmente, en ninguna de las encuestas analizadas se conoce la metodología o técnica empleada por los encuestados para realizar sus pronósticos. De igual modo, no hay garantía de que los individuos siempre utilicen el mismo modelo o conjunto de información para realizar sus pronósticos. Estos aspectos conducen a la posible existencia de heterogeneidad en las expectativas.

Solo en el caso del Banco Central de Brasil existe incentivo para los mejores pronosticadores (top 5). En los casos de la encuesta ETE del Banco de la República de Colombia y de la EEE del Banco Central de Chile no hay incentivos para los encuestados, al tiempo que la información es de carácter confidencial. En tal sentido, el estudio no pretende hacer un análisis comparativo de los resultados entre países, sino que aplica el mismo conjunto de pruebas a las encuestas de cada uno de estos para buscar evidencia en favor de la hipótesis de racionalidad.

⁵El Banco Central de Chile pregunta en su formulario de encuesta por la tasa de interés en $t+11$ meses; pero al incluir el mes de levantamiento de la encuesta son 12 meses. La encuesta se responde en los primeros días de este mes, por lo que de facto está más cerca de la expectativa para $t+12$. Esto fue confirmado por la gerencia de información estadística de este banco, que dijo que el horizonte de predicción es realmente a 12 meses, incluido el mes de levantamiento de la encuesta.

⁶Se hace para las cuatro principales ciudades (Bogotá, Medellín, Cali y Barranquilla).

Cuadro 1.1 Características de las series de expectativas de tasas de interés

País	Tipo de tasa de interés	Medidas	Tamaño de muestra	Período	Frecuencia	Horizonte de pronóstico	Fuente
Brasil	SELIC overnight	Media y mediana de los encuestados	216	Nov-2001/Oct-2020	Mensual (se calcula el promedio diario disponible)	12 meses	Banco Central de Brasil
	Tasa de política monetaria	Mediana de los encuestados					
Chile	Tasa de mercado del bono del Banco Central en Pesos (BCP, 5 años)	Mediana de los encuestados	154	Ene-2007/Oct-2019	Mensual	12 meses ^{1/}	Banco Central de Chile
	Tasa de mercado del bono del Banco Central en Unidad Fomento (BCU, 5 años)	Mediana de los encuestados					
Colombia	Tasa de interés de Depósito a Término Fijo (DTF)	Media de los encuestados	79	Mar-2000/Sept-2020	Trimestral	12 meses (4 trimestres)	Banco de la República de Colombia

^{1/} El horizonte de predicción es 12 meses incluido el mes de levantamiento de la encuesta, por lo cual la pregunta en la encuesta se formula bajo la forma t+11, donde t es el mes actual.

Fuentes: Banco Central de Brasil, Banco Central de Chile y Banco de la República de Colombia.

El análisis incluye diversas tasas de interés, dependiendo del acceso a la información. Están las tasas de depósitos a término fijo -DTF- en Colombia; las tasas de interés del mercado de bonos del Banco Central de Chile en Unidades de Fomento ⁷ - BCU - y en pesos - BCP -. También están las tasas de política monetaria del Banco Central de Brasil (tasa del Sistema Especial de Liquidación y Custodia - SELIC overnight ⁸) y del Banco Central de Chile (Tasa de Política Monetaria -TPM-).

El estudio analiza las expectativas de consenso (media o mediana), cuyas series oscilan entre las 79 (Colombia) y 216 observaciones (Brasil) (Cuadro 1.1). Se emplean las medidas de consenso de las expectativas (media y mediana), acorde con

⁷Es una unidad financiera reajutable de acuerdo con la inflación del Índice de Precios al Consumidor.

⁸Es una tasa promedio ponderado de las tasas de operaciones interbancarias colateralizadas con títulos públicos.

la disponibilidad de información, que pueden ocultar heterogeneidad de los agentes, puesto que cada uno puede tener su propio método, modelo e información para realizar sus pronósticos. Inclusive, estas tres características pueden cambiar en un mismo individuo a lo largo del tiempo.

Cuadro 1.2 Características de las encuestas de expectativas de tasas de interés

País	Tipo de tasa de interés	Consulta del banco central	Período de recolección de las respuestas	Encuestados
Brasil	SELIC overnight	Pronóstico de la tasa SELIC para el último día del mes 12 hacia adelante	El viernes inmediatamente antes o inmediatamente después de la reunión del Comité de Política Monetaria (Copom) ^{2/}	140 bancos, administradores de portafolio y otras instituciones (por ejemplo, del sector real y consultoras)
	Tasa de política monetaria	Expectativa de la tasa de política monetaria dentro de 11 meses		
Chile	Tasa del Banco Central en Pesos (BCP, 5 años)	Expectativa de la tasa de interés BCP dentro de 11 meses	Se recolecta al día siguiente de conocerse el IPC del mes anterior	Académicos, consultores y ejecutivos o asesores de instituciones financieras
	Tasa del Banco Central en Unidad Fomento (BCU, 5 años)	Expectativa de la tasa de interés BCU dentro de 11 meses		
Colombia	Tasa de interés de Depósito a Término Fijo (DTF)	Expectativa de la DTF a cuatro trimestres	Entre el primer día hábil después de publicada la inflación y usualmente hasta la tercera semana del mes de realización de la encuesta. Las encuestas se hacen en los meses de abril, julio, octubre y enero	81 instituciones provenientes de los sectores de industria manufacturera y minería, financiero, grandes cadenas de almacenes, transporte y comunicación, académicos, consultores y sindicatos

^{2/} <https://www.bcb.gov.br/en/monetarypolicy/marketexpectations>

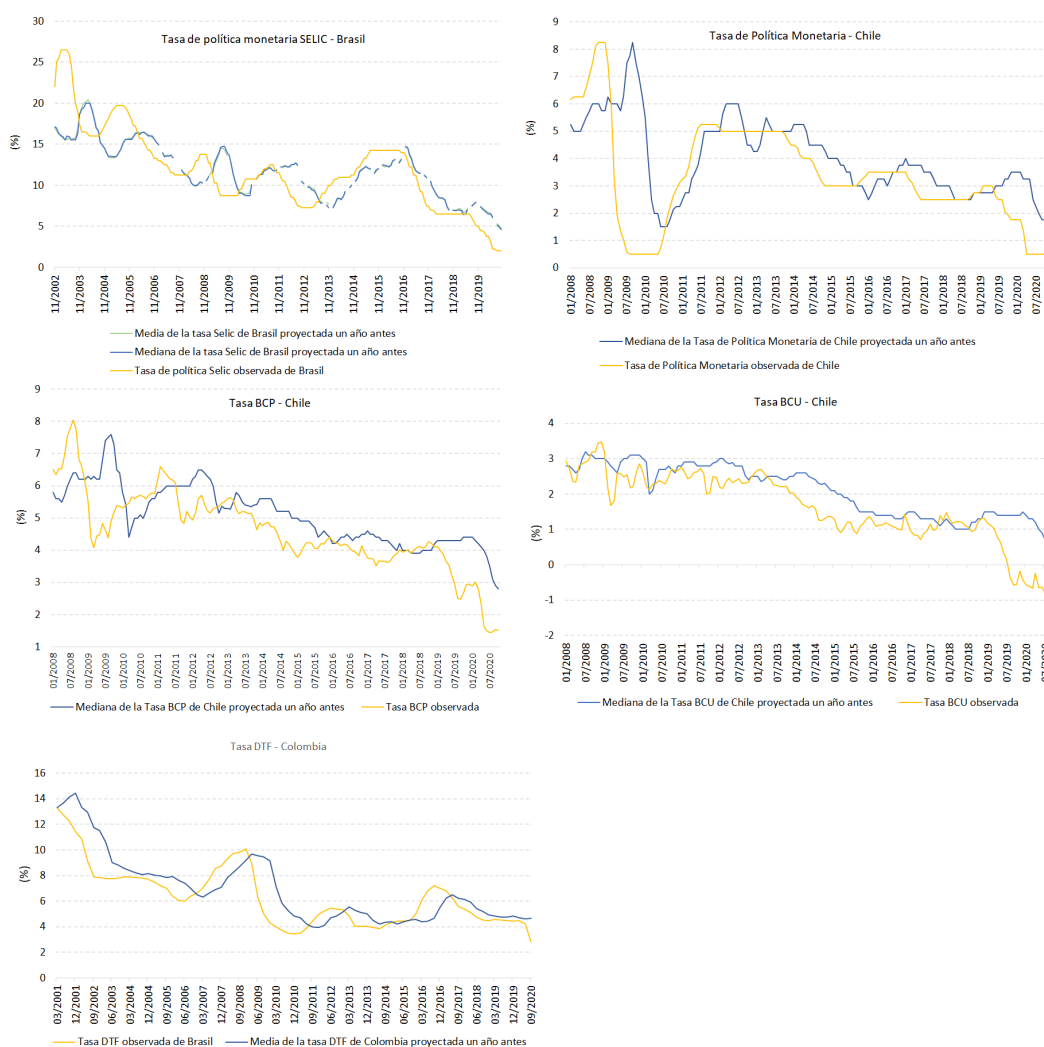
Fuente: Bancos centrales.

1.2.2 Expectativas de tasas de interés y tasas de interés observadas

La evolución de las tasas de interés y sus expectativas que se presentan tienen dos características comunes durante el período de análisis (Gráfico 1.1.). En primer lugar, las tasas de interés y sus expectativas presentan una tendencia descendente, enmarcado

por el proceso de reducción de tasas de interés en los mercados internacionales. En segundo lugar, los cambios de las expectativas de tasa de interés siguen los cambios en las tasas de interés observadas durante la mayor parte del período.

Gráfico 1.1 Tasas de interés esperada y observada



Fuente: Bancos centrales y cálculos propios.

En general, el período de análisis estuvo marcado por varios episodios de inestabilidad macroeconómica y financiera global y regional. En este período, destacan la crisis financiera global y el episodio de Taper Tantrum, los cuales tuvieron

efectos sobre las economías emergentes y en desarrollo, incluyendo a América Latina.

En este contexto, las expectativas de las tasas de política monetaria (Selic en Brasil y TPM en Chile) no registran un patrón gráfico de sobrestimación o subestimación. En contraste, las tasas de interés del mercado de bonos del Banco Central de Chile (BCU y BCP, durante la mayor parte del período), y del mercado financiero en Colombia (DTF hasta 2011) muestran una media de error de pronóstico diferente de cero.

También se analizan las estadísticas descriptivas de la diferencia entre la tasa de interés pronosticada y la tasa de interés observada, expresada como porcentaje de la tasa de interés observada (Cuadro 1.2). En ninguno de los casos, la media de esta variable es cero. En igual sentido, los coeficientes de asimetría y curtosis sugieren asimetría y poca concentración alrededor de la media, con excepción de la tasa BCP de Chile. En igual sentido, el estadístico Jarque Bera, cuya hipótesis nula es distribución normal, indica que casi todas las series no se distribuyen normalmente⁹.

En las próximas secciones, se hará un análisis de racionalidad con base en las pruebas empleadas en la literatura para la evaluación de expectativas agregadas.

1.2.3 Análisis de estacionariedad de las series de tasas de interés

Antes de proceder con las pruebas de racionalidad, es necesario evaluar si las series de tasas de interés observadas y de expectativas de tasas de interés tienen raíz unitaria. En caso afirmativo, es recomendable hacer las pruebas con las series en diferencias, puesto que las series en niveles con raíz unitaria tienden a sobre rechazar la hipótesis de racionalidad (Da Silva Lopes (1998)). Además, teniendo en cuenta que las series de tiempo analizadas no son cortas, las pruebas de raíz unitaria tienden a ser robustas, en línea con el argumento planteado por Carvalho and Bugarin (2006)¹⁰.

⁹La excepción es la tasa de los bonos BCP de Chile.

¹⁰En el presente estudio también se muestran los resultados de las pruebas de las series en niveles en los anexos.

Cuadro 1.3 Estadísticas descriptivas de la diferencia entre la tasa de interés pronosticada y la tasa de interés observada, como porcentaje de la tasa de interés observada

País	Tipo de tasa de interés	Medida	Media	Desviación estándar	Asimetría	Curtosis	Estadístico de Jarque Bera
Brasil	SELIC overnight	Media los encuestados	-0,2	3,3	-1,1	4,6	56,3 ***
		Mediana de los encuestados	0,1	0,3	1,8	8,0	305,7 ***
Chile	Tasa de política monetaria	Mediana de los encuestados	0,6	1,8	2,0	7,9	253 ***
	Tasa del Banco Central en Pesos (BCP, 5 años)	Mediana de los encuestados	0,5	0,9	0,2	3,3	1,4
	Tasa del Banco Central en Unidad Fomento (BCU, 5 años)	Mediana de los encuestados	0,5	0,5	1,0	3,8	29,5 ***
Colombia	Tasa de interés de Depósito a Término Fijo (DTF)	Media de los encuestados	0,6	1,5	0,6	3,5	5.375*

Los asteriscos *, **, *** significan que se rechaza la hipótesis nula de que la serie se distribuye normalmente, a los niveles de 10%, 5% y 1% de significancia, respectivamente.

Para evaluar raíz unitaria se aplican los criterios de Dickey Fuller (DF), Augmented Dickey Fuller (ADF) y el Phillips Perron (PP) (Cuadro 1.4). En todas las pruebas, la hipótesis nula es que la serie tiene raíz unitaria (es decir, que no es estacionaria). De analizar los resultados de las tres pruebas para todas las series, se concluye que no se rechaza la hipótesis de raíz unitaria.

En consecuencia, se evalúa raíz unitaria sobre la series en primeras diferencias, cuyos resultados también se presentan en el Cuadro 1.4. En este caso, se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria, y se concluye que todas las series en primera diferencia son estacionarias. Por consiguiente, las pruebas de racionalidad se harán sobre las variables en primeras diferencias ¹¹.

¹¹En el presente estudio también se muestran los resultados de las pruebas de racionalidad para las series en niveles en los anexos.

Cuadro 1.4 Pruebas de raíz unitaria para las series de tasas de interés en niveles (Hipótesis nula: no hay estacionariedad)

	Número	Tasa SELIC de Brasil			Tasa BCP de Chile		Tasa BCU de Chile		Tasa de Política Monetaria de Chile		DTF de Colombia	
		Observ.	Media	Mediana	Observ.	Mediana	Observ.	Mediana	Observ.	Mediana	Observ.	Media
Series en niveles	Dickey Fuller (DF)	-1,1	-1,1	-1,2	-2,3	-2,1	-2,5	-1,6	-1,2	-1,6	-1,6	-1,9
	Augmented Dickey Fuller (ADF)	-3,2 *	-3,4 *	-3,2 *	-3,9 **	-3,7 **	-2,3	-2,2	-3,0	-3,2 *	-4,0 **	-3,3 *
	Phillips Perron (PP)	-2,2	-2,3	-2,3	-3,1	-3,0	-2,3	-1,8	-2,3	-2,7	-2,4	-2,3
Series en primeras diferencias	Dickey Fuller (DF)	-8,3 ***	-8,0 ***	-9,0 ***	-8,1 ***	-8,7 ***	-10,5 ***	-10,5 ***	-4,6 ***	7,3 ***	-3,5 **	-4,7 ***
	Augmented Dickey Fuller (ADF)	-5,5 ***	-5,4 ***	5,7 ***	-7,6 ***	-6,8 ***	-9,9 ***	-8,9 ***	-4,9 ***	5,8 ***	-4,3 ***	-3,9 **
	Phillips Perron (PP)	-8,6 ***	-8,2 ***	-9,2 ***	-7,9 ***	-8,7 ***	-10,4 ***	10,3 ***	-4,8 ***	-7,4 ***	3,7 **	-4,8 ***

Obs. = Tasa de interés observada. Media = Media de expectativas. Mediana = Mediana de expectativas.
Los asteriscos *, **, *** significan que se rechaza la hipótesis nula de que la serie tiene raíz unitaria, a los niveles de 10%, 5% y 1% de significancia, respectivamente.

1.3. Metodología para evaluar la racionalidad

La hipótesis de expectativas racionales implica que la formación de expectativas con ciertas propiedades (Mitchell and Weale (1961), Stekler (2002)) que incluyen que no haya errores de tipo sistemático (insesgamiento), y que el uso de la información disponible en el proceso de formación de expectativas sea eficiente. Para analizarlas, el presente estudio realiza varias pruebas estadísticas que se complementan entre sí.

Se emplean pruebas comúnmente usadas para un horizonte de expectativa fijo a 12 meses, tales como las empleadas por Da Silva Lopes (1998), Stekler (2002), Jalil et al. (2010) y Zarate et al. (2012). Se emplean dos grupos de pruebas. El primer grupo de pruebas evalúa de forma individual el insesgamiento y el uso eficiente de la información (prueba de insesgamiento -PI, prueba de ausencia de correlación serial -PACS y prueba de eficiencia -PE), mientras que el segundo grupo está integrado por la prueba de ortogonalidad (PO) que busca medir ambas condiciones al tiempo.

De un lado, la PI evalúa que haya insesgamiento (esta es la hipótesis nula de la prueba), y es la prueba más usada en la literatura (Pfajfar and Santoro (2007)). Tanto la PACS como la PE buscan medir si el uso de la información es eficiente. La PACS prueba si los errores en las expectativas no guardan relación entre sí (esta es la hipótesis nula de la prueba), al tiempo que la PE evalúa si las observaciones pasadas (información disponible en el momento de hacer el pronóstico) no influyen en el proceso de formación de expectativas (esta es la hipótesis nula).

La PI, PACS y PE son pruebas que verifican las condiciones para la existencia de racionalidad. No obstante, autores como Stekler (2002) plantean la existencia de racionalidad débil si tan solo se cumple con la PI.

De otro lado, la PO busca probar las propiedades de insesgamiento y uso eficiente de la información al mismo tiempo (prueba conjunta) (Da Silva Lopes (1998)). En el presente estudio, esta prueba se analiza como una forma de chequear robustez de los resultados del primer grupo de pruebas individuales.

1.4 Pruebas de racionalidad y resultados

Esta sección desarrolla las pruebas de racionalidad aplicadas a la expectativa agregada de tasas de interés para un horizonte de pronóstico de 12 meses. Se hacen dos grupos complementarios de pruebas. En el primer grupo se presentan las pruebas PI, PACS y PE. En el segundo grupo, la prueba PO.

1.4.1 Pruebas de las propiedades de racionalidad de forma individual

Prueba de Insesgamiento (PI)

La prueba de insesgamiento analiza si los agentes no cometen errores de tipo sistemático en el proceso de formación de sus expectativas. La prueba se realiza a partir de la estimación de la siguiente ecuación:

$$i_t = \alpha + \beta i_{t,t-12}^e + u_t$$

Donde:

i_t es la tasa de interés observada en el período t .

$i_{t,t-12}^e$ es la tasa de interés pronosticada en el período $t-12$ para el período t .

u_t son los errores de pronóstico del modelo.

Esta ecuación puede presentar problemas de endogeneidad de las expectativas en caso que el proceso de formación de expectativas esté afectado por las tasas de interés observadas. Para esto, se realizaron las pruebas de endogeneidad de Durbin y de Wu-Hausman, cuyos resultados indican que las variables no son endógenas (Cuadro 1.5)¹², por lo cual la estimación se hace por medio de mínimos cuadrados ordinarios con errores robustos.

A la estimación de la anterior ecuación, se le realiza la siguiente prueba de hipótesis nula:

$$H_0 : \alpha = 0 \wedge \beta = 1 \quad (1)$$

Si se cumple esta hipótesis nula, hay insesgamiento. La prueba de esta hipótesis se hace mediante la prueba F, y los valores "p" asociados indican que ninguna de las medidas de las encuestas son insesgadas, puesto que se rechaza la hipótesis nula en todos los casos (Cuadro 1.6).

Cuadro 1.5 Pruebas de endogeneidad
(Hipótesis nula: las variables son exógenas)

Variable	Indicador	P-valor del estadístico Durbin	P-valor del estadístico Wu - Hausman
Tasa SELIC de Brasil	Media	0,12	0,12
	Mediana	0,26	0,27
Tasa BCP de Chile	Mediana	0,28	0,28
Tasa BCU de Chile	Mediana	0,29	0,30
Tasa de Política Monetaria de Chile	Mediana	0,73	0,74
DTF de Colombia	Media	0,16	0,17

¹²También se comprueba que la variable instrumental empleada en el test no es débil, tal como se observa en el Anexo A.1

Los resultados no respaldan la existencia de insesgamiento, lo cual es condición necesaria para la existencia de racionalidad de las expectativas. Ahora, como los pronosticadores profesionales están recibiendo información en cada momento, resta por evaluar si hay un uso eficiente de dicha información en la hora de formar su expectativa, lo cual se estará haciendo en las siguientes pruebas.

Cuadro 1.6 Prueba de Insesgamiento (PI)
(Hipótesis nula: hay insesgamiento)

	Tasa SELIC de Brasil		Tasa BCP de Chile	Tasa BCU de Chile	Tasa de Política Monetaria de Chile	DTF de Colombia
	Media	Mediana	Mediana	Mediana	Mediana	Media
Constante (Error estándar)	-0,115 *** (0,043)	-0,106 ** (0,042)	-0,030 (0,019)	-0,023 (0,017)	-0,037 (0,028)	-0,115 * (0,066)
Coefficiente de expectativa (Error estándar)	-0,278 *** (0,098)	-0,232 *** (0,089)	0,132 (0,109)	0,201 * (0,106)	0,013 (0,060)	0,174 (0,105)
Estadístico F de la prueba de hipótesis nula conjunta (p-valor)	85,6 (0,00)	102,1 (0,00)	32,0 (0,00)	30,5 (0,00)	137,6 (0,00)	31,0 (0,00)
R ² (Bondad de ajuste)	0,05	0,04	0,01	0,014	0,00	0,02

Los errores estándar están en paréntesis. Los asteriscos *, **, *** significan rechazo de la hipótesis nula al 10%, 5%, y 1% de nivel de significancia, respectivamente, para las hipótesis de que la Constante=0 y Coeficiente = 1. El estadístico F refleja la hipótesis conjunta de que Constante = 0 y Coeficiente = 1, y los asteriscos *, **, *** significan rechazo de esta hipótesis al 10%, 5% y 1% de nivel de significancia, respectivamente. R² es la medida de bondad de ajuste.

Prueba de Ausencia de Correlación Serial - PACS

La Prueba de Ausencia de Correlación Serial (PACS) analiza si existe autocorrelación en los errores de predicción. Esta prueba se hace mediante la evaluación de la siguiente hipótesis nula que implica que no hay correlación serial:

$$H_0 : E(u_t u_{t-k}) = 0 \quad \forall \quad k \neq 0,$$

Donde: u_t Son los errores de pronóstico de la ecuación estimada en la PI.

Si se rechaza la hipótesis nula, significa que hay correlación serial de los errores de la expectativa, por lo tanto los errores pasados guardan relación con los presentes. La prueba de esta propiedad se hace mediante Breusch-Godfrey, la cual se operacionaliza por medio de un estadístico Chi cuadrado (Chi^2) (Cuadro 1.7). Todos los valores "p" asociados a la prueba indican que se rechaza la hipótesis nula, es decir, que hay correlación serial de los errores de pronóstico.

Cuadro 1.7 Prueba de correlación serial
(Hipótesis nula: no hay correlación serial)

Variable	Indicador	Estadístico Chi ²	p-valor
Tasa SELIC de Brasil	Media	39,6	0,00
	Mediana	43,1	0,00
Tasa BCP de Chile	Mediana	28,8	0,00
Tasa BCU de Chile	Mediana	5,1	0,02
Tasa de Política Monetaria de Chile	Mediana	90,6	0,00
DTF de Colombia	Media	59,3	0,00

Los resultados presentados corresponden a la ecuación en primeras diferencias.

Este resultado indica que los errores presentes tienen relación con los errores pasados, lo cual no va en la dirección del uso eficiente de la información en las encuestas de expectativas de tasas de interés analizadas .

Prueba de Eficiencia - PE

Esta prueba verifica que los errores de pronóstico no estén influenciados por la información disponible en el momento de formar la expectativa. El análisis se hace para un horizonte fijo de 12 meses, y el encuestado conoce la información de la tasa de interés observada de $t - 12$ como la cifra más recientemente observada unos días antes de diligenciar la encuesta. A diferencia de la inflación que requiere de una encuesta para ser calculada y conocida, la tasa de interés se conoce tan pronto cierra el mes

y hace parte de la información públicamente disponible. El mes $t - 24$ se incluye porque es el segundo dato más recientemente conocido del mismo mes que se está pronosticando. También se hizo el ejercicio con el mes inmediatamente anterior ($t - 13$ para mensual y $t - 15$ para trimestral) y los resultados fueron similares.

Para analizar esta propiedad se sigue a Da Silva Lopes (1998) y Zarate et al. (2012), y se basa en la estimación de la siguiente ecuación:

$$u_t = \beta_1 i_{t-12} + \beta_2 i_{t-24} + e_t$$

Donde:

u_t Son los errores estimados del modelo de pronóstico de la PI

$i_{t,t-12}$ es la tasa de interés observada 12 meses atrás

$i_{t,t-24}$ es la tasa de interés observada 24 meses atrás

Sobre la estimación de la anterior ecuación, se hace la siguiente prueba para evaluar si las observaciones pasadas de la tasa de interés no influyen sobre el error del pronóstico informado, mediante la siguiente hipótesis nula conjunta:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

Es decir, ninguno de los coeficientes debe ser significativo, es decir, no se debe rechazar la hipótesis nula. Esta prueba es similar a una de variables omitidas, puesto que busca detectar la influencia explicativa de las observaciones pasadas en la formación de la expectativa.

Los resultados de esta prueba (Cuadro 1.8) son mixtos. Mientras que la mayoría de las expectativas no la cumplen, puesto que el valor p del estadístico F es bajo y rechaza la hipótesis nula, la encuesta de la tasa de interés BCP de Chile si, al reportar un valor p de 0,44. En menor grado, la media de la tasa de política monetaria Selic de Brasil también presenta eficiencia con un valor p de 0,062. Sin embargo, en estos dos casos, el cumplimiento de esta condición no es suficiente para que haya racionalidad de expectativas, puesto que en ninguno de los casos se cumplió con las condiciones de insesgamiento.

Con el fin de chequear robustez, también se evalúa la hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ (hipótesis nula de eficiencia) para la ecuación con constante $u_t = \alpha + \beta_1 i_{t-12} + \beta_2 i_{t-24} + e_t$. Los resultados que se encuentran en el Anexo A.2 fueron similares.

Cuadro 1.8 Prueba de eficiencia
(Hipótesis nula: hay eficiencia)

	Tasa SELIC de Brasil		Tasa BCP de Chile	Tasa BCU de Chile	Tasa de Política Monetaria de Chile	DTF de Colombia
	Media	Mediana	Mediana	Mediana	Mediana	Mediana
Observación de 12 meses atrás (Error estándar)	-0,118 ** (0,05)	-0,136 *** (0,049)	-0,049 (0,068)	0,153 * (0,103)	-0,068 ** (0,031)	-0,113 * (0,068)
Observación de 24 meses atrás (Error estándar)	-0,019 (0,052)	-0,017 (0,052)	-0,088 (0,081)	0,189 ** (0,089)	-0,103 * (0,060)	0,393 *** (0,104)
Estadístico Chi ² de la prueba de hipótesis nula de existencia de eficiencia (p-valor)	2,8 (0,062)	3,8 (0,025)	0,8 (0,442)	4,4 (0,014)	4,3 (0,015)	7,5 (0,001)
R ² (Bondad de ajuste)	0,02	0,04	0,01	0,07	0,02	0,18

Los errores estándar están en paréntesis. Los asteriscos *, **, *** significan rechazo de la hipótesis nula al 10%, 5%, y 1% de nivel de significancia, respectivamente, para las hipótesis de que Coeficiente observación 12 meses = 0 y Coeficiente de la observación 24 meses = 0. El estadístico F refleja la hipótesis conjunta de que el Coeficiente de la observación 12 meses = 0 y el Coeficiente de la observación 24 meses = 0, y los asteriscos *, **, *** significan rechazo de esta hipótesis al 10%, 5% y 1% de nivel de significancia, respectivamente. R² es la medida de bondad de ajuste.

Resumen del resultado del primer grupo de pruebas. De realizar el primer grupo de pruebas se concluye que ninguna de las series cumple al mismo tiempo todas las propiedades. En particular, ninguna cumplió con la prueba de insesgamiento que es condición necesaria para que el menos exista racionalidad débil (Stekler (2002)). Por consiguiente, ninguna de las series de las encuestas cumple con los criterios que apoyen la existencia de racionalidad.

1.4.2 Prueba de Ortogonalidad (PO)

La prueba de ortogonalidad (PO) evalúa al mismo tiempo el insesgamiento y el uso eficiente de la información, por lo que el presente estudio la aborda como una prueba que

chequea la robustez de las conclusiones. La prueba se realiza a partir de la estimación de la siguiente ecuación:

$$i_t = \alpha + \beta i_{t,t-12}^e + \delta i_{t-12} + u_t$$

Donde:

i_t es la tasa de interés en el período t

$i_{t,t-12}^e$ es la expectativa de la tasa de interés para el período t, en t-12

i_{t-12} es la tasa de interés observada 12 meses atrás

La anterior ecuación puede presentar problemas de endogeneidad de las expectativas en caso que el proceso de formación de expectativas esté afectado por las tasas de interés observadas. Para esto, se realizaron las pruebas de endogeneidad de Durbin y de Wu-Hausman, cuyos resultados indican que las variables no son endógenas (Cuadro 1.9)¹³, por lo cual la estimación se hace por medio de mínimos cuadrados ordinarios con errores robustos.

Cuadro 1.9 Prueba de endogeneidad
(Hipótesis nula: las variables son exógenas)

Variable	Indicador	p-valor del estadístico Durbin	p-valor del estadístico Wu - Hausman
Tasa SELIC de Brasil	Media	0,37	0,37
	Mediana	0,27	0,27
Tasa BCP de Chile	Mediana	0,46	0,46
Tasa BCU de Chile	Mediana	0,21	0,21
Tasa de Política Monetaria de Chile	Mediana	0,22	0,22
DTF de Colombia	Media	0,14	0,14

La hipótesis nula a evaluar es $H_0 : \alpha = 0 \wedge \beta = 1 \wedge \delta = 0$. Si esta hipótesis se cumple, hay sustento de expectativas racionales. Los resultados indican que la hipótesis nula

¹³También se comprueba que la variable instrumental empleada en el test no es débil, tal como se observa en el Anexo A.3

es rechazada en todos los casos (Cuadro 1.10), y no hay sustento de la existencia de las propiedades de expectativas racionales.

Cuadro 1.10 Prueba de ortogonalidad (PO)
(Hipótesis nula: hay racionalidad)

	Tasa SELIC de Brasil		Tasa BCP de Chile	Tasa BCU de Chile	Tasa de Política Monetaria de Chile	DTF de Colombia
	Media	Mediana	Mediana	Mediana	Mediana	Media
Constante (Error estándar)	-0,120 *** (0,042)	-0,111 *** (0,042)	-0,030 (0,020)	-0,021 (0,016)	-0,037 (0,028)	-0,111 * (0,064)
Expectativa de 12 meses atrás (Error estándar)	-0,104 (0,128)	-0,082 (0,104)	0,151 (0,148)	-0,004 (0,131)	0,077 (0,095)	0,470 *** (0,170)
Observación de la tasa de interés 12 meses atrás (Error estándar)	-0,205 *** (0,066)	-0,214 *** (0,054)	-0,024 (0,105)	0,275 ** (0,115)	-0,096 (0,067)	-0,333 ** (0,155)
Estadístico F de la prueba de hipótesis nula de existencia de eficiencia (p-valor)	87,3 (0,000)	85,8 (0,000)	21,5 (0,000)	23,4 (0,000)	155,5 (0,000)	21,8 (0,000)
R2 (Bondad de ajuste)	0,08	0,08	0,01	0,07	0,01	0,07

Los errores estándar están en paréntesis. Los asteriscos *, **, *** significan rechazo de la hipótesis nula al 10%, 5%, y 1% de nivel de significancia, respectivamente, para las hipótesis de que la Constante = 0, el Coeficiente observación 12 meses = 0 y el Coeficiente de la observación a 24 meses = 0. El estadístico F refleja la hipótesis conjunta de que la Constante, el Coeficiente de observación a 12 meses = 0 y el Coeficiente de observación a 24 meses = 0, y los asteriscos *, **, *** significan rechazo de esta hipótesis al 10%, 5% y 1% de nivel de significancia, respectivamente. R2 es la medida de bondad de ajuste.

1.4.3 Resumen de los resultados y posibles implicaciones

El conjunto de pruebas empleado arroja resultados que apuntan en la misma dirección, y no sustentan la existencia de expectativas racionales (Cuadro 1.11). Esto a pesar de que las series de media de la tasa Selic de Brasil y la mediana de la tasa BCP de Chile cumplen con una de las pruebas. Este resultado aporta a la escasa literatura empírica en la materia para América Latina.

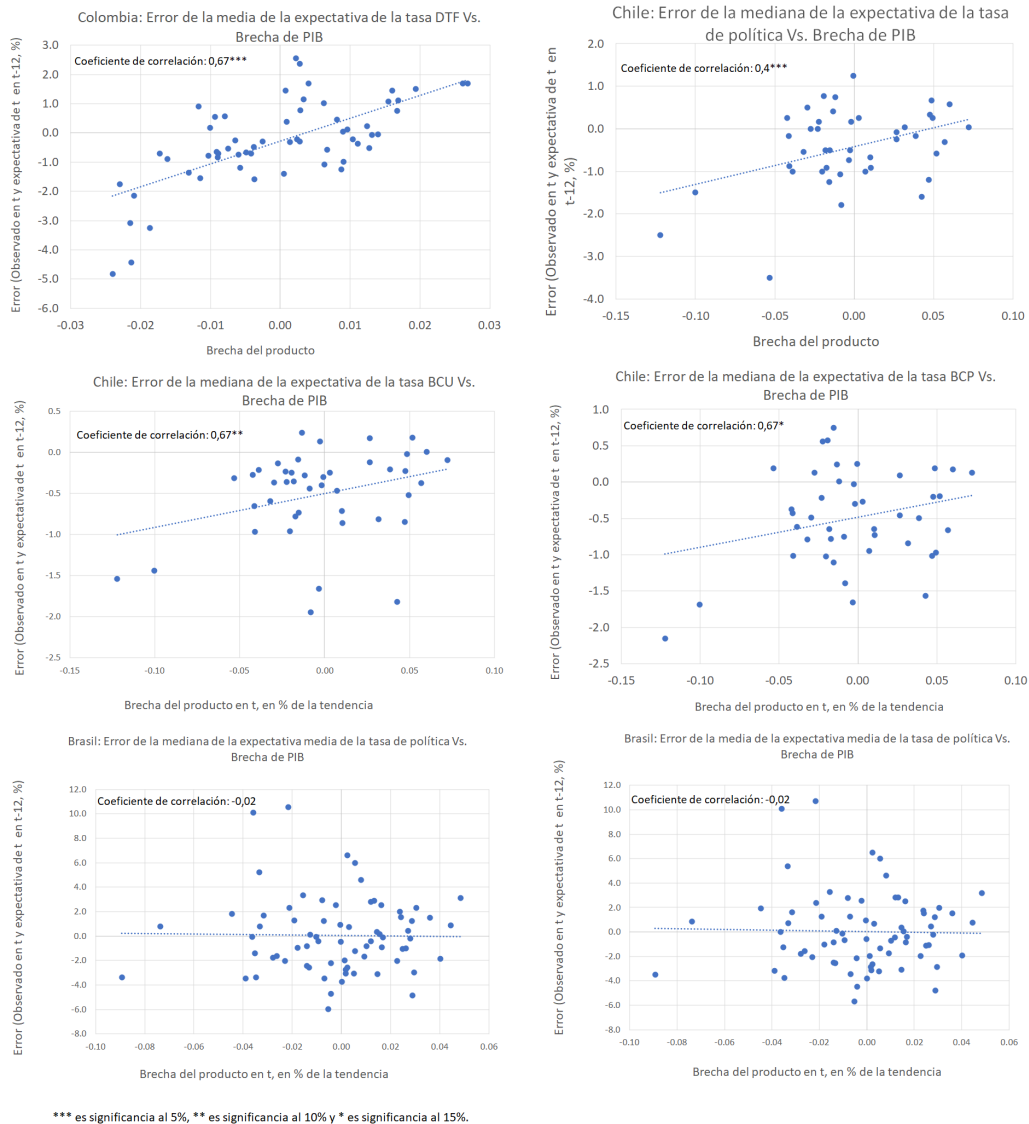
Cuadro 1.11 Resumen de los resultados de los dos grupos de pruebas de racionalidad

Variable	Indicador	Primer grupo de pruebas			Segunda prueba
		Propiedad de Inesgamiento	Propiedad de Ausencia de Correlación Serial	Propiedad de Eficiencia	Propiedad de Ortogonalidad
Tasa SELIC de Brasil	Media	No se cumple	No se cumple	Se cumple al 5%	No se cumple
	Mediana	No se cumple	No se cumple	No se cumple	No se cumple
Tasa BCP de Chile	Mediana	No se cumple	No se cumple	Se cumple	No se cumple
Tasa BCU de Chile	Mediana	No se cumple	No se cumple	No se cumple	No se cumple
Tasa de Política Monetaria de Chile	Mediana	No se cumple	No se cumple	No se cumple	No se cumple
DTF de Colombia	Media	No se cumple	No se cumple	No se cumple	No se cumple

Entre las posibles implicaciones se encuentra que el comportamiento no racional del proceso de formación de expectativas tenga implicaciones sobre el comportamiento de las variables reales de una economía. En particular, Eusepi and Preston (2012) plantean que el efecto de un proceso de formación de expectativas incide sobre el comportamiento observado de las variables macroeconómicas. En tal sentido, la estructura de formación de expectativas de los agentes afecta el verdadero proceso generador de cifras macroeconómicas, lo que a su vez, afecta las expectativas del período siguiente (Evans and Honkapohja (2001)).

En conexión con lo anterior, el Gráfico 1.2 muestra la dispersión de los errores de pronóstico, entendidos como la diferencia entre la expectativa del valor en t formada 12 meses atrás y el valor observado de la tasa de interés en t . Se observa que, en los casos de Chile y Colombia parece existir una relación positiva entre ambas variables. Es decir, que un mayor optimismo a la hora de fijar el pronóstico, reflejado en un error de pronóstico positivo, podría tener una relación con un comportamiento del producto observado por encima de su nivel tendencial. En Brasil, no se percibe una relación de este tipo; aunque en este país solo emplea la tasa de interés de política, y no se tiene la tasa de interés de mercado como en Colombia y Chile. El estudio de los efectos de los errores de pronóstico sobre el ciclo del producto está por fuera del alcance del presente estudio; pero puede ser parte de una agenda futura de investigación dada su relación con los temas tratados en esta disertación.

Gráfico 1.2 Error de la expectativa media o mediana Vs. Brecha del producto



Varios autores advierten que las pruebas de racionalidad sobre medidas agregadas como la media o mediana pueden generar dos tipos de sesgos en los resultados, en línea con lo planteado por Pesaran and Weale (2006) y Jalil et al. (2010)). El primero

de estos sesgos es hacia aceptar falsamente la hipótesis de racionalidad debido a que los sesgos individuales se compensan unos con otros al tomar el agregado. Este tipo de sesgo no se presenta en el presente estudio, puesto que los resultados no apoyan la hipótesis de racionalidad.

Adicionalmente, se plantea que puede existir el falso rechazo de la hipótesis de racionalidad, debido a que, si cada analista usa un conjunto de información diferente (es decir, hay heterogeneidad), la expectativa agregada no sería racional respecto a un conjunto particular de información pero no necesariamente sobre todos. Para poder probar la heterogeneidad de los agentes se requiere de micro datos. En consecuencia, un trabajo de agenda futura con la disponibilidad de la información micro es evaluar el comportamiento de las expectativas individuales, en línea con lo realizado por Iregui-Bohórquez et al. (2021) para la encuesta de expectativas de inflación en Colombia con información a nivel de individuo del Banco de la República.

1.5 Conclusiones

Para los analistas, investigadores y autoridades económicas es crítico entender el proceso de formación de las expectativas de tasas de interés, y así interpretar la dinámica de los mercados financieros. A pesar de la importancia de la tasa de interés en la modelación macroeconómica, la literatura empírica global que pruebe la hipótesis de racionalidad de esta variable es considerablemente menor que en el caso de la inflación. En particular, en América Latina es escasa.

En tal sentido, el presente capítulo aporta a la discusión sobre el tema, en la medida en que no encuentra evidencia en favor de la existencia de racionalidad de las expectativas de tasas de interés en un horizonte de un año. No se encontró insesgamiento ni uso eficiente de la información en el proceso de formación de la expectativa. Adicionalmente, se encuentra que el comportamiento de los errores de pronóstico de las encuestas es heterogéneo tanto en tendencia como en magnitud.

El no cumplimiento de las propiedades de racionalidad es compatible con marcos de modelación macroeconómica que parten de la existencia de racionalidad limitada

(Zunino et al. (2009)). Hay estudios que analizan cómo el efecto de un proceso de formación de expectativas puede incidir sobre el comportamiento de las variables macroeconómicas (Eusepi and Preston (2012)). En particular, la estructura de formación de expectativas de los agentes afecta el verdadero proceso generador de cifras macroeconómicas, lo que a su vez, afecta las expectativas del período siguiente (Evans and Honkapohja (2001)). En tal sentido, se afecta la dinámica del ciclo económico, y plantea una conexión entre el proceso de formación de expectativas y el desempeño de las variables macroeconómicas.

Finalmente, a futuro, es importante trabajar con datos micro de las encuestas de expectativas para controlar por posibles sesgos derivados de la heterogeneidad de los agentes que responden la encuesta de expectativas. Hay una línea de literatura creciente de trabajos que está utilizando este nivel de datos de las encuestas de expectativas con el fin de evaluar racionalidad y eficiencia a partir de las expectativas individuales. A esta línea de trabajo pertenecen trabajos como el de Iregui et al. (2021) e Iregui-Bohórquez et al. (2021).

Capítulo 2

El aprendizaje de expectativas y los canales endógenos de volatilidad y persistencia del ciclo económico según el mercado de origen del proceso de formación de expectativas

Resumen. La modelación macroeconómica ha tenido el reto de emular la volatilidad y persistencia observadas en la producción. A raíz de que los modelos de ciclos de negocios reales estándar tienen dificultad para generar el comportamiento observado del producto sin tener que recurrir a choques exógenos de tecnología (Eichenbaum and Singleton (1986), Galí and Rabanal (2004) y Milani (2007)), la modelación macroeconómica ha presentado importantes avances, los cuales parten de la racionalidad de expectativas como supuesto dominante. Sin embargo, la evidencia empírica presenta resultados mixtos sobre el cumplimiento de esta hipótesis, lo cual motiva la introducción del aprendizaje de expectativas en modelos de ciclo de negocios reales (Eusepi and Preston (2012)). El presente capítulo analiza de forma novedosa el efecto diferenciado del aprendizaje adaptativo en un modelo de ciclo de negocios estándar según el mercado (laboral o financiero) de origen de dicho aprendizaje. El

estudio muestra con claridad la importancia del aprendizaje de expectativas en el mercado financiero como factor que más contribuye a la volatilidad del producto por medio del comportamiento de la inversión, así como su capacidad de ajuste a la volatilidad y persistencia de las cifras observadas para los EE.UU. Estos resultados son robustos ante dos tipos de ganancia de aprendizaje utilizados (constante y decreciente).

2.1. Introducción

Las últimas crisis financieras han resurgido el interés por analizar el papel de este sector sobre el comportamiento del producto en la economía (Queraltó (2020) y Kozłowski et al. (2020)). En particular, cuando se originan los problemas en el mercado financiero se pueden generar mayores efectos sobre la estabilidad macroeconómica, los cuales se reflejan tanto a nivel de la volatilidad como de la persistencia del producto, con sus respectivos efectos sobre el empleo y el bienestar de la economía.

En tal sentido, la modelación macroeconómica tiene como reto emular las características observadas de las variables macroeconómicas, principalmente el producto. En particular, los modelos de ciclos de negocios reales no cuentan con canales endógenos de volatilidad y persistencia suficientes para replicar las características observadas en los ciclos económicos observados, por lo cual requieren de choques tecnológicos exógenos de gran magnitud (Eichenbaum and Singleton (1986); Milani (2007); Galí and Rabanal (2004)). Este hecho ha sido cuestionado por autores como Galí and Rabanal (2004), quienes levantan dudas sobre la importancia de los choques de tecnología como fuerza significativa (o aún más, dominante) detrás del ciclo de negocios, con base en cifras para los EE.UU. durante el período postguerra.

Como resultado, la literatura ha presentado un gran avance para fortalecer los canales endógenos de volatilidad y persistencia. En esta dirección han trabajado diversos autores que emplean mecanismos como la formación de hábitos de consumo (Sundaresan (1989), Constantinides (1990), Fuhrer (2000)), indivisibilidad del trabajo (Hansen (1985)), mecanismos de fijación de precios y de costos de ajuste. Altig et al. (2011) y Christiano et al. (2005) han desarrollado modelos que incorporan diversas extensiones y consiguen inercia en los datos (Milani (2007)). En igual dirección, Smets and Wouters (2007) estiman modelos con métodos bayesianos incorporando

una mezcla de fricciones y choques persistentes para obtener mejor ajuste a los datos.

A pesar de la diversidad de mecanismos empleados, el anterior grupo de modelos comparte el supuesto de expectativas racionales, el cual implica que los agentes conocen la estructura y los parámetros del modelo macroeconómico presente en la realidad (Evans and Honkapohja (2001)). La literatura empírica que evalúa la racionalidad de expectativas con base en diversas encuestas presenta resultados mixtos sobre la existencia de racionalidad de las expectativas. La mayor parte de estudios se centran en analizar las expectativas de inflación; pero también hay estudios aplicados a las tasas de interés. Por ejemplo, Friedman (1980), Jongen and Willem (2008) y Miah et al. (2016) no encuentran evidencia en favor del cumplimiento de la hipótesis de racionalidad en las encuestas de tasas de interés para los EE.UU.

En conexión con lo anterior, estudios recientes consideran que la racionalidad limitada tiene un papel importante en el comportamiento macroeconómico por la vía de la formación de expectativas durante episodios como el de la gran recesión (Kozlowski et al. (2020)). En tal dirección, estudios como los de Marcet and Nicolini (2003), Collard and Dellas (2004), Milani (2007), Carceles-Poveda and Giannitsarou (2007), Marcet et al. (2012), Slobodyan and Wouters (2012), Rychalovska (2015) y Adam et al. (2016) resaltan el potencial del aprendizaje de expectativas como mecanismo que contribuye a emular el comportamiento de los ciclos y hallan beneficios en el ajuste al comportamiento observado del ciclo económico. No obstante, la incorporación de este supuesto en la modelación de los ciclos económicos reales ha emergido hace relativamente poco, a pesar de que la racionalidad limitada es estudiada desde hace varias décadas (Mallar (2012)).

Dentro de este grupo de estudios, se destaca Eusepi and Preston (2012), que implementan el aprendizaje de expectativas sobre un modelo estándar de ciclo de negocios reales, y encuentran ganancia en el ajuste a las cifras observadas para la economía de los EE.UU. El Cuadro 2.1. presenta los resultados del modelo con expectativas racionales (columna 2) y con aprendizaje de expectativas a la Eusepi and Preston (2012) (columna 3). La primera fila presenta la desviación estándar del choque a la tasa de crecimiento de la tecnología requerida para igualar la volatilidad observada del producto en el período 1959-2019, la cual se muestra en la segunda fila

del cuadro. Se observa que con aprendizaje de expectativas hay una caída sustancial en la magnitud del choque requerido, al tiempo que también se observan ganancias en volatilidad (desviaciones estándar de la inversión, retorno de capital) y persistencia (autocorrelación de primer orden del producto, la inversión y la tasa de retorno de capital).

Cuadro 2.1 Calibración con respecto a la desviación estándar del componente cíclico producto de los EE.UU. 1959-2019

Calibración con respecto a la desviación estándar del producto de los EE.UU. 1959 - 2019

Variable	Modelo de ciclo de negocios reales estándar con expectativas racionales	Modelo de ciclo de negocios reales con aprendizaje de expectativas
		Eusepi (2012)
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	1.9241	1.6071
σ_{producto}	1.4740	1.4740
$\sigma_{\text{inversión}}$	3.9701	4.5973
$\sigma_{\text{retorno de capital}}$	0.8585	1.1551
γ_{producto}	0.6918	0.7931
$\gamma_{\text{inversión}}$	0.6830	0.8078
$\gamma_{\text{retorno de capital}}$	0.6816	0.7470

Tanto los trabajos previos de aprendizaje de expectativas como el de Eusepi and Preston (2012) no separan los efectos del aprendizaje con fuente en diferentes mercados. En tal sentido, el presente trabajo de investigación evalúa si la implementación del aprendizaje de expectativas en un modelo de ciclo de negocios reales estándar tiene efecto diferenciado sobre la volatilidad y persistencia del producto según el mercado de origen (laboral y financiero).

El aporte a la literatura del presente estudio es la utilización de un modelo de ciclo de negocios reales estándar para separar los efectos del aprendizaje con fuente en mercado laboral o en mercado financiero y, mostrar con claridad la importancia del aprendizaje en el mercado financiero como factor que explica la volatilidad y persistencia del producto, así como su capacidad de ajuste a las cifras observadas

para EE.UU. Estos resultados son robustos a la variación en los tipos de aprendizaje empleados (ganancia constante y ganancia decreciente).

En lo referente al ajuste de los segundos momentos observados de las variables, la ganancia en ajuste que se presenta cuando el aprendizaje se origina en todos los mercados, se preserva tanto cuando hay aprendizaje originado en el mercado financiero como cuando se origina en el mercado laboral, lo cual indica la robustez de la implementación del aprendizaje de expectativas. La diferencia radica en que, la ganancia en volatilidad del producto es sustancialmente mayor en el caso del aprendizaje originado en el mercado financiero).

La siguiente sección presenta el modelo de ciclo de negocios reales, posteriormente se presenta el mecanismo de aprendizaje de expectativas y finalmente los resultados y conclusiones del estudio.

2.2 Modelo

Este estudio emplea un modelo de ciclo de negocios reales que permite ilustrar el efecto del aprendizaje de expectativas sobre los canales endógenos de propagación y persistencia. Se escoge este modelo básico con un choque de tecnología porque permite estudiar los canales de transmisión en su expresión más simple, al tiempo que permite comparar sus resultados con los obtenidos por Eusepi and Preston (2012).

El modelo representa una economía cerrada con choque de tecnología y utilización de capacidad a la Eusepi and Preston (2012). Los hogares maximizan su utilidad y escogen la combinación óptima entre consumo y trabajo con base en una restricción presupuestal. Las empresas están en competencia perfecta y maximizan sus beneficios, sujetas a una tecnología de producción.

El modelo emplea las variables de producto (Y_t), consumo (C_t), horas de trabajo (H_t), salario (W_t), tasa de retorno (R_t), tecnología (X_t), capital (K_t), inversión (I_t) y utilización de capital (U_t). Con excepción de la tasa de retorno del capital (R_t) y las horas de trabajo (H_t) que son estacionarias, las variables del modelo son expresadas

en unidades de eficiencia, es decir, se normalizan con respecto a la tecnología (X_t) o su tasa de crecimiento, y se denotan con letras minúsculas.

En los siguientes párrafos, se presentan las principales ecuaciones del modelo en niveles, cuya derivación completa se encuentra en el anexo B¹⁴.

2.2.1 Hogares

Los hogares maximizan la siguiente función de utilidad para decidir su consumo, ocio, capital y la utilización de capital:

$$\max_{C_t, K_{t+1}, L_t, U_t} E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} u(C_T, L_T)$$

Está sujeta a la siguiente restricción presupuestaria $C_t + K_{t+1} = R_t^k(U_t K_t) + W_t H_t + (1 - \delta(U_t))K_t$, Donde $L_t = 1 - H_t$.

Donde β es el descuento intertemporal, C_t es el consumo, L_t es el ocio, K_t es el capital, R_t^k es la tasa de retorno del capital, U_t es el nivel de utilización de capital, W_t es el salario, H_t son las horas trabajadas, y $\delta(U_t)$ es la depreciación.

Luego de obtener las condiciones de primer orden, hacer reemplazos y estacionarizar con respecto a la tecnología (X_t), se derivan las siguientes ecuaciones claves en el modelo:

$$\lambda_t = c_t^{-\sigma} v(H_t)$$

$$1 = \beta E_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{1}{\gamma_{t+1}^\sigma} (R_{t+1}^k U_{t+1} + (1 - \delta(U_{t+1}))) \right]$$

$$\lambda_t w_t = \frac{c_t^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} v'(H_t)$$

¹⁴El modelo se deriva en log desviaciones con respecto al estado estacionario para su programación en el anexo B.

La función de utilidad empleada es la King, Plosser y Rebelo (King et al. (1988))¹⁵ $u(C_t, L_t) = \frac{C_t^{1-\sigma} v(1-L_t)}{1-\sigma}$, donde la función $v(1-L_t) = (1-H_t)^\zeta$, donde ζ es tal que la elasticidad de Frisch es muy alta, es decir, la oferta laboral es perfectamente elástica. Esta función tiene la propiedad de que $v'(H_t) < 0$ y $v''(H_t) < 0$, al tiempo que $v''(H_t)/v'(H_t) > 0$ y $[v''(H_t)/v'(H_t)][H_t]$ es el inverso de la elasticidad de Frisch (elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo), la cual es determinante de la propagación y persistencia del ciclo dentro del modelo. Al tener una elasticidad de sustitución intertemporal muy alta, ante una rentabilidad esperada del capital alta, la decisión intertemporal del consumo se inclina hacia un mayor consumo futuro frente al consumo presente. Este efecto y una trayectoria salarial plana hacen que la rentabilidad marginal de capital sea muy alta, induciendo a la sustitución intertemporal del consumo y del ocio. Como resultado, la inversión y la oferta de trabajo aumentan de forma importante, al tiempo que el consumo y los salarios caen al inicio para luego incrementar. Este canal se verá en los resultados de los impulsos respuesta. Lo anterior es consistente con el hecho de que $\sigma = 1$, tal que la función lineal de utilidad es $\ln(c_t) + \zeta \ln(1-H_t)$.

2.2.2 Firmas

Las firmas tienen la siguiente tecnología de producción $Y_t = \Psi_t(U_t K_t)^\alpha (X_t H_t)^{1-\alpha}$, donde Ψ denota una externalidad del capital, tal que $\Psi_t = [(U_t K_t)^\alpha (X_t H_t)^{1-\alpha}]^\eta X_t^{-\eta}$ ¹⁶.

La tecnología es *labor augmenting* dada por $X_t = X_{t-1}^\rho$. La depreciación (δ) está en función de la utilización del capital, tal que $\delta(U_t) = \frac{1}{\theta} U_t^\theta$. El parámetro $\theta > 1$ ¹⁷, dado que una mayor utilización genera una mayor depreciación del capital. Este valor es clave para la generación de volatilidad del ciclo en el componente atado a la inversión del modelo. Está presente tanto en la modelación bajo expectativas racionales como en la modelación bajo aprendizaje de expectativas. La función expresa una relación directa existente entre la depreciación y la utilización del capital, es decir, a mayor utilización hay una mayor depreciación.

¹⁵Esta función de utilidad se considera consistente con una senda de crecimiento balanceado.

¹⁶El término $X_t^{-\eta}$ garantiza la existencia de una senda de crecimiento balanceado en la cual todas las variables del modelo crecen a igual tasa.

¹⁷En particular, en el presente modelo se emplea un valor de 1,6188, en línea con Eusepi and Preston (2012).

El problema de maximización de la firma está dado por:

$$\max_{(k_t, l_t)} \Pi_t = \Psi_t (U_t K_t)^\alpha (X_t H_t)^{1-\alpha} - R_t K_t - W_t H_t \quad (2)$$

Al obtener las condiciones de primer orden del problema de maximización con respecto al capital (K_t) y el trabajo (H_t), y hacer los respectivos reemplazos y estacionarizar ¹⁸, se obtiene ¹⁹:

$$w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{H_t}$$

$$R_t^k = \alpha \gamma_t \frac{y_t}{U_t k_t}$$

2.2.3 Choque de tecnología

La tendencia estocástica de la tecnología *labor augmenting* está dada por $X_t = X_{t-1}^\rho$. En términos estacionarios, se obtiene la tasa de crecimiento de la tecnología $\gamma_t = \gamma_{t-1}^\rho$. Como $\ln(\frac{X_{t+1}}{X_t}) = \gamma_t = \ln(\bar{\gamma}) + a_{t+1}$, donde a_t es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida con media cero y varianza constante σ_a . En términos log-lineales, se tiene $\hat{\gamma}_t = \rho \hat{\gamma}_{t-1} + \epsilon_t$, donde $\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$.

Al igual que Eusepi and Preston (2012), se asume $\rho = 0$, es decir, no hay persistencia del choque. Esto se hace con el fin de evaluar los mecanismos endógenos de persistencia y propagación del modelo, y así evaluar el efecto diferencial del supuesto de expectativas racionales con respecto del supuesto de aprendizaje de expectativas.

2.2.4 Otras ecuaciones

Hay dos ecuaciones adicionales del modelo. La primera, es la ley de movimiento del capital estacionarizada ($k_{t+1} = i_t + (1 - \delta(U_t))\gamma_t^{-1}k_t$), y la segunda representa el equilibrio macroeconómico ($c_t + i_t = y_t$).

El resumen de las ecuaciones del modelo se presenta en el Cuadro 2.1, en el cual $\ln(\frac{X_{t+1}}{X_t}) = \gamma_t = \ln(\bar{\gamma}) + a_{t+1}$, donde a_t es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida con media cero y varianza constante σ_a .

¹⁸Excepto la tasa de retorno que ya es estacionaria.

¹⁹El detalle se presenta en el documento anexo B.

Cuadro 2.2 Resumen de las ecuaciones estacionarizadas del modelo

Intratemporal de consumo-trabajo	$\frac{w_t}{c_t} = (1 - \sigma)^{-1} \frac{v'(H_t)}{v(H_t)}$
Euler	$c_t^{-\sigma} v(H_t) = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} v(H_{t+1}) \frac{1}{\gamma_{t+1}^{\sigma}} (R_{t+1}^k U_{t+1} + (1 - \delta(U_{t+1}))) \right]$
Intratemporal de consumo-trabajo	$w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{H_t}$
Retorno del capital	$R_t^k = \alpha \gamma_t \frac{y_t}{U_t k_t}$
Inversión	$i_t = y_t - c_t$
Utilización de capital	$R_t^k = U_t^{\theta-1}$
Función de producción	$y_t = \Psi_t \gamma_t^{-\alpha} k_t^{\alpha} U_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha}$
Externalidad de producción	$\Psi_t = \left[\left(\frac{U_t}{\gamma_t} k_t \right)^{\alpha} H_t^{1-\alpha} \right]^{\eta}$
Capital de lo hogares	$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta(U_t)) \gamma_t^{-1} k_t$
Crecimiento tecnológico	$\gamma_t = \gamma_{t-1}^{\rho}$

2.3 Introducción del aprendizaje de expectativas

2.3.1 Regla óptima de consumo

Esta sección presenta la introducción del aprendizaje de expectativas. El primer paso es modificar la ecuación intertemporal de consumo para construir una regla óptima de consumo basada en pronósticos de horizonte lejano, cuyo detalle se encuentra en el anexo B²⁰. Para esto, se aplican los siguientes pasos:

- Log linealizar la restricción presupuestaria de los hogares en términos de la desviación con respecto al estado estacionario.

²⁰Sigue lo hecho por Preston (2005).

- Iterar hacia el futuro la restricción presupuestaria de los hogares.
- Iterar la ecuación de Euler de los hogares hacia atrás.
- Combinar las ecuaciones de Euler y la restricción presupuestaria.
- Despejar la variable consumo.

Al aplicar los anteriores pasos, cuyo detalle está en el anexo, se obtiene la siguiente senda óptima de consumo de los hogares bajo expectativas arbitrarias para el modelo de ciclo de negocios reales:

$$\begin{aligned} \hat{c}_t = & \frac{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})}{\epsilon_c} \left[\tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \tilde{R} \hat{R}_t^k - \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t + \left(\epsilon_w + \epsilon_c \frac{\chi}{(1-\chi)} \right) \hat{w}_t \right] \\ + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} & \tilde{\beta}^{T-t} \frac{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})}{\epsilon_c} \tilde{\beta} \left(\epsilon_w + \epsilon_c \frac{\chi}{(1-\chi)} \right) \hat{w}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left[\frac{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})}{\epsilon_c} - \tilde{\beta} \sigma^{-1} \right] \tilde{\beta} \hat{R}_{T+1}^K \\ & + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left[\tilde{\beta} - \frac{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})}{\epsilon_c} \right] \gamma_{T+1} - \sigma^{-1} \psi (1-\sigma) \hat{H}_t \end{aligned}$$

Esta ecuación muestra que el valor actual del consumo depende del ingreso futuro del individuo, el cual depende de variables claves como los ingresos por trabajo y por renta del capital. Esto tiene una conexión con la teoría del ingreso permanente del consumo, la cual se basa en la elección inter temporal de los agentes.

2.3.2 Formación de creencias de los agentes en el contexto de aprendizaje dentro del modelo

Conexión con el modelo original de expectativas racionales. La conexión entre la metodología de expectativas racionales con la de aprendizaje de expectativas parte de la iteración entre las diferentes versiones de la solución del sistema de ecuaciones con el algoritmo de aprendizaje de mínimos cuadrados recursivos. Para esto, en primer lugar, la solución al sistema de ecuaciones por medio del método de Blanchard y Kahn ofrece un sistema matricial de ecuaciones expresado solo en términos de las variables de estado (*Minimum State Variable*):

$$W_{t+1} = \Omega_0^{RE} + \Omega_1^{RE} K_t + \Omega_2^{RE} \varepsilon_t$$

Donde el vector W_{t+1} es una matriz que incluye tanto variables de control como variables de estado, Ω_1^{RE} es la matriz de coeficientes bajo expectativas racionales, la cual atrapa la relación entre todas las variables del modelo y las variables de estado, determinadas por los coeficientes profundos del modelo. Esta matriz de coeficientes es conocida bajo la solución de expectativas racionales; pero no bajo la solución de aprendizaje de expectativas como se verá más adelante con Ω_1^L . Por su parte, K_t es una matriz de variables de estado (k_t), Ω_2^{RE} es el vector de coeficientes que acompañan el choque, y ε_t es el choque de tecnología.

En segundo lugar, se obtiene reescribe el sistema de ecuaciones bajo expectativas racionales en su forma estructural, así:

$$A_0 W_t = A_1 + A_5 W_{t-1} + A_3 W_{t+1} + A_4 \sum_{T=0}^{\infty} \beta^T W_T + C \varepsilon_t$$

Donde $\sum_{T=0}^{\infty} \beta^T W_T$ representa el flujo futuro descontado de la variable consumo (c_t) bajo su regla de decisión. Tanto el coeficiente A_4 como la variable que lo acompaña solo se emplean bajo el modelo de aprendizaje de expectativas con el flujo descontado del consumo y, en su lugar, la variable se excluye tanto de A_3 como de W_{t+1} . Finalmente, C es un vector que acompaña al choque de tecnología.

Bajo aprendizaje de expectativas, la forma reducida de la solución al sistema de ecuaciones, previamente presentada, se puede expresar de la siguiente forma:

$$W_{t+1} = T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) + T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) K_t + T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) \varepsilon_t$$

Donde $T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo del vector intercepto), $T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo de la matriz de transición) y $T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo de la matriz de incidencia de choques) son los mapas de coeficientes de la Ley de movimiento real, la cual combina los parámetros del sistema de ecuaciones con los parámetros estimados por los agentes bajo su ley de movimiento percibida.

El mapeo de los coeficientes (o ley de movimiento real) se construye empleando

los coeficientes A_0 , A_1 , A_3 , A_4 y A_5 de la solución estructural, y los valores estimados por los agentes no racionales por medio de su ley de movimiento percibido, mediante su mecanismo de formación de creencias o expectativas. En tal sentido, se obtienen los siguientes valores cuyo detalle se encuentra en el anexo B:

$$T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1}T_I$$

$$T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1}[A_0^{-1}A_5\Omega_1^L]$$

$$T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1}C$$

Donde:

$$T_C = A_0^{-1}[A_3\Omega_1^L] + A_0^{-1}[A_4F_1] = A_0^{-1}[A_3\Omega_1^L + A_4F_1]$$

$$F_1 = \Omega_1^L(1 - \beta)[I - \Omega_1^L]^{-1}$$

Las anteriores ecuaciones se emplean para construir el mapeo del conjunto de coeficientes del modelo acorde con la ley de movimiento real del modelo. Mediante este sistema de ecuaciones se integran las creencias (expectativas) de los agentes con los resultados provenientes de la estructura de estimación del modelo para determinar el comportamiento observado de los parámetros a lo largo del tiempo, así como su convergencia a la solución de expectativas racionales. Por consiguiente, hay una retroalimentación entre las creencias y los resultados del modelo. De un lado, las expectativas de los agentes afectan los resultados del modelo. De otro lado, los resultados del modelo afectan la formación de creencias (expectativas) en el período siguiente.

$\Omega_{0,t}^L$ y $\Omega_{1,t}^L$ hacen parte de una matriz Ω_t^L sobre la cual aprenden los agentes de acuerdo con un algoritmo de mínimos cuadrados recursivos, cuya explicación se encuentra en el anexo B.8.2. El algoritmo tiene la siguiente estructura:

$$\Omega_t^L = \Omega_{t-1} + g(R_t^{-1}Q_{t-1})(Z_t^{LMR} - \Omega_{t-1}^L'Q_{t-1})$$

$$R_t = R_{t-1} + g(Q_{t-1}Q'_{t-1} - R_{t-1})$$

Donde:

- Ω_t^L : Coeficientes a estimar en el período t. Su valor inicial
- R_t : Matriz de precisión (varianzas y covarianzas).
- g : Parámetro de ganancia del aprendizaje.
- Q_{t-1} : vector con variable regresora capital.
- Z_t^{LMR} : vector de variables dependientes asociadas a las coeficientes sobre los que se quiere aprender.

La ganancia de aprendizaje g se puede modelar tanto de forma constante como de forma decreciente con respecto al tiempo. En el presente estudio se hace de las dos formas para analizar robustez. Las condiciones bajo las cuales $\hat{\Omega}_t^L$ converge a los valores de expectativas racionales (Ω_1^{RE}) también se encuentran en este anexo. Esta matriz incluye los coeficientes que relacionan las variables de interés para el aprendizaje con la variable de estado capital, y se construye de tal modo que permita hacer los ejercicios de sensibilización en la fuente de aprendizaje.

2.4 Parametrización

Los parámetros empleados son los mismos de Eusepi and Preston (2012), al tiempo que las series utilizadas son las del período 1954-2019 para los Estados Unidos, con el fin de incorporar la evolución reciente de esta economía ²¹, cuyo detalle se encuentra en el anexo B. Se emplea una tasa de descuento intertemporal $\beta = 0,99$, y una función de utilidad log lineal que genera utilidad para el consumo y desutilidad para el trabajo, con una elasticidad de sustitución intertemporal $\sigma = 1$. El inverso de la elasticidad de Frisch de la oferta de trabajo $\epsilon = 0,0004$, tendiente a cero, el cual se aproxima a las propiedades de la oferta de trabajo de un modelo con trabajo indivisible, al tiempo que genera mayor volatilidad del trabajo. La tecnología de las empresas está especificada por una participación del capital de $\alpha = 0,34$ y la tasa de crecimiento

²¹Eusepi and Preston (2012) toman el período 1948-2007.

en estado estacionario del progreso tecnológico aumentado por trabajo es $\bar{\gamma} = 1,0053^{22}$.

La ganancia de aprendizaje constante es $g = 0.002$ ²³. Este valor coincide con el error de pronóstico de la tasa de los tesoros de los Estados Unidos a 3 meses. La tasa de depreciación del capital es 0,025. El parámetro de persistencia sobre la tasa de crecimiento del choque de productividad es $\rho = 0$. Este valor facilita analizar los canales de amplificación de la volatilidad y persistencia endógenos del modelo. Por su parte, la externalidad de la producción es $\eta = 0,1$. El parámetro $\theta = 1,6188$, y el que sea mayor a la unidad implica que tiene un papel amplificador de ciclo atado a la inversión del modelo (Cuadro 2.2). Con excepción del parámetro g , los parámetros se emplean tanto en la modelación de expectativas racionales como en la modelación de aprendizaje de expectativas. El resto del parámetros del modelo se presenta en el anexo B.

Cuadro 2.3 Principales parámetros del modelo

Parámetro	Valor
Tasa de descuento intertemporal (β)	0,99
Elasticidad de sustitución (σ)	1
Inverso de elasticidad de Frisch (ϵ_H)	0,0004
Participación del capital (α)	0,34
Tasa de crecimiento de la tecnología (γ)	1,0053
Ganancia constante del error de aprendizaje (g)	0,002
Tasa de depreciación (δ)	0,025
Persistencia del choque (ρ)	0
Externalidad de la producción (η)	0,1
$\theta = \frac{\gamma^{(\sigma\beta^{-1})} - (1 - \delta)}{\delta}$	1,6188

²²Consistente con la estimada por Eusepi and Preston (2012).

²³Eusepi and Preston (2012).

2.5 Resultados

En esta sección se presentan los resultados del ejercicio en dos partes. En la subsección 2.5.1, se presentan los resultados directamente vinculados con la pregunta de investigación. Estos permiten evaluar si la implementación del aprendizaje de expectativas en un modelo de ciclo de negocios reales estándar tiene efecto diferenciado sobre la volatilidad y persistencia del producto según su mercado de origen (laboral o financiero). Esto se hace por medio del análisis de la calibración y simulación (2.5.1.1), así como por la vía de la interpretación de las funciones de los impulsos respuestas (2.5.1.2). Como complemento a lo anterior, en la sección 2.5.2. se presenta un análisis de los segundos momentos de las principales variables del modelo, así como su ajuste a los datos observados para el período de análisis (1959-2019).

Las métricas que se usan para analizar la volatilidad y la persistencia en el presente trabajo se definen así: En el tema de volatilidad, se analiza la desviación máxima con respecto al estado estacionario en el caso de los impulsos respuestas, y la desviación estándar del componente cíclico en el caso de los ejercicios de calibración y simulación. Con respecto a la persistencia, se analizan el indicador de vida media (Half-Life) para el caso de los impulsos respuesta, y la autocorrelación de cada serie para los ejercicios de calibración y simulación.

2.5.1 Principales resultados

2.5.1.1 Simulación y calibración

En esta sección se presentan los resultados de la calibración de la desviación estándar del choque con respecto a la desviación estándar del producto, al tiempo que se presentan los resultados de la simulación para 2000 períodos (Cuadro 2.4), con ganancia de aprendizaje constante.

En la primera línea, se observa una mejoría en términos volatilidad del producto, puesto que se requiere de una menor desviación estándar del choque para igualar la desviación estándar del producto todos los mercados ²⁴ (a la Eusepi and Preston

²⁴En Eusepi and Preston (2012), el aprendizaje se presenta sobre los coeficientes asociados a las variables de salarios, tasa de retorno y capital, mientras que en el presente ejercicio se aprende sobre retorno de capital y capital (mercado financiero) o sobre salarios y capital (mercado laboral).

(2012)). Al descomponer los efectos por el mercado fuente de origen del aprendizaje, se observa que la ganancia en volatilidad del producto es mayor cuando este proviene del mercado financiero (el choque requerido pasa de 1,9241 a 1,6181) en comparación con el mercado laboral (el choque requerido pasa de 1,9241 a 1,8264). También se presenta una ganancia en persistencia del producto, frente a la versión de expectativas racionales, tanto cuando el aprendizaje se origina en el mercado financiero (pasa de 0,6918 a 0,7947) como cuando este se origina en el mercado laboral (pasa de 0,6918 a 0,8236). La ganancia es mayor es este último caso, pero al costo de una mayor proporción del choque de tecnología. Esta misma relatividad se conserva cuando se analiza el ajuste a los momentos observados del producto que se presentan en la columna 1 y son el propósito del análisis.

Cuadro 2.4 Calibración con respecto a la desviación estándar del componente cíclico del producto de los EE.UU. 1959-2019, con ganancia constante

Variable	Valor observado	Expectativas racionales	Fuente del aprendizaje de expectativas		
			Todos los mercados	Mercado financiero	Mercado laboral
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	N/A	1.9241	1.6071	1.6181	1.8264
σ_{producto}	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740
$\sigma_{\text{inversión}}$	4.7173	3.9701	4.5973	4.5738	4.1900
$\sigma_{\text{retorno de capital}}$	1.1532	0.8585	1.1551	1.1646	1.3323
γ_{producto}	0.8698	0.6918	0.7931	0.7947	0.8236
$\gamma_{\text{inversión}}$	0.8979	0.6830	0.8078	0.8099	0.8452
$\gamma_{\text{retorno de capital}}$	0.8278	0.6816	0.7470	0.7481	0.7654

Con base en lo anterior, se observa que el aprendizaje en el mercado financiero importa para explicar la volatilidad y persistencia del producto de la economía, y lo hace en mayor medida que cuando el aprendizaje surge en el mercado laboral. Intuitivamente, esto se explica porque el mecanismo de aprendizaje actúa fuertemente sobre el comportamiento de la inversión cuando los coeficientes vinculados a la tasa de retorno son desconocidos para los agentes de la economía. Es decir, el efecto del choque de tecnología es interpretado como un cambio en los coeficientes del modelo que acompañan el comportamiento de la tasa retorno, conduciendo a una sobre reacción no solo de esta variable sino de la inversión, aumentando de forma importante

su volatilidad. Es decir, el canal de ahorro / inversión y producto se activa en gran medida ante la presencia del aprendizaje. Ante un choque positivo de tecnología, los hogares aumentan su oferta de trabajo y de ahorro en la economía, y en presencia de aprendizaje de expectativas sobre reaccionan por esta vía, afectando inmediatamente la inversión y el producto de la economía.

De igual modo, las cifras de volatilidad y persistencia se ajustan mejor a los segundos momentos observados del producto ante la presencia de aprendizaje (Cuadro 2.4), al fortalecerse los canales endógenos del modelo. Esto se nota principalmente cuando la fuente del aprendizaje proviene del mercado financiero, en línea con lo planteado por Keynes (1930) y Keynes (1936), quien remarca la influencia de los movimientos del mercado financiero sobre los auges y depresiones. Estas conclusiones permanecen cuando la ganancia en aprendizaje es decreciente, tal como se muestra en el anexo B del documento.

2.5.1.2 Funciones de impulsos respuesta

Esta sección presenta las funciones de impulsos respuesta ante un choque de igual magnitud²⁵ en los modelos de expectativas racionales (línea negra), de aprendizaje con ganancia constante (línea roja) y aprendizaje con ganancia decreciente (línea azul). Las variables están en unidades de eficiencia y se presenta su desviación con respecto al estado estacionario. En particular, se analizan los resultados de un choque de tecnología con origen del aprendizaje en todos los mercados (Panel A), en el mercado financiero (Panel B) y en el mercado laboral (Panel C), en el Gráfico 2.1. La economía inicia en equilibrio de expectativas racionales en el cual los parámetros del modelo de aprendizaje son iguales a los de expectativas racionales.

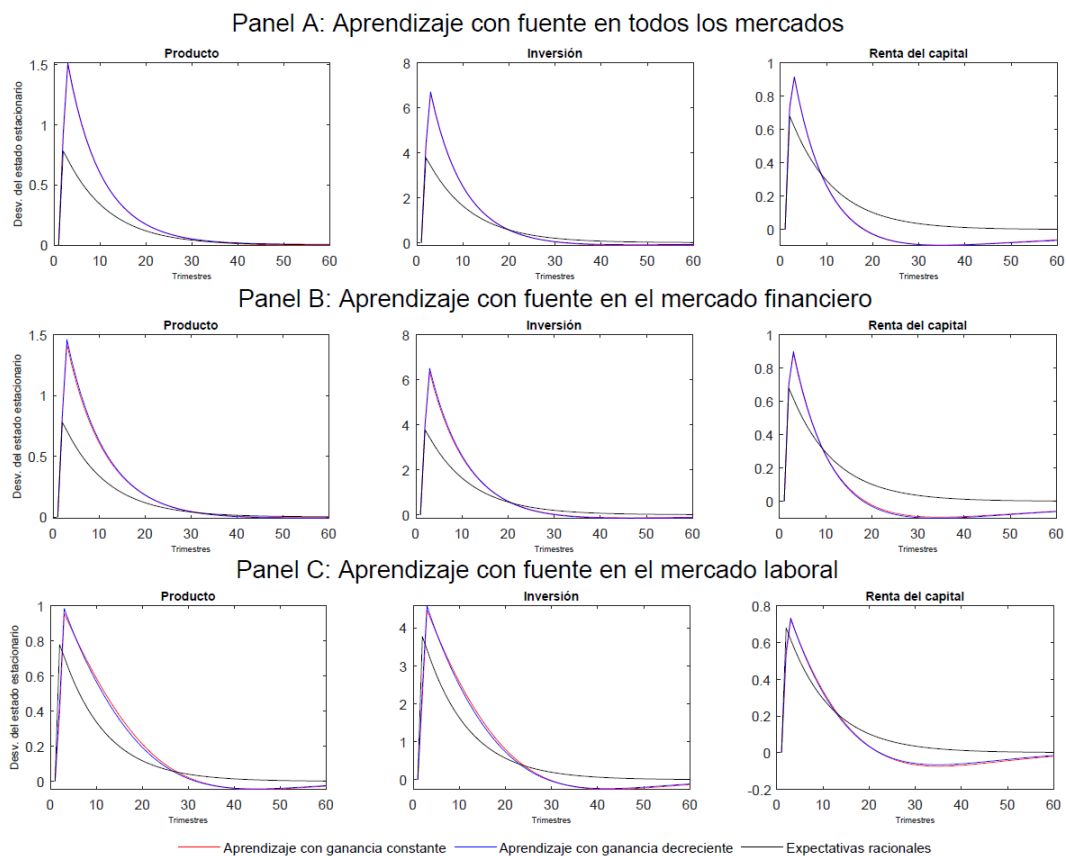
Cuando llega el choque de tecnología, los agentes bajo aprendizaje interpretan el impulso del choque como un cambio en los valores de los coeficientes que no conocen, por lo cual los reestiman generando una reacción más fuerte que en el caso de expectativas racionales. Este efecto genera una mayor reacción en todos los casos de aprendizaje para las variables producto, inversión y tasa de retorno, el cual es el canal de mayor volatilidad del producto. Los resultados son robustos independientemente

²⁵La magnitud del choque es de 1,92 desviaciones estándar sobre la tasa de crecimiento de la tecnología; pero está estandarizado a 1

de cómo se modele la ganancia del aprendizaje de expectativas, ya sea constante o decreciente, cuyos valores son diferentes pero cercanos.

De los impulsos respuesta, destaca que la reacción bajo aprendizaje es mayor en todos los casos; pero especialmente fuerte en el caso en el que el aprendizaje tiene su origen en el mercado financiero (Panel B), que en magnitud es similar a la volatilidad cuando se aprende en todos los mercados (Panel A) (Gráfico 2.1).

Gráfico 2.1 Impulsos respuesta ante un choque de tecnología



Para analizar la persistencia de los impulsos respuesta, se calcula el indicador Half-Life el cual se interpreta como el número de períodos en los cuales el efecto del choque permanece por encima de 0,5. Es decir, que a mayor magnitud, mayor persistencia. Se

observa que en todos los casos de aprendizaje hay una mayor persistencia con respecto a lo que sucede en el caso de expectativas racionales (Cuadro 2.5).

Cuadro 2.5 Indicador Half-Life

	Expectativas racionales	Fuente de aprendizaje en todos los mercados		Fuente de aprendizaje en el mercado financiero		Fuente de aprendizaje en el mercado laboral	
		Aprendizaje		Aprendizaje		Aprendizaje	
		Constante	Decreciente	Constante	Decreciente	Constante	Decreciente
Producto	6.63	7.52	7.39	7.96	8.06	11.31	10.53
Inversión	6.68	9.83	9.65	10.63	10.71	16.54	15.38
Tasa de retorno	6.70	10.70	10.56	11.63	11.70	17.45	16.42

En síntesis, los resultados muestran que bajo aprendizaje hay una ganancia en volatilidad del producto, acompañada de un incremento en la persistencia. En particular, cuando el aprendizaje tiene su origen en el mercado financiero se presenta una mejor ganancia de la relación volatilidad / persistencia con respecto al producto observado en el modelo, al tiempo que permite un mejor ajuste a las cifras presentes en otras variables, como se verá en la siguiente sección.

2.5.2 Resultados complementarios

Esta sección complementa a la anterior en la medida que presenta el ajuste a las cifras observadas en todas las variables. Como se comentó, el gran resultado es que hay un mejor ajuste a los momentos observados del producto cuando el aprendizaje se origina en el mercado financiero que cuando es generado en el mercado laboral.

El ejercicio de simulación también permite ver cómo se comporta el ajuste a los segundos momentos de las variables del modelo, partiendo de igualar la varianza del producto. En los tres casos de aprendizaje en las expectativas (todos los mercados, financiero y laboral), la mejora en la volatilidad de la producción está acompañada por una mejora en el ajuste a la persistencia del producto. Además, la volatilidad y persistencia de la inversión y del retorno del capital también presentan un mejor ajuste a lo observado de las cifras con respecto al modelo con expectativas racionales (Cuadro 2.6). Esto indica el canal del mercado financiero como generador de volatilidad y

persistencia del producto ante la presencia del aprendizaje. Finalmente, en términos de persistencia, también hay mejor ajuste en las variables de trabajo y salario en todos los casos, lo cual está asociado a la reacción gradual de los hogares respecto de su oferta laboral en cada momento.

Cuadro 2.6 Calibración con respecto a la desviación estándar del componente cíclico del producto, con ganancia constante

Variable	Expectativas racionales	Valor observado	Fuente del aprendizaje de expectativas		
			Todos los mercados	Mercado financiero	Mercado laboral
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	1.9241	N/A	1.6071	1.6181	1.8264
σ_{producto}	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740
$\sigma_{\text{inversión}}$	3.9701	4.7173	4.5973	4.5738	4.1900
$\sigma_{\text{retorno de capital}}$	0.8585	1.1532	1.1551	1.1646	1.3323
σ_{consumo}	0.6519	0.8712	0.4620	0.4686	0.5883
σ_{trabajo}	1.3891	1.4377	1.1551	1.1646	1.3323
σ_{salario}	0.6522	0.7592	0.4623	0.4689	0.5886
γ_{producto}	0.6918	0.8698	0.7931	0.7947	0.8236
$\gamma_{\text{inversión}}$	0.6830	0.8979	0.8078	0.8099	0.8452
$\gamma_{\text{retorno de capital}}$	0.6816	0.8278	0.7470	0.7481	0.7654
γ_{consumo}	0.7339	0.8492	0.7276	0.7260	0.7036
γ_{trabajo}	0.6931	0.9126	0.7470	0.7481	0.7654
γ_{salario}	0.7339	0.6824	0.7277	0.7261	0.7038

2.6 Sensibilización de los resultados según la ganancia de aprendizaje

En esta sección se analiza lo que ocurre cuando se sensibiliza el parámetro de ganancia de aprendizaje (g) con la volatilidad y persistencia del producto y la inversión. (Cuadro 2.7).

Cuadro 2.7 Análisis de sensibilidad del producto y la inversión antes cambios en la ganancia de aprendizaje

Variable	Todos los mercados				Mercado financiero				Mercado laboral			
	g = 0.002	g = 0.0025	g = 0.0030	g = 0.0035	g = 0.002	g=0.0025	g=0.0030	g = 0.0035	g = 0.002	g=0.0025	g=0.0030	g = 0.0035
$\sigma_{choque\ de\ tecnologia}$	1.6071	1.5582	1.5170	1.4818	1.6181	1.5692	1.5277	1.4921	1.8264	1.7892	1.7510	1.7135
$\sigma_{producto}$	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740
$\sigma_{inversión}$	4.5973	4.7128	4.8138	4.9028	4.5738	4.6889	4.7901	4.8795	4.1900	4.2908	4.3946	4.4963
$\gamma_{producto}$	0.7931	0.8026	0.8085	0.8113	0.7947	0.8047	0.8109	0.8140	0.8236	0.8400	0.8514	0.8587
$\gamma_{inversión}$	0.8078	0.8138	0.8154	0.8138	0.8099	0.8161	0.8180	0.8166	0.8452	0.8537	0.8552	0.8526

Del Cuadro 2.7, se observa que cuando g aumenta, la magnitud del choque de tecnología requerido para igualar la desviación estándar observada del producto es menor, al tiempo que la persistencia del producto y la inversión incrementa.

2.5 Conclusiones

El presente estudio evalúa la importancia del aprendizaje de expectativas sobre la volatilidad y persistencia del producto cuando tiene su origen en dos diferentes sectores claves de la economía, como lo son el financiero y el laboral. El análisis se hace con base en un modelo de ciclo de negocios estándar y encuentra que el aprendizaje importa para la generación de volatilidad y persistencia del producto, especialmente cuando este se origina en el mercado financiero. En particular, genera una mejor relación de ajuste a la volatilidad y persistencia observada del producto, no solo frente al modelo de ciclo de negocios reales bajo expectativa racionales, sino también frente al aprendizaje con fuente en el mercado laboral.

El estudio muestra la importancia del aprendizaje de expectativas en el mercado financiero como factor que más contribuye a la volatilidad del producto por medio del comportamiento del ahorro y la inversión. Este resultado es robusto ante dos tipos de ganancia de aprendizaje utilizados (constante y decreciente).

Los ejercicios realizados también indican una ganancia en los segundos momentos de variables diferentes del producto, como es el caso de la inversión y la tasa de

retorno tanto en volatilidad como en persistencia, lo cual refuerza el canal del mercado financiero como generador de volatilidad y persistencia del producto ante la presencia del aprendizaje.

Finalmente, el ejercicio de sensibilización con respecto al parámetro de ganancia de aprendizaje indica que un mayor nivel de este genera mayor volatilidad y persistencia del producto. Esto sugiere que economías con un nivel de ganancia de aprendizaje mayor podrían presentar mayor volatilidad y persistencia del producto. Este sería un tema de la agenda futura de trabajo, pensando en realizar análisis de este tipo para economías emergentes y en desarrollo.

Capítulo 3

Implicaciones del aprendizaje de expectativas sobre la volatilidad y persistencia en un modelo con fricciones financieras

Resumen. El papel del sector financiero en el comportamiento de la actividad económica es de gran interés por la profundidad y persistencia que sus disrupciones pueden generar sobre el ciclo económico (Queralto (2020)). En tal sentido, la modelación macroeconómica ha presentado importantes avances con el fin de fortalecer los canales endógenos de volatilidad y persistencia que reflejen la importancia de este sector en el comportamiento de la economía. Entre estos avances se encuentran los modelos de fricciones financieras. Estos parten de la racionalidad de expectativas como supuesto dominante, a pesar de que la literatura empírica muestra resultados mixtos sobre su existencia. El presente estudio analiza si el aprendizaje de expectativas le agrega mayor volatilidad al producto en los modelos con fricciones financieras de Carlstrom and Fuerst (1997) y Carlstrom and Fuerst (1998) sin reducir su nivel de persistencia generada. Los resultados indican que el aprendizaje lo logra de mejor forma cuando la fricción financiera del modelo se ubica en el mercado de inversión (Carlstrom and Fuerst (1997)), generando una relación de ajuste entre volatilidad y persistencia más cercana a los datos observados para EE.UU., en comparación con lo que hace el modelo bajo expectativas racionales. El estudio muestra la importancia del aprendizaje

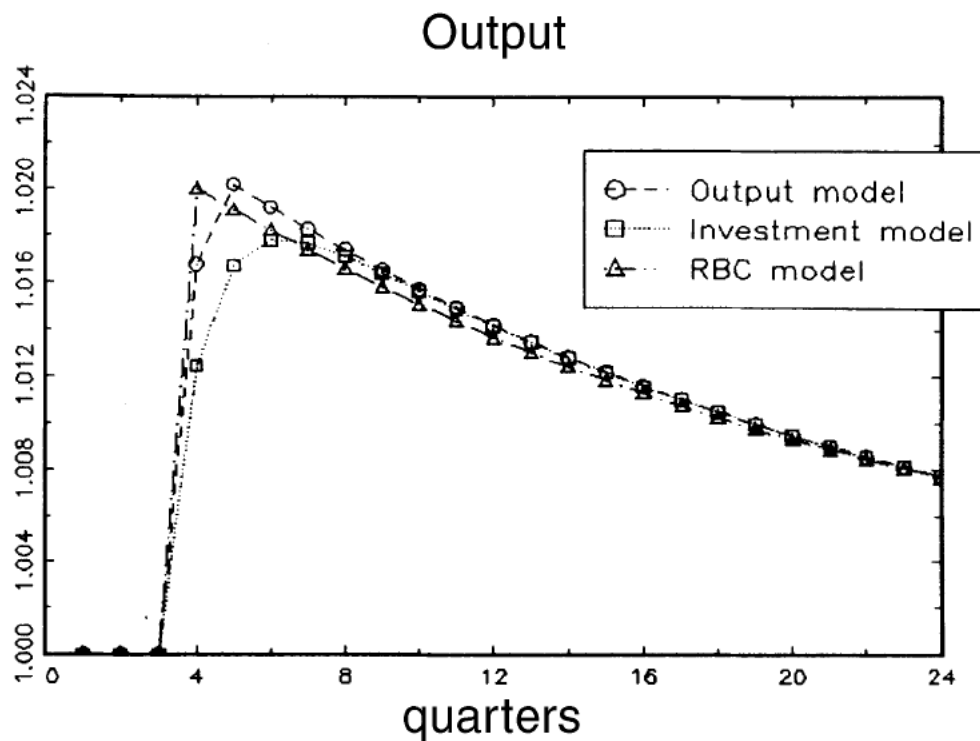
de expectativas en un mercado financiero más detallado y cercano a la realidad que el de un modelo de ciclo de negocios reales. Estos resultados son robustos al usar dos tipos de ganancia de aprendizaje (constante y decreciente).

3.1. Introducción

A raíz de las últimas crisis financieras ha resurgido el interés por el papel del sector financiero en el ciclo económico (Queralto (2020) y Kozlowski et al. (2020)), ya que los problemas en este sector se caracterizan por generar fuertes y prolongados efectos sobre la actividad económica. Eso ha motivado el surgimiento de una nueva modelación macroeconómica que logre explicar la mayor volatilidad y persistencia del ciclo económico por medio de canales endógenos que se fortalecen con la presencia de fricciones financieras (Bernanke et al. (1999), Kiyotaki and Moore (1997), Carlstrom and Fuerst (1997), Carlstrom and Fuerst (1998) y Christiano et al. (2014)). En esta línea también se encuentran trabajos que modelan intermediarios financieros apalancados que afectan el ciclo de crédito y la toma de riesgo (Dell’Ariccia et al. (2014), Altunbas et al. (2012), Badarau and Popescu (2014) y Meh and Moran (2010)).

Aunque, esos estudios representan un gran avance para el fortalecimiento de los canales de transmisión endógenos del ciclo de negocios, tienen aspectos susceptibles de mejorar. Por ejemplo, Carlstrom and Fuerst (1998) resaltan la importancia de sus modelos para generar persistencia del producto; pero también sus limitaciones para generar volatilidad. En particular muestran como sus modelos (Carlstrom and Fuerst (1997), Carlstrom and Fuerst (1998)) no logran mejorar la volatilidad frente a modelos de ciclos de negocios estándar, tal como muestra el Gráfico 3.1, el cual compara la repuesta del producto ante un choque de tecnología similar en los modelos con fricción en el mercado de bienes (output model, línea con círculos) y en el mercado de inversión (investment model, línea con cuadros) con respecto a un modelo de ciclo de negocios estándar.

Gráfico 3.1 Impulsos respuesta del producto ante un choque de tecnología – Carlstrom y Fuerst (1998)



El Cuadro 3.1. presenta los resultados de la simulación de los modelos de Carlstrom y Fuerst con fricciones financieras en el mercado de inversión (columna 2, Carlstrom and Fuerst (1997)) y mercado de bienes (columna 3, Carlstrom and Fuerst (1998)). La primera fila presenta la desviación estándar del choque de tecnología requerida para igualar la volatilidad observada del producto en el período 1959-2019, la cual se muestra en la segunda fila del cuadro. Se observa que en el modelo de fricción en el mercado de inversión se requiere un poco más que en el modelo con fricción en el mercado de bienes. Tanto los resultados del Gráfico 3.1 como del Cuadro 3.1 motivan a indagar por la forma en que se podría requerir una menor magnitud del choque de tecnología para igualar la volatilidad observada del producto sin sacrificar el grado de persistencia.

Cuadro 3.1 Calibración con respecto a la desviación estándar del producto de los EE.UU 1959-2019

Modelo de Carlstrom y Fuerst (1997 y 1998)		
Variable	Fricción en el mercado de inversión	Fricción en el mercado de bienes
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	0.3174	0.2889
σ_{producto}	1.4740	1.4740
$\sigma_{\text{inversión}}$	1.1010	1.2666
$\sigma_{\text{retorno de capital}}$	0.0352	0.0320
γ_{producto}	0.9543	0.9503
$\gamma_{\text{inversión}}$	0.9470	0.6346
$\gamma_{\text{retorno de capital}}$	0.9467	0.9451

Por otra parte, los modelos de Carlstrom Fuerst, al igual que la mayoría de esta literatura, parte de la existencia racionalidad de las expectativas para su modelación, supuesto que no cuenta con suficiente evidencia sobre su existencia, al alejarse del comportamiento de los agentes económicos (Storm (2021)). En particular, hay evidencia mixta sobre la existencia de racionalidad de expectativas en las encuestas de pronósticos. Por ejemplo, hay un conjunto de estudios empíricos no encuentran evidencia en favor del cumplimiento de la hipótesis de racionalidad para EE.UU. y otras economías, tanto para las encuestas de inflación como de tasas de interés (Kokoszczynski et al. (2005b), Pfajfar and Santoro (2007), Dias et al. (2010), Lyziak (2013), Erjavec et al. (2015), Drakos et al. (2020), Guillén (2008), Da Silva Filho (2013), Gaglianone et al. (2016), Galindo (1995), Carvalho and Minella (2012) y Miah et al. (2016)). En particular, Friedman (1980), Jongen and Willem (2008) y Miah et al. (2016) no encuentran evidencia de que las encuestas de tasas de interés cumplan con la hipótesis de racionalidad en los EE.UU.

Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo del presente estudio es evaluar si el aprendizaje de expectativas le agrega volatilidad al producto en los modelos de fricciones financieras de Carlstrom and Fuerst (1997) y Carlstrom and Fuerst (1998) sin perder su persistencia. En tal sentido, el trabajo aporta a la literatura en tres direcciones. En primer lugar, aporta evidencia sobre como el aprendizaje de expectativas complementa las fricciones financieras en un modelo ampliamente

conocido en la literatura económica. En segundo lugar, muestra como el aprendizaje en la formación de expectativas le agrega volatilidad al producto simulado por el modelo de Carlstrom and Fuerst (1997) sin perder persistencia. Es decir, el presente estudio es una prueba de concepto de los mecanismos para mostrar el papel del aprendizaje en el sector financiero. Estos resultados son robustos ante dos tipos de ganancia de aprendizaje utilizados (constante y decreciente). Finalmente, el estudio presenta una mejora en el ajuste de los momentos a las cifras observadas en variables macroeconómicas distintas al producto.

El presente estudio está asociado a la línea de literatura de Collard and Dellas (2004), Williams and Sargent (2005), Milani (2007), Carceles-Poveda and Giannitsarou (2007), Eusepi and Preston (2012), Slobodyan and Wouters (2012), Adam et al. (2016) y Rychalovska (2015) quienes encuentran efectos del aprendizaje sobre la volatilidad de las variables macroeconómicas. Con respecto a estos trabajos, el presente estudio analiza de forma novedosa los efectos del aprendizaje en dos modelos con fricciones financieras en diferentes mercados (bienes agregados e inversión), lo cual introduce riqueza analítica porque permite indagar sobre la sensibilidad de los canales de transmisión endógenos de la volatilidad y la persistencia. Adicionalmente, el presente trabajo analiza el efecto del aprendizaje por medio de dos formas de ponderar los errores de pronóstico (constante y decreciente) para analizar robustez.

En este contexto, se considera que el supuesto de aprendizaje de expectativas puede tener una afinidad natural con el comportamiento de los agentes económicos en los mercados financieros. Estos mercados se caracterizan por contar con una mayor complejidad y volatilidad, lo cual dificulta el conocimiento de los parámetros del modelo por parte de los agentes, incluso si son especializados. En tal sentido, se afecta la actividad económica (producto) por la vía de la inversión. En este contexto, es apropiado analizar la interacción entre las fricciones financieras en un mundo en el cual hay racionalidad limitada.

En las siguientes secciones se presentarán el modelo, el mecanismo de aprendizaje de expectativas y los resultados del modelo.

3.2 El modelo

El modelo de Carlstrom y Fuerst es una variante del modelo estándar de ciclo de negocios reales, al cual se le agrega un sector de producción y agentes que son empresarios. Estos agentes tienen la posibilidad de producir más allá del nivel que lo permiten sus propios recursos, al solicitar un préstamo a un fondo mutuo que opera bajo competencia perfecta. Como resultado, hay un mercado de fondos prestables en el cual el prestamista (fondo mutuo) tiene menor información que el empresario sobre el retorno del proyecto (hay asimetría de información). Hay un costo de verificación del estado del proyecto, lo que da origen a la fricción financiera.

Carlstrom y Fuerst ubican la fricción financiera en dos mercados de forma alternativa, dependiendo de dónde se encuentra el agente empresarial. En el primer caso, el continuo de empresarios se ubica en el mercado de inversión (Carlstrom and Fuerst (1997)), produciendo bienes de capital no producidos uno a uno, a diferencia del modelo de ciclo de negocios reales convencional. Esto se explica porque hay choques idiosincráticos en cada proyecto. En el segundo caso, el continuo de empresarios se ubica en el mercado de bienes finales (Carlstrom and Fuerst (1998)), produciendo bienes agregados que no son el resultado uno a uno de la combinación de capital, trabajo y tecnología por medio de una función de producción con rendimientos constantes a escala, a diferencia del modelo de ciclo de negocios reales. Como en el anterior caso, esto se explica porque hay choques idiosincráticos en el proyecto de cada empresario.

En el modelo, el canal de crédito es caracterizado por un contrato de crédito con una tasa de interés fija. Tanto el capital del empresario como los créditos son intra - período. Cuando el empresario recibe el choque idiosincrático, se declarará en bancarrota y el fondo mutuo tomará lo que queda de su producción.

En línea con lo anterior, los costos de agencia se ubican en dos lugares de forma alternativa, lo que marca el comportamiento de los canales endógenos de transmisión de la volatilidad y persistencia del modelo. Los costos de agencia crean un costo de ajuste de capital endógeno. En tal sentido, para financiar la pérdida de peso muerto de la quiebra esperada, la unidad de inversión o el bien final deben venderse con una

prima sobre su costo de producción. Esto da origen a un margen (markup) sobre el precio de la inversión y sobre el precio del bien final, dependiendo de dónde se ubique la fricción del modelo, respectivamente.

Inicialmente Carlstrom y Fuerst (Carlstrom and Fuerst (1997)) asumieron que los costos de agencia se derivaban de problemas de información en el mercado de inversión. Posteriormente, Carlstrom and Fuerst (1998) asumieron que los costos de agencia podrían surgir por problemas de información en la producción de bienes agregados. Este experimento permitió ilustrar los efectos de los costos de agencia sobre la amplificación y persistencia de los modelos. En su momento, encontraron, bajo el supuesto de expectativas racionales, que cuando los problemas de información y costos de agencia se ubican en el corazón el mercado de inversión, se generan resultados superiores en términos de amplificación y persistencia con respecto a los obtenidos cuando las fricciones se ubican en el mercado de bienes agregados. El presente trabajo hará igual análisis bajo el efecto de aprendizaje de expectativas.

El modelo representa una economía cerrada con hogares, empresarios y un fondo mutual. Los hogares y los empresarios son consumidores, al tiempo que los hogares tienen capital y ofrecen trabajo y capital para la producción.

El modelo tiene la virtud de introducir un mecanismo que robustece los canales endógenos de volatilidad del modelo, de tal modo que genere cifras que se ajusten mejor a las observadas en las economías. Esto lo hace con la introducción de una fricción financiera que parte de los costos de verificación de estado del proyecto, derivados de la asimetría de información existente entre el prestamista y el prestatario sobre el comportamiento del proyecto. Esta fricción, que puede ser introducida en el mercado de inversión o en el mercado agregado de bienes, representa un gran avance frente al modelo convencional de ciclos de negocios reales con una buena justificación e intuición a partir de la imperfección existente en los mercados financieros y como ello deriva en una mayor fluctuación del ciclo económico. Una de las ventajas del modelo es que se formula en un contexto nuevo en el que los problemas de información pueden ser fácilmente manejados en un entorno bastante similar al modelo canónico de ciclos económicos reales.

En las secciones subsiguientes, se observará que dicho avance es complementado y mejorado con la introducción del aprendizaje de expectativas como un supuesto más ajustado a la realidad de los agentes en el mundo financiero y económico. Esto se hará mediante la introducción de un algoritmo de aprendizaje que se alimenta de los errores de pronóstico observados sobre los parámetros del modelo, por parte de cada agente a lo largo del tiempo. El análisis se hará tanto cuando la fricción es introducida en el mercado de inversión como cuando se introduce en el mercado agregado de bienes.

En las siguientes dos secciones se presentan los principales aspectos analíticos del modelo cuando la fricción se presenta en el mercado de inversión, dando lugar a un margen en el precio de la inversión en la q de Tobin (Carlstrom and Fuerst (1997)), y cuando la fricción se ubica en el mercado de bienes con un margen sobre el precio del bien final p (Carlstrom and Fuerst (1998)). Las variables que se presentan a continuación están en niveles, pero el modelo es programado de forma linealizada, tal como se indica en el anexo C, donde también se encuentra el detalle del desarrollo matemático.

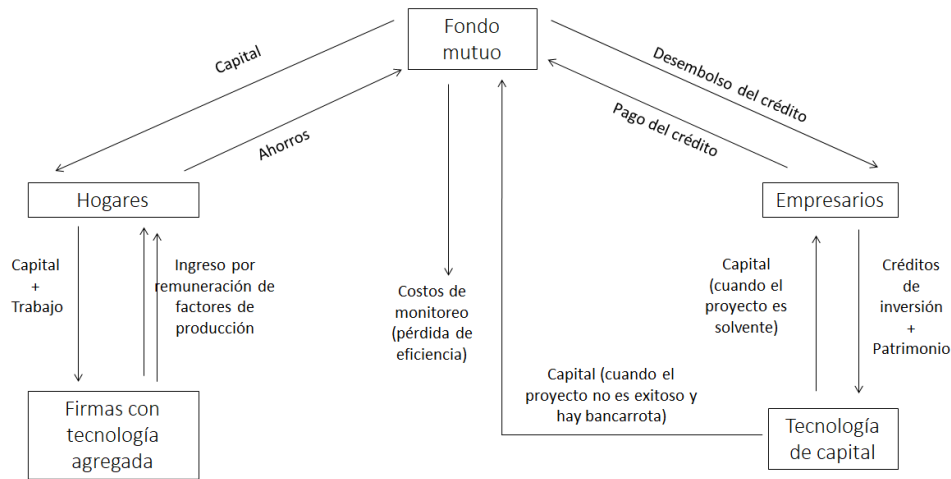
3.2.1 Modelo con la fricción en el mercado de inversión

La característica principal de esta versión del modelo es que hay un continuo de empresarios que se ubican en el mercado de inversión (Carlstrom and Fuerst (1997)). Estos agentes están dotados con una tecnología que convierte un capital sin transformar y lo transforma en un capital finalizado con una tecnología que está sujeta a choques productivos, a diferencia del modelo de ciclo de negocios reales, donde esta conversión es uno a uno siempre. Los choques idiosincráticos son independientes e idénticamente distribuidos entre los empresarios y en el tiempo. Además, el choque idiosincrático es información privada para el empresario. Para observar esto, el fondo mutuo debe pagar un costo de auditoría que es una proporción del retorno bruto realizado del capital que tiene el empresario.

Por consiguiente, la dificultad surge porque los costos de agencia crean un costo de ajuste de capital endógeno. En particular, para financiar la pérdida de la quiebra esperada, el capital recién producido debe venderse a una prima sobre su coste de producción, la cual tiene la interpretación de una "Q de Tobin" endógena (q).

Bajo estos supuestos, el contrato óptimo es una deuda estándar con bancarrota costosa. Si el empresario no hace default, el prestamista recibe un pago fijo independientemente de la realización del choque idiosincrático. En contraste, si el empresario hace default, el prestamista audita y embarga lo que encuentra. El esquema de relacionamiento de todos los agentes del modelo se presenta en el Gráfico 3.1.

Gráfico 3.2 Esquema y flujo del modelo con fricción en el mercado de inversión



Contrato financiero óptimo

El empresario entra en el período t con una dotación de unidades de capital z_t . Este capital le reporta un ingreso $(r_t Z_t)$ que sumado al valor de las unidades de capital netas de depreciación $(q_t(1 - \delta)Z_t)$ constituyen el patrimonio neto (n_t) del empresario en el momento t :

$$n_t = z_t[q_t(1 - \delta) + r_t]$$

Un empresario que tiene un patrimonio neto (n_t) y desea invertir por encima de este monto, debe pedir prestado al fondo mutuo un monto (b_t) , tal que:

$$b_t = i_t - n_t$$

Bajo el contrato financiero, el empresario se compromete a repagar $((1 + r_t)(i_t - n_t))$ bienes de consumo, es decir, el principal del crédito más la tasa de interés del préstamo.

El empresario invierte i_t bienes de consumo en la tecnología de creación de capital y recibe un choque idiosincrático, ω , y produce bienes de capital final en una cantidad $i_t\omega$, es decir, bienes de capital = $f(\text{bienes de consumo})$.

Estos bienes de capital son vendidos a un precio de mercado, q_t , de tal modo que el valor del bien de consumo $i_t\omega$ es $q_t i_t \omega$. ω es idénticamente e independientemente distribuido con una función de densidad $\phi(\omega)$, una función de densidad acumulada $\Phi(\omega)$ y valor esperado igual a uno ($E(\omega) = 1$). La variable ω se realiza luego de que el empresario invierte una cantidad i_t . Luego de que ω es realizado, el empresario conoce su valor. Para alguien diferente del empresario, si desea observar ω tiene que pagar un costo de monitoreo, lo cual es una fracción de la cantidad invertida.

De acuerdo con el contrato, si el empresario experimenta un choque ω que lo imposibilita de hacer el repago ($(1 + r_t)(i_t - n_t)$), debe entonces declararse en bancarrota y repagar lo que tiene, es decir, $i_t\omega$.

Para tal efecto, hay un valor $\bar{\omega}_t$, tal que para todo $\omega_t < \bar{\omega}_t$ es imposible para el empresario poder pagar con su patrimonio (n_t) el crédito. Este valor satisface que $((1 + r_t)(i_t - n_t) - q_t i_t \bar{\omega} = 0)$, lo cual es equivalente a que $\bar{\omega} = ((1 + r_t)(i_t - n_t))/(q_t i_t)$. En otras palabras:

- $\omega_t \geq \bar{\omega}_t$ El empresario paga el préstamo y disfruta sus beneficios
- $\omega_t < \bar{\omega}_t$ El empresario se declara en bancarrota y pierde todo

Cuando el empresario declara la bancarrota, el fondo mutuo verifica el proyecto monitoreando al empresario. Si el fondo mutuo no monitorea, el empresario tendrá un incentivo a sub reportar el valor de ω , y repagar solo una pequeña cantidad al fondo mutuo. Pero el monitoreo es costoso, por lo cual el fondo tiene que pagar μ_t unidades de bienes de capital para monitorear al empresario.

Como resultado, el contrato óptimo está dado por la cantidad prestada y una tasa de interés que maximiza los beneficios del empresario, sujeto a un cronograma de

oferta del prestamista. En las próximas secciones se analizan la decisión de oferta del prestamista (fondo mutuo) y el problema de maximización, respectivamente.

Decisión de la oferta de capital por parte del fondo mutuo

El fondo mutuo es un intermediario financiero neutral al riesgo que no obtiene ingresos ni produce bienes de consumo o de capital. Este agente tiene el papel de eliminar la incertidumbre agregada proveniente de la actividad productora de capital. El fondo mutuo se financia con recursos que provienen de los hogares a quienes les paga una tasa de retorno neta de cero (la tasa bruta es igual a 1). Es decir, que el fondo obtiene $i_t - n_t$ unidades del bien de producto del hogar, y le retorna igual cantidad en el período t . El fondo mutuo realiza préstamos intra período y no recibe ni paga intereses del préstamo, lo cual es una hipótesis que simplifica el análisis. Este fondo opera en un mercado perfectamente competitivo, lo cual implica una condición de beneficio cero, tal que los ingresos del fondo son iguales a sus costos ($E(\text{Ingreso}) = E(\text{Costos})$), y bajo este criterio establece su menú de oferta de recursos para los empresarios.

$$\underbrace{q_t i_t g(\bar{\omega}_t)}_{\text{Ingreso esperado del prestamista}} = \underbrace{i_t - n_t}_{\text{Costo esperado}}$$

Donde $g(\bar{\omega}_t) = \int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \Phi\mu + [1 - \Phi]\bar{\omega}_t$ es la participación de la producción que reciben los hogares a través del fondo mutuo.

$\bar{\omega}_t$ es el valor crítico del éxito del proyecto y ω_t es una variable aleatoria con distribución log-normal e independiente e idénticamente distribuida en el tiempo. $\omega_t \sim \text{LogN}(-\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2)$, $\Phi(\omega_t)$ es la función de distribución acumulada, y $\phi(\omega_t)$ es la función de densidad de ω_t .

Decisión de demanda de capital por parte del empresario

Los empresarios, neutrales al riesgo, maximizan el beneficio esperado que es igual a $q_t i_t f(\bar{\omega}_t)$. A su vez, este beneficio debe ser mayor al patrimonio inicial del empresario, de lo contrario decidirá no invertir y conservar su patrimonio n_t . Por consiguiente:

$$\underbrace{q_t i_t f(\bar{\omega}_t)}_{\text{Beneficio esperado}} > \underbrace{n_t}_{\text{Patrimonio inicial}}$$

Donde $f(\bar{\omega}_t) = \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \omega \Phi(d\omega) - [1 - \Phi]\bar{\omega}_t$ es la participación de la producción que recibe el empresario.

Ahora, la competencia asegura que, en equilibrio, el contrato de deuda maximiza los beneficios del empresario sujeto a la condición de beneficio de cero del fondo mutuo. Es decir, el empresario maximiza:

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\omega}_t, i_t} \quad & q_t i_t f(\bar{\omega}_t) \\ \text{sujeto a:} \quad & q_t i_t g(\bar{\omega}_t) = i_t - n_t \end{aligned}$$

Al obtener las condiciones de primer orden, combinarlas y hacer reemplazos (ver anexo C), se obtiene la ecuación del contrato financiero óptimo:

$$q_t = \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t \mu)) + \frac{f(\bar{\omega}_t) \mu \phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega}_t)}}$$

Decisión de consumo del empresario

Una vez los empresarios reciben sus ingresos, toman su decisión de consumo teniendo en cuenta su restricción presupuestaria. Esto se plantea en el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{e_t, z_{t+1}} \quad & E_t \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma \beta)^t e_t \\ \text{sujeto a:} \quad & e_t + q_t z_{t+1} = q_t i_t f(\bar{\omega}_t) \end{aligned}$$

Donde e_t es el consumo de los empresarios y z_{t+1} es su capital en el período $t + 1$ ²⁶. Ambas variables representan la suma de los gastos. La restricción plantea que los gastos de los empresarios deben ser iguales a los ingresos dados por $q_t i_t f(\bar{\omega}_t)$. El parámetro γ denota el factor de descuento adicional para los empresarios, tal que

²⁶El capital de los hogares es k_t y el capital de los empresarios es z_t .

$0 < \gamma < 1$. Que este factor sea $\gamma < 1$ ²⁷ indica que los empresarios descuentan el futuro más fuertemente que los hogares. La razón es que los empresarios ganan una tasa de retorno intertemporal sobre los ahorros más alta que los hogares. En tal sentido, empresarios con tasa de descuento igual que los hogares ahorrarían más, acumulando suficiente capital sin que pidieran prestado a los fondos mutuales. Por tal motivo, $\gamma < 1$ ayuda a que las fricciones financieras permanezcan operativas en esta economía (Bianchi (2012b)).

Al obtener las condiciones de primer orden, combinarlas y hacer reemplazos (ver anexo C), se obtiene la condición optimizadora de los empresarios:

$$q_t = \gamma\beta E_t \left([r_{t+1} + q_{t+1}(1 - \delta)] \frac{q_{t+1}f(\bar{\omega}_{t+1})}{1 - q_{t+1}g(\bar{\omega}_{t+1})} \right)$$

Los hogares

El problema de los hogares es maximizar su nivel de consumo, trabajo y ahorro, tal que:

$$\begin{aligned} \max_{(c_t, l_t, k_{t+1})_0^\infty} \quad & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} u(c_t, l_t) \\ \text{sujeto a:} \quad & c_t + q_t(i_t - n_t) = w_t l_t + r_t k_t \end{aligned}$$

Donde c_t es el consumo de los hogares; l_t , el trabajo de los hogares; i_t , la inversión; n_t , el patrimonio neto inicial de los empresarios, y $q_t(i_t - n_t)$ es el nivel de ahorro de los hogares valuado al costo de invertir. Como $q_t(i_t - n_t) = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$, donde k_{t+1} y k_t son el capital de los hogares en el período $t + 1$ y t , respectivamente; y δ es la tasa de depreciación del capital, la restricción se puede escribir como: $c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = w_t l_t + r_t k_t$.

Una vez se define el problema de los hogares, se obtienen las condiciones y efectúan los respectivos reemplazos, cuyo detalle se encuentra en el anexo C, se encuentra la siguiente ecuación intertemporal de Euler que relaciona el consumo presente con el consumo futuro:

²⁷Es 0,975, al igual que Carlstrom y Fuerst.

$$q_t u'_c(c_t, l_t) = E_t \beta u'_c(c_{t+1}, l_{t+1}) [q_{t+1}(1 - \delta) + r_{t+1}]$$

Asimismo, se halla la ecuación intratemporal que marca la decisión entre consumo y trabajo ²⁸.

$$w_t = - \frac{u'_l(c_t, l_t)}{u'_c(c_t, l_t)}$$

Firmas

Las firmas tienen el problema de maximizar su beneficio dado un nivel de producción con una tecnología Cobb-Douglas. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \max_{(k_t, l_t)} \quad & y_t - r_t k_t - w_t l_t \\ \text{sujeto a:} \quad & y_t = F(k_t, l_t) \end{aligned}$$

Donde la función de producción $F(k_t, l_t)$ es de la forma:

$$F(k_t, l_t) = \theta_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}$$

La siguiente ecuación define el choque de productividad que recibirá la firma en el periodo t .

$$\theta_t = \theta_{t-1}^\rho + \epsilon_t$$

Donde $\epsilon_t \sim N(0, 1)$.

Luego de maximizar, obtener las condiciones de primer orden y hacer reemplazos (ver anexo C), se obtienen las siguientes ecuaciones de demanda de capital y trabajo de las firmas:

$$\begin{aligned} r_t = F'_k(k_t, l_t) &= \alpha \frac{y_t}{k_t} \\ w_t = F'_l(k_t, l_t) &= (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t} \end{aligned}$$

²⁸La función de utilidad específica empleada es $\ln(c_t) + v(1 - l_t)$.

Otras ecuaciones del modelo

La siguiente ecuación implica que el mercado de bienes se vacía.

$$c_t + e_t + i_t = y_t$$

La siguiente ecuación cierra el mercado de bienes de capital²⁹.

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t[1 - \Phi(\bar{\omega}_t)\mu]$$

Finalmente, la ecuación de la distribución del producto entre los hogares y empresarios es la siguiente:

$$f(\bar{\omega}_t) + g(\bar{\omega}_t) + \Phi\mu = 1$$

$$f(\bar{\omega}_t) + g(\bar{\omega}_t) = [1 - \Phi\mu]$$

Donde $(\Phi(\bar{\omega})\mu)$ es el costo esperado de bancarrota a raíz de los costos de monitoreo (μ) . Se asimila a la pérdida de eficiencia de la economía por la falta de información completa $\pi_t = -\Phi\mu$.

3.2.2 Modelo con fricción en el mercado de bienes

La característica principal de esta versión del modelo es que hay un continuo de empresarios que se ubican en el mercado agregado de bienes (Carlstrom and Fuerst (1998)). Estos agentes están dotados con una tecnología que convierte insumos de producción en un bien final con una tecnología que está sujeta a choques tecnológicos, pero además choques productivos idiosincráticos, a diferencia del modelo de ciclo de negocios reales, donde esta conversión es uno a uno siempre. Los choques idiosincráticos tienen las mismas propiedades ya comentadas en la anterior versión del modelo.

Lo anterior también implica que los costos de agencia crean un costo de ajuste de

²⁹El *stock* de capital de los hogares está descrito por una ley de movimiento, mientras que el *stock* de capital de los empresarios no.

capital endógeno. En particular, para financiar la pérdida de la quiebra esperada, el bien final recién producido debe venderse a una prima sobre su coste de producción (p).

Contrato financiero óptimo

La economía tiene un continuo de firmas con masa unitaria. La función de producción presenta rendimientos constantes a escala y la producción de cada firma está dada por:

$$Y_t = \omega_t \theta_t F(K_t, L_t)$$

Donde ω_t representa el choque idiosincrático de productividad. El empresario de la firma contrata y paga rentas de capital y trabajo luego de observar el choque agregado, pero sin observar el choque idiosincrático. Los empresarios usan el patrimonio (n_{it}) y reciben capital de los inversionistas externos por medio de los fondos mutuos, con el fin de pagar las cuentas de las firmas. Los fondos de los empresarios provienen del capital acumulado a inicio de período, tal que:

$$n_t = z_t[(1 - \delta) + r_t]$$

Ahora, la factura de pago de insumos de la firma es:

$$m_t = w_t L_t + r_t k_t$$

De tal modo, el financiamiento externo requerido del fondo mutuo (b_t) es:

$$b_t = m_t - n_t$$

Bajo el contrato financiero, el empresario se compromete a repagar $(1 + r_t)(m_t - n_t)$ bienes finales. El empresario invierte m_t en la firma y recibe un choque idiosincrático privado, ω , lo cual genera un problema de riesgo moral. El fondo mutuo puede observar el choque si paga un costo de monitoreo que es proporcional al tamaño del costo del insumo de la firma μm_{it} . Esta estructura de información que tiene costos de verificación deriva en un contrato óptimo entre el empresario de la firma y el fondo mutuo, ambos neutrales al riesgo.

El contrato tiene dos valores críticos: tamaño del proyecto (m_t) y el valor crítico

ω , el cual se denota ω_t . Para tal efecto, existe un valor $\bar{\omega}_t$, tal que para todo $\omega_t < \bar{\omega}_t$ es imposible para el empresario pague el crédito con su patrimonio (n_t). Este valor satisface que $((1 + r_t)(m_t - n_t) - p_t m_t \bar{\omega} = 0)$, lo cual es equivalente a que $\bar{\omega} = ((1 + r_t)(m_t - n_t))/(p_t m_t)$. En otras palabras:

- $\omega_t \geq \bar{\omega}_t$ El empresario paga el préstamo y disfruta sus beneficios
 $\omega_t < \bar{\omega}_t$ El empresario se declara en bancarrota y pierde todo

En las siguientes secciones se observan las decisiones de oferta y de demanda de recursos prestables.

Decisión de la oferta de capital por parte del fondo mutuo

El fondo mutuo es un intermediario financiero neutral al riesgo que elimina la incertidumbre agregada proveniente de la actividad productora de bienes finales. El fondo mutuo se financia con recursos que provienen de los hogares por un monto $m_t - n_t$, y opera en un mercado perfectamente competitivo, lo cual implica una condición de beneficio cero, de manera que los ingresos del fondo son iguales a sus costos, tal que:

$$E(\text{Ingreso}) = E(\text{Costos})$$

$$\underbrace{p_t m_t g(\bar{\omega}_t)}_{\text{Ingreso esperado del prestamista}} = \underbrace{m_t - n_t}_{\text{Costo esperado}}$$

A su vez, el ingreso del fondo mutuo está integrado por los ingresos que provienen tanto de los préstamos exitosos como de los ingresos derivados de los proyectos que entraron en bancarrota:

$$\underbrace{\int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} (m_t - n_t) \Phi(d\omega)}_{\text{Ingreso (pago del préstamo)}} + \underbrace{p_t m_t \left(\int_{\infty}^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \int_{\infty}^{\bar{\omega}} \mu \Phi(\omega) \right)}_{\text{Ingreso (bancarrota)}}$$

Decisión de demanda de capital por parte del empresario

Los empresarios, neutrales al riesgo, maximizan el beneficio esperado, el cual es igual a:

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\omega}_t, m_t} \quad & p_t m_t f(\bar{\omega}_t) \\ \text{sujeto a:} \quad & p_t m_t g(\bar{\omega}_t) = m_t - n_t \end{aligned}$$

Donde los ingresos del empresario provienen del retorno de su inversión en la producción de las firmas. Luego de obtener las condiciones de primer orden y hacer los reemplazos respectivos, se obtiene la siguiente condición de contrato óptimo que define el comportamiento de markup, cuyo detalle se encuentra en el anexo C:

$$p_t = \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t \mu)) + \frac{f(\bar{\omega}_t) \mu \phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega}_t)}}$$

Decisión de consumo del empresario

El problema del empresario para decidir su nivel de consumo y de capital es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{e_t, z_{t+1}} \quad & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma \beta)^t e_t \\ \text{sujeto a:} \quad & e_t + z_{t+1} = p_t m_t f(\bar{\omega}_t) \end{aligned}$$

Donde e_t es el consumo de los empresarios y z_{t+1} es su capital en el período $t + 1$. Ambas variables representan la suma de los gastos. La restricción plantea que los gastos de los empresarios deben ser iguales a los ingresos dados por $p_t m_t f(\bar{\omega}_t)$. El parámetro γ denota el factor de descuento adicional para los empresarios, tal que $0 < \gamma < 1$. La función del parámetro $\gamma < 1$ es clave para mantener la fricción financiera del modelo en línea con lo explicado en el modelo con fricción en el mercado de inversión.

Al obtener las condiciones de primer orden, combinarlas y hacer reemplazos (ver anexo C), se obtiene la siguiente ecuación de los empresarios:

$$1 = \gamma\beta \left([(1 - \delta) + r_{t+1}] \frac{p_{t+1}f(\bar{\omega}_{t+1})}{1 - p_{t+1}g(\bar{\omega}_{t+1})} \right)$$

Hogares

El problema de los hogares es maximizar su nivel de consumo, trabajo y ahorro, tal que:

$$\begin{aligned} \max_{(c_t, l_t, k_{t+1})_0^\infty} \quad & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} u(c_t, l_t) \\ \text{sujeto a:} \quad & c_t + (m_t - n_t) = w_t l_t + r_t k_t \end{aligned}$$

Donde, en su orden de escritura en la ecuación, c_t es el consumo de los hogares; l_t , el trabajo de los hogares; m_t , el tamaño del proyecto de inversión; y n_t , el patrimonio neto inicial de los empresario. $(m_t - n_t)$ denota el ahorro de los hogares valuado al nivel de precios actual y $(m_t - n_t) = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$, donde k_{t+1} y k_t son el capital de los hogares en el período $t + 1$ y t , respectivamente; y δ es la tasa de depreciación del capital. En consecuencia, la restricción se puede escribir como: $c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = w_t l_t + r_t k_t$.

Una vez se define el problema de los hogares, se obtienen las condiciones y efectúan los respectivos reemplazos, cuyo detalle se encuentra en el anexo C, se obtiene la siguiente ecuación intertemporal de Euler que relaciona el consumo presente con el consumo futuro:

$$u'_c(c_t, l_t) = \beta u'_c(c_{t+1}, l_{t+1}) [(1 - \delta) + r_{t+1}]$$

En igual sentido, se obtiene la ecuación intratemporal que marca la decisión entre consumo y trabajo:

$$-\frac{u'_l(c_t, l_t)}{u'_c(c_t, l_t)} = w_t$$

Firmas

La economía contiene un continuo de firmas con masa unitaria que producen un bien final. La función de producción de la firma i tiene retornos constantes a escala y está

dada por:

$$y_t = \omega_t \theta_t F(k_t, l_t)$$

Donde ω_t es el choque idiosincrático que se observa después de realizar el proceso de producción. Sin embargo, para producir antes de observar el choque idiosincrático, cada firma debe decidir cuanto trabajo y capital deben contratar. Para esto, debe solucionar el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{(k_t, l_t)} \quad & y_t - r_t k_t - w_t l_t \\ \text{sujeto a:} \quad & y_t = \frac{F(k_t, l_t)}{p_t} \end{aligned}$$

La tecnología es $F(k_t, l_t) = \theta_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}$, y el choque de productividad es $\theta_t = \theta_{t-1}^\rho + \epsilon_t$. Luego de encontrar las condiciones de primer orden, así como de hacer reemplazos se tienen las ecuaciones de demanda de los factores capital y trabajo:

$$\begin{aligned} r_t &= \frac{F'_k(k_t, l_t)}{p_t} = \alpha \frac{y_t}{k_t p_t} \\ w_t &= \frac{F'_l(k_t, l_t)}{p_t} = (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t p_t} \end{aligned}$$

Otras ecuaciones del modelo

Para cerrar el modelo, se introducen las siguientes ecuaciones. En primer lugar, se introduce la ecuación implica que el mercado de bienes se vacía:

$$c_t + e_t + i_t = y_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t) \mu]$$

En segundo lugar, se presenta la ecuación de movimiento de capital:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

En tercer lugar, como elemento distintivo de esta versión del modelo se define el total de producción generada por los empresarios, así:

$$p_t m_t \equiv y_t = \frac{p_t n_t}{1 - p_t g(\bar{\omega}_t)}$$

Finalmente, la ecuación de la distribución del producto entre los hogares y empresarios es la siguiente:

$$f(\bar{\omega}_t) + g(\bar{\omega}_t) + \Phi\mu = 1$$

$$f(\bar{\omega}_t) + g(\bar{\omega}_t) = [1 - \Phi\mu]$$

Donde $(\Phi(\bar{\omega})\mu)$ es el costo esperado de bancarrota a raíz de los costos de monitoreo (μ) . Se asimila a la pérdida de eficiencia de la economía por la falta de información completa $\pi_t = -\Phi\mu$.

3.2.3 Introducción del aprendizaje de expectativas en la modelación

Hasta ahora, la presentación del modelo es similar a la de una economía con agentes con expectativas racionales. Esta sección introduce el aprendizaje de expectativas mediante la modificación de la ecuación de Euler e ingresa el proceso de formación de creencias de los agentes. Esto se hace tanto con el modelo con fricción en el mercado de inversión como con el modelo con fricción en el mercado de bienes, cuyo detalle se presenta en los anexos.

Intuitivamente, la introducción del aprendizaje de expectativas hace que los agentes aprendan sobre los parámetros del modelo. Esto no solo permite que la modelación se acerque más a la realidad, sino también que genera cambios en los canales endógenos de transmisión de la volatilidad y persistencia. Esto se produce porque ante un choque exógeno, los agentes del modelo no conocen que parte del movimiento puede corresponder al choque y que parte al desconocimiento del verdadero valor del parámetro.

En particular, se asume que los agentes van aprendiendo el verdadero valor de los parámetros con el paso del tiempo. Este aprendizaje lo hacen con base en la experiencia que van ganando con el paso del tiempo, es decir, con los errores de

pronóstico de sus estimaciones. Por consiguiente, con el paso de los períodos, el conocimiento de los agentes va convergiendo hacia el verdadero valor de los parámetros y el efecto del aprendizaje sobre el comportamiento de las variables va desapareciendo.

La incorporación del aprendizaje en la estructura del modelo se hace mediante varios pasos que tienen como propósito final construir un mecanismo de retroalimentación entre las expectativas de los agentes y las expectativas que son compatibles con los valores reales del modelo, tal que converjan con el tiempo al verdadero valor de los parámetros. En otras palabras, las expectativas o creencias individuales afectan los resultados del modelo, al tiempo que estos resultados, que son una combinación de las expectativas individuales y los verdaderos parámetros del modelo, afectan las expectativas individuales.

Para construir esa estructura, se desarrollan los siguientes pasos planteados por Eusepi and Preston (2012). En primer lugar, se modifica la presentación de la ecuación que relaciona intertemporalmente las decisiones de consumo y ahorro de los hogares, de tal modo que represente una senda de comportamiento a infinito. Posteriormente, se plantea la solución del sistema de ecuaciones del modelo en dos presentaciones. Esto con el fin de compatibilizar el aprendizaje de los individuos con la solución del modelo con los parámetros verdaderos del modelo. De un lado, se presenta la solución del modelo en su forma estructural que incluye la ecuación de la regla de decisión de consumo derivado de la ecuación de Euler previamente transformada. De otro lado, se emplea la forma reducida de la solución de expectativas racionales del método de Blanchard y Kahn.

Finalmente, se introduce el método de actualización de expectativas de los agentes por medio de un algoritmo de mínimos cuadrados recursivos. Intuitivamente, lo que se hace es introducir un mecanismo de aprendizaje de los agentes aprenden con base en su experiencia de errores de pronóstico. En las siguientes secciones se presentan cada uno de esos pasos.

Modificación de la ecuación de Euler de los hogares

La modificación de la ecuación de Euler de los hogares para plantear la solución del sistema de forma estructural (y equivalente a la solución de la forma reducida), se hace

mediante los siguientes pasos, partiendo de la ecuación de Euler previamente obtenida:

- Linealizar la restricción presupuestaria de hogares con base en la siguiente fórmula de linealización $f(x) \approx f'(\bar{x})\hat{x}_t$, donde $\hat{x} = x_t - \bar{x}$ es la desviación con respecto al estado estacionario.
- Iterar hacia el futuro la restricción presupuestaria.
- Iterar la ecuación de Euler de los hogares hacia atrás desde un periodo T hasta t.
- Combinar las ecuaciones iteradas hacia el futuro y pasado.
- Despejar la variable clave para la ecuación de Euler, en este caso es el consumo.

Al aplicar los anteriores pasos, cuyo detalle está en el anexo C, se obtiene la siguiente senda óptima de consumo de los hogares bajo expectativas arbitrarias para el modelo con fricción en el mercado de inversión:

$$\begin{aligned} \hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}}\hat{q}_t &= (1 - \beta) \left(\beta^{-1}\hat{k}_t + \frac{\bar{l}}{\bar{q}}\hat{w}_t + \frac{\bar{w}}{\bar{q}}\hat{l}_t + \frac{\bar{k}}{\bar{q}}\hat{r}_t - \left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{\delta\bar{k}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_t \right) \\ &\quad + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{(1 - \beta)\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{(1 - \beta)\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_{T+1} \\ + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \left[\frac{(1 - \beta)\bar{k}}{\bar{q}} - \frac{\beta^2\bar{c}}{\bar{q}} \right] \hat{r}_{T+1} &+ \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \left[\frac{(1 - \beta)\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{(1 - \beta)\delta\bar{k}}{\bar{q}} - \frac{\beta^2(1 - \delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\beta\bar{c}}{\bar{q}} \right] \hat{q}_{T+1} \end{aligned}$$

\hat{E}_t es el operador que denota las creencias subjetivas que tienen los agentes acerca de la evolución de las variables. La función de utilidad empleada es $U(c_t, l_t) = \ln(c_t) + \nu(1 - l_t)$.

En el caso del modelo con fricción en el mercado de inversión, se obtiene la siguiente senda óptima del consumo:

$$\begin{aligned} \hat{c}_t &= (1 - \beta) \left[\beta^{-1}\hat{k}_t + \bar{w}\hat{l}_t + \bar{l}\hat{w}_t + \bar{k}\hat{r}_t \right] + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} (1 - \beta) \bar{w} \hat{l}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} (1 - \beta) \bar{l} \hat{w}_{T+1} \\ &\quad + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \left[(1 - \beta)\bar{k} - \beta^2\bar{c} \right] \hat{r}_{T+1} \end{aligned}$$

Esta ecuación muestra que el consumo de hoy depende de ingresos y recursos actuales y del valor presente de los ingresos por trabajo y por ahorro futuros.

Conexión del aprendizaje con el modelo original de expectativas racionales

La conexión entre la metodología de expectativas racionales con la de aprendizaje de expectativas se hace de la siguiente forma. En primer lugar, se obtiene la representación solución (*Minimum State Variable*) al sistema de ecuaciones por medio del método de Blanchard y Kahn , así:

$$W_{t+1} = \Omega_0^{RE} + \Omega_1^{RE} K_t + \Omega_2^{RE} \varepsilon_t \quad (3)$$

Donde el vector W_{t+1} es una matriz que incluye tanto variables de control como variables de estado, Ω_1^{RE} es la matriz de coeficientes, K_t es una matriz de variables de estado (en el presente modelo capital de los hogares k_t y capital del empresario z_t), Ω_2^{RE} es el vector de coeficientes que acompañan el choque, y ε_t es el choque de tecnología.

En segundo lugar, se obtiene la solución del sistema de ecuaciones en su forma estructural, así:

$$A_0 W_t = A_1 + A_5 W_{t-1} + A_3 W_{t+1} + A_4 \sum_{T=0}^{\infty} \beta^T W_T + C \varepsilon_t$$

Donde $\sum_{T=0}^{\infty} \beta^T W_T$ representa el flujo futuro descontado de la variable consumo (c_t) bajo su regla de decisión. Tanto el coeficiente A_4 como la variable que lo acompaña solo se emplean bajo el modelo de aprendizaje de expectativas con el flujo descontado del consumo y, en su lugar, la variable se excluye tanto de A_3 como de W_{t+1} . Finalmente, C es un vector que acompaña al choque de tecnología.

Bajo aprendizaje de expectativas, la forma reducida de la solución al sistema de ecuaciones, se puede expresar de la siguiente forma:

$$W_{t+1} = T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) + T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) K_t + T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) \varepsilon_t$$

$T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo del vector intercepto), $T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo de la matriz

de transición) y $T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo de la matriz de incidencia de choques) son los mapas de coeficientes de la Ley de movimiento real, la cual combina los parámetros del sistema de ecuaciones con los parámetros estimados por los agentes bajo su ley de movimiento percibida.

El mapeo de los coeficientes (o ley de movimiento real) se construye empleando los coeficientes A_0 , A_1 , A_3 , A_4 y A_5 de la solución estructural, y los valores estimados por los agentes no racionales por medio de su ley de movimiento percibido, mediante su mecanismo de formación de creencias o expectativas. En tal sentido, se obtienen los siguientes valores cuyo detalle se encuentra en el anexo C:

$$T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1} T_I \quad (4)$$

$$T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1} [A_0^{-1} A_5 \Omega_1^L] \quad (5)$$

$$T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1} C \quad (6)$$

Donde:

$$T_C = A_0^{-1} [A_3 \Omega_1^L] + A_0^{-1} [A_4 F_1] = A_0^{-1} [A_3 \Omega_1^L + A_4 F_1] \quad (7)$$

$$F_1 = \Omega_1^L (1 - \beta) [I - \Omega_1^L]^{-1} \quad (8)$$

Las anteriores ecuaciones se emplean para construir el mapeo del conjunto de coeficientes del modelo acorde con la ley de movimiento real del modelo. Mediante este sistema de ecuaciones se integran las creencias (expectativas) de los agentes con los resultados provenientes de la estructura de estimación del modelo para determinar el comportamiento observado de los parámetros a lo largo del tiempo, así como su convergencia a la solución de expectativas racionales. Por consiguiente, hay una retroalimentación entre las creencias y los resultados del modelo. De un lado, las expectativas de los agentes afectan los resultados del modelo. De otro lado, los resultados del modelo afectan la formación de creencias (expectativas) en el período siguiente.

$\Omega_{0,t}^L$ y $\Omega_{1,t}^L$ hacen parte de una matriz Ω_t^L sobre la cual aprenden los agentes de acuerdo con un algoritmo de mínimos cuadrados recursivos, cuya explicación se encuentra en el anexo B.8.2. El algoritmo tiene la siguiente estructura:

$$\Omega_t^L = \Omega_{t-1} + g(R_t^{-1}Q_{t-1})(Z_t^{LMR} - \Omega_{t-1}^L Q_{t-1})$$

$$R_t = R_{t-1} + g(Q_{t-1}Q_{t-1}' - R_{t-1})$$

Donde:

- Ω_t^L : Coeficientes a estimar en el período t. Su valor inicial
- R_t : Matriz de precisión (varianzas y covarianzas).
- g : Parámetro de ganancia del aprendizaje.
- Q_{t-1} : vector con variable regresora capital.
- Z_t^{LMR} : vector de variables dependientes asociadas a las coeficientes sobre los que se quiere aprender.

La ganancia de aprendizaje g se puede modelar tanto de forma constante como de forma decreciente con respecto al tiempo. En el presente estudio se hace de las dos formas para analizar robustez. Las condiciones bajo las cuales $\hat{\Omega}_t^L$ converge a los valores de expectativas racionales (Ω_1^{RE}) también se encuentran en este anexo. Esta matriz incluye los coeficientes que relacionan las variables de interés para el aprendizaje con la variable de estado capital, y se construye de tal modo que permita hacer los ejercicios de sensibilización en la fuente de aprendizaje.

3.3 Parametrización

El modelo emplea la parametrización usada por Carlstrom and Fuerst (1998) para el caso de los Estados Unidos. Las series de tiempo empleadas toman el período 1959 - 2019, y su detalle se encuentra en el anexo C. Las preferencias de los hogares están dadas por la función de utilidad de la forma $U(c_t, l_t) = \ln(c_t) + \nu(1 - l_t)$, donde la constante ν es calibrada para que $\bar{l} = 0,3$; de manera que $\nu = 2,5200$.

Se emplea una tasa de descuento intertemporal de los hogares $\beta = 0,9900$. El factor de descuento adicional de los empresarios es $0,9750$. La función de producción tipo Cobb-Douglas tiene un coeficiente de participación del capital sobre la producción igual a $\alpha = 0,3600$. La tasa de depreciación del capital es $\delta = 0,0200$. El costo de monitoreo es $0,1500$. El parámetro de persistencia del choque de productividad es $\rho = 0,9500$, al tiempo que el costo de monitoreo es $\mu = 0,1500$ y la desviación estándar de la distribución de los proyectos de los empresarios ($\bar{\omega}_t$) es $\sigma_{\bar{\omega}} = 0,3700$. El parámetro límite para la bancarrota de los proyectos es $0,3931$.

Cuadro 3.2 Principales parámetros del modelo

Parámetro	Valor
<i>Descuento intertemporal de hogares</i> (β)	0.9900
<i>Factor de descuento adicional de los empresarios</i>	0.9750
<i>Participación del capital</i> (α)	0.3600
<i>Parámetro de la función de utilidad que acompaña el ocio</i> (v)	2.5200
<i>Tasa de depreciación</i> (δ)	0.0200
<i>Costo de monitoreo</i> (μ)	0.1500
<i>Persistencia del choque</i> (ρ)	0.9500
<i>Desviación estándar de la distribución log – normal</i> ($\sigma_{\log-norm}$)	0.3700
<i>Límite de bancarrota</i> ($\bar{\omega}$)	0.3931
<i>Parámetro de ponderación de los errores de pronóstico</i> (g)o "ganancia"	0.0020

Los valores de estado estacionario del modelo con las diferentes fricciones en los mercados de bienes y de inversión se encuentran en los anexos.

3.4 Resultados

En esta sección se presentan los resultados del ejercicio en dos partes. En la subsección 3.4.1., se presentan los resultados directamente vinculados con la pregunta

de investigación del presente capítulo. Estos permiten evaluar si la implementación del aprendizaje de expectativas en los modelos de Carlstrom y Fuerst genera más volatilidad sin perder persistencia, atendiendo lo indicado por Carlstrom and Fuerst (1998). Esto se hace por medio del análisis de la calibración y simulación (3.4.1.1.), así como por la vía de la interpretación de las funciones de los impulsos respuestas (3.4.1.2.). Como complemento a lo anterior, en la sección 3.4.2. se presenta un análisis de los segundos momentos de las principales variables del modelo, así como su ajuste a los datos observados para el período de análisis (1959-2019).

Las métricas que se usan para analizar la volatilidad son: la desviación máxima con respecto al estado estacionario en el caso de los impulsos respuestas, y la desviación estándar del componente cíclico en el caso de los ejercicios de calibración y simulación. Con respecto a la persistencia, se analizan el indicador Half-Life para el caso de los impulsos respuesta, y la autocorrelación de cada serie para los ejercicios de calibración y simulación.

3.4.1 Principales resultados

3.4.1.1 Calibración y simulación

En esta sección se presentan los resultados de la calibración de la desviación estándar del choque con respecto a la desviación estándar del producto, al tiempo que se presentan los resultados de la simulación para 2000 períodos (Cuadro 3.3), con ganancia de aprendizaje constante.

En la primera línea, se observa una mejoría en términos volatilidad del producto cuando hay aprendizaje, puesto que se requiere de una menor desviación estándar del choque para igualar la desviación estándar observada del producto, tanto cuando la fricción se ubica en el mercado de inversión como cuando esta se ubica en el mercado de bienes. Al analizar de forma independiente, la ganancia relativa en volatilidad del producto es mayor cuando la fricción está ubicada en el mercado de inversión (la magnitud del choque requerido en tecnología pasa de 0,3174 a 0,2513) que cuando se ubica en el mercado de bienes (la magnitud del choque requerido en tecnología pasa de 0,2889 a 0,2707). En términos de persistencia, cuando la fricción está ubicada en el

mercado de inversión no desciende (pasa de 0,9543 a 0,9769), y cuando está ubicada en el mercado de bienes cae un poco (pasa de 0,9503 a 0,9339).

Cuadro 3.3 Calibración con respecto a la desviación estándar del producto de los EE.UU. 1959-2019, con ganancia constante

Variable	Fricción en el mercado de inversión		Fricción en el mercado de bienes	
	Expectativas racionales	Aprendizaje de expectativas	Expectativas racionales	Aprendizaje de expectativas
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	0.3174	0.2513	0.2889	0.2707
σ_{producto}	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740
$\sigma_{\text{inversión}}$	1.1010	1.4057	1.2666	2.4560
$\sigma_{\text{retorno de capital}}$	0.0352	0.0357	0.0320	0.0307
γ_{producto}	0.9543	0.9769	0.9503	0.9339
$\gamma_{\text{inversión}}$	0.9470	0.9738	0.6346	0.2585
$\gamma_{\text{retorno de capital}}$	0.9467	0.9726	0.9451	0.8429

En consecuencia, en esta prueba de concepto del mecanismos del modelo de fricción se encuentra que la tensión entre volatilidad y persistencia planteada por Carlstrom and Fuerst (1998) se reduce, al generarse mayor volatilidad sin sacrificar persistencia en su modelo. En particular, esto se presenta cuando la fricción está localizada en el mercado de inversión, porque bajo aprendizaje de expectativas, los agentes de este mercado sobre reaccionan más fuertemente al interpretar un cambio en los coeficientes del modelo. Este cambio lo canalizan vía volatilidad del costo de la inversión (markup) dado el incremento del costo de supervisión (agencia) y la alta demanda por inversión. Esto genera una reacción a nivel del producto de la economía, incrementando su volatilidad. Posteriormente, se presenta una mayor oferta de inversión asociada al patrimonio neto del empresario que genera una persistencia del efecto sobre el producto, la cual es algo mayor a la del modelo original de Carlstrom and Fuerst (1998).

En contraste, cuando la fricción actúa sobre el mercado de bienes afecta más a los hogares y estos sobre reaccionan con menor fuerza ante la presencia de aprendizaje de expectativas. En particular, el margen de precios tiene un menor efecto sobre el comportamiento intertemporal de los hogares, quienes reaccionan con menor fuerza sobre el ahorro. Es decir, que la estimación de los parámetros del modelo afecta con

menor intensidad las decisiones de los hogares con respecto a lo que sucede en el mercado de inversión.

En otras palabras, la introducción del aprendizaje mejora la relación volatilidad/persistencia de tal modo que se puede generar más volatilidad sin sacrificar persistencia. Esto sucede especialmente cuando la fricción se presenta en el mercado de inversión. En otras palabras, el aprendizaje importa en un modelo con mercado financiero más cercano a la realidad, como lo es el modelo de Carlstrom and Fuerst (1998). Esto está en línea con lo planteado por Keynes (1930) y Keynes (1936), quien remarca la influencia de los movimientos del mercado financiero sobre los auges y depresiones. Los resultados persisten cuando se trabaja con una ganancia de aprendizaje decreciente, tal como se muestra en el anexo C.

3.4.1.2 Funciones de impulsos respuesta

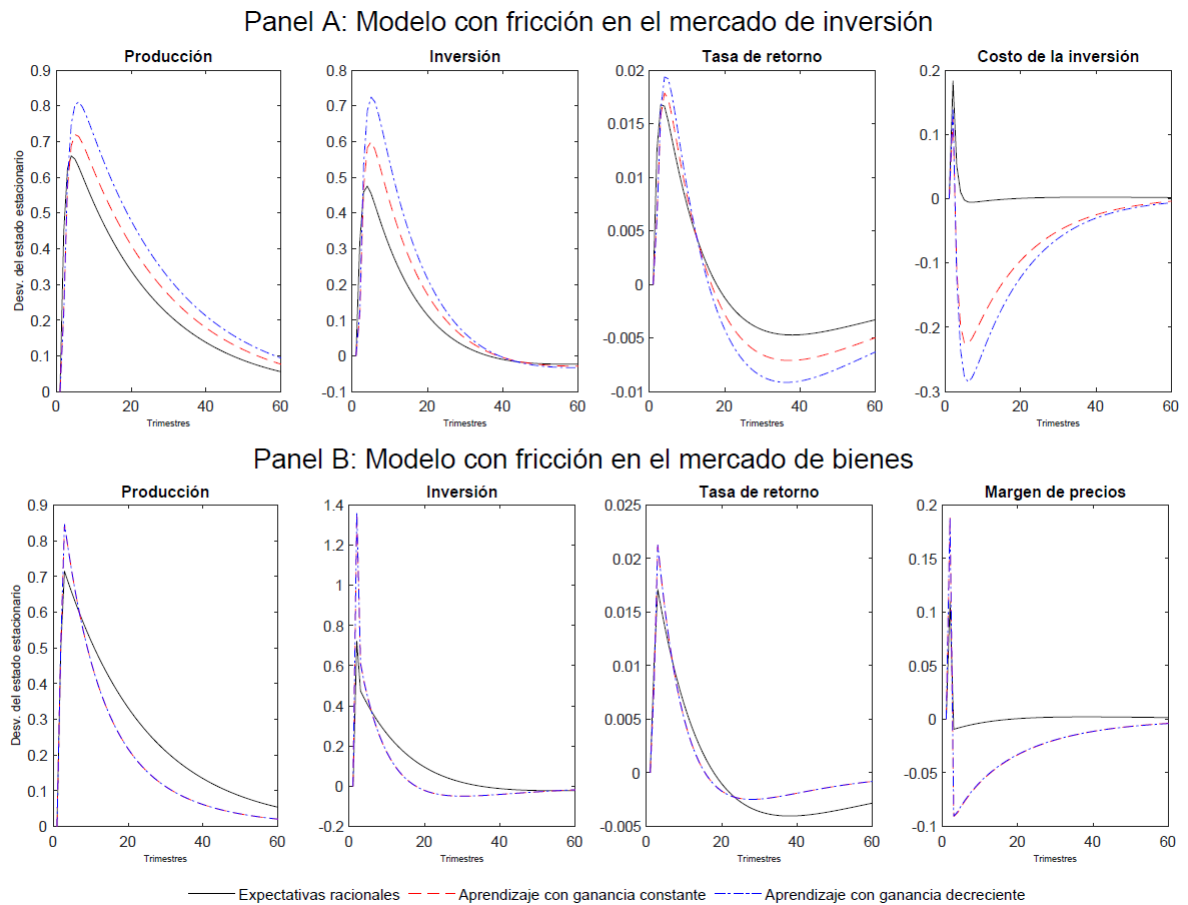
Esta sección presenta las funciones de impulsos respuesta ante un choque de igual magnitud³⁰ en los modelos de expectativas racionales (línea negra), de aprendizaje con ganancia constante (línea roja) y aprendizaje con ganancia decreciente (línea azul). En particular, se analizan los resultados de un choque de tecnología en el modelo con fricción en el mercado de inversión (Panel A) y en el modelo con fricción en el mercado de bienes (Panel B), en el Gráfico 3.3.

Con aprendizaje de expectativas hay una mayor desviación máxima con respecto al estado estacionario, es decir, mayor volatilidad en el producto, originada en el comportamiento de la inversión y del costo de la inversión (markup), principalmente. Es decir, el aprendizaje de expectativas importa en el mecanismo del canal financiero, en línea con la intuición ya explicada en la sección anterior. Los resultados son robustos ante la modelación del parámetro de ganancia (constante o decreciente). Destaca en el caso del modelo con fricción en el mercado de inversión que las líneas de aprendizaje con ganancia decreciente y con ganancia constante están más separadas, a pesar de presentar un comportamiento similar. Intuitivamente, esto se puede explicar porque la sobre-reacción generada por la combinación de un efecto más persistente en el costo de

³⁰La magnitud del choque es de 1,3 desviaciones estándar sobre la tasa de crecimiento de la tecnología

la inversión (markup) y una tasa de ganancia decreciente que hace que el ajuste por el error de pronóstico sea más lento.

Gráfico 3.3 Impulsos respuesta ante un choque de tecnología



En línea con lo anterior, el indicador de Half-Life (Cuadro 3.4) muestra que los resultados de persistencia son mixtos dependiendo del mercado dónde se ubica la fricción financiera. Cuando esta se ubica en el mercado de inversión, la persistencia del producto presenta cierto incremento. En contraste, cuando la fricción se ubica en el mercado de bienes, la persistencia del producto cae.

Cuadro 3.4 Indicador Half-Life para persistencia

Indicador Half-Life de los impulsos respuesta cuando hay fricción en mercado de inversión			
	Expectativas racionales	Aprendizaje con ponderación del error constante	Aprendizaje con ponderación del error decreciente
Producción	34.2	64.5	66.8
Inversión	18.7	29.1	34.4
Tasa de retorno	15.9	37.4	42.2
Indicador Half-Life de los impulsos respuesta cuando hay fricción en mercado de bienes			
	Expectativas racionales	Aprendizaje con ponderación del error constante	Aprendizaje con ponderación del error decreciente
Producción	28.0	16.6	15.8
Inversión	3.7	1.3	1.5
Tasa de retorno	14.7	7.3	8.2

3.4.2 Resultados complementarios

Esta sección complementa a la anterior en la medida en que presenta el ajuste a la volatilidad observada, en línea con el propósito del ejercicio. En primer lugar, se observa en el Cuadro 3.5, un mejor ajuste en términos de volatilidad de la variable producto cuando la fricción está ubicada en el mercado de inversión que cuando la fricción está ubicada en el mercado de bienes. Es decir, el descenso en la magnitud del choque requerido para igualar la volatilidad observada del producto es menor cuando la fricción se ubica en el mercado de inversión (Cuadro 3.5).

Adicionalmente, hay ganancia de implementar el aprendizaje con respecto al modelo con expectativas racionales sobre la volatilidad de variables diferentes del producto, partiendo del resultado de igualar la varianza del producto. Esto se presenta tanto cuando el aprendizaje se ubica en el mercado de inversión como en el mercado de bienes (Cuadro 3.5). En el caso del modelo con fricción en el mercado de inversión, también hay ganancia en ajuste a la volatilidad observada de la inversión, retorno del capital, trabajo y salario (Cuadro 3.5, columna 2). En el caso del modelo con fricción en el mercado de bienes, la ganancia en volatilidad también se presenta en la inversión, el consumo y el trabajo (Cuadro 3.5, columna 5).

Intuitivamente, lo que sucede en el caso del modelo de inversión es que el costo de supervisión y de la inversión (markup) afectan fuertemente el comportamiento de los empresarios en el mercado de capital. Estos reaccionan rápidamente demandando una gran cantidad de inversión ante el aumento del producto, generando unos mayores costos de inversión (markup) y de supervisión. Este mecanismo es potenciado por la presencia del aprendizaje de expectativas porque los coeficientes que relacionan estas variables también cambian ya que no interpretan que hay un choque de productividad en la economía, sino que hubo un cambio en los coeficientes del modelo. Esto genera una mayor sobre-reacción tanto en términos de volatilidad.

Algo diferente ocurre cuando las fricciones se ubican en el mercado de bienes, puesto que afectan más fuertemente el comportamiento de los hogares quienes no reaccionan de forma tan inmediata como los empresarios del mercado de inversión. En este caso, la interacción del costo de supervisión y el margen de precios afecta a los hogares; pero sus respuestas son más suavizadas a lo largo del tiempo, dadas sus características de consumo y ahorro en el tiempo. En consecuencia, hay un menor incremento en la volatilidad del producto en comparación con el caso del mercado de inversión. En este caso, la presencia del aprendizaje de expectativas hace que los hogares reaccionen con algo de menor velocidad del efecto en ciertas variables. Es decir, la presencia del aprendizaje en el mercado de bienes afecta el comportamiento de los hogares, pero estos son más estables y no sobre reaccionan tanto como el empresario ante el choque de productividad y su interpretación como un cambio en los coeficientes del modelo.

Cuadro 3.5 Calibración con respecto a la desviación estándar del producto de los EE.UU. 1959-2019, con ganancia constante

Variable	Fricción en el mercado de inversión		Valor observado	Fricción en el mercado de bienes	
	Expectativas racionales	Aprendizaje de expectativas		Expectativas racionales	Aprendizaje de expectativas
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	0.3174	0.2513	-	0.2889	0.2707
σ_{producto}	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740
$\sigma_{\text{inversión}}$	1.1010	1.4057	4.7173	1.2666	2.4560
$\sigma_{\text{retorno de capital}}$	0.0352	0.0357	1.1532	0.0320	0.0307
σ_{consumo}	0.4540	0.3923	0.8712	0.4126	0.8388
σ_{trabajo}	0.2692	0.3394	1.4377	0.2815	0.2872
σ_{salario}	1.1442	0.9886	0.7592	1.0398	2.1137

El Cuadro 3.6 también muestra las autocorrelaciones (persistencia) de otras variables de interés en ambos modelos. Cuando la fricción se encuentra en el mercado de inversión (columna 2), la persistencia aumenta en las variables de inversión y retorno del capital, además del producto. Por su parte, cuando la fricción se ubica en el mercado de bienes (columna 4), la persistencia aumenta en las variables de consumo y trabajo. Esto es reflejo de cómo se comportan los canales de transmisión del choque en presencia de aprendizaje en cada uno de los modelos, en línea con lo comentado en la sección anterior. En particular, el canal de la inversión es más fuerte ante la presencia de aprendizaje en el mercado de inversión (capital).

Cuadro 3.6 Calibración con respecto a la desviación estándar del producto de los EE.UU. 1959-2019, con ganancia constante (persistencia)

Variable	Fricción en el mercado de inversión		Fricción en el mercado de bienes	
	Expectativas racionales	Aprendizaje de expectativas	Expectativas racionales	Aprendizaje de expectativas
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	0.3174	0.2513	0.2889	0.2707
γ_{producto}	0.9543	0.9769	0.9503	0.9339
$\gamma_{\text{inversión}}$	0.9470	0.9738	0.6346	0.2585
$\gamma_{\text{retorno de capital}}$	0.9467	0.9726	0.9451	0.8429
γ_{consumo}	0.8500	0.6410	0.9702	0.9711
γ_{trabajo}	0.9661	0.9178	0.9365	0.8412
γ_{salario}	0.8500	0.6410	0.9702	0.9711

3.5 Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad permite explorar el comportamiento de los canales de transmisión endógena del modelo con respecto a variables de interés para el presente estudio. En particular, se hace sensibilidad en dos sentidos. En primer lugar, se analiza el comportamiento del modelo ante variaciones en el parámetro de ganancia de aprendizaje. Un mayor nivel de este parámetro puede ser interpretado como un mayor nivel de ajuste ante el error de estimación de los agentes.

En segundo lugar, se hace un análisis de sensibilidad con respecto a la desviación estándar de la distribución de los proyectos de la economía. A medida que aumenta este parámetro, se interpreta como un mayor nivel de riesgo en la economía, en línea con lo analizado por Christiano et al. (2014). Este parámetro es de interés porque puede integrar al análisis elementos característicos de una economía como la estabilidad política, social y de las reglas de juego para los inversionistas.

El cuadro 3.7 presenta los resultados de la sensibilización del parámetro de ganancia de aprendizaje. Entre mayor sea este parámetro, mayor es la volatilidad del producto y la inversión. De forma paralela, la mayor volatilidad está acompañada de mayor persistencia en ambas variables. Esto sugiere que países que tengan un mayor parámetro de ganancia de aprendizaje podrían registrar mayor volatilidad y persistencia del ciclo del producto y de la inversión. Este podría ser el caso de varias economías emergentes y en desarrollo.

Cuadro 3.7 Sensibilización del parámetro de ganancia de aprendizaje en el modelo calibrado por el producto

Variable	Con fricciones en el mercado de inversión				Con fricciones en el mercado de bienes			
	$g = 0.002$	$g = 0.0025$	$g = 0.0030$	$g = 0.0035$	$g = 0.002$	$g = 0.0025$	$g = 0.0030$	$g = 0.0035$
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	0.2513	0.2479	0.2451	0.2431	0.2707	0.2707	0.2707	0.2708
σ_{producto}	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740
$\sigma_{\text{inversión}}$	1.4057	1.4101	1.4151	1.4189	2.4560	2.4526	2.4499	2.4477
γ_{producto}	0.9769	0.9774	0.9777	0.9780	0.9339	0.9342	0.9345	0.9347
$\gamma_{\text{inversión}}$	0.9738	0.9741	0.9744	0.9746	0.2585	0.2608	0.2629	0.2649

El Cuadro 3.8 reporta los resultados de la sensibilización del parámetro de riesgo de los proyectos de inversión (desviación estándar de la distribución log normal). Se observa que cuando este parámetro incrementa hay mayor volatilidad y persistencia del producto y la inversión.

Los ejercicios de sensibilización apuntan a que países con mayor ganancia de aprendizaje o con mayor nivel de riesgo en el ambiente de negocios cuentan con mayor

volatilidad y persistencia del producto. Este es un tema para una agenda futura de investigación.

Cuadro 3.8 Sensibilización del parámetro de riesgo de los proyectos de inversión (desviación estándar de la distribución log normal)

Variable	Modelo de inversión			Modelo de producto		
	0.27	0.37	0.47	0.27	0.37	0.47
σ Distribución lognormal	0.27	0.37	0.47	0.27	0.37	0.47
σ choque de tecnología requerido	0.2940	0.2513	0.2510	0.3212	0.2707	0.2610
σ producto	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740
σ inversión	1.2839	1.4057	1.3924	4.9624	2.4560	1.9062
γ producto	0.9640	0.9769	0.9721	0.9001	0.9339	0.9265
γ inversión	0.8964	0.9738	0.9667	0.0761	0.2585	0.4225

3.4 Conclusiones

El presente estudio evalúa la importancia de introducir el aprendizaje de expectativas sobre la volatilidad y persistencia del producto en los modelos de fricciones financieras de Carlstrom and Fuerst (1997) y Carlstrom and Fuerst (1998). Se encuentra que el ajuste a la volatilidad del producto mejora de forma considerable sin perder persistencia del producto cuando la fricción financiera se ubica en el mercado de inversión (Carlstrom and Fuerst (1997)), debido a que el aprendizaje de los agentes sobre los coeficientes del modelo actúa con mayor fuerza sobre el canal de volatilidad ante la presencia de las fricciones en este mercado. Esto representa una ganancia con respecto al dificultad que planteaba Carlstrom and Fuerst (1998) sobre la capacidad de generación de volatilidad de sus modelos frente a un modelo de ciclo de negocios reales, a pesar de generar mayor persistencia. En tal sentido, con el aprendizaje, los canales endógenos del modelo se fortalecen, al tiempo que se mejoran los mecanismos que muestran el papel del sector financiero dentro del modelo de Carlstrom and Fuerst (1997). Estos resultados son robustos al usar dos tipos de ganancia de aprendizaje (constante y decreciente).

El estudio muestra la importancia del aprendizaje de expectativas en un mercado financiero más detallado y cercano a la realidad que el de un modelo de ciclo de negocios reales. En particular, los ejercicios realizados también indican una importante ganancia de ajuste en volatilidad a las cifras observadas de inversión y retorno del capital, lo cual refuerza el canal del mercado financiero como generador de volatilidad y persistencia del producto ante la presencia del aprendizaje.

Otro resultado interesante del trabajo es que hay una diferenciación de los efectos del aprendizaje dependiendo del lugar en cual se ubique la fricción financiera. En particular, cuando la fricción financiera se ubica en el mercado de inversión, la reacción en presencia de aprendizaje es mucho más fuerte y genera una mayor volatilidad de la inversión y el producto, liderada por el comportamiento de los empresarios y su interacción con el costo de verificación del proyecto y el costo de la inversión. Por su parte, cuando la fricción está localizada en el mercado de bienes, esta afecta directamente a los hogares, quienes presentan una respuesta menor fuerte en presencia de aprendizaje de expectativas.

Finalmente, los ejercicios de sensibilización con respecto al parámetro de ganancia de aprendizaje y con respecto a la incertidumbre sobre el retorno de los proyectos en la economía indican que ante una mayor ganancia del aprendizaje o una mayor incertidumbre puede presentarse una mayor volatilidad y persistencia del producto. Este sería un tema de la agenda futura de trabajo, pensando en realizar análisis de este tipo para economías emergentes y en desarrollo.

Bibliography

- Adam, K., Marcet, A., and Nicolini, J. P. (2016). *Stock Market Volatility and Learning*. The American Finance Association.
- Altig, D., Christiano, L. J., Eichenbaum, M., and Lindé, J. (2011). Firm-specific capital, nominal rigidities and the business cycle. *Review of Economic Dynamics* Volume 14, Issue 2, April 2011, Pages 225-247.
- Altunbas, Y., Gambacorta, L., and Marques-Ibanez, D. (2012). Do bank characteristics influence the effect of monetary policy on bank risk? *Economics Letters* 117, 220-222.
- Araujo, C. H. and Gaglianone, W. (2010). *Survey-based Inflation Expectations in Brazil*, volume 1. Bank for International Settlements.
- Badarau, C. and Popescu, A. (2014). Monetary policy and credit cycles: A dsge analysis. *Economic Modelling* 42, 301-312.
- Ball, L. and Croushore, D. (1995). Expectations and the effects of monetary policy. *NBRER Working paper* 5344.
- Bernanke, B., Gertler, M., and Gilchrist, S. (1999). The financial accelerator in a quantitative business cycle framework. *Handbook of Monetary Economics, Vol. 1C*.
- Bernanke, B. S. and Gertler, M. (1986). Agency costs, collateral, and business fluctuations. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Bianchi, A. C. (2012a). Fluctuations: A computable general equilibrium analysis,”.
- Bianchi, A. C. (2012b). Notes on ”agency costs, net worth, and business cycle fluctuations : A computable general equilibrium analysis”, by carlstram and fuerst. *Notes*.

- Brissimis, S. and Migiakis, P. (2016). *Inflation persistence, learning dynamics and the rationality of inflation expectations*, volume 51. SpringerLink.
- Carceles-Poveda, E. and Giannitsarou, C. (2007). *Adaptative Learning in Practice*. ScienceDirect.
- Carlstrom, C. T. and Fuerst, T. S. (1997). Agency costs, net worth, and business fluctuations: A computable general equilibrium analysis. *The American Economic Review*, pages 893–910.
- Carlstrom, C. T. and Fuerst, T. S. (1998). Agency costs and business cycles. *Economic Theory*, 12(3):583–597.
- Carvalho, F. and Bugarin, M. (2006). *Inflation Expectations in Latin America*, volume 0. The Latin American and Caribbean Economic Association - LACEA.
- Carvalho, F. and Minella, A. (2012). *Survey forecasts in Brazil: A prismatic assessment of epidemiology, performance, and determinants*, volume 31. *Journal of International Money and Finance*.
- CESA-BIANCHI, A. and FERNANDEZ-CORUGEDO, E. (2018). Uncertainty, financial frictions, and nominal rigidities: A quantitative investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*, 50(4):603–636.
- Chortareas, G., Jitmaneroj, B., and Wood, A. (2012). Forecast rationality and monetary policy frameworks: Evidence from uk interest rate forecasts. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*.
- Christiano, L., Motto, R., and Rostagno, M. (2014). Risk shocks. *American Economic Review*, 104(1), 27–65.
- Christiano, L. J., Eichenbaum, M., and Evans, C. L. (2005). Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy. *Journal of Political Economy* Vol. 113, No. 1 (February 2005), pp. 1-45 (45 pages).
- Collard, F. and Dellas, H. (2004). *The New Keynesian Model with Imperfect Information and Learning*. Institut d'Économie Industrielle.
- Constantinides, G. (1990). Habit formation: A resolution of the equity premium puzzle. *Journal of Political Economy*, 1990, vol. 98, issue 3, 519-43.

- Da Silva Filho, T. N. T. (2013). *Banks, Asset Management or Consultancies' Inflation Forecasts: is there a better forecaster out there?* Central Bank of Brazil.
- Da Silva Lopes, A. (1998). *On the 'restricted cointegration test' as a test of the rational expectations hypothesis.* Routledge.
- Dell'Ariccia, G., Laeven, L., and Marquez, R. (2014). Real interest rates, leverage, and bank risk-taking. *Journal of Economic Theory* 149 (2014) 65–99.
- Dias, F., Duarte, C., and Rua, A. (2010). *Inflation expectations in the euro area: are consumers rational?* Kiel Institute.
- Drakos, K., Konstantinou, P., and Thoma, F.-A. (2020). *Inflation uncertainty and inflation expectations: Micro-level evidence from eurozone.* Elsevier.
- Eichenbaum, M. and Singleton, K. (1986). Do equilibrium real business cycle theories explain post-war u.s. business cycles? *NBER Macroeconomics Annual*.
- Elliott, G., Komunjer, I., and Timmermann, A. (2008). *Biases in Macroeconomic Forecasts: Irrationality or Asymmetric Loss?* Oxford.
- Erjavec, N., Lolic, I., Soric, P., and Drager, L. (2015). *How (i)rrrational are we? A case of Croatian inflation.* Croatian Scientific and Professional Journals.
- Eusepi, S. and Preston, B. (2012). Expectations, learning, and business cycle fluctuations. *American Economic Review*, 101(6):2844–72.
- Evans, G. and Honkapohja, S. (2001). Learning and expectations in macroeconomics. *Libro*.
- Friedman, B. (1980). Survey evidence on the 'rationality' of interest rate expectations. *Journal of Monetary Economics*.
- Fuhrer, J. (2000). Habit formation in consumption and its implications for monetary-policy models. *The American Economic Review* Vol. 90 No.3 (Jun. 2000), pp. 367-390.
- Gaglianone, W. P., Issler, J. V., Matos, S. M., and Gaglianone, W. P. (2016). *Applying a Microfounded-Forecasting Approach to Predict Brazilian Inflation.* Central Bank of Brazil.

- Galindo, L. M. (1995). *La hipótesis de expectativas en el mercado de CETES en México: 1990- 1995*. El Colegio de México.
- Galí, J. and Rabanal, P. (2004). Technology shocks and aggregate fluctuations: How well does the real business cycle model fit postwar u.s. data. *NBER Macroeconomics Annual*. Vol. 19. pp. 225-288.
- Guillén, D. A. (2008). *Ensaio sobre a formação de expectativas de inflação. Dissertação de Mestrado*. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Hansen, G. (1985). Indivisible labor and the business cycle. *Journal of Monetary Economics*. Volume 16, Issue 3, November 1985, Pages 309-327.
- Ilek, A. (2017). *A Note on the Rationality Test*. Bank of Israel.
- Iregui, A. M., Núñez, H., and Otero, J. (2021). Testing the efficiency of inflation and exchange rate forecast revisions in a changing economic environment. *Journal of Economic Behaviour and Organization*.
- Iregui-Bohórquez, A. M., Anzola-Bravo, C., Ballén-Rubio, L. F., Bejarano-Salcedo, V., González-Molano, E., Grajales-Olarte, A., Guarín-López, A., Hernández-Montes, M. A., Hernández-Ortega, R., Julio-Román, J. M., Melo-Velandia, L. F., Muñoz-Martínez, J., Núñez-Amórtegui, H., Otero-Cardona, J., Pérez-Amaya, J., Rincón-Torres, A. D., Romero-Chamorro, J. V., Sánchez-Jabba, A. P., and Torres-Medina, A. (2021). ¿qué nos dicen las encuestas sobre la formación de expectativas de inflación? *Ensayos sobre Política Económica ESPE 100*.
- Jalil, M., González, E., and Romero, J. V. (2010). *Inflación y expectativas de inflación en Colombia*. Banco de la República de Colombia.
- Jongen, R. and Willem, V. (2008). Further evidence on the rationality of interest rate expectations. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*.
- Keynes, J. M. (1930). A treatise on money. *Book. In 2 Vols., Harcourt, Brace Co.*
- Keynes, J. M. (1936). The general theory of money, interest and employment. *Book*.
- Kim, S.-J. (2010). Testing the rationality of exchange rate and interest rate expectations: an empirical study of australian survey-based expectations. *Applied Economics Volume 29, 1997 - Issue 8*.

- King, R. G., Plosser, C. I., and Rebelo, S. T. (1988). Production, growth and business cycles. *Journal of Monetary Economics*, 21(2/3):196–232.
- Kiyotaki, N. and Moore, J. (1997). Credit cycles. *Journal of Political Economy*; 1997, vol. 105, No. 2.
- Kohlscheen, E. (2012). *Uma Nota sobre Erros de Previsão da Inflação de Curto Prazo*. Scielo.
- Kokoszczynski, R., Lyziak, T., and Stanislawska, E. (2005a). *Consumer Inflation Expectations. Usefulness of survey-based measures – a cross country study*. Mimeo.
- Kokoszczynski, R., Lyziak, T., and Stanislawska, E. (2005b). Consumer inflation expectations. usefulness of survey-based measures – a cross country study. *Mimeo*.
- Kokoszczynski, R., Lyziak, T., and Stanislawska, E. (2006). *Consumer Inflation Expectations. Usefulness of survey-based measures – a cross country study*. National Bank of Poland.
- Kozłowski, J., Veldkamp, L., and Venkateswaran, V. (2020). The tail that wags the economy: Beliefs and persistent stagnation. *Journal of Political Economy* Volume 128, Number 8.
- Lucas, R. (2013). *Expectations and the Neutrality of Money*. Elsevier.
- Lyziak, T. (2013). *Formation of Inflation Expectations by Different Economic Agents*. Scielo.
- Mallar, G. (2012). *Modelling Coniatively Bounded Rationality: an Evaluative Taxonomy*. John Wiley Sons Ltd.
- Marcet, A., Adam, K., and Kuang, P. (2012). *House Price Booms and the Current Account*. The University of Chicago Press Journals.
- Marcet, A. and Nicolini, J. P. (2003). *Recurrent Hyperinflations and Learning*. American Economic Association.
- Meh, C. and Moran, K. (2010). The role of bank capital in the propagation of shocks. *Working Paper 2008-36*. Bank of Canada.

- Miah, F., Khalifa, A. A., and Hammoudeh, S. (2016). *Further evidence on the rationality of interest rate expectations: A comprehensive study of developed and emerging economies*. Elsevier.
- Miah, F., Rahman, M. S., and Albinali, K. (2016a). *Rationality of survey based inflation expectations: A study of 18 emerging economies' inflation forecasts*. ScienceDirect.
- Milani, F. (2007). *Expectations, Learning and Macroeconomic Persistence*. Elsevier.
- Mitchell, J. and Weale, M. R. (1961). *Rational Expectations and the Theory of Price Movements*. The Econometric Society.
- Muth, J. (1961). Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica* 29, 315–335.
- Pesaran, H. and Weale, M. (2006). Survey expectations. *Handbook of Economic Forecasting*.
- Pfajfar, D. and Santoro, E. (2007). *Heterogeneity and Learning in Inflation Expectation Formation: An Empirical Assessment*. Universita' Degli Studi Di Trento.
- Pierdziocha, C., Rülke, J.-C., and Stadtmann, G. (2015). *Central banks' inflation forecasts under asymmetric loss: Evidence from four Latin-American countries*. Elsevier.
- Prat, G. and Uctum, R. (2018). *Do markets learn to rationally expect US interest rates? An anchoring approach*. Taylor Francis Journals.
- Preston, B. (2005). Learning about monetary policy rules when long-horizon expectations matter. *International Journal of Central Banking*, 1.
- Queralto, A. (2020). A model of slow recoveries from financial crises. *Journal of Monetary Economics*.
- Rychalovska, Y. (2015). *The Implications of Financial Frictions and Imperfect Knowledge in the Estimated DSGE Model of the U.S. Economy*. National Bank of Belgium.
- Sargent, T. (1973). *Rational Expectations, the Real Rate of Interest and the Natural Rate of Unemployment*. Brookings Institution.

- Slobodyan, S. and Wouters, R. (2012). *Learning in a Medium-Scale DSGE Model with Expectations Based on Small Forecasting Models*. American Economic Association.
- Smets, F. and Wouters, R. (2007). Shocks and frictions in us business cycles: A bayesian dsge approach. *The American Economic Review Vol. 97, No. 3 (Jun., 2007)*, pp. 586-606 (21 pages).
- Stekler, H. O. (2002). The rationality and efficiency of individuals' forecasts. *Chapter 10 in M. P. Clements and D. F. Hendry (eds.) A Companion to Economic Forecasting*.
- Storm, S. (2021). Cordon of conformity: Why dsge models are not the future of macroeconomics. *International Journal of Political Economy*, 50(2):77–98.
- Sundaresan, S. M. (1989). Intertemporally dependent preferences and the volatility of consumption and wealth. *The Review of Financial Studies, Volume 2, Issue 1, January 1989, Pages 73–89*.
- Ulu, Y. (2015). *Rationality of inflation–output forecasts of MMS survey: international evidence*. Taylor and Francis.
- Williams, N. and Sargent, T. J. (2005). Impacts of priors on convergence and escape from nash inflation. *Review of Economic Dynamics*, 8(2): 360-391, March.
- Winkelried, D. (2017). Inferring inflation expectations from fixed-event forecasts. *Working Paper*.
- Zarate, H., Sánchez, K., and Marín, M. (2012). *Quantification of Ordinal Surveys and Rational Testing: An Application to the Colombian Monthly Survey of Economic Expectations*. Universidad Nacional.
- Zunino, G., Lanzilotta, B., and Fernández, A. (2009). *¿Son racionales los pronósticos de inflación? Una discusión sobre la base de la Encuesta de expectativas del BCU*. Centro de Investigaciones Económicas - cinve.

Appendices

Appendix A

Capítulo 1

A.1 Resultados de las pruebas de debilidad y de eficiencia

Prueba de debilidad de la variable instrumental para evaluar endogeneidad de la ecuación de insesgamiento (Hipótesis nula: variable instrumental es débil)

Variable	Indicador	Variable explicativa	
		Estadístico F	Valor P
Tasa SELIC de Brasil	Media	170,46	0,00
	Mediana	82,06	0,00
Tasa BCP de Chile	Mediana	24,85	0,00
Tasa BCU de Chile	Mediana	7,13	0,01
Tasa de Política Monetaria de Chile	Mediana	58,96	0,00
DTF de Colombia	Media	33,15	0,00

Prueba de Eficiencia (PE) sobre la ecuación con constante y variable en primeras diferencias (Hipótesis nula: hay eficiencia)

	Tasa SELIC de Brasil		Tasa BCP de Chile	Tasa BCU de Chile	Tasa de Política Monetaria de Chile	DTF de Colombia
	Media	Mediana	Mediana	Mediana	Mediana	Media
Constante (Error estándar)	0,006 (0,035)	0,006 (0,033)	0,003 (0,018)	0,002 (0,017)	-0,016 (0,028)	-0,024 (0,071)
Observación de 12 meses atrás (Error estándar)	-0,116 ** (0,052)	-0,134 ** (0,052)	-0,047 (0,067)	0,154 (0,104)	-0,072 ** (0,033)	-0,121 (0,081)
Observación de 24 meses atrás (Error estándar)	-0,018 (0,053)	-0,015 (0,053)	-0,088 (0,081)	0,189 ** (0,090)	-0,106 * (0,063)	-0,399 *** (0,112)
Estadístico F de la prueba de hipótesis nula de existencia de eficiencia (p-valor)	1,88 (0,135)	2,52 (0,06)	0,55 (0,649)	2,98 (0,034)	2,87 (0,039)	6,084 (0,001)
R² (Bondad de ajuste)	0,023	0,034	0,012	0,073	0,016	0,182

Los errores estándar están en paréntesis. Los asteriscos *, **, *** significan rechazo de la hipótesis nula al 10%, 5%, y 1% de nivel de significancia, respectivamente, para las hipótesis de que Coeficiente de la observación a 12 meses = 0 y el Coeficiente de la observación a 24 meses = 0. El estadístico F refleja la hipótesis conjunta de que el Coeficiente de la observación a 12 meses = 0 y el Coeficiente de la observación a 24 meses = 0, y los asteriscos *, **, *** significan rechazo de esta hipótesis al 10%, 5% y 1% de nivel de significancia, respectivamente. R² es la medida de bondad de ajuste.

Pruebas de debilidad de las variables instrumentales para evaluar endogeneidad de ecuación de insesgamiento (Hipótesis nula: variable instrumental es débil)

Variable	Indicador	Variable explicativa			
		Rezago 12		Rezago 24	
		Estadístico F	Valor P	Estadístico F	Valor P
Tasa SELIC de Brasil	Media	88,48	0,00	51,90	0,00
	Mediana	47,46	0,00	46,59	0,00
Tasa BCP de Chile	Mediana	143,23	0,00	15,933	0,00
Tasa BCU de Chile	Mediana	62,08	0,00	6,517	0,00
Tasa de Política Monetaria de Chile	Mediana	29,46	0,00	151,44	0,00
DTF de Colombia	Media	16,52	0,00	165,90	0,00

Appendix B

Capítulo 2

B.1 Solución del modelo en niveles

B.1.1 Hogares

El problema de los hogares consiste en maximizar su utilidad sujeta a la restricción presupuestaria para decidir su nivel de consumo, ocio, capital y nivel de utilización de capital:

$$\max_{C_t, K_{t+1}, L_t, U_t} E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} u(C_T, L_T) \quad (\text{B.1})$$

sujeto a

$$C_t + K_{t+1} = R_t^k(U_t K_t) + W_t H_t + (1 - \delta(U_t))K_t \quad (\text{B.2})$$

donde:

$$L_t = 1 - H_t \quad (\text{B.3})$$

Donde β es el parámetro de descuento intertemporal, C_t es el consumo, L_t es el ocio, K_t es el capital, R_t^k es la tasa de retorno del capital, U_t es el nivel de utilización de capital, W_t es el salario, H_t son las horas trabajadas, y $\delta(U_t)$ es la depreciación.

El lagrangiano del anterior problema es:

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} u(C_T, L_T) - \Lambda_t (C_t + K_{t+1} - R_t^k(U_t K_t) - W_t(1 - L_t) - (1 - \delta(U_t))K_t) \quad (\text{B.4})$$

Las condiciones de primer orden están dadas por:

$$[C_t] : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = u_c(C_t, L_t) - \Lambda_t = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$u_c(C_t, L_t) = \Lambda_t$$

$$[K_{t+1}] : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = \beta E_t \Lambda_{t+1} R_{t+1} U_{t+1} - \Lambda_t + \beta E_t [\Lambda_{t+1} (1 - \delta(U_{t+1}))] = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\beta E_t \Lambda_{t+1} R_{t+1} U_{t+1} + \beta E_t [\Lambda_{t+1} (1 - \delta(U_{t+1}))] = \Lambda_t$$

$$[L_t] : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = u_L(C_t, L_t) - \Lambda_t W_t = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$u_L(C_t, L_t) = \Lambda_t W_t$$

$$[U_t] : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_t} = \Lambda_t R_t^k K_t - \Lambda_t \delta'(U_t) K_t = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$R_t^k = \delta'(U_t)$$

La función de utilidad empleada es la tipo King, Plosser y Rebelo (KPR) (King et al. (1988))¹:

$$u(C_t, L_t) = \frac{C_t^{1-\sigma} v(1 - L_t)}{1 - \sigma} \quad (\text{B.9})$$

También se asume que δ está en función de la utilización del capital tal que:

$$\delta(U_t) = \frac{1}{\theta} U_t^\theta \quad (\text{B.10})$$

Donde $\theta > 1$, dado que una mayor utilización genera una mayor depreciación del capital.

¹Esta función de utilidad no separable utilizada por Eusepi y Preston (2011) se considera que puede generar mejores momentos para la variable consumo.

B.1.2 Firmas

Las firmas tienen la siguiente tecnología de producción:

$$Y_t = \Psi_t(U_t K_t)^\alpha (X_t H_t)^{1-\alpha}$$

Donde Ψ denota una externalidad del capital

$$\Psi_t = [(U_t K_t)^\alpha (X_t H_t)^{1-\alpha}]^\eta X_t^{-\eta} \quad (\text{B.11})$$

El término X_t^η garantiza la existencia del *balance growth path* en el cual todas las variables del modelo crecen a igual tasa.

La tecnología es *labor augmenting* dada por $X_t = X_{t-1}^p$

La depreciación es de la forma $\delta(U_t) = \frac{1}{\theta} U_t^\theta$

Con base en lo anterior, el problema de maximización de las firmas está dado por:

$$\max_{(k_t, l_t)} \Pi_t = \Psi_t(U_t K_t)^\alpha (X_t H_t)^{1-\alpha} - R_t K_t - W_t H_t \quad (\text{B.12})$$

Las condiciones de primer orden del problema de maximización de beneficios (Π_t) con respecto al capital (K_t) y el trabajo (H_t):

$$\begin{aligned} [K_t] : \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} &= \alpha \Psi_t(U_t K_t)^{\alpha-1} (X_t H_t)^{1-\alpha} - R_t^K = 0 \\ R_t^K &= \alpha \Psi_t(U_t K_t)^{\alpha-1} (X_t H_t)^{1-\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} [H_t] : \frac{\partial \Pi_t}{\partial H_t} &= (1 - \alpha) \Psi_t(U_t K_t)^\alpha (X_t)^{1-\alpha} H_t^{-\alpha} - W_t = 0 \\ W_t &= (1 - \alpha) \Psi_t(U_t K_t)^\alpha (X_t)^{1-\alpha} H_t^{-\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

B.1.3 Ecuaciones de cierre

Para cerrar el modelo, se introducen las siguientes dos ecuaciones. La primera de estas se refiere a la ley de movimiento de capital y es:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta(U_t))K_t \quad (\text{B.15})$$

La segunda ecuación de cierre es la ecuación de equilibrio macroeconómico que garantiza que se vacía el mercado:

$$C_t + I_t = Y_t \quad (\text{B.16})$$

B.2 Estacionariedad de las variables

Las variables se presentan en su forma estacionaria en el presente modelo, al ser expresadas en unidades efectivas (divididas por la tecnología), y se denotan en minúscula. Las variables que ya son estacionarias (Ejemplo: Tasa de retorno del capital) se mantienen en mayúscula. De tal modo, para cada variable tendencial G_t , se define a $g_t = G_t/X_t$, donde X_t es el nivel de tecnología en el periodo t .

B.2.1 Hogares

En primer lugar, se estacionariza la ecuación (B.5), al multiplicarla por X_t^σ y definir a $\lambda_t \equiv X_t^\sigma \Lambda_t$, tal que:

$$\lambda_t \equiv X_t^\sigma \Lambda_t = X_t^\sigma u_c(C_t, L_t) = X_t^\sigma C_t^{-\sigma} v(H_t) = c_t^{-\sigma} v(H_t) \quad (\text{B.17})$$

En consecuencia,

$$\lambda_t = c_t^{-\sigma} v(H_t) \quad (\text{B.18})$$

En segundo lugar, se estacionariza la ecuación (B.6). En primera instancia, se divide en ambos lados por Λ_t :

$$1 = \beta E_t \left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} R_{t+1}^k U_{t+1} + \frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} (1 - \delta(U_{t+1})) \right]$$

Posteriormente, se multiplica el lado derecho de la ecuación anterior por $\frac{X_{t+1}^\sigma}{X_t^\sigma}$ y por $\frac{X_t^\sigma}{X_t^\sigma}$, con lo que se consigue:

$$\begin{aligned} 1 &= \beta E_t \left[\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \frac{X_{t+1}^\sigma}{X_{t+1}^\sigma} \frac{X_t^\sigma}{X_t^\sigma} R_{t+1}^k U_{t+1} + \frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \frac{X_{t+1}^\sigma}{X_{t+1}^\sigma} \frac{X_t^\sigma}{X_t^\sigma} (1 - \delta(U_{t+1})) \right] \\ 1 &= \beta E_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{1}{\gamma_{t+1}^\sigma} R_{t+1}^k U_{t+1} + \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{1}{\gamma_{t+1}^\sigma} (1 - \delta(U_{t+1})) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Donde:

$$\gamma_t = \frac{X_t}{X_{t-1}}$$

Finalmente, se obtiene que:

$$1 = \beta E_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{1}{\gamma_{t+1}^\sigma} (R_{t+1}^k U_{t+1} + (1 - \delta(U_{t+1}))) \right] \quad (\text{B.20})$$

En tercer lugar, se estacionariza la ecuación (B.7) (ocio), tal que:

$$\lambda_t w_t = X_t^{\sigma-1} \Lambda W_t = X_t^{\sigma-1} u_L(C_t, L_t) = X_t^{\sigma-1} \frac{C_t^{(1-\sigma)}}{(1-\sigma)} v'(H_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} v'(H_t)$$

$$\lambda_t w_t = \frac{c_t^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} v'(H_t) \quad (\text{B.21})$$

B.2.2 Firmas

La función de producción es:

$$Y_t = \Psi_t (U_t K_t)^\alpha (X_t H_t)^{1-\alpha} \quad (\text{B.22})$$

Se divide a ambos lados de la ecuación por X_t , de modo que:

$$\frac{Y_t}{X_t} = \frac{1}{X_t} [\Psi_t (U_t K_t)^\alpha (X_t H_t)^{1-\alpha}]$$

$$\frac{Y_t}{X_t} = \Psi_t \left(U_t \frac{K_t}{X_t} \right)^\alpha \frac{X_{t-1}}{X_{t-1}} (H_t)^{1-\alpha}$$

$$y_t = \Psi_t \left(U_t \frac{K_t}{X_{t-1}} \frac{X_{t-1}}{X_t} \right)^\alpha (H_t)^{1-\alpha}$$

Como se denota $\gamma_t = \frac{X_t}{X_{t-1}}$ y $k_t = \frac{K_t}{X_{t-1}}$, se tiene:

$$y_t = \Psi_t (U_t k_t \gamma_t^{-1})^\alpha (H_t)^{1-\alpha}$$

$$y_t = \Psi_t \gamma_t^{-\alpha} k_t^\alpha U_t^\alpha H_t^{1-\alpha} \quad (\text{B.23})$$

La externalidad de la producción (Ψ_t) también puede ser expresada en términos de variables estacionarias.

$$\Psi_t = \left[\left(U_t \frac{K_t}{X_t} \right)^\alpha H_t^{1-\alpha} \right]^\eta$$

$$\Psi_t = \left[\left(U_t \frac{K_t}{X_{t-1}} \frac{X_{t-1}}{X_t} \right)^\alpha H_t^{1-\alpha} \right]^\eta$$

$$\Psi_t = \left[\left(\frac{U_t}{\gamma_t} k_t \right)^\alpha H_t^{1-\alpha} \right]^\eta \quad (\text{B.24})$$

Seguidamente, la ecuación de salarios $W_t = (1 - \alpha)\Psi_t(U_t K_t)^\alpha (X_t)^{1-\alpha} H_t^{-\alpha}$, se divide a ambos lados por X_t , así:

$$\begin{aligned}\frac{W_t}{X_t} &= \frac{1}{X_t} [(1 - \alpha)\Psi_t (U_t K_t)^\alpha X_t^{1-\alpha} H_t^{-\alpha}] \\ \frac{W_t}{X_t} &= (1 - \alpha)\Psi_t X_t^{-1} \left(U_t \frac{K_t}{X_t} \right)^\alpha \frac{X_t^{1-\alpha}}{X_t} H_t^{-\alpha} \\ w_t &= (1 - \alpha)\Psi_t \gamma_t^{-\alpha} (U_t k_t)^\alpha H_t^{-\alpha}\end{aligned}$$

Combinando la ecuación anterior con la función de producción $y_t = \Psi_t \gamma_t^{-\alpha} k_t^\alpha U_t^\alpha H_t^{1-\alpha}$, se tiene:

$$w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{H_t} \quad (\text{B.25})$$

Ahora, en el caso de la ecuación de la tasa de retorno del capital, $R_t^K = \alpha \Psi_t (U_t K_t)^{\alpha-1} (X_t H_t)^{1-\alpha}$, se reorganizan términos y se consigue:

$$\begin{aligned}R_t^K &= \alpha \Psi_t (U_t K_t)^{\alpha-1} (X_t H_t)^{1-\alpha} \quad (\text{B.26}) \\ R_t^K &= \alpha \Psi_t \left(U_t \frac{K_t}{X_t} \right)^{\alpha-1} H_t^{1-\alpha} \\ R_t^K &= \alpha \Psi_t \left(U_t \frac{K_t}{X_t} \frac{X_{t-1}}{X_{t-1}} \right)^{\alpha-1} H_t^{1-\alpha} \\ R_t^K &= \alpha \Psi_t \left(U_t \frac{K_t}{X_{t-1}} \frac{X_{t-1}}{X_t} \right)^{\alpha-1} H_t^{1-\alpha} \\ R_t^K &= \alpha \Psi_t \left(\frac{U_t}{\gamma_t} k_t \right)^{\alpha-1} H_t^{1-\alpha}\end{aligned}$$

Recordando que $y_t = \Psi_t \gamma_t^{-\alpha} k_t^\alpha U_t^\alpha H_t^{1-\alpha}$:

$$R_t^K = \alpha \Psi_t \left(\frac{U_t}{\gamma_t} k_t \right)^\alpha \left(\frac{U_t}{\gamma_t} k_t \right)^{-1} H_t^{1-\alpha}$$

$$R_t^K = \alpha \Psi_t \gamma_t^{-\alpha} k_t^\alpha U_t^\alpha H_t^{1-\alpha} \left(\frac{U_t}{\gamma_t} k_t \right)^{-1}$$

$$R_t^k = \alpha \gamma_t \frac{y_t}{U_t k_t} \quad (\text{B.27})$$

B.2.3 Otras ecuaciones

En primer lugar, se divide la ecuación de la ley de movimiento de capital ($K_{t+1} = I_t + (1 - \delta(U_t))K_t$) a ambos lados por X_t :

$$\frac{K_{t+1}}{X_t} = \frac{I_t}{X_t} + (1 - \delta(U_t)) \frac{K_t}{X_{t-1}} \frac{X_{t-1}}{X_t}$$

$$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta(U_t)) \gamma_t^{-1} k_t \quad (\text{B.28})$$

En segundo lugar, se divide la ecuación de equilibrio macroeconómico $C_t + I_t = Y_t$ a ambos lados por $C_t + I_t = Y_t$ y se obtiene:

$$c_t + i_t = y_t \quad (\text{B.29})$$

Finalmente, se tiene la tendencia estocástica de la tecnología *labor augmenting* dada por:

$$X_t = X_{t-1}^\rho$$

En términos estacionarios, se obtiene la tasa de crecimiento de la tecnología

$$\gamma_t = \gamma_{t-1}^\rho$$

B.3 Sistema de ecuaciones estacionarizadas

B.3.1 Ecuación intratemporal de consumo-trabajo

Las ecuaciones (B.18) y (B.21) son combinadas de la siguiente forma:

$$c_t^{-\sigma} w_t = \frac{c_t^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \frac{v'(H_t)}{v(H_t)}$$

$$w_t = \frac{c_t}{(1 - \sigma)} \frac{v'(H_t)}{v(H_t)}$$

$$\frac{w_t}{c_t} = (1 - \sigma)^{-1} \frac{v'(H_t)}{v(H_t)} \quad (\text{B.30})$$

B.3.2 Ecuación de Euler

La ecuación intertemporal del consumo se obtiene de reemplazar el valor de λ_t ((B.18)) en la ecuación (B.20), tal que:

$$1 = \beta E_t \left[\frac{c_{t+1}^{-\sigma} v(H_{t+1})}{c_t^{-\sigma} v(H_t)} \frac{1}{\gamma_{t+1}^\sigma} (R_{t+1}^k U_{t+1} + (1 - \delta(U_{t+1}))) \right]$$

$$c_t^{-\sigma} v(H_t) = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} v(H_{t+1}) \frac{1}{\gamma_{t+1}^\sigma} (R_{t+1}^k U_{t+1} + (1 - \delta(U_{t+1}))) \right] \quad (\text{B.31})$$

B.3.3 Horas trabajadas

La ecuación de salarios en términos estacionarios es (B.25):

$$w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{H_t}$$

B.3.4 Rendimientos del capital

La ecuación de rendimientos de capital en términos estacionarios (B.27) es:

$$R_t^k = \alpha \gamma_t \frac{y_t}{U_t k_t}$$

B.3.5 Inversión

A partir de la ecuación de equilibrio macroeconómico en términos estacionarios (B.29), se obtiene:

$$i_t = y_t - c_t$$

B.3.6 Utilización del capital

Se deriva la ecuación (B.10) con respecto a la utilización de capital (U_t) de la siguiente forma:

$$\delta(U_t) = \frac{1}{\theta} U_t^\theta$$

$$\delta'(U_t) = U_t^{\theta-1}$$

La ecuación anterior de combina con la condición de primer orden con respecto a U_t (B.8) y se consigue:

$$R_t^k = \delta'(U_t)$$

$$R_t^k = U_t^{\theta-1} \tag{B.32}$$

B.3.7 Función de producción

La función de producción en términos estacionarios (B.23) es:

$$y_t = \Psi_t \gamma_t^{-\alpha} k_t^\alpha U_t^\alpha H_t^{1-\alpha}$$

B.3.8 Externalidad de la producción

La ecuación de externalidad de producción en términos estacionarios (B.24) es:

$$\Psi_t = \left[\left(\frac{U_t}{\gamma_t} k_t \right)^\alpha H_t^{1-\alpha} \right]^\eta$$

B.3.9 Capital de los hogares

La ecuación que describe la evolución del capital de los hogares (B.28) es:

$$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta(U_t))\gamma_t^{-1}k_t$$

B.3.10 Crecimiento tecnológico

La tendencia estocástica de la tecnología *labor augmenting* está dada por

$$X_t = X_{t-1}^\rho$$

En términos estacionarios, se obtiene la tasa de crecimiento de la tecnología

$$\gamma_t = \gamma_{t-1}^\rho$$

Recuérdese que $\ln\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right) = \gamma_t = \ln(\bar{\gamma}) + a_{t+1}$, donde a_t es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida con media cero y varianza constante σ_a .

B.4 Proceso de log-linealización

El proceso de log-linealización aplica la siguiente fórmula de linealización $f(x_t) \approx f'(\bar{x})\bar{x}\hat{x}_t$, donde $\hat{x}_t = \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}$ es la desviación porcentual con respecto al estado estacionario.

B.4.1 Ecuación intratemporal de consumo-oicio (trabajo)

Se parte de la ecuación de consumo-oicio (B.30):

$$c_t^{-\sigma} w_t = \frac{c_t^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \frac{v'(H_t)}{v(H_t)}$$

En estado estacionario es:

$$\bar{c}^{-\sigma} \bar{w} = \frac{\bar{c}^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})}$$

Se aplica la log-linealización a la ecuación (B.30) tal que:

$$-\sigma \bar{c}^{-\sigma-1} \bar{w} \bar{c} \hat{c}_t + \bar{c}^{-\sigma} \bar{w} \hat{w}_t = \frac{(1-\sigma) \bar{c}^{1-\sigma-1}}{(1-\sigma)} \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \bar{c} \hat{c}_t + \frac{\bar{c}^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \left[\frac{v''(\bar{H}) v(\bar{H}) - v'(\bar{H})^2}{v(\bar{H})^2} \right] \bar{H} \hat{H}_t$$

Reagrupando los términos, se tiene:

$$-\sigma \bar{c}^{-\sigma-1} \bar{w} \bar{c} \hat{c}_t + \bar{c}^{-\sigma} \bar{w} \hat{w}_t = \frac{(1-\sigma) \bar{c}^{1-\sigma-1}}{(1-\sigma)} \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \bar{c} \hat{c}_t + \frac{\bar{c}^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \frac{v''(\bar{H}) \bar{H}}{v(\bar{H})} \hat{H}_t - \frac{\bar{c}^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \frac{v'(\bar{H})^2 \bar{H}}{v(\bar{H})^2} \hat{H}_t$$

Se multiplica el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior por $\frac{v'(\bar{H})}{v'(\bar{H})}$, y luego se despeja el estado estacionario $\bar{c}^{-\sigma} \bar{w} = \frac{\bar{c}^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})}$:

$$\bar{c}^{-\sigma} \bar{w} (-\sigma \hat{c}_t + \hat{w}_t) = \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \bar{c} \frac{(1-\sigma) \bar{c}^{1-\sigma-1}}{(1-\sigma)} \hat{c}_t + \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \frac{\bar{c}^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \frac{v''(\bar{H}) \bar{H}}{v(\bar{H})} \hat{H}_t - \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \frac{\bar{c}^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \bar{H} \hat{H}_t$$

$$\bar{c}^{-\sigma} \bar{w} (-\sigma \hat{c}_t + \hat{w}_t) = \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \bar{c} \frac{(1-\sigma) \bar{c}^{1-\sigma-1}}{(1-\sigma)} \hat{c}_t + \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \frac{\bar{c}^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \frac{v''(\bar{H}) \bar{H}}{v(\bar{H})} \hat{H}_t - \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \frac{\bar{c}^{1-\sigma}}{(1-\sigma)} \bar{H} \hat{H}_t$$

$$\bar{c}^{-\sigma} \bar{w} (-\sigma \hat{c}_t + \hat{w}_t) = \left[\frac{\bar{c}^{-\sigma-1} v'(\bar{H})}{1-\sigma} \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \right] \left[\bar{c}^{-1} (1-\sigma) \hat{c}_t + \frac{v''(\bar{H}) \bar{H}}{v'(\bar{H})} \hat{H}_t - \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \bar{H} \hat{H}_t \right]$$

$$\bar{c}^{-\sigma} \bar{w} (-\sigma \hat{c}_t + \hat{w}_t) = \left[\frac{\bar{c}^{-\sigma-1} v'(\bar{H})}{1-\sigma} \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \right] \left[(1-\sigma) \hat{c}_t + \frac{v''(\bar{H}) \bar{H}}{v'(\bar{H})} \hat{H}_t - \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \bar{H} \hat{H}_t \right]$$

$$-\sigma \hat{c}_t + \hat{w}_t = (1-\sigma) \hat{c}_t + \frac{v''(\bar{H}) \bar{H}}{v'(\bar{H})} \bar{H} \hat{H}_t - \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \bar{H} \hat{H}_t$$

Tal como se mencionó previamente, se asume que $\epsilon_v = (v''(\bar{H})\bar{H}/v'(\bar{H})) > 0$, al tiempo que se cancela $-\sigma\hat{c}$ a ambos lados tal que:

$$\hat{w}_t = \hat{c}_t + \epsilon_v \hat{H}_t - \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \bar{H} \hat{H}_t \quad (\text{B.33})$$

A continuación, el propósito es reemplazar el término $\frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})} \bar{H}$. Para esto, se acude al estado estacionario de la ecuación (B.30) $\frac{\bar{w}}{\bar{c}} = (1 - \sigma)^{-1} \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})}$.

Esa ecuación se multiplica a ambos lados por \bar{H} .

$$\begin{aligned} \psi \equiv \frac{\bar{w}\bar{H}}{\bar{c}} &= (1 - \sigma)^{-1} \frac{v'(\bar{H})\bar{H}}{v(\bar{H})} \\ \frac{v'(\bar{H})\bar{H}}{v(\bar{H})} &\equiv \psi(1 - \sigma) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Posteriormente, se reemplaza (B.34) en (B.33) y se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{w}_t &= \hat{c}_t + \epsilon_v \hat{H}_t - (1 - \sigma)\psi \hat{H}_t \\ \hat{w}_t &= \hat{c}_t + [\epsilon_v - (1 - \sigma)\psi] \hat{H}_t \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Se puede reescribir la ecuación (B.35) de la siguiente forma

$$-\hat{c}_t + \hat{w}_t = \epsilon_v \hat{H}_t - (1 - \sigma)\psi \hat{H}_t \quad (\text{B.36})$$

Sumando a ambos lado por $-\frac{\psi(\sigma-1)}{\sigma} \hat{H}_t$, se tiene que

$$-\hat{c}_t - \frac{\psi(\sigma-1)}{\sigma} \hat{H}_t + \hat{w}_t = \epsilon_v \hat{H}_t - (1 - \sigma)\psi \hat{H}_t - \frac{\psi(\sigma-1)}{\sigma} \hat{H}_t \quad (\text{B.37})$$

Dada la ecuación (B.18), cuya forma log-lineal se halla de la siguiente manera:

$$\lambda_t = c_t^{-\sigma} v(H_t)$$

$$\bar{\lambda} \hat{\lambda}_t = -\sigma \bar{c}^{-\sigma-1} v(\bar{H}) \bar{c} \hat{c}_t + \bar{c}^{-\sigma} v'(\bar{H}) \bar{H} \hat{H}_t$$

$$\bar{\lambda}\hat{\lambda}_t = -\sigma\bar{c}^{-\sigma-1}v(\bar{H})\bar{c}\hat{c}_t + \bar{c}^{-\sigma}v'(\bar{H})\frac{v(\bar{H})}{v(\bar{H})}\bar{H}\hat{H}_t$$

$$\bar{\lambda}\hat{\lambda}_t = -\sigma\bar{c}^{-\sigma-1}v(\bar{H})\bar{c}\hat{c}_t + \bar{c}^{-\sigma}v(\bar{H})\frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})}\bar{H}\hat{H}_t$$

Reemplazando el estado estacionario de la ecuación (B.18) de la forma $\bar{\lambda} = \bar{c}^{-\sigma}v(\bar{H})$:

$$\hat{\lambda}_t = -\sigma\hat{c}_t + \frac{v'(\bar{H})}{v(\bar{H})}\bar{H}\hat{H}_t$$

Reemplazando la ecuación (B.34), se tiene:

$$\hat{\lambda}_t = -\sigma\hat{c}_t + \psi(1 - \sigma)\hat{H}_t \quad (\text{B.38})$$

Factorizando el signo del segundo término del lado derecho de la ecuación, se tiene que $\hat{\lambda}_t = -\sigma\hat{c}_t - \psi(\sigma - 1)\hat{H}_t$. Se define la ecuación $\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t = -\hat{c}_t - \frac{\psi(\sigma-1)}{\sigma}\hat{H}_t$. Reemplazando la anterior definición dentro de la ecuación (B.37), se tiene que

$$\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t + \hat{w}_t = \epsilon_v\hat{H}_t - (1 - \sigma)\psi\hat{H}_t - \frac{\psi(\sigma - 1)}{\sigma}\hat{H}_t \quad (\text{B.39})$$

Cambiando el signo del segundo término del lado derecho de la ecuación anterior:

$$\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t + \hat{w}_t = \epsilon_v\hat{H}_t + (\sigma - 1)\psi\hat{H}_t - \frac{\psi(\sigma - 1)}{\sigma}\hat{H}_t \quad (\text{B.40})$$

Agrupando términos en el lado derecho de la ecuación, se tiene que:

$$\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t + \hat{w}_t = \epsilon_v\hat{H}_t + \left[(\sigma - 1)\psi - \frac{(\sigma - 1)\psi}{\sigma} \right] \hat{H}_t$$

$$\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t + \hat{w}_t = \epsilon_v\hat{H}_t + \left[(\sigma - 1)\psi \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right] \hat{H}_t$$

$$\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t + \hat{w}_t = \epsilon_v\hat{H}_t + \left[\frac{(\sigma - 1)\psi(\sigma - 1)}{\sigma} \right] \hat{H}_t$$

$$\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t + \hat{w}_t = \epsilon_v\hat{H}_t + \left[\frac{(\sigma - 1)^2\psi}{\sigma} \right] \hat{H}_t$$

Factorizando el signo del segundo término del lado derecho de la ecuación:

$$\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t + \hat{w}_t = \epsilon_v \hat{H}_t - \left[\frac{(1-\sigma)^2 \psi}{\sigma} \right] \hat{H}_t$$

Agrupando términos

$$\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t + \hat{w}_t = \left[\epsilon_v - \frac{(1-\sigma)^2 \psi}{\sigma} \right] \hat{H}_t$$

Definiendo a ϵ_H como el inverso de la elasticidad de Frish de la oferta laboral igual a:

$$\epsilon_H = \epsilon_v - \frac{(1-\sigma)^2 \psi}{\sigma} \quad (\text{B.41})$$

Se tiene que:

$$\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t + \hat{w}_t = \epsilon_H \hat{H}_t \quad (\text{B.42})$$

Nuevamente se reemplaza la ecuación $\sigma^{-1}\hat{\lambda}_t = -\hat{c}_t - \frac{\psi(\sigma-1)}{\sigma} \hat{H}_t$, tal que

$$-\hat{c}_t - \frac{\psi(\sigma-1)}{\sigma} \hat{H}_t + \hat{w}_t = \epsilon_H \hat{H}_t$$

$$\hat{w}_t = \hat{c}_t + \epsilon_H \hat{H}_t + \frac{\psi(\sigma-1)}{\sigma} \hat{H}_t$$

Nuevamente de factoriza el signo:

$$\hat{w}_t = \hat{c}_t + \left(\epsilon_H - \frac{\psi(1-\sigma)}{\sigma} \right) \hat{H}_t \quad (\text{B.43})$$

B.4.2 Ecuación de Euler

Para log-linealizar la ecuación de Euler, se parte de la ecuación (B.19)

$$1 = \beta \hat{E}_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{1}{\gamma_{t+1}^\sigma} R_{t+1}^k U_{t+1} + \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{1}{\gamma_{t+1}^\sigma} (1 - \delta(U_{t+1})) \right]$$

$$\lambda_t = \beta E_t \left[\frac{\lambda_{t+1}}{\gamma_{t+1}^\sigma} R_{t+1}^k U_{t+1} + \frac{\lambda_{t+1}}{\gamma_{t+1}^\sigma} (1 - \delta(U_{t+1})) \right] \quad (\text{B.44})$$

Su estado estacionario es:

$$1 = \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} [\bar{R}^k \bar{U} + (1 - \delta(\bar{U}))] \quad (\text{B.45})$$

donde

$$\lambda_t = c_t^{-\sigma} v(H_t)$$

Se aplica la siguiente fórmula de log-linealización $f(x) \sim f'(\bar{x})\bar{x}\hat{x}_t$ sobre la ecuación (B.44), tal que:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}\hat{\lambda}_t = & \frac{\beta\bar{\lambda}\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma}\hat{\lambda}_{t+1} - \frac{\beta\bar{\lambda}\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma}\sigma\hat{\gamma}_{t+1} + \frac{\beta\bar{\lambda}\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma}\hat{R}_{t+1} + \frac{\beta\bar{\lambda}\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma}\hat{U}_{t+1} + \frac{\beta\bar{\lambda}}{\bar{\gamma}^\sigma}\hat{\lambda}_{t+1} - \frac{\beta\bar{\lambda}}{\bar{\gamma}^\sigma}\sigma\hat{\gamma}_{t+1} \\ & - \frac{\beta\bar{\lambda}}{\bar{\gamma}^\sigma}\delta(\bar{U})\hat{\lambda}_{t+1} + \frac{\beta\bar{\lambda}}{\bar{\gamma}^\sigma}\delta(\bar{U})\sigma\hat{\gamma}_{t+1} - \frac{\beta\bar{\lambda}}{\bar{\gamma}^\sigma}\delta'(\bar{U})\bar{U}\hat{U}_{t+1} \quad (\text{B.46}) \end{aligned}$$

Desde la ecuación (B.10), se tiene que $\delta'(U_t) = U_t^{\theta-1}$, la que en su estado estacionario es $\delta'(\bar{U}) = \bar{U}^{\theta-1}$. Esta ecuación será empleada más adelante.

En la ecuación (B.46), se cancela $\bar{\lambda}$ en ambos lados, así:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_t = & \frac{\beta\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma}\hat{\lambda}_{t+1} - \frac{\beta\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma}\sigma\hat{\gamma}_{t+1} + \frac{\beta\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma}\hat{R}_{t+1} + \frac{\beta\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma}\hat{U}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma}\hat{\lambda}_{t+1} - \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma}\sigma\hat{\gamma}_{t+1} \\ & - \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma}\delta(\bar{U})\hat{\lambda}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma}\delta(\bar{U})\sigma\hat{\gamma}_{t+1} - \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma}\delta'(\bar{U})\bar{U}\hat{U}_{t+1} \quad (\text{B.47}) \end{aligned}$$

Agrupando términos en la ecuación (B.47)

$$\hat{\lambda}_t = \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} [\bar{R}\bar{U} + (1 - \delta(\bar{U}))] \hat{\lambda}_{t+1} - \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} [\bar{R}\bar{U} + (1 - \delta(\bar{U}))] \sigma \hat{\gamma}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} \bar{R}\bar{U} \hat{R}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} [\bar{R}\bar{U} - \delta'(\bar{U})\bar{U}] \hat{U}_{t+1} \quad (\text{B.48})$$

Se reemplaza la ecuación $\delta'(\bar{U}) = \bar{U}^{\theta-1}$ y el estado estacionario original (B.45)

$$\hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}_{t+1} - \sigma\hat{\gamma}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} \bar{R}\bar{U} \hat{R}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} [\bar{R}\bar{U} - \bar{U}^\theta \bar{U}^{-1} \bar{U}] \hat{U}_{t+1}$$

$$\hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}_{t+1} - \sigma \hat{\gamma}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} \bar{R}\bar{U} \hat{R}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} [\bar{R}\bar{U} - \bar{U}^\theta] \hat{U}_{t+1} \quad (\text{B.49})$$

Para reemplazar los términos del lado derecho de la ecuación, se parte del estado estacionario original (B.45) tal que:

$$1 = \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} [\bar{R}^k \bar{U} + (1 - \delta(\bar{U}))]$$

$$\beta^{-1} = \frac{\bar{R}^k \bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma} + \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}^\sigma}$$

Como en estado estacionario $\delta(\bar{U}) = \bar{U}^\theta / \theta$ y de (B.32) en estado estacionario $\bar{R}\bar{U} = U^\theta$, se tiene que $\bar{R}\bar{U} = \theta \delta$. Esto se reemplaza en la anterior ecuación, así:

$$\frac{\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma} = \left(\beta^{-1} - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}^\sigma} \right) = \frac{\theta \delta}{\bar{\gamma}^\sigma} \quad (\text{B.50})$$

Ahora, se reemplaza la anterior expresión en la ecuación (B.49)²:

$$\hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}_{t+1} - \sigma \hat{\gamma}_{t+1} + \beta \left(\beta^{-1} - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}^\sigma} \right) \hat{R}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{\gamma}^\sigma} [\bar{R}\bar{U} - \bar{U}^\theta] \hat{U}_{t+1} \quad (\text{B.51})$$

Ahora, dado que $\bar{R}\bar{U} = U^\theta$, la ecuación (B.51) es:

$$\hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}_{t+1} - \sigma \hat{\gamma}_{t+1} + \beta \left(\beta^{-1} - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}^\sigma} \right) \hat{R}_{t+1} \quad (\text{B.52})$$

Por último, se loglinealiza la ecuación (B.18) tal que:

$$\hat{\lambda}_t = -\sigma \hat{c}_t - \psi(\sigma - 1) \hat{H}_t \quad (\text{B.53})$$

Combinando (B.52) y (B.53) se tiene:

²De la ecuación (B.50), es posible decir que

$$\theta = \frac{\gamma^\sigma}{\beta^{-1}}$$

$$-\sigma \hat{c}_t - \psi(\sigma - 1)\hat{H}_t = -\sigma \hat{c}_{t+1} - \psi(\sigma - 1)\hat{H}_{t+1} - \sigma \hat{\gamma}_{t+1} + \beta \left(\beta^{-1} - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}^\sigma} \right) \hat{R}_{t+1} \quad (\text{B.54})$$

B.4.3 Horas trabajadas

Se parte de la ecuación (B.25), cuyo estado estacionario es:

$$\bar{w} = (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{H}}$$

Se aplica la formula de log-linealización tal que:

$$\bar{w} \hat{w}_t = (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{H}} \hat{y}_t - (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{H}} \hat{H}_t$$

Como $\bar{w} = (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{H}}$, se simplifica tal que:

$$\bar{w} \hat{w}_t = \bar{w} \hat{y}_t - \bar{w} \hat{H}_t$$

$$\bar{w} \hat{w}_t = \bar{w} (\hat{y}_t - \hat{H}_t)$$

$$\hat{w}_t = \hat{y}_t - \hat{H}_t$$

$$\hat{H}_t = \hat{y}_t - \hat{w}_t$$

B.4.4 Rendimientos del capital

Se parte de la ecuación (B.27), cuyo estado estacionario es:

$$\bar{R}^k = \alpha \bar{\gamma} \frac{\bar{y}}{\bar{U}^k}$$

Se aplica la formula de log-linealización tal que:

$$\bar{R}^k \hat{R}_t = \alpha \bar{\gamma} \frac{\bar{y}}{\bar{U}^k} \hat{\gamma}_t + \alpha \bar{\gamma} \frac{\bar{y}}{\bar{U}^k} \hat{y}_t - \alpha \bar{\gamma} \frac{\bar{y}}{\bar{U}^k} \hat{U}_t - \alpha \bar{\gamma} \frac{\bar{y}}{\bar{U}^k} \hat{k}_t$$

$$\bar{R}^k \hat{R}_t = (\alpha \bar{\gamma} \frac{\bar{y}}{\bar{U}^k})(\hat{\gamma}_t + \hat{y}_t - \hat{U}_t - \hat{k}_t)$$

Como $\bar{R}^k = \alpha \bar{\gamma} \frac{\bar{y}}{\bar{U}^k}$, se puede simplificar como:

$$R_t^k = \hat{\gamma}_t + \hat{y}_t - \hat{U}_t - \hat{k}_t$$

B.4.5 Inversión

Se parte de la ecuación (B.29), cuyo estado estacionario es:

$$\bar{i} = \bar{y} - \bar{c}$$

Aplicando la ecuación de log-linealización se tiene:

$$\hat{i}_t = \bar{y} \hat{y}_t - \bar{c} \hat{c}_t$$

Como $\bar{i} = \bar{y} - \bar{c}$, se tiene que:

$$(\bar{y} - \bar{c}) \hat{i}_t = \bar{y} \hat{y}_t - \bar{c} \hat{c}_t$$

$$\frac{(\bar{y} - \bar{c})}{\bar{y}} \hat{i}_t = \hat{y}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{y}} \hat{c}_t$$

$$\left(1 - \frac{\bar{c}}{\bar{y}}\right) \hat{i}_t = \hat{y}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{y}} \hat{c}_t$$

B.4.6 Utilización del capital

Se parte de la ecuación (B.32), cuyo estado estacionario es:

$$\bar{R}^k = \bar{U}^{\theta-1} \tag{B.55}$$

Se aplica la formula de log-linealización tal que:

$$\bar{R}^k \hat{R}_t = (\theta - 1) \bar{U}^{\theta-2} \bar{U} \hat{U}_t$$

$$\bar{R}^k \hat{R}_t = (\theta - 1) \bar{U}^{\theta-1} \hat{U}_t$$

Reemplazando el estado estacionario

$$\hat{U}_t = \frac{1}{(\theta - 1)} \hat{R}_t$$

B.4.7 Función de producción

Se parte de la ecuación (B.23), cuyo estado estacionario es:

$$\bar{y} = \bar{\Psi} \bar{\gamma}^{-\alpha} \bar{k}^{\alpha} \bar{U}^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha}$$

Se aplica la fórmula de estado estacionario tal que

$$\bar{y} \hat{y}_t = (\bar{\Psi} \bar{\gamma}^{-\alpha} \bar{k}^{\alpha} \bar{U}^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha}) \hat{\Psi}_t - \alpha (\bar{\Psi} \bar{\gamma}^{-\alpha} \bar{k}^{\alpha} \bar{U}^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha}) \hat{\gamma}_t + \alpha (\bar{\Psi} \bar{\gamma}^{-\alpha} \bar{k}^{\alpha} \bar{U}^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha}) \hat{k}_t + (1 - \alpha) (\bar{\Psi} \bar{\gamma}^{-\alpha} \bar{k}^{\alpha} \bar{U}^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha}) \hat{H}_t$$

Reemplazando el estado estacionario

$$\hat{y}_t = \hat{\Psi}_t - \alpha \hat{\gamma}_t + \alpha \hat{k}_t + (1 - \alpha) \hat{H}_t$$

B.4.8 Externalidad de la producción

Se parte de la ecuación de externalidad de la producción, cuyo estado estacionario es:

$$\bar{\Psi} = \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha} \right]^{\eta}$$

Aplicando la formula de log-linealización

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \hat{\Psi}_t = & \eta \alpha \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha} \right]^{\eta-1} \left[\left(\frac{\bar{k}}{\bar{\gamma}} \right)^{\alpha} \bar{U}^{\alpha-1} \bar{H}^{1-\alpha} \right] \bar{U} \hat{U}_t \\ & + \eta \alpha \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha} \right]^{\eta-1} \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \right)^{\alpha} \bar{k}^{\alpha-1} \bar{H}^{1-\alpha} \right] \bar{k} \hat{k}_t \\ & - \eta \alpha \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha} \right]^{\eta-1} \left[(\bar{U} \bar{k})^{\alpha} \bar{\gamma}^{-1-\alpha} \bar{H}^{1-\alpha} \right] \bar{\gamma} \hat{\gamma}_t + \eta (1 - \alpha) \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha} \right]^{\eta-1} \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^{\alpha} \bar{H}^{1-\alpha-1} \right] \bar{H} \hat{H}_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\hat{\Psi}_t &= \eta\alpha \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right]^{\eta-1} \left[\left(\frac{\bar{k}}{\bar{\gamma}} \right)^\alpha \bar{U}^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right] \bar{U}^{-1} \bar{U} \hat{U}_t \\ &\quad + \eta\alpha \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right]^{\eta-1} \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \right)^\alpha \bar{k}^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right] \bar{k}^{-1} \bar{k} \hat{k}_t \\ &- \eta\alpha \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right]^{\eta-1} [(\bar{U}\bar{k})^\alpha \bar{\gamma}^{-\alpha} \bar{H}^{1-\alpha}] \bar{\gamma}^{-1} \bar{\gamma} \hat{\gamma}_t + \eta(1-\alpha) \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right]^{\eta-1} \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right] \bar{H}^{-1} \bar{H} \hat{H}_t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\hat{\Psi}_t &= \eta\alpha \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right]^\eta \hat{U}_t + \eta\alpha \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right]^\eta \hat{k}_t \\ &\quad - \eta\alpha \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right]^\eta \hat{\gamma}_t + \eta(1-\alpha) \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right]^\eta \hat{H}_t\end{aligned}$$

Como en el estado estacionario $\bar{\Psi} = \left[\left(\frac{\bar{U}}{\bar{\gamma}} \bar{k} \right)^\alpha \bar{H}^{1-\alpha} \right]^\eta$, se tiene que:

$$\bar{\Psi}\hat{\Psi}_t = \bar{\Psi}\eta\alpha\hat{U}_t + \bar{\Psi}\eta\alpha\hat{k}_t - \bar{\Psi}\eta\alpha\hat{\gamma}_t + \bar{\Psi}(1-\alpha)\eta\hat{H}_t$$

$$\hat{\Psi}_t = \eta\alpha\hat{U}_t + \eta\alpha\hat{k}_t - \eta\alpha\hat{\gamma}_t + (1-\alpha)\eta\hat{H}_t$$

B.4.9 Capital de los hogares

Se parte de la ecuación (B.28), cuyo estado estacionario es:

$$\bar{k} = \bar{i} + (1 - \delta(\bar{U}))\bar{\gamma}^{-1}\bar{k}$$

$$\bar{i} = \bar{k} - (1 - \delta(\bar{U}))\bar{\gamma}^{-1}\bar{k}$$

$$\bar{i} = \bar{k} \left[\frac{1 - (1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}} \right]$$

$$\bar{i} = \frac{\delta(\bar{U})\bar{k}}{\bar{\gamma}}$$

Al aplicar la fórmula de log-linealización a la ecuación (B.28) ($k_{t+1}^- = \bar{i} + (1 - \delta(\bar{U}))\bar{\gamma}^{-1}\bar{k}$), se tiene que:

$$\bar{k}\hat{k}_{t+1} = \bar{i}\hat{i}_t + \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\bar{k}\hat{k}_t - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}^2}\bar{\gamma}\bar{k}\hat{\gamma}_t - \frac{\delta'(\bar{U})}{\bar{\gamma}}\bar{k}\bar{U}\hat{U}_t$$

Como $\delta'(\bar{U}) = \bar{U}^{\theta-1}$

$$\bar{k}\hat{k}_{t+1} = \bar{i}\hat{i}_t + \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\bar{k}\hat{k}_t - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\bar{k}\hat{\gamma}_t - \frac{\bar{U}^{\theta-1}}{\bar{\gamma}}\bar{k}\bar{U}\hat{U}_t$$

Como $\frac{\bar{U}^\theta}{\theta} = \delta(\bar{U})$, es decir, $\bar{U}^\theta = \delta(\bar{U})\theta$, se tiene que:

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{\bar{i}}{\bar{k}}\hat{i}_t + \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\hat{k}_t - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\hat{\gamma}_t - \frac{\delta(\bar{U})\theta}{\bar{\gamma}}\hat{U}_t$$

B.4.10 Crecimiento tecnológico

Se parte de la ecuación de crecimiento tecnológico estacionario:

$$\gamma_t = \gamma_{t-1}^\rho$$

Cuyo estado estacionario es

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}^\rho$$

Se aplica la formula de log-linealización tal que:

$$\bar{\gamma}\hat{\gamma}_t = \rho\bar{\gamma}_{t-1}^{\rho-1}\bar{\gamma}\hat{\gamma}_{t-1}$$

$$\bar{\gamma}\hat{\gamma}_t = \rho\bar{\gamma}_{t-1}^\rho\bar{\gamma}_{t-1}^{-1}\bar{\gamma}\hat{\gamma}_{t-1}$$

$$\hat{\gamma}_t = \rho\bar{\gamma}_{t-1}^{\rho-1}\bar{\gamma}_{t-1}^{-1}\hat{\gamma}_{t-1}$$

Como en estado estacionario $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}^\rho$:

$$\hat{\gamma}_t = \rho\frac{\bar{\gamma}_{t-1}^\rho}{\bar{\gamma}_{t-1}^\rho}\hat{\gamma}_{t-1}$$

$$\hat{\gamma}_t = \rho\hat{\gamma}_{t-1}$$

B.5 Resumen de ecuaciones log-linealizadas que se emplean en la programación

Condición intratemporal ocio (consumo) - salarios $\hat{w}_t = \hat{c}_t + \left(\epsilon_H - \frac{\psi(1-\sigma)}{\sigma}\right) \hat{H}_t$

$$\text{Euler} \quad \hat{c}_t + \psi(\sigma - 1)\hat{H}_t = \sigma\hat{c}_{t+1} + \psi(\sigma - 1)\hat{H}_{t+1} \\ + \sigma\hat{\gamma}_{t+1} - \beta \left(\beta^{-1} - \frac{(1-\delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}\sigma} \right) \hat{R}_{t+1}$$

$$\text{Horas trabajadas} \quad \hat{H}_t = \hat{y}_t - \hat{w}_t$$

$$\text{Rendimientos de capital} \quad \hat{R}_t^k = \hat{\gamma}_t + \hat{y}_t - \hat{U}_t - \hat{k}_{t-1}$$

$$\text{Inversión} \quad \left(1 - \frac{\bar{c}}{\bar{y}}\right) \hat{i}_t = \hat{y}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{y}} \hat{c}_t$$

$$\text{Utilización del capital} \quad \hat{U}_t = \frac{1}{(\theta-1)} \hat{R}_t$$

$$\text{Función de producción} \quad \hat{y}_t = \hat{\Psi}_t - \alpha\hat{\gamma}_t + \alpha\hat{k}_t + (1 - \alpha)\hat{H}_t$$

$$\text{Externalidad de producción} \quad \hat{\Psi}_t = \eta\alpha\hat{U}_t + \eta\alpha\hat{k}_t - \eta\alpha\hat{\gamma}_t + (1 - \alpha)\eta\hat{H}_t$$

$$\text{Capital de los hogares} \quad \hat{k}_{t+1} = \frac{\bar{i}}{\bar{k}} \hat{i}_t + \frac{(1-\delta)}{\bar{\gamma}} \hat{k}_t - \frac{(1-\delta)}{\bar{\gamma}} \hat{\gamma}_t - \frac{\delta\theta}{\bar{\gamma}} \hat{k}_t$$

$$\text{Crecimiento tecnológico} \quad \hat{\gamma}_t = \rho\hat{\gamma}_{t-1}$$

B.6 Introducción de las expectativas de aprendizaje por medio de la ecuación de Euler

Siguiendo a (Preston (2005)), se construye una regla óptima de consumo basada en pronósticos de horizonte lejano. Es necesario crear una senda óptima para el consumo tomando como dado su capital inicial k_t , los precios de los factores (R_t^K y w_t) y las expectativas futuras de dichos precios. Los pasos para hacerlo son los siguientes:

1. Log-linealización de la restricción presupuestaria de hogares.
2. Iterar hacia el futuro la restricción presupuestaria.
3. Iterar la ecuación de Euler de los hogares hacia atrás desde un periodo T hasta t.
4. Combinar las ecuaciones iteradas hacia el futuro y pasado.
5. Despejar la variable clave para la ecuación de Euler, en este caso es el consumo.

B.6.1 Log-linealización de la restricción presupuestaria de hogares

Sea la restricción presupuestaria intertemporal de los hogares (B.2).

$$C_t + E_t K_{t+1} = R_t^k (U_t K_t) + W_t H_t + (1 - \delta(U_t)) K_t$$

Para estacionarizar la restricción, se divide a ambos lados por X_t

$$\frac{C_t}{X_t} + \frac{E_t K_{t+1}}{X_t} = R_t^k \left(U_t \frac{K_t}{X_t} \right) + \frac{W_t}{X_t} H_t + (1 - \delta(U_t)) \frac{K_t}{X_t}$$

Dado que la estacionarización del capital es $k_t = \frac{K_t}{X_{t-1}}$, se multiplica y divide por X_{t-1} en los términos que contengan K_t en el lado derecho de la ecuación anterior tal que:

$$\frac{C_t}{X_t} + \frac{E_t K_{t+1}}{X_t} = R_t^k \left(U_t \frac{K_t}{X_{t-1}} \frac{X_{t-1}}{X_t} \right) + \frac{W_t}{X_t} H_t + (1 - \delta(U_t)) \frac{K_t}{X_{t-1}} \frac{X_{t-1}}{X_t}$$

Dado que $\gamma_t = \frac{X_t}{X_{t-1}}$, se tiene que

$$c_t + E_t k_{t+1} = \gamma_t^{-1} R_t^k (U_t k_t) + w_t H_t + (1 - \delta(U_t)) \gamma_t^{-1} k_t \quad (\text{B.56})$$

La anterior ecuación (B.56) puede ser escrita tal que:

$$k_t \left[\frac{c_t}{k_t} + \frac{E_t k_{t+1}}{k_t} \right] = k_t \left[\frac{R_t^k U_t}{\gamma_t} + \frac{w_t H_t}{k_t} + \frac{(1 - \delta(U_t))}{\gamma_t} \right]$$

Se cancela k_t a ambos lados:

$$\frac{c_t}{k_t} + \frac{E_t k_{t+1}}{k_t} = \frac{R_t^k U_t}{\gamma_t} + \frac{w_t H_t}{k_t} + \frac{(1 - \delta(U_t))}{\gamma_t} \quad (\text{B.57})$$

De la ecuación (B.50) $\frac{\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma} = \left(\beta^{-1} - \frac{(1-\delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}^\sigma} \right) = \frac{\theta\delta}{\bar{\gamma}^\sigma}$ se puede decir que:

$$\tilde{\beta}^{-1} \equiv \bar{\gamma}^{\sigma-1} \beta^{-1} = \left(\frac{\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}} + \frac{1 - \delta(\bar{U})}{\bar{\gamma}} \right) \quad (\text{B.58})$$

$$\tilde{\beta} = \beta \bar{\gamma}^{1-\sigma}$$

A partir de lo anterior, es posible log-linealizar la ecuación (B.57), tal que:

$$\frac{\bar{c}}{\bar{k}}(\hat{c}_t - \hat{k}_t) + (E_t \hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t) = \frac{\bar{R}^k \bar{U}}{\bar{\gamma}}(\hat{R}_t^K + \hat{U}_t - \hat{\gamma}_t) + \frac{\bar{w}\bar{H}}{\bar{k}}(\hat{w}_t + \hat{H}_t - \hat{k}_t) - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\hat{\gamma}_t - \frac{\delta'(\bar{U})\bar{U}}{\bar{\gamma}}\hat{U}_t \quad (\text{B.59})$$

Dado que $\delta'(\bar{U}) = \bar{U}^{\theta-1}$, se tiene que

$$\frac{\bar{c}}{\bar{k}}(\hat{c}_t - \hat{k}_t) + (E_t \hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t) = \frac{\bar{R}^k \bar{U}}{\bar{\gamma}}(\hat{R}_t^K + \hat{U}_t - \hat{\gamma}_t) + \frac{\bar{w}\bar{H}}{\bar{k}}(\hat{w}_t + \hat{H}_t - \hat{k}_t) - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\hat{\gamma}_t - \frac{\bar{U}^\theta}{\bar{\gamma}}\hat{U}_t \quad (\text{B.60})$$

$$\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{k}_t + E_t \hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t = \frac{\bar{R}^k \bar{U}}{\bar{\gamma}}(\hat{R}_t^K + \hat{U}_t - \hat{\gamma}_t) + \frac{\bar{w}\bar{H}}{\bar{k}}(\hat{w}_t + \hat{H}_t - \hat{k}_t) - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\hat{\gamma}_t - \frac{\bar{U}^\theta}{\bar{\gamma}}\hat{U}_t \quad (\text{B.61})$$

Multiplicando por -1 en ambos lados de la ecuación:

$$-\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{k}_t - E_t \hat{k}_{t+1} + \hat{k}_t = -\frac{\bar{R}^k \bar{U}}{\bar{\gamma}}(\hat{R}_t^K + \hat{U}_t - \hat{\gamma}_t) - \frac{\bar{w}\bar{H}}{\bar{k}}(\hat{w}_t + \hat{H}_t - \hat{k}_t) + \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\hat{\gamma}_t + \frac{\bar{U}^\theta}{\bar{\gamma}}\hat{U}_t \quad (\text{B.62})$$

Factorizando \hat{k}_t , se tiene que:

$$\hat{k}_t \left[\frac{\bar{c}}{\bar{k}} + 1 - \frac{\bar{w}\bar{H}}{\bar{k}} \right] = \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + E_t \hat{k}_{t+1} - \frac{\bar{R}^k \bar{U}}{\bar{\gamma}}(\hat{R}_t^K + \hat{U}_t - \hat{\gamma}_t) - \frac{\bar{w}\bar{H}}{\bar{k}}(\hat{w}_t + \hat{H}_t) + \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\hat{\gamma}_t + \frac{\bar{U}^\theta}{\bar{\gamma}}\hat{U}_t \quad (\text{B.63})$$

De la ecuación (B.57) es posible definir el estado estacionario:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{c}}{\bar{k}} + 1 &= \frac{\bar{R}^K \bar{U}}{\bar{\gamma}} + \frac{\bar{w} \bar{H}}{\bar{k}} + \frac{1 - \delta(\bar{U})}{\bar{\gamma}} \\ \frac{\bar{c}}{\bar{k}} + 1 - \frac{\bar{w} \bar{H}}{\bar{k}} &= \frac{\bar{R}^K \bar{U}}{\bar{\gamma}} + \frac{1 - \delta(\bar{U})}{\bar{\gamma}}\end{aligned}$$

Dada la definición (B.58), se tiene que:

$$\frac{\bar{c}}{\bar{k}} + 1 - \frac{\bar{w} \bar{H}}{\bar{k}} = \tilde{\beta}^{-1} \quad (\text{B.64})$$

Combinando las ecuaciones (B.64) y (B.63):

$$\tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t = \frac{\bar{c}}{\bar{k}} \hat{c}_t + E_t \hat{k}_{t+1} - \frac{\bar{R}^k \bar{U}}{\bar{\gamma}} (\hat{R}_t^K + \hat{U}_t - \hat{\gamma}_t) - \frac{\bar{w} \bar{H}}{\bar{k}} (\hat{w}_t + \hat{H}_t) + \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}} \hat{\gamma}_t + \frac{\bar{U}^\theta}{\bar{\gamma}} \hat{U}_t \quad (\text{B.65})$$

Para definir otra combinación útil de parámetros, se divide el estado estacionario de la ecuación (B.25) $\bar{w} = (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{H}}$ sobre el estado estacionario de la ecuación (B.27) $\bar{R}^k = \alpha \bar{\gamma} \frac{\bar{y}}{\bar{U}^k}$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{w}}{\bar{R}^k} &= \frac{(1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{H}}}{\alpha \bar{\gamma} \frac{\bar{y}}{\bar{U}^k}} \\ \frac{\bar{w}}{\bar{R}^k} &= \frac{(1 - \alpha) \frac{1}{\bar{H}}}{\alpha \bar{\gamma} \frac{1}{\bar{U}^k}} \\ \frac{\bar{w}}{\bar{R}^k} &= \frac{(1 - \alpha) \bar{U} \bar{k}}{\alpha \bar{\gamma} \bar{H}} \\ \frac{\bar{w} \bar{H}}{\bar{k}} &= \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\bar{U} \bar{R}^k}{\bar{\gamma}}\end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

Combinando la ecuación (B.66) con (B.65), se tiene:

$$\tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t = \frac{\bar{c}}{\bar{k}} \hat{c}_t + E_t \hat{k}_{t+1} - \frac{\bar{R}^k \bar{U}}{\bar{\gamma}} (\hat{R}_t^K + \hat{U}_t - \hat{\gamma}_t) - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\bar{U} \bar{R}^k}{\bar{\gamma}} (\hat{w}_t + \hat{H}_t) + \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}} \hat{\gamma}_t + \frac{\bar{U}^\theta}{\bar{\gamma}} \hat{U}_t$$

$$\tilde{\beta}^{-1}\hat{k}_t = \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + E_t\hat{k}_{t+1} - \frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}} \left[\hat{R}_t^K + \hat{U}_t - \hat{\gamma}_t + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\hat{w}_t + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\hat{H}_t \right] + \frac{(1-\delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\hat{\gamma}_t + \frac{\bar{U}^\theta}{\bar{\gamma}}\hat{U}_t$$

Despejando a $\tilde{\beta}$:

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + E_t\hat{k}_{t+1} - \frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}} \left[\hat{R}_t^K + \hat{U}_t - \hat{\gamma}_t + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\hat{w}_t + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\hat{H}_t \right] + \frac{(1-\delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\hat{\gamma}_t + \frac{\bar{U}^\theta}{\bar{\gamma}}\hat{U}_t \right]$$

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + E_t\hat{k}_{t+1} - \frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}} \left(\hat{R}_t^K + \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{w}_t + \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{H}_t \right) - \frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}}\hat{U}_t + \frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}}\hat{\gamma}_t + \frac{(1-\delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}}\hat{\gamma}_t + \frac{\bar{U}^\theta}{\bar{\gamma}}\hat{U}_t \right]$$

Factorizando los términos asociados a \hat{U}_t y $\hat{\gamma}_t$, se tiene:

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + E_t\hat{k}_{t+1} - \frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}} \left(\hat{R}_t^K + \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{w}_t + \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{H}_t \right) - \left(\frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}} - \frac{\bar{U}^\theta}{\bar{\gamma}} \right) \hat{U}_t + \left(\frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}} + \frac{(1-\delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}} \right) \hat{\gamma}_t \right]$$

Dado el estado estacionario de la ecuación (B.32), $\bar{R}^k = \bar{U}^{\theta-1}$, se dice que $\bar{R}^k\bar{U} = \bar{U}^\theta$. En consecuencia, es posible cancelar el término asociado a \hat{U}_t tal que:

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + E_t\hat{k}_{t+1} - \frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}} \left(\hat{R}_t^K + \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{w}_t + \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{H}_t \right) + \left(\frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}} + \frac{(1-\delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}} \right) \hat{\gamma}_t \right]$$

Además, dada la definición (B.58), $\tilde{\beta}^{-1} = \left(\frac{\bar{R}\bar{U}}{\bar{\gamma}} + \frac{1-\delta(\bar{U})}{\bar{\gamma}} \right)$, se tiene que:

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + E_t\hat{k}_{t+1} - \frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}} \left(\hat{R}_t^K + \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{w}_t + \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{H}_t \right) + \tilde{\beta}^{-1}\hat{\gamma}_t \right]$$

Definiendo a $\tilde{R} = \frac{\bar{R}^k\bar{U}}{\bar{\gamma}}$, se tiene que:

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t + E_t\hat{k}_{t+1} - \tilde{R} \left(\hat{R}_t^K + \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{w}_t + \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{H}_t \right) + \tilde{\beta}^{-1}\hat{\gamma}_t \right] \quad (\text{B.67})$$

La ecuación anterior describe la decisión de consumo con la condición de estado estacionario generada por la ecuación de Euler.

De la ecuación (B.43), $\hat{w}_t = \hat{c}_t + \left(\epsilon_H - \frac{\psi(1-\sigma)}{\sigma} \right) \hat{H}_t$, se puede decir:

$$\hat{H}_t = \left(\epsilon_H - \frac{\psi(1-\sigma)}{\sigma} \right)^{-1} (\hat{w}_t - \hat{c}_t) \quad (\text{B.68})$$

Reemplazando la anterior ecuación dentro de (B.67), se tiene que

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\frac{\bar{c}}{\bar{k}} \hat{c}_t + \hat{k}_{t+1} + \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t - \tilde{R} \hat{R}_t^K - \tilde{R} \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{w}_t - \tilde{R} \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\epsilon_H - \psi \frac{1-\sigma}{\sigma} \right)^{-1} (\hat{w}_t - \hat{c}_t) \right] \quad (\text{B.69})$$

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\frac{\bar{c}}{\bar{k}} \hat{c}_t + \hat{k}_{t+1} + \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t - \tilde{R} \hat{R}_t^K - \tilde{R} \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{w}_t - \tilde{R} \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\epsilon_H - \psi \frac{1-\sigma}{\sigma} \right)^{-1} \hat{w}_t + \tilde{R} \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\epsilon_H - \psi \frac{1-\sigma}{\sigma} \right)^{-1} \hat{c}_t \right] \quad (\text{B.70})$$

Factorizando

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\left[\frac{\bar{c}}{\bar{k}} + \tilde{R} \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\epsilon_H - \psi \frac{1-\sigma}{\sigma} \right)^{-1} \right] \hat{c}_t + \hat{k}_{t+1} + \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t - \tilde{R} \hat{R}_t^K - \tilde{R} \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(1 + \left[\epsilon_H - \psi \frac{1-\sigma}{\sigma} \right]^{-1} \right) \hat{w}_t \right] \quad (\text{B.71})$$

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\epsilon_c \hat{c}_t + \hat{k}_{t+1} + \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t - \tilde{R} \hat{R}_t^K - \epsilon_w \hat{w}_t \right] \quad (\text{B.72})$$

Donde se definen las combinaciones de parámetros ϵ_c y ϵ_w tal que

$$\epsilon_c = \frac{\bar{c}}{\bar{k}} + \tilde{R} \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\epsilon_H - \psi \frac{1-\sigma}{\sigma} \right)^{-1} \quad (\text{B.73})$$

$$\epsilon_w = \tilde{R} \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(1 + \left[\epsilon_H - \psi \frac{1-\sigma}{\sigma} \right]^{-1} \right) \quad (\text{B.74})$$

B.6.2 Iteración hacia el futuro de la restricción presupuestaria

Para iterar hacia el futuro, es necesario partir de la ecuación (B.72)

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \epsilon_c \hat{c}_t + \tilde{\beta} \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t - \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_t^K - \tilde{\beta} \epsilon_w \hat{w}_t + \tilde{\beta} E_t \hat{k}_{t+1} \quad (\text{B.75})$$

Donde las expectativas futuras de \hat{k}_t tienen la siguiente forma

$$\hat{E}_t k_{t+1} = \hat{E}_t \left(\tilde{\beta} \epsilon_c \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} + \tilde{\beta} \tilde{\beta}^{-1} \hat{E}_t \hat{\gamma}_{t+1} - \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{E}_t \hat{R}_{t+1}^K - \tilde{\beta} \epsilon_w \hat{E}_t \hat{w}_{t+1} + \tilde{\beta} \hat{E}_t \hat{E}_{t+1} \hat{k}_{t+2} \right) \quad (\text{B.76})$$

\hat{E}_t denota las creencias subjetivas que tienen los agentes acerca de la evolución de las variables que están más allá de su control. En el caso donde se está trabajando con expectativas racionales, se usa la notación usual E_t . Además, se asume que las creencias son homogéneas y por tanto satisfacen la ley de probabilidad estándar tal que $\hat{E}_t \hat{E}_{t+i} = \hat{E}_t$.

Reemplazando la ecuación (3.161) dentro de la ecuación (3.160), se tiene que

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \epsilon_c \hat{c}_t + \tilde{\beta} \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t - \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_t^K - \tilde{\beta} \epsilon_w \hat{w}_t + \tilde{\beta} \hat{E}_t \left(\tilde{\beta} \epsilon_c \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} + \tilde{\beta} \tilde{\beta}^{-1} \hat{E}_t \hat{\gamma}_{t+1} - \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{E}_t \hat{R}_{t+1}^K - \tilde{\beta} \epsilon_w \hat{E}_t \hat{w}_{t+1} + \tilde{\beta} \hat{E}_t \hat{E}_{t+1} \hat{k}_{t+2} \right) \quad (\text{B.77})$$

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \epsilon_c \hat{c}_t + \tilde{\beta} \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t - \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_t^K - \tilde{\beta} \epsilon_w \hat{w}_t + \hat{E}_t \left(\tilde{\beta}^2 \epsilon_c \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} + \tilde{\beta}^2 \tilde{\beta}^{-1} \hat{E}_t \hat{\gamma}_{t+1} - \tilde{\beta}^2 \tilde{R} \hat{E}_t \hat{R}_{t+1}^K - \tilde{\beta}^2 \epsilon_w \hat{E}_t \hat{w}_{t+1} + \tilde{\beta}^2 \hat{E}_t \hat{E}_{t+1} \hat{k}_{t+2} \right) \quad (\text{B.78})$$

Como se tiene que $\hat{E}_t \hat{E}_{t+i} = \hat{E}_t$:

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \epsilon_c \hat{c}_t + \tilde{\beta} \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t - \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_t^K - \tilde{\beta} \epsilon_w \hat{w}_t + \tilde{\beta}^2 \epsilon_c \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} + \tilde{\beta}^2 \tilde{\beta}^{-1} \hat{E}_t \hat{\gamma}_{t+1} - \tilde{\beta}^2 \tilde{R} \hat{E}_t \hat{R}_{t+1}^K - \tilde{\beta}^2 \epsilon_w \hat{E}_t \hat{w}_{t+1} + \tilde{\beta}^2 \hat{E}_t \hat{k}_{t+2} \quad (\text{B.79})$$

Tomando las expectativas un período adicional, se consigue:

$$\hat{E}_t k_{t+2} = \hat{E}_t \left(\tilde{\beta} \epsilon_c \hat{E}_{t+1} \hat{c}_{t+2} + \tilde{\beta} \tilde{\beta}^{-1} \hat{E}_{t+1} \hat{\gamma}_{t+2} - \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{E}_{t+1} \hat{R}_{t+2}^K - \tilde{\beta} \epsilon_w \hat{E}_{t+1} \hat{w}_{t+2} + \tilde{\beta} \hat{E}_{t+2} \hat{k}_{t+3} \right) \quad (\text{B.80})$$

Reemplazando la ecuación (3.165) en la ecuación (3.164), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\hat{k}_t &= \tilde{\beta}\epsilon_c\hat{c}_t + \tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\hat{\gamma}_t - \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_t^K - \tilde{\beta}\epsilon_w\hat{w}_t + \\
&\quad \tilde{\beta}^2\epsilon_c\hat{E}_t\hat{c}_{t+1} + \tilde{\beta}^2\tilde{\beta}^{-1}\hat{E}_t\hat{\gamma}_{t+1} - \tilde{\beta}^2\tilde{R}\hat{E}_t\hat{R}_{t+1}^K - \tilde{\beta}^2\epsilon_w\hat{E}_t\hat{w}_{t+1} + \\
&\quad \tilde{\beta}^2\hat{E}_t \left(\tilde{\beta}\epsilon_c\hat{E}_{t+1}\hat{c}_{t+2} + \tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\hat{E}_{t+1}\hat{\gamma}_{t+2} - \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{E}_{t+1}\hat{R}_{t+2}^K - \tilde{\beta}\epsilon_w\hat{E}_{t+1}\hat{w}_{t+2} + \tilde{\beta}\hat{E}_{t+2}\hat{k}_{t+3} \right)
\end{aligned} \tag{B.81}$$

$$\begin{aligned}
\hat{k}_t &= \tilde{\beta}\epsilon_c\hat{c}_t + \tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\hat{\gamma}_t - \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_t^K - \tilde{\beta}\epsilon_w\hat{w}_t + \\
&\quad \tilde{\beta}^2\epsilon_c\hat{E}_t\hat{c}_{t+1} + \tilde{\beta}^2\tilde{\beta}^{-1}\hat{E}_t\hat{\gamma}_{t+1} - \tilde{\beta}^2\tilde{R}\hat{E}_t\hat{R}_{t+1}^K - \tilde{\beta}^2\epsilon_w\hat{E}_t\hat{w}_{t+1} + \\
&\quad \hat{E}_t \left(\tilde{\beta}^3\epsilon_c\hat{E}_{t+1}\hat{c}_{t+2} + \tilde{\beta}^3\tilde{\beta}^{-1}\hat{E}_{t+1}\hat{\gamma}_{t+2} - \tilde{\beta}^3\tilde{R}\hat{E}_{t+1}\hat{R}_{t+2}^K - \tilde{\beta}^3\epsilon_w\hat{E}_{t+1}\hat{w}_{t+2} + \tilde{\beta}^3\hat{E}_{t+2}\hat{k}_{t+3} \right)
\end{aligned} \tag{B.82}$$

$$\begin{aligned}
\hat{k}_t &= \tilde{\beta}\epsilon_c\hat{c}_t + \tilde{\beta}\tilde{\beta}^{-1}\hat{\gamma}_t - \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_t^K - \tilde{\beta}\epsilon_w\hat{w}_t + \\
&\quad \tilde{\beta}^2\epsilon_c\hat{E}_t\hat{c}_{t+1} + \tilde{\beta}^2\tilde{\beta}^{-1}\hat{E}_t\hat{\gamma}_{t+1} - \tilde{\beta}^2\tilde{R}\hat{E}_t\hat{R}_{t+1}^K - \tilde{\beta}^2\epsilon_w\hat{E}_t\hat{w}_{t+1} + \\
&\quad \tilde{\beta}^3\epsilon_c\hat{E}_{t+1}\hat{c}_{t+2} + \tilde{\beta}^3\tilde{\beta}^{-1}\hat{E}_{t+1}\hat{\gamma}_{t+2} - \tilde{\beta}^3\tilde{R}\hat{E}_{t+1}\hat{R}_{t+2}^K - \tilde{\beta}^3\epsilon_w\hat{E}_{t+1}\hat{w}_{t+2} + \tilde{\beta}^3\hat{E}_{t+2}\hat{k}_{t+3}
\end{aligned} \tag{B.83}$$

Dado lo anterior, es posible seguir iterando hacia ∞ y se encuentra la siguiente forma funcional.

$$\hat{k}_t = \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^T \epsilon_c \hat{c}_{t+T-1} + \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^T \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^T \tilde{R} \hat{R}_{t+T-1}^K - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^T \epsilon_w \hat{w}_{t+T-1}$$

$$\hat{k}_t = \tilde{\beta} \left[\hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \epsilon_c \hat{c}_{t+T-1} + \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \tilde{R} \hat{R}_{t+T-1}^K - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \epsilon_w \hat{w}_{t+T-1} \right]$$

$$\tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t = \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \epsilon_c \hat{c}_{t+T-1} + \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \tilde{R} \hat{R}_{t+T-1}^K - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \epsilon_w \hat{w}_{t+T-1}$$

$$\tilde{\beta}^{-1}\hat{k}_t = \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \epsilon_c \hat{c}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \tilde{R} \hat{R}_T^K - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \epsilon_w \hat{w}_T$$

Factorizando la expresión anterior, se tiene que

$$\epsilon_c \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \hat{c}_T = \tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\epsilon_w \hat{w}_T + \tilde{R} \hat{R}_T^K - \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_T \right) \quad (\text{B.84})$$

La ecuación anterior describe la restricción presupuestaria del flujo de los hogares.

B.7 Iterar hacia el pasado la ecuación de Euler

Partimos de la ecuación de Euler original (B.54)

$$\sigma \hat{c}_t + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_t = \sigma \hat{c}_{t+1} + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_{t+1} + \sigma \hat{\gamma}_{t+1} - \beta \left(\beta^{-1} - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}^\sigma} \right) \hat{R}_{t+1}$$

Reescribiendo

$$\sigma \hat{c}_{t+1} + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_{t+1} = \sigma \hat{c}_t + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_t - \sigma \hat{\gamma}_{t+1} + \beta \left(\beta^{-1} - \frac{(1 - \delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}^\sigma} \right) \hat{R}_{t+1}$$

Dado que $\tilde{\beta} = \beta \bar{\gamma}^{1-\sigma}$, $\tilde{R} = \frac{\bar{R} \bar{U}}{\bar{\gamma}}$ y $\frac{\bar{R} \bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma} = \left(\beta^{-1} - \frac{(1-\delta(\bar{U}))}{\bar{\gamma}^\sigma} \right)$, tenemos que

$$\sigma \hat{c}_{t+1} + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_{t+1} = \sigma \hat{c}_t + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_t - \sigma \hat{\gamma}_{t+1} + \beta \frac{\bar{R} \bar{U}}{\bar{\gamma}^\sigma} \hat{R}_{t+1}$$

$$\sigma \hat{c}_{t+1} + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_{t+1} = \sigma \hat{c}_t + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_t - \sigma \hat{\gamma}_{t+1} + \beta \bar{\gamma}^{1-\sigma} \frac{\bar{R} \bar{U}}{\bar{\gamma}} \hat{R}_{t+1}$$

$$\sigma \hat{c}_{t+1} + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_{t+1} = \sigma \hat{c}_t + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_t - \sigma \hat{\gamma}_{t+1} + \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{t+1}$$

Dada la ecuación (B.53), se puede reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\hat{\lambda}_{t+1} = -\sigma\hat{\gamma}_{t+1} + \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_{t+1} + \hat{\lambda}_t$$

Ahora, se itera recursivamente desde un periodo T hacia atrás hasta llegar a t.

$$\hat{\lambda}_T = -\sigma\hat{\gamma}_T + \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_T + \hat{\lambda}_{T-1} \quad (\text{B.85})$$

Rezagando un período, se tiene que

$$\hat{E}_t\hat{\lambda}_{T-1} = \hat{E}_t \left[-\sigma\hat{E}_t\hat{\gamma}_{T-1} + \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{E}_t\hat{R}_{T-1} + \hat{\lambda}_{T-2} \right] \quad (\text{B.86})$$

Reemplazando la ecuación (3.74) en (3.73) y sabiendo que $\hat{E}_t\hat{\lambda}_{T-1} = \hat{\lambda}_{T-1}$.

$$\hat{E}_t\hat{\lambda}_T = -\sigma\hat{\gamma}_T + \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_T + \hat{E}_t \left[-\sigma\hat{E}_t\hat{\gamma}_{T-1} + \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{E}_t\hat{R}_{T-1} + \hat{\lambda}_{T-2} \right]$$

$$\hat{E}_t\hat{\lambda}_T = -\sigma\hat{\gamma}_T + \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_T - \sigma\hat{E}_t\hat{\gamma}_{T-1} + \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{E}_t\hat{R}_{T-1} + \hat{\lambda}_{T-2}$$

$$\hat{E}_t\hat{\lambda}_T = -\sigma\hat{E}_t[\hat{\gamma}_T + \hat{\gamma}_{T-1}] + \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{E}_t[\hat{R}_T + \hat{R}_{T-1}] + \hat{\lambda}_{T-2}$$

Si se itera repetitivamente con base en reemplazo de $\hat{\lambda}_{T-i}$, hasta llegar al período t, se tiene que

$$\hat{E}_t\hat{\lambda}_T = -\sigma\hat{E}_t[\hat{\gamma}_T + \hat{\gamma}_{T-1} + \cdots + \hat{\gamma}_{t+1}] + \tilde{\beta}\tilde{R}\hat{E}_t[\hat{R}_T + \hat{R}_{T-1} + \cdots + \hat{R}_{t+1}] + \hat{\lambda}_t$$

La anterior ecuación puede ser escrita en términos de sumatorios de la siguiente forma:

$$\hat{E}_t\hat{\lambda}_T = \hat{\lambda}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_{T+1}^K - \sigma\hat{\gamma}_{T+1}) \right] \quad (\text{B.87})$$

Volviendo a reemplazar $\hat{\lambda}_t$, se tiene que

$$\hat{E}_t \left(\sigma\hat{c}_T + \psi(\sigma - 1)\hat{H}_T \right) = \sigma\hat{c}_t + \psi(\sigma - 1)\hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_{T+1}^K - \sigma\hat{\gamma}_{T+1}) \right] \quad (\text{B.88})$$

Sustituyendo la ecuación (B.68):

$$\hat{H}_t = \left(\epsilon_H - \frac{\psi(1-\sigma)}{\sigma} \right)^{-1} (\hat{w}_t - \hat{c}_t)$$

Se tiene que

$$\hat{E}_t \left(\sigma \hat{c}_T + \psi(\sigma - 1) \left(\epsilon_H - \frac{\psi(1-\sigma)}{\sigma} \right)^{-1} (\hat{w}_T - \hat{c}_T) \right) = \sigma \hat{c}_t + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \sigma \hat{\gamma}_{T+1}) \right] \quad (\text{B.89})$$

No se reemplaza \hat{H}_t , solo \hat{H}_T , esto es debido a que es de interés conocer el comportamiento de la senda del consumo en términos de salarios y rendimientos futuros, no presentes.

$$\hat{E}_t \left(\sigma \hat{c}_T - \psi(\sigma - 1) \left(\frac{\sigma \epsilon_H + \psi(\sigma - 1)}{\sigma} \right)^{-1} \hat{c}_T + \psi(\sigma - 1) \left(\frac{\sigma \epsilon_H + \psi(\sigma - 1)}{\sigma} \right)^{-1} \hat{w}_T \right) = \sigma \hat{c}_t + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \sigma \hat{\gamma}_{T+1}) \right]$$

$$\hat{E}_t \left(\sigma \hat{c}_T - \psi(\sigma - 1) \left(\frac{\sigma}{\sigma \epsilon_H + \psi(\sigma - 1)} \right) \hat{c}_T + \psi(\sigma - 1) \left(\frac{\sigma}{\sigma \epsilon_H + \psi(\sigma - 1)} \right) \hat{w}_T \right) = \sigma \hat{c}_t + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \sigma \hat{\gamma}_{T+1}) \right]$$

$$\hat{E}_t \left(\sigma \hat{c}_T - \sigma \left(\frac{\psi(\sigma - 1)}{\sigma \epsilon_H + \psi(\sigma - 1)} \right) \hat{c}_T + \sigma \left(\frac{\psi(\sigma - 1)}{\sigma \epsilon_H + \psi(\sigma - 1)} \right) \hat{w}_T \right) = \sigma \hat{c}_t + \psi(\sigma - 1) \hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \sigma \hat{\gamma}_{T+1}) \right]$$

Sea $\chi = \frac{\psi(\sigma-1)}{\sigma \epsilon_H + \psi(\sigma-1)}$, se tiene:

$$\hat{E}_t(\sigma\hat{c}_T - \sigma\chi\hat{c}_T + \sigma\chi\hat{w}_T) = \sigma\hat{c}_t + \psi(\sigma - 1)\hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_{T+1}^K - \sigma\hat{\gamma}_{T+1}) \right]$$

Factorizando \hat{c}_T :

$$\hat{E}_t[(1 - \chi)\sigma\hat{c}_T + \chi\sigma\hat{w}_T] = \sigma\hat{c}_t + \psi(\sigma - 1)\hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_{T+1}^K - \sigma\hat{\gamma}_{T+1}) \right] \quad (\text{B.90})$$

Reorganizando

$$\hat{E}_t(1 - \chi)\sigma\hat{c}_T = \sigma\hat{c}_t + \psi(\sigma - 1)\hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_{T+1}^K - \sigma\hat{\gamma}_{T+1}) \right] - \hat{E}_t(\chi\sigma\hat{w}_T) \quad (\text{B.91})$$

Reorganizando en términos del consumo esperado

$$\hat{E}_t\hat{c}_T = \frac{1}{1 - \chi} \left(\hat{c}_t + \sigma^{-1}\psi(\sigma - 1)\hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\sigma^{-1}\tilde{\beta}\tilde{R}\hat{R}_{T+1}^K - \hat{\gamma}_{T+1}) \right] - \chi\hat{w}_T \right) \quad (\text{B.92})$$

B.7.1 Combinación de las ecuaciones iteradas hacia el futuro

El factor de descuento que usarán los hogares ahora es $\tilde{\beta}$. Sustituyendo (B.92) dentro de (B.84), se tiene que³

$$\begin{aligned} \epsilon_c \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left[\frac{1}{1-\chi} \left(\hat{c}_t + \sigma^{-1} \psi(\sigma-1) \hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\sigma^{-1} \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \hat{\gamma}_{T+1}) \right] - \chi \hat{w}_T \right) \right] = \\ \tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\epsilon_w \hat{w}_T + \tilde{R} \hat{R}_T^K - \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_T \right) \quad (\text{B.93}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\chi} \epsilon_c \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left[\left(\hat{c}_t + \sigma^{-1} \psi(\sigma-1) \hat{H}_t + \hat{E}_t \left[\sum_{T=t}^{T-1} (\sigma^{-1} \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \hat{\gamma}_{T+1}) \right] - \chi \hat{w}_T \right) \right] = \\ \tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\epsilon_w \hat{w}_T + \tilde{R} \hat{R}_T^K - \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_T \right) \quad (\text{B.94}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\hat{c}_t + \sigma^{-1} \psi(\sigma-1) \hat{H}_t \right) + \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \sum_{T=t}^{T-1} \left((\sigma^{-1} \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \hat{\gamma}_{T+1}) \right) \\ - \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} (\chi \hat{w}_T) = \tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\epsilon_w \hat{w}_T + \tilde{R} \hat{R}_T^K - \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_T \right) \quad (\text{B.95}) \end{aligned}$$

³Recuérdese que

$$E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} a_t = \frac{1}{(1-\beta)} a_t$$

$$\begin{aligned} E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} a_T &= a_t + E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t+1} a_{T+1} \\ E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} a_T &= a_t + E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \beta a_{T+1} \end{aligned}$$

Las anteriores propiedades serán de utilidad a continuación.

Seguendo a Preston (2005), donde

$$\hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \sum_{T=t}^{T-1} a_T = \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} a_T$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\hat{c}_t + \sigma^{-1} \psi(\sigma-1) \hat{H}_t \right) + \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} (\sigma^{-1} \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \hat{\gamma}_{T+1}) \right) \\ & - \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} (\chi \hat{w}_T) = \tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\epsilon_w \hat{w}_T + \tilde{R} \hat{R}_T^K - \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_T \right) \quad (\text{B.96}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \frac{1}{1-\tilde{\beta}} \left(\hat{c}_t + \sigma^{-1} \psi(\sigma-1) \hat{H}_t \right) + \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \frac{1}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\tilde{\beta} (\sigma^{-1} \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \hat{\gamma}_{T+1}) \right) \\ & - \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} (\chi \hat{w}_T) = \tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} (\epsilon_w \hat{w}_T) + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\tilde{R} \hat{R}_T^K \right) - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_T \right) \quad (\text{B.97}) \end{aligned}$$

B.7.2 Despeje de la variable consumo

La idea es dejar al lado izquierdo las mismas variables que en la ecuación de Euler original. Por tanto, se despeja tal que:

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \frac{1}{1-\tilde{\beta}} \left(\hat{c}_t + \sigma^{-1} \psi(\sigma-1) \hat{H}_t \right) = \tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\epsilon_w + \frac{\epsilon_c \chi}{1-\chi} \right) \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \tilde{R} \hat{R}_T^K \\ & - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_T - \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \frac{1}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\tilde{\beta} (\sigma^{-1} \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \hat{\gamma}_{T+1}) \right) \quad (\text{B.98}) \end{aligned}$$

Dado que

$$E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} a_T = a_t + E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \beta a_{T+1}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon_c}{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})} \left(\hat{c}_t + \sigma^{-1} \psi(\sigma-1) \hat{H}_t \right) = \tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \left(\epsilon_w + \frac{\epsilon_c \chi}{1-\chi} \right) \hat{w}_t + \hat{E}_t \left(\sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \tilde{\beta} \left(\epsilon_w + \frac{\epsilon_c \chi}{1-\chi} \right) \hat{w}_{T+1} \right) + \tilde{R} \hat{R}_t^K \\
& + \hat{E}_t \left(\sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K \right) - \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t - \hat{E}_t \left(\sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \tilde{\beta} \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_{T+1} \right) - \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \frac{1}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\tilde{\beta} (\sigma^{-1} \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K - \hat{\gamma}_{T+1}) \right)
\end{aligned} \tag{B.99}$$

Organizando factores

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon_c}{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})} \left(\hat{c}_t + \sigma^{-1} \psi(\sigma-1) \hat{H}_t \right) = \tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \left(\epsilon_w + \frac{\epsilon_c \chi}{1-\chi} \right) \hat{w}_t + \tilde{R} \hat{R}_t^K - \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t + \hat{E}_t \left(\sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \tilde{\beta} \left(\epsilon_w + \frac{\epsilon_c \chi}{1-\chi} \right) \hat{w}_{T+1} \right) \\
& + \hat{E}_t \left(\sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K \right) - \hat{E}_t \left(\sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \tilde{\beta} \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_{T+1} \right) - \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \frac{1}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left((\sigma^{-1} \tilde{\beta}^2 \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K) \right) \\
& + \frac{\epsilon_c}{1-\chi} \frac{1}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\tilde{\beta} (\hat{\gamma}_{T+1}) \right) \tag{B.100}
\end{aligned}$$

Factorizando

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon_c}{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})} \left(\hat{c}_t + \sigma^{-1} \psi(\sigma-1) \hat{H}_t \right) = \tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \left(\epsilon_w + \frac{\epsilon_c \chi}{1-\chi} \right) \hat{w}_t + \tilde{R} \hat{R}_t^K - \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\tilde{\beta} \left(\epsilon_w + \frac{\epsilon_c \chi}{1-\chi} \right) \right) \hat{w}_{T+1} \\
& + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(1 - \frac{\sigma^{-1} \tilde{\beta} \epsilon_c}{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})} \right) \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\frac{\tilde{\beta} \epsilon_c}{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})} - 1 \right) \hat{\gamma}_{T+1} \tag{B.101}
\end{aligned}$$

Simplificando, se obtiene la decisión óptima de consumo en términos de los pronósticos de los precios de los factores.

$$\begin{aligned}
& \hat{c}_t + \sigma^{-1} \psi(1-\sigma) \hat{H}_t = \frac{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})}{\epsilon_c} \left[\tilde{\beta}^{-1} \hat{k}_t + \tilde{R} \hat{R}_t^K - \tilde{\beta}^{-1} \hat{\gamma}_t + \left(\epsilon_w + \epsilon_c \frac{\chi}{(1-\chi)} \right) \hat{w}_t \right] \\
& + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \frac{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})}{\epsilon_c} \tilde{\beta} \left(\epsilon_w + \epsilon_c \frac{\chi}{(1-\chi)} \right) \hat{w}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left[\frac{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})}{\epsilon_c} - \tilde{\beta} \sigma^{-1} \right] \tilde{\beta} \tilde{R} \hat{R}_{T+1}^K \\
& + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left[\tilde{\beta} - \frac{(1-\chi)(1-\tilde{\beta})}{\epsilon_c} \right] \hat{\gamma}_{T+1} \tag{B.102}
\end{aligned}$$

Fijando a $\sigma = 1$ y $\chi = 0$, se tiene un modelo RBC simple.

B.8 Formación de creencias de los agentes en el contexto de aprendizaje dentro del modelo

B.8.1 Conexión con el modelo original de expectativas racionales

Se presenta una conexión entre las diferentes presentaciones de la solución del sistema de ecuaciones con el algoritmo de aprendizaje de los agentes. Inicialmente, se presenta la solución al sistema de ecuaciones por medio del método de Blanchard y Kahn que ofrece un sistema matricial de todas las variables expresado en términos de las variables de estado (*Minimum State Variable*):

$$W_{t+1} = \Omega_0^{RE} + \Omega_1^{RE} K_t + \Omega_2^{RE} \varepsilon_t$$

Donde el vector W_{t+1} es una matriz que incluye tanto variables de control como variables de estado, Ω_0^{RE} son los interceptos, Ω_1^{RE} es la matriz de coeficientes, K_t es una matriz de variables de estado (en el presente modelo capital k_t), Ω_2^{RE} es el vector de coeficientes que acompañan el choque, y ε_t es el choque de tecnología.

La anterior solución bajo expectativas racionales, se puede escribir así:

$$A_0 W_t = A_1 + A_5 W_{t-1} + A_3 W_{t+1} + A_4 \sum_{T=0}^{\infty} \beta^T W_T + C \varepsilon_t$$

Donde $\sum_{T=0}^{\infty} \beta^T W_T$ representa el flujo futuro descontado solo para la variable consumo (c_t) bajo su regla de decisión. Tanto el coeficiente A_4 como la variable que la acompaña solo se emplean bajo el modelo de aprendizaje de expectativas con el flujo descontado del consumo y, en su lugar, la ecuación empleada se excluye tanto de A_3 como de W_{t+1} . Lo opuesto sucede bajo expectativas racionales. C es un vector que acompaña al choque de tecnología.

Bajo aprendizaje se tiene que:

$$W_{t+1} = T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) + T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) K_t + T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) \varepsilon_t$$

Donde $T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo del vector intercepto), $T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo de la matriz de transición) y $T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo de la matriz de incidencia de choques) son los mapas de coeficientes de la Ley de movimiento real o verdadera de estos, la cual combina los parámetros del sistema de ecuaciones con los parámetros estimados por los agentes bajo su ley de movimiento percibida.

El mapeo de los agentes (o ley de movimiento real) se construye empleando los coeficientes A_0 , A_1 , A_3 , A_4 y A_5 y los valores estimados por los agentes no racionales por medio de su ley de movimiento percibido, mediante su mecanismo de formación de creencias o expectativas. En tal sentido se tiene que:

$$F_0 = [I - \Omega_1^L]^{-1} [1/\beta - \Omega_1^L] [(1 - \beta)[I - \Omega_1^L]]^{-1} \Omega_0^L$$

$$F_1 = \Omega_1^L (1 - \beta) [I - \Omega_1^L]^{-1}$$

Ahora, se define:

$$T_I = A_0^{-1} [A_3 \Omega_0^L] + A_0^{-1} [A_4 F_0] = A_0^{-1} [A_3 \Omega_0^L + A_4 F_0]$$

$$T_C = A_0^{-1} [A_3 \Omega_1^L] + A_0^{-1} [A_4 F_1] = A_0^{-1} [A_3 \Omega_1^L + A_4 F_1]$$

A partir de las anteriores definiciones, se consigue:

$$T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1} T_I$$

$$T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1} [A_0^{-1} (A_2 + A_5 \Omega_1^L)]$$

Como $A_2 = 0$

$$T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1} [A_0^{-1} A_5 \Omega_1^L]$$

Finalmente,

$$T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1}C$$

B.8.2 Formación de las creencias o expectativas de los agentes

La formación de creencias se realiza a través de un sistema de ecuaciones que se actualiza con la ley de movimiento percibida por los agentes del modelo, mediante el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivos. Los agentes aprenden sobre los parámetros asociados al comportamiento de las variables *consumo de los hogares* (\hat{c}_t), *trabajo* (\hat{l}_t), *salario* (\hat{w}_t), *tasa de interés* (\hat{r}_t), *inversión* (\hat{i}_t) y *producto* y (\hat{y}_t). En este, cada variable estará en función de las variables de estado, es decir, del *capital de los hogares* (\hat{k}_t). A continuación se presenta dicho sistema:

$$\hat{c}_t = \xi_0^c + \xi_1^c \hat{k}_t + \xi_2^c \hat{z}_t \quad (\text{B.103})$$

$$\hat{l}_t = \xi_0^l + \xi_1^l \hat{k}_t + \xi_2^l \hat{z}_t \quad (\text{B.104})$$

$$\hat{w}_t = \xi_0^w + \xi_1^w \hat{k}_t + \xi_2^w \hat{z}_t \quad (\text{B.105})$$

$$\hat{r}_t = \xi_0^r + \xi_1^r \hat{k}_t + \xi_2^r \hat{z}_t \quad (\text{B.106})$$

$$\hat{i}_t = \xi_0^i + \xi_1^i \hat{k}_t + \xi_2^i \hat{z}_t \quad (\text{B.107})$$

$$\hat{y}_t = \xi_0^y + \xi_1^y \hat{k}_t + \xi_2^y \hat{z}_t \quad (\text{B.108})$$

$$Z_t^{LMP} = \Omega_t Q_{t-1}$$

En el modelo, se alternan los parámetros sobre los cuales aprender, entre: los asociados a todas las variables (sistema anterior), solo los asociados al capital y a los salarios, y solo los asociados al capital y al retorno de capital. Esto con el fin de analizar sensibilidad de resultados en un modelo de pequeña escala como el presente.

El anterior sistema de formación de creencias puede expresarse en forma matricial de la siguiente manera. Sea:

$$Z_t^{LMP} = \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{l}_t \\ \hat{w}_t \\ \hat{r}_t \\ \hat{i}_t \\ \hat{y}_t \end{bmatrix}; \Omega_t = \begin{bmatrix} \xi_0^c & \xi_1^c & \xi_2^c \\ \xi_0^l & \xi_1^l & \xi_2^l \\ \xi_0^w & \xi_1^w & \xi_2^w \\ \xi_0^r & \xi_1^r & \xi_2^r \\ \xi_0^i & \xi_1^i & \xi_2^i \\ \xi_0^y & \xi_1^y & \xi_2^y \end{bmatrix}; Q_{t-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix}$$

Como se observa, Z_t^{LMP} es un subconjunto de la matriz W_t y contiene los elementos del sistema de ecuaciones del pronosticador bajo la ley de movimiento percibida (LMP).

Por otra parte, se tiene a:

$$Z_t^{LMR} = T(\Omega_t^L)Q_{t-1}$$

Es la ley de movimiento real de la economía. Esta ley de movimiento real es el resultado del mapeo de expectativas que tienen los agentes, la cuál es retroalimentada por la estimación de los parámetros de la ley de movimiento percibida por los agentes en el periodo inmediatamente anterior. La representación matricial de la Ley de Movimiento Real (LMR) es la siguiente:

$$Z_t^{LMR} = \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{l}_t \\ \hat{w}_t \\ \hat{r}_t \\ \hat{i}_t \\ \hat{y}_t \end{bmatrix}; T(\Omega_t^L) = \begin{bmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \tau_{1,3} \\ \tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \tau_{2,3} \\ \tau_{3,1} & \tau_{3,2} & \tau_{3,3} \\ \tau_{4,1} & \tau_{4,2} & \tau_{4,3} \\ \tau_{5,1} & \tau_{5,2} & \tau_{5,3} \end{bmatrix}; Q_{t-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix}$$

Ahora, se sabe que la solución del modelo bajo expectativas racionales implica que los coeficientes ξ de cada modelo econométrico sean invariantes en el tiempo, es decir, $\xi_{1,t-1} = \xi_{1,t} = \xi_{1,t+1}$. Bajo aprendizaje, es necesario suponer que los agentes aprenden a partir de modelos econométricos cuando el término de intercepto y el coeficiente de respuesta ante las variables regresoras, son variantes en el tiempo, $\xi_{0,t} \neq \xi_{0,t-1}$, $\xi_{1,t} \neq \xi_{1,t-1}$ y $\xi_{2,t} \neq \xi_{2,t-1}$.

Para llevar a cabo el proceso de aprendizaje, los agentes estiman la ecuación (3.172), actualizando los coeficientes variantes en el tiempo a medida que obtienen

nueva información. Los únicos coeficientes que no se actualizan son los que acompañan al choque tecnológica. Para llevar a cabo la estimación, se aplica la herramienta de Mínimos Cuadrados Recursivos que se explica a continuación.

A partir de la ecuación de simulación del ciclo de las variables de variable de estado mínima en el período t :

$$W_t = T_0(\Omega_{0,t}^L) + T_1(\Omega_{1,t}^L)K_{t-1} + T_2(\Omega_{2,t}^L)\varepsilon_t$$

Se define al algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivos de la forma:

$$R_t = R_{t-1} + g(Q_{t-1}Q'_{t-1} - R_{t-1}) \quad (\text{B.109})$$

$$\Omega_t^L = \Omega_{t-1}^L + g(R_t^{-1}Q_{t-1})(Z_t^{LMR} - \Omega_{t-1}^L'Q_{t-1}) \quad (\text{B.110})$$

Donde:

- Ω_t^L es el vector j -dimensional que contiene los coeficientes a estimar en el periodo t , $\Omega_t^j = [\xi_0^j, \xi_1^j, \xi_2^j]$, con $j = [c; l; w; r; y; k]$. En el período inicial, antes del choque, es igual al valor de expectativas racionales Ω_0^{RE} .
- R_t es la matriz de precisión que incluye las varianzas y las covarianzas.
- g es el parámetro de ganancia del algoritmo. Esta ganancia regula el peso que atribuyen los agentes pronosticadores al error de pronósticos de las variables, el cual se activa con los cambios generados por el choque de tecnología. Para comprender un poco mejor su función, suponga que $g \rightarrow 0$. En tal caso, los agentes le dan un nulo peso a los errores de pronóstico, y están estimando que estos son totalmente transitorios y no implican un cambio en el valor real del parámetro. En contraste, entre más grande sea el valor de g , los agentes toman estos cambios como permanentes y le dan un gran peso a las variables.

En el presente estudio se emplean dos tipos de ponderación de los errores de pronóstico: (i) ganancia constante, y (ii) ganancia decreciente en función del tiempo, es decir, con el tiempo de denominador.

- Q_{t-1} es el vector de variables regresoras del modelo econométrico de los agentes tal que $Q'_{t-1} = [1, k_t, z_t]$.
- $Z_t^{LMR} = [\hat{c}_t; \hat{l}_t; \hat{w}_t; \hat{r}_t; \hat{y}_t; \hat{k}_t]$ es el vector de variables dependientes.

Estabilidad del proceso de aprendizaje. El sistema de aprendizaje es estable si los coeficientes estimados por los agentes ($\hat{\Omega}_t^L$) convergen monótonicamente hacia el valor de los coeficientes de expectativas racionales (Ω_1^{RE}) con el paso de los períodos. Es decir, que hay un aprendizaje. Matemáticamente, esto se verifica mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{\hat{\Omega}}_t^L = R(M_q(\hat{\Omega}^L))^{-1}[T_1(\hat{\Omega}_t^L)' - \Omega_t^{RE}]$$

$$\dot{R} = M_q(\hat{\Omega}^L) - R$$

La estabilidad se obtiene si la parte real de los valores propios del sistema es negativa. Esto está comprobado, ya que las estimaciones de los agentes convergen monótonicamente a sus valores de expectativas racionales. Es decir, asintóticamente, R converge a $M_q(\hat{\Omega}^L)$.

B.8.3 Ejemplo ilustrativo del proceso de actualización de expectativas

La secuencia de actualización de los pronósticos o creencias es la siguiente. En el periodo t , los agentes forman creencias con base en los parámetros estimados con la información disponible en $t-1$. Operativamente en el modelo, la primera estimación de los coeficientes es el valor de expectativas racionales. Ésta estimación se aleja luego del choque de tecnología de los agentes, con base en la regla de pronóstico de los MCR. Posteriormente, generan su aprendizaje hasta que convergen al verdadero valor de los parámetros.

Buscando dar más claridad a lo anterior, como ejemplo se mostrará la estimación de la ecuación de la variable consumo de la Ley de Movimiento Percibida de los agentes de la forma:

$$\hat{c}_t = \xi_0^c + \xi_1^c \hat{k}_t + \xi_2^c \hat{z}_t$$

La estimación de la anterior ecuación se realiza utilizando el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivos, con ganancia constante en este ejemplo, y g tiene un valor de 0,002.

El valor inicial que toman la variable dependiente y las variables independientes, así como el valor de los coeficientes provienen de la solución de expectativas racionales. Es decir, los valores que tomarán las matrices Ω_{t-1} , Z_t^{LMR} y Q_{t-1} son obtenidos de la solución de expectativas racionales en la primera simulación del algoritmo. A partir de la segunda simulación, dichos valores se alejan a raíz de la simulación y el error de pronóstico que genera una diferencia entre la ley de movimiento percibida por los agentes y la ley de movimiento real. De manera que es posible definir las anteriores matrices así:

$$\Omega_{t-1}^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix}$$

Donde el superíndice c hace referencia a los coeficientes asociados a la ecuación (3.172). Recuérdese que la matriz Ω_t es j -dimensional y varía según la ecuación a estimar.

La matriz de precisión inicial será igual a:

$$R_{t-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Por último, la matriz de variables independientes es:

$$Q_{t-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \end{bmatrix}$$

La anterior matriz hace referencia a las variables independientes de la ecuación (3.172). Además, los valores de la variable k_t son previamente estimados mediante la solución de expectativas racionales.

Posteriormente, se procede a estimar la matriz de precisión inicial R_t utilizando la ecuación (3.188) de la forma:

$$R_t = R_{t-1} + g(Q_{t-1}Q'_{t-1} - R_{t-1})$$

Ampliando la ecuación anterior, se tiene que

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ k_t \end{bmatrix} [1; k_t] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} 1 & k_t \\ k_t & k_t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} 0 & k_t \\ k_t & k_t^2 - \sigma_k^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.002k_t \\ 0.002k_t & 0.002(k_t^2 - \sigma_k^2) \end{bmatrix}$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0.002k_t \\ 0.002k_t & 0.002(k_t^2 - \sigma_k^2) + \sigma_k^2 \end{bmatrix}$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0.002k_t \\ 0.002k_t & 0.002k_t^2 + 0.998\sigma_k^2 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, se supone que R_t es invertible y por tanto es posible continuar con el algoritmo de aprendizaje.

Luego, se procede a estimar la matriz de los coeficientes utilizando la ecuación (3.189) de la forma:

$$\Omega_t = \Omega_{t-1} + g(R_t^{-1}Q_{t-1})(Z_t^{LMR} - \Omega'_{t-1}Q_{t-1})$$

Ampliando la anterior ecuación, se tiene que:

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.002k_t \\ 0.002k_t & 0.002k_t^2 + 0.998\sigma_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \end{bmatrix} \right) \left([c_t] - \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \end{bmatrix} \right)$$

Donde la matriz Z_t^{LMR} contiene el valor estimado para la variable de este ejemplo, es decir, la variable consumo tal que $Z_t^{LMR} = [c_t]$.

Continuando

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.002k_t \\ 0.002k_t & 0.002k_t^2 + 0.998\sigma_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \end{bmatrix} \right) \left([c_t] - \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix} k_t \right)$$

Dado que es necesario conocer la inversa de la matriz de precisión R_t , se define a R_t^{-1} como

$$R_t^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

Utilizando la definición anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \Omega_t^c &= \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \end{bmatrix} \right) \left([c_t] - \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix} k_t \right) \\ \Omega_t^c &= \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} R_{11} + R_{12}k_t \\ R_{21} + R_{22}k_t \end{bmatrix} \right) \left([c_t] - \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix} k_t \right) \\ \Omega_t^c &= \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} (R_{11} + R_{12}k_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE}k_t) \\ (R_{21} + R_{22}k_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE}k_t) \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.002(R_{11} + R_{12}k_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE}k_t) \\ 0.002(R_{21} + R_{22}k_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE}k_t) \end{bmatrix}$$

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} + 0.002(R_{11} + R_{12}k_t + R_{13}z_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE}k_t) \\ \xi_1^{c,RE} + 0.002(R_{21} + R_{22}k_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE}k_t) \end{bmatrix}$$

La matriz Ω_t^c estimada comienza con la solución de expectativas racionales, pero se aleja gradualmente gracias al parámetro de ganancia y al error de pronóstico de la ecuación (3.172). Nótese que el proceso anterior debe hacerse para las demás variables dentro del sistema de creencias de los agentes del modelo. Es decir, dado que el vector Ω_t^j es j -dimensional, donde

$$j = [c; l; w; r; y; k]$$

Se repite el proceso para las demás variables dentro de j .

Los agentes emplean el anterior algoritmo para estimar los coeficientes variantes asociados a la matriz Ω_t ; los cuales alimentan la verdadera ley de movimiento de la economía a través del mapeo de expectativas, es decir, alimentan a $W_t = T_0(\Omega_{0,t}^L) + T_1(\Omega_{1,t}^L)K_{t-1} + T_2(\Omega_{2,t}^L)\varepsilon_t$.

Otros parámetros empleados

Relación de parámetros	Valor de EE.UU.
$\psi = \left(\frac{\bar{c}}{\bar{y}}\right)^{-1} (1 - \alpha)$	0,8855
$\tilde{\beta} = \beta \bar{y}^{1-\sigma}$	0,99
$\tilde{\delta} = 1 - \frac{(1 - \delta)}{\gamma}$	0,0301
$\tilde{R} = \left(\beta^{-1} - \frac{1 - \delta}{\gamma^\sigma}\right)$	0,0403
$\chi = \frac{\Psi(1 - \sigma)}{\sigma \epsilon_H + \Psi(1 - \sigma)}$	0
$\epsilon_c = \frac{\bar{c}}{\bar{k}} + \left[\epsilon_H - \Psi \frac{1 - \sigma}{\sigma}\right]^{-1} \tilde{R} \frac{1 - \alpha}{\alpha}$	1,854426
$\epsilon_w = \left(1 + \left[\epsilon_H - \Psi \frac{1 - \sigma}{\sigma}\right]^{-1}\right) \tilde{R} \frac{1 - \alpha}{\alpha}$	1,954325
$\frac{\bar{c}}{\bar{y}} = \frac{\bar{c}}{\bar{k}} / \frac{\bar{y}}{\bar{k}}$	0,7453
$\frac{\bar{c}}{\bar{k}} = \frac{\bar{y}}{\bar{k}} - \frac{\bar{i}}{\bar{k}}$	0,0882
$\frac{\bar{y}}{\bar{k}} = \frac{\delta \theta}{\alpha \gamma}$	0,1184
$\frac{\bar{i}}{\bar{k}} = \tilde{\delta}$	0,025

Calibración con respecto a la desviación estándar del componente cíclico del producto de los EE.UU. 1959-2019, con ganancia decreciente

Variable	Expectativas racionales	Fuente del aprendizaje de expectativas		
		Todos los mercados	Mercado financiero	Mercado laboral
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	1.9241	1.6951	1.7054	1.8772
σ_{producto}	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740
$\sigma_{\text{inversión}}$	3.9701	4.4058	4.3847	4.0604
$\sigma_{\text{retorno de capital}}$	0.8585	1.2263	1.2348	1.3677
σ_{consumo}	0.6519	0.5165	0.5225	0.6188
σ_{trabajo}	1.3891	1.2263	1.2348	1.3677
σ_{salario}	0.6522	0.5168	0.5228	0.6191
γ_{producto}	0.6918	0.7707	0.7717	0.7890
$\gamma_{\text{inversión}}$	0.6830	0.7877	0.7892	0.8142
$\gamma_{\text{retorno de capital}}$	0.6816	0.7312	0.7319	0.7426
γ_{consumo}	0.7339	0.7289	0.7278	0.7138
γ_{trabajo}	0.6931	0.7312	0.7312	0.7426
γ_{salario}	0.7339	0.7290	0.7290	0.7139

Variables empleadas y fuentes

Variable	Nombre preciso	Fuente
PIB nominal	Gross Domestic Product (SAAR, Bil.\$)	https://fred.stlouisfed.org/series/GDP
PIB real	Real Gross Domestic Product (SAAR, Bil.Chn.2012\$)	https://fred.stlouisfed.org/series/GDPC1
Deflactor	PIB nominal / PIB real	Cálculos propios
Consumo de bienes no durables	Personal Consumption Expenditures: Nondurable Goods (SAAR, Bil.\$)	https://fred.stlouisfed.org/series/PCND
Consumo de servicios	Personal Consumption Expenditures: Services (SAAR, Bil.\$)	https://fred.stlouisfed.org/series/PCESV
Consumo nominal privado	Consumo de bienes no durables + Consumo de servicios	Cálculos propios
Inversión privada en estructuras	Private Nonresidential Investment: Structures (SAAR, Bil.\$)	https://fred.stlouisfed.org/series/PRFI
Inversión privada real residencial	Real Private Residential Investment (SAAR, Bil.Chn.2012\$)	https://fred.stlouisfed.org/series/PRFIC1
Consumo real de bienes durables	Real Personal Consumption Expenditures: Durable Goods (SAAR, Bil.Chn.2012\$)	https://fred.stlouisfed.org/series/PCEDGC96
Inversión nominal	Inversión privada en estructuras + Inversión privada en estructuras + Consumo real de bienes durables	Cálculos propios
Horas no agrícolas	Nonfarm Business Sector: Output (SA, 2012=100)	https://fred.stlouisfed.org/series/OUTNFB
Salario nominal por hora	Nonfarm Business Sector: Compensation Per Hour (SA, 2012=100)	https://fred.stlouisfed.org/series/COMPNFB
Población mayor a 16 años	Civilian Noninstitutional Population: 16 Years and Over (NSA, Thous)	https://fred.stlouisfed.org/series/CNP16OV
Capacidad instalada	Capacity Utilization: Manufacturing [SIC] (SA, Percent of Capacity)	https://fred.stlouisfed.org/series/CUMFNS
Tasa de interés real ex post	3-Month Treasury Bill: Secondary Market Rate	https://fred.stlouisfed.org/series/TB3MS
Consumo real per cápita	Consumo nominal privado / Población mayor a 16 años	Cálculos propios
Inversión real per cápita	Inversión nominal / Población mayor a 16 años	Cálculos propios
PIB real per cápita	PIB real / Población mayor a 16 años	Cálculos propios
Horas per cápita	Horas no agrícolas / Población mayor a 16 años	Cálculos propios
Productividad	PIB real / Horas no agrícolas	Cálculos propios
Salario real	Salario nominal por hora / Deflactor	Cálculos propios

Appendix C

Capítulo 3

Estadísticas de la calibración con respecto a la desviación estándar del producto y posterior simulación, con ganancia decreciente

Variable	Fricción en el mercado de inversión		Valor observado	Fricción en el mercado de bienes	
	Expectativas racionales	Aprendizaje de expectativas		Expectativas racionales	Aprendizaje de expectativas
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	0.3174	0.2283	-	0.2889	0.2709
σ_{producto}	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740	1.4740
$\sigma_{\text{inversión}}$	1.1010	1.4728	4.7173	1.2666	2.4654
$\sigma_{\text{retorno de capital}}$	0.0352	0.0360	1.1532	0.0320	0.0307
σ_{consumo}	0.4540	0.3775	0.8712	0.4126	0.8368
σ_{trabajo}	0.2692	0.3577	1.4377	0.2815	0.2873
σ_{salario}	1.1442	0.9512	0.7592	1.0398	2.1089

Estadísticas de la calibración con respecto a la desviación estándar del producto y posterior simulación, con ganancia decreciente

Variable	Fricción en el mercado de inversión		Fricción en el mercado de bienes	
	Expectativas racionales	Aprendizaje de expectativas	Expectativas racionales	Aprendizaje de expectativas
$\sigma_{\text{choque de tecnología requerido}}$	0.3174	0.2283	0.2889	0.2709
γ_{producto}	0.9543	0.9777	0.9503	0.9327
$\gamma_{\text{inversión}}$	0.9470	0.9753	0.6346	0.2488
$\gamma_{\text{retorno de capital}}$	0.9467	0.9738	0.9451	0.8381
γ_{consumo}	0.8500	0.6458	0.9702	0.9706
γ_{trabajo}	0.9661	0.9239	0.9365	0.8362
γ_{salario}	0.8500	0.6458	0.9702	0.9706

Valores de estado estacionario del modelo con fricción en el mercado de inversión

Variable	Fórmula	Valor
Trabajo	$\bar{l} = 0.3$	0.3000
Producción	$\bar{y} = e^{\bar{\theta}} \bar{k}^{\alpha} \bar{l}^{1-\alpha}$	1.1993
Límite de bancarrota	$\bar{\omega} = 0.39156$	0.3931
Función de distribución	$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\bar{\omega}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\log(\omega) + \frac{1}{2}\sigma^2))^2}{\sigma^2}} dx$	0.0096
Participación del prestamista	$g(\bar{\omega}) = \int_0^{\bar{\omega}} \omega \Phi(d\omega) - \Phi(\bar{\omega})\mu + [1 - \Phi(\bar{\omega})]\bar{\omega}$	0.3912
Participación del emprendedor	$f(\bar{\omega}) = 1 - \Phi(\bar{\omega})\mu - g(\bar{\omega})$	0.6072
Costo de la inversión	$q = \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega})\mu) + \frac{f(\bar{\omega})\mu\Phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega})}}$	1.0181
Rendimientos de capital	$\bar{r} = \frac{(1 - \beta(1 - \delta))}{\beta}$	0.0306
Inversión	$\bar{i} = \delta\bar{k}$	0.2821
Capital de los hogares	$\bar{k} = \bar{l} \left(\frac{\bar{r}\bar{p}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$	14.0876
Patrimonio del empresario	$\bar{n} = (1 - \bar{p}g(\bar{\omega})) \frac{\bar{y}}{\bar{p}}$	0.1697
Capital del empresario	$\bar{z} = \frac{\bar{n}}{(1 - \delta) + \bar{r}}$	0.1650
Consumo del empresario	$\bar{e} = \bar{y}f(\bar{\omega}) - \bar{z}$	0.0064
Productividad	$\bar{\theta} = 1$	1.0000
Consumo de los hogares	$\bar{c} = \bar{y}(1 - \Phi(\bar{\omega})) - \bar{e} - \bar{i}$	0.9107
Salarios	$\bar{w} = (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{l}\bar{p}}$	2.5585

Valores de estado estacionario del modelo con fricción en el mercado de bien final

Variable	Formula	Valor
Trabajo	$\bar{l} = 0.3$	0.3000
Producción	$\bar{y} = e^{\bar{\theta}} \bar{k}^{\alpha} \bar{l}^{1-\alpha}$	1.1993
Límite de bancarrota	$\bar{\omega} = 0.39156$	0.3931
Función de distribución	$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\bar{\omega}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\log(\omega) + \frac{1}{2}\sigma^2)^2}{\sigma^2}} dx$	0.0096
Participación del prestamista	$g(\bar{\omega}) = \int_0^{\bar{\omega}} \omega \Phi(d\omega) - \Phi(\bar{\omega})\mu + [1 - \Phi(\bar{\omega})]\bar{\omega}$	0.3912
Participación del emprendedor	$f(\bar{\omega}) = 1 - \Phi(\bar{\omega})\mu - g(\bar{\omega})$	0.6072
Nivel de precios	$p = \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega})\mu) + \frac{f(\bar{\omega})\mu\Phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega})}}$	1.0181
Rendimientos de capital	$\bar{r} = \frac{(1 - \beta(1 - \delta))}{\beta}$	0.0301
Inversión	$\bar{i} = \delta \bar{k}$	0.2817
Capital de los hogares	$\bar{k} = \bar{l} \left(\frac{\bar{r} p}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$	14.0876
Patrimonio del empresario	$\bar{n} = (1 - p g(\bar{\omega})) \frac{\bar{y}}{p}$	0.7948
Capital del empresario	$\bar{z} = \frac{\bar{n}}{(1 - \delta) + \bar{r}}$	0.7015
Consumo del empresario	$\bar{e} = \bar{y} f(\bar{\omega}) - \bar{z}$	0.0267
Productividad	$\bar{\theta} = 1$	1.0000
Consumo de los hogares	$\bar{c} = \bar{y}(1 - \Phi(\bar{\omega})) - \bar{e} - \bar{i}$	0.8890
Salarios	$\bar{w} = (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{l} p}$	2.5129

3.1 Desarrollo matemático y metodología del modelo con fricción en el mercado de inversión

Contenido

- C.2.1 Solución del modelo en niveles
- C.2.2 Linealización del sistema de ecuaciones
- C.2.3 Introducción de las expectativas de aprendizaje por medio de la ecuación de Euler de los hogares
- C.2.4 Formación de creencias de los agentes en el contexto del aprendizaje dentro del modelo
- C.2.5 Función de distribución normal

3.1.1 Solución del modelo en niveles

En esta economía hay hogares, empresarios y fondos mutuos. A su vez, los empresarios son propietarios de las firmas y son neutrales al riesgo. Los empresarios pueden tomar recursos adicionales a los propios (patrimonio, n_t) a través de fondos mutuos que obtienen recursos provenientes de los hogares. Un número infinito de empresarios paga una prima de riesgo. Además, se diseña un contrato financiero para los contratos de préstamo.

Hogares

El problema de los hogares es maximizar su nivel de consumo, trabajo y ahorro, tal que:

$$\max_{(c_t, l_t, k_{t+1})_0^\infty} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} u(c_t, l_t)$$

sujeto a: $c_t + q_t(i_t - n_t) = w_t l_t + r_t k_t + (R_t - 1)b_t$

Donde, en su orden de escritura en la ecuación, c_t es el consumo de los hogares; l_t , el trabajo de los hogares; i_t , la inversión; n_t , el patrimonio neto inicial de los

empresarios; R_t , la tasa bruta cobrada por los créditos de los hogares a las empresas, los cuales son intermediados a través de un fondo mutuo; y b_t , el monto de créditos de los hogares a las empresas.

Cada una de las firmas del continuo de firmas tiene un riesgo idiosincrático y los créditos son intermediados por el fondo mutuo, de tal modelo que los hogares no enfrentan el riesgo de los créditos. Asimismo, los créditos son hechos de forma intra-período, por lo cual, se sigue un equilibrio planteado por Carlstrom and Fuerst (1998), en el cual $R_t = 1$.

De otro lado, $q_t(i_t - n_t)$ denota el nivel de ahorro de los hogares valuado al costo de invertir y $q_t(i_t - n_t) = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$, donde k_{t+1} y k_t son el capital de los hogares en el período $t+1$ y t , respectivamente; y δ es la tasa de depreciación del capital.

Por tanto, la restricción se puede escribir como: $c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = w_t l_t + r_t k_t$.

Al reescribir el problema anterior, se tiene que:

$$\max_{(c_t, l_t, k_{t+1})_0^\infty} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} u(c_t, l_t) \quad (3.1)$$

$$\text{sujeto a: } c_t + q_t k_{t+1} = w_t l_t + r_t k_t + (1 - \delta)q_t k_t \quad (3.2)$$

Una vez definido el problema de los hogares, se puede solucionar mediante el lagrangiano de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u(c_t, l_t) - \lambda_t [c_t + q_t(k_{t+1} - (1 - \delta)k_t) - w_t l_t - r_t k_t]) \quad (3.3)$$

A partir del lagrangiano, se pueden hallar las condiciones de primer orden, y se consigue que:

$$[c_t] : u'_c(c_t, l_t) - \lambda_t = 0 \quad (3.4)$$

$$[l_t] : u'_l(c_t, l_t) + \lambda_t w_t = 0 \quad (3.5)$$

$$[k_{t+1}] : -\lambda_t q_t + \beta \lambda_{t+1} (q_{t+1} (1 - \delta) + r_{t+1}) = 0 \quad (3.6)$$

$$[\lambda_t] : c_t + q_t (k_{t+1} - (1 - \delta) k_t) - w_t l_t - r_t k_t = 0 \quad (3.7)$$

Reemplazando la ecuación (3.4) en la ecuación (3.6) y considerando que $\lambda_{t+1} = u'_c(c_{t+1}, l_{t+1})$, se halla la siguiente ecuación intertemporal de Euler que relaciona el consumo presente con el consumo futuro:

$$q_t u'_c(c_t, l_t) = E_t \beta u'_c(c_{t+1}, l_{t+1}) [q_{t+1} (1 - \delta) + r_{t+1}] \quad (3.8)$$

Luego, al combinar las ecuaciones (3.4) y (3.5), se halla la ecuación intratemporal que marca la decisión entre consumo y trabajo ¹.

$$w_t = - \frac{u'_l(c_t, l_t)}{u'_c(c_t, l_t)} \quad (3.9)$$

Firmas

Las firmas tienen el problema de maximizar su beneficio dado un nivel de producción con una tecnología Cobb-Douglas. Por consiguiente,

$$\max_{(k_t, l_t)} y_t - r_t k_t - w_t l_t \quad (3.10)$$

$$\text{sujeto a: } y_t = F(k_t, l_t) \quad (3.11)$$

Donde la función de producción $F(k_t, l_t)$ es de la forma:

$$F(k_t, l_t) = \theta_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha} \quad (3.12)$$

$$\theta_t = \theta_{t-1}^\rho + \epsilon_t \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) define el choque de productividad que recibirá la firma en el periodo t . Donde $\epsilon_t \sim N(0, 1)$.

El siguiente paso es reemplazar la restricción en la función objetivo en (3.10), de la siguiente forma:

¹La función de utilidad específica empleada es $\ln(c_t) + v(1 - l_t)$.

$$\max_{(k_t, l_t)} F(k_t, l_t) - r_t k_t - w_t l_t \quad (3.14)$$

Al derivar con respecto al capital k_t , se tiene:

$$[k_t] : F'_k(k_t, l_t) - r_t = 0$$

Al derivar con respecto al trabajo l_t , se tiene:

$$[l_t] : F'_l(k_t, l_t) - w_t = 0$$

En consecuencia, el resultado del problema de las firmas es el siguiente:

$$r_t = F'_k(k_t, l_t) = \alpha \frac{y_t}{k_t} \quad (3.15)$$

$$w_t = F'_l(k_t, l_t) = (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t} \quad (3.16)$$

Empresarios

Los empresarios, que son neutrales al riesgo, financian su proyecto de inversión en el periodo t con recursos propios y recursos que provienen de los hogares a través del fondo mutuo. Estos recursos son invertidos en la producción de bienes de capital, puesto que la fricción se encuentra en el mercado de inversión.

Cada empresario produce sus bienes, observa un choque idiosincrático de tecnología (ω_t) y, dependiendo del resultado del choque, toma su decisión de consumo. Cuando $\omega_t < \bar{\omega}_t$, el empresario no puede pagar y se declara en bancarrota, por lo cual no consume. En tal caso, su proyecto de inversión es monitoreado y adquirido por el fondo mutuo. Cuando $\omega_t \geq \bar{\omega}_t$, el empresario paga el préstamo y obtiene ingresos para consumir. En síntesis:

$\omega_t \geq \bar{\omega}_t$ Empresario paga el préstamo y usa sus ingresos

$\omega_t < \bar{\omega}_t$ Empresario se declara en bancarrota y se queda sin ingreso

$\bar{\omega}_t$ es el valor crítico del éxito del proyecto y ω_t es una variable aleatoria con distribución log-normal e independiente e idénticamente distribuida en el tiempo. $\omega_t \sim \text{LogN}(-\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2)$, $\Phi(\omega_t)$ es la función de distribución acumulada, y $\phi(\omega_t)$ es la función de densidad de ω_t . Las siguientes son sus formas funcionales.

$$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\bar{\omega}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\log(\omega) + \frac{1}{2}\sigma^2)^2}{\sigma^2}} d\omega \quad (3.17)$$

$$\phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{\omega}\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\log(\bar{\omega}) - \bar{x})^2}{\sigma^2}} \quad (3.18)$$

La siguiente ecuación será de utilidad para la linealización.

$$\phi'(\bar{\omega}) = \frac{-\phi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}} \left[\frac{\log(\bar{\omega}) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma^2} + 1 \right] \quad (3.19)$$

El desarrollo matemático de las anteriores tres ecuaciones se encuentra en Función de distribución normal.

Recuérdese que el proyecto del empresario es financiado con recursos provenientes de los hogares por el intermedio del fondo mutuo. En tal sentido, los hogares tienen derecho a una participación del producto generado por el empresario. En consecuencia, se definen las siguientes ecuaciones:

$$g(\bar{\omega}_t) = \int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \Phi\mu + [1 - \Phi]\bar{\omega}_t \quad (3.20)$$

$$f(\bar{\omega}_t) = \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \omega \Phi(d\omega) - [1 - \Phi]\bar{\omega}_t \quad (3.21)$$

Donde $g(\bar{\omega}_t)$ es la participación de la producción que reciben los hogares a través del fondo mutuo, por prestar recursos. Por su parte, $f(\bar{\omega}_t)$ es la participación de la producción que recibe el empresario.

Al emplear la regla de Leibniz, se derivan las anteriores ecuaciones:

$$g'(\bar{\omega}_t) = \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \left[\int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \Phi\mu + [1 - \Phi]\bar{\omega}_t \right]$$

$$g'(\bar{\omega}_t) = \bar{\omega}\Phi'(\bar{\omega}) - \mu\Phi'(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega})) - \bar{\omega}\Phi'(\bar{\omega}) = -\mu\Phi'(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega}))$$

$$f'(\bar{\omega}_t) = \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \left[\int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \omega\Phi(d\omega) - [1 - \Phi]\bar{\omega}_t \right]$$

$$f'(\bar{\omega}_t) = -\bar{\omega}\Phi'(\bar{\omega}) - (1 - \Phi(\bar{\omega})) + \bar{\omega}\Phi'(\bar{\omega}) = -(1 - \Phi(\bar{\omega}))$$

Las anteriores dos funciones más el costo de monitoreo ($\Phi(\bar{\omega})\mu$) de la economía suman la unidad, es decir, todo el producto:

$$f(\bar{\omega}_t) + g(\bar{\omega}_t) + \Phi\mu = 1$$

$$f(\bar{\omega}_t) + g(\bar{\omega}_t) = [1 - \Phi(\bar{\omega})\mu] \quad (3.22)$$

La parte derecha de la ecuación (3.22) incluye el costo esperado de bancarrota ($\Phi(\bar{\omega})\mu$) a raíz de los costos de monitoreo (μ). Se asimila a la pérdida de eficiencia de la economía por la falta de información completa.

$$\pi_t = -\Phi\mu \quad (3.23)$$

Luego de definir el comportamiento del prestamista (hogares por medio del fondo mutuo) y del prestatario (empresario), se procede a solucionar el problema de este último, el cual consiste en maximizar su beneficio esperado.²

$$\begin{aligned} \text{Beneficio esperado} &= \underbrace{q_t i_t \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \omega \Phi(d\omega)}_{\text{Ingresos del empresario}} - \underbrace{\int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} (i_t - n_t) \Phi(d\omega)}_{\text{Pago del préstamo}} \\ &= q_t i_t \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \omega \Phi(\omega)(d\omega) - \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} q_t i_t \bar{\omega}_t \Phi(\omega)(d\omega) \\ &= q_t i_t \left(\int_{\bar{\omega}}^{\infty} \omega \Phi(d\omega) - \bar{\omega}_t \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \Phi(d\omega) \right) \\ &= q_t i_t \left(\int_{\bar{\omega}}^{\infty} \omega \Phi(d\omega) - \bar{\omega}_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)] \right) \\ &= q_t i_t f(\bar{\omega}_t) \end{aligned}$$

²Los empresarios declarados en bancarrota tienen un beneficio de cero ya que toda su producción se va al fondo de capital mutuo.

Dónde q_i es el precio o *markup* de una unidad de inversión. El beneficio esperado debe ser mayor a cero, de lo contrario el empresario decidirá no invertir y conservar su patrimonio inicial n_t . Por tanto,

$$\underbrace{q_t i_t f(\bar{\omega}_t)}_{\text{Beneficio esperado}} > \underbrace{n_t}_{\text{Patrimonio inicial}}$$

Condición de retorno nulo para el fondo mutuo

Antes de analizar la maximización de beneficios del empresario, se analiza la condición de retorno nulo del fondo mutuo, el cual no obtiene margen alguno por su intermediación, ya que se asume competencia perfecta. En tal sentido, los ingresos del fondo son iguales a sus costos. El fondo mutuo es financiado en su totalidad con recursos de los hogares. Asimismo, como se dijo anteriormente, el fondo mutuo realiza préstamos intra-período y no recibe ni paga intereses del préstamo.

Por tanto, si el fondo mutuo obtiene $i_t - n_t$ unidades de consumo por parte de los hogares, este debe devolver la misma cantidad de unidades a los prestamistas (hogares).

$$E(\text{Ingreso}) = E(\text{Costos})$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} (i_t - n_t) \Phi(d\omega)}_{\text{Ingreso (pago del préstamo)}} + \underbrace{q_t i_t \int_{\infty}^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \int_{\infty}^{\bar{\omega}} \mu \Phi(d\omega)}_{\text{Ingreso (bancarrota)}} \\ &= (i_t - n_t)[1 - \Phi(\bar{\omega}_t)] + q_t i_t \left(\int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \mu \Phi(\bar{\omega}_t) \right) \\ &= q_t i_t \bar{\omega}_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)] + q_t i_t \left(\int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \mu \Phi(\bar{\omega}_t) \right) \\ &= q_t i_t \left(\int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \mu \Phi(\bar{\omega}_t) + \bar{\omega}_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)] \right) \\ &= q_t i_t g(\bar{\omega}_t) \end{aligned}$$

En consecuencia, la condición de retorno nulo para el fondo mutuo, y a su vez para los hogares, es:

$$\underbrace{q_t i_t g(\bar{\omega}_t)}_{\text{Ingreso esperado del prestamista}} = \underbrace{i_t - n_t}_{\text{Costo esperado}}$$

Maximización de beneficio de los empresarios

Una vez conocidas las condiciones a las cuales se enfrenta el empresario, se define el problema de maximización del beneficio. El problema está sujeto a la condición de retorno nulo por parte del fondo mutuo (que presta los recursos de los hogares).

$$\max_{\bar{\omega}_t, i_t} q_t i_t f(\bar{\omega}_t) \quad (3.24)$$

$$\text{sujeto a: } q_t i_t g(\bar{\omega}_t) = i_t - n_t \quad (3.25)$$

El lagrangiano del problema anterior es

$$\mathcal{L} = q_t i_t f(\bar{\omega}_t) - \lambda_t (q_t i_t g(\bar{\omega}_t) - i_t + n_t) \quad (3.26)$$

Las condiciones de primer orden están dadas por

$$\bar{\omega}_t : q_t i_t f'(\bar{\omega}_t) - \lambda_t q_t i_t g'(\bar{\omega}_t) = 0 \quad (3.27)$$

$$i_t : q_t f(\bar{\omega}_t) - \lambda_t (q_t g(\bar{\omega}_t) - 1) = 0 \quad (3.28)$$

$$\lambda_t : q_t i_t g(\bar{\omega}_t) - i_t + n_t = 0 \quad (3.29)$$

Al combinar las ecuaciones (3.27) y (3.28), se tiene:

$$q_t f(\bar{\omega}_t) = \frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega}_t)} (q_t g(\bar{\omega}_t) - 1) \quad (3.30)$$

De la ecuación (3.29), se tiene:

$$i_t = \frac{n_t}{1 - q_t g(\bar{\omega}_t)} \quad (3.31)$$

De la ecuación (3.30), es posible encontrar la ecuación del contrato óptimo de la

siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 q_t f(\bar{\omega}_t) &= \frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})} q_t g(\bar{\omega}_t) - \frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})} \\
 q_t \left[f(\bar{\omega}_t) - \frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})} g(\bar{\omega}_t) \right] &= -\frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})} \\
 q_t &= \frac{-\frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})}}{\frac{g'(\bar{\omega}_t)f(\bar{\omega}_t) - f'(\bar{\omega}_t)g(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega}_t)}} \\
 q_t &= \frac{-f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega}_t)f(\bar{\omega}_t) - f'(\bar{\omega}_t)g(\bar{\omega}_t)} \\
 q_t &= \frac{1}{\frac{f'(\bar{\omega}_t)g(\bar{\omega}_t)}{f'(\bar{\omega}_t)} - \frac{g'(\bar{\omega}_t)f(\bar{\omega}_t)}{f'(\bar{\omega}_t)}} \\
 q_t &= \frac{1}{g(\bar{\omega}_t) - \frac{g'(\bar{\omega}_t)f(\bar{\omega}_t)}{f'(\bar{\omega}_t)}}
 \end{aligned}$$

Como se tiene que:

$$\begin{aligned}
 g'(\bar{\omega}_t) &= -\mu\phi(\bar{\omega}_t) + (1 - \Phi(\bar{\omega}_t)) \\
 f'(\bar{\omega}_t) &= -(1 - \Phi(\bar{\omega}_t))
 \end{aligned}$$

Se reemplazan estas dos ecuaciones y teniendo en cuenta que $g(\bar{\omega}_t) = (1 - \Phi(\bar{\omega}_t\mu)) - f(\bar{\omega}_t)$, se consigue que:

$$\begin{aligned}
 q_t &= \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t\mu)) - f(\bar{\omega}_t) + \frac{-\mu\phi(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega}_t))f(\bar{\omega}_t)}{f'(\bar{\omega}_t)}} \\
 q_t &= \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t\mu)) - f(\bar{\omega}_t) \left[1 + \frac{-\mu\phi(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega}_t))}{f'(\bar{\omega}_t)} \right]} \\
 q_t &= \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t\mu)) - f(\bar{\omega}_t) \left[\frac{f'(\bar{\omega}_t) + (1 - \Phi(\bar{\omega}_t)) - \mu\phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega}_t)} \right]}
 \end{aligned}$$

Como $f'(\bar{\omega}_t) = -(1 - \Phi(\bar{\omega}_t))$, se obtiene:

$$q_t = \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t\mu)) + \frac{f(\bar{\omega}_t)\mu\phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega}_t)}} \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) describe el contrato financiero óptimo y representa la evolución del *markup* de la economía.

Decisión de consumo de los empresarios

Una vez los empresarios reciben sus ingresos, toman su decisión de consumo teniendo en cuenta su restricción presupuestaria, tal que:

$$\max_{e_t, z_{t+1}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma\beta)^t e_t \quad (3.33)$$

$$\text{sujeto a: } e_t + q_t z_{t+1} = q_t i_t f(\bar{\omega}_t) \quad (3.34)$$

Donde e_t es el consumo de los empresarios y z_{t+1} es su capital en el período $t + 1$. Ambas variables representan la suma de los gastos. La restricción plantea que los gastos de los empresarios deben ser iguales a los ingresos dados por $q_t i_t f(\bar{\omega}_t)$. El parámetro γ denota el factor de descuento adicional para los empresarios, tal que $0 < \gamma < 1$.

El lagrangiano del anterior problema es:

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma\beta)^t (e_t - \lambda_t [e_t + q_t z_{t+1} - q_t i_t f(\bar{\omega}_t)]) \quad (3.35)$$

Reemplazando la ecuación (3.31) en la ecuación anterior, se consigue:

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma\beta)^t (e_t - \lambda_t [e_t + q_t z_{t+1} - q_t \left[\frac{n_t}{1 - q_t g(\bar{\omega}_t)} \right] f(\bar{\omega}_t)]) \quad (3.36)$$

El patrimonio neto de los empresarios al principio del período consiste en la valoración del mercado de su capital acumulado (z_t). De manera que es posible definirlo de la forma:

$$n_t = z_t [q_t (1 - \delta) + r_t] \quad (3.37)$$

Al reemplazar la ecuación (3.37) en el lagrangiano, se obtiene:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma\beta)^t (e_t - \lambda_t [e_t + q_t z_{t+1} - q_t \left[\frac{z_t [q_t (1 - \delta) + r_t]}{1 - q_t g(\bar{\omega}_t)} \right] f(\bar{\omega}_t)]) \quad (3.38)$$

En consecuencia, las condiciones de primer orden son:

$$e_t : 1 - \lambda_t = 0 \quad (3.39)$$

$$z_{t+1} : -q_t \lambda_t + E_t \gamma \beta \lambda_{t+1} \left(q_{t+1} \frac{1}{1 - q_{t+1} g(\bar{\omega}_t)} (r_{t+1} + q_{t+1} (1 - \delta)) f(\bar{\omega}) \right) = 0 \quad (3.40)$$

$$\lambda_t : e_t + q_t z_{t+1} - q_t i_t f(\bar{\omega}_t) = 0 \quad (3.41)$$

Al combinar (3.39) y (3.40), se tiene la ecuación de *Euler* para los empresarios.

$$q_t = \gamma \beta E_t \left([r_{t+1} + q_{t+1} (1 - \delta)] \frac{q_{t+1} f(\bar{\omega}_{t+1})}{1 - q_{t+1} g(\bar{\omega}_{t+1})} \right) \quad (3.42)$$

Ecuaciones de cierre del modelo

Para cerrar el modelo, se introducen las siguientes dos condiciones de que implican que el mercado se vacía.

$$c_t + e_t + i_t = y_t \quad (3.43)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)\mu] \quad (3.44)$$

La ecuación (3.43) cierra el mercado de bienes de consumo, y la ecuación (3.44) cierra el mercado de bienes de capital³.

3.1.2 Linealización del sistema de ecuaciones

La linealización del anterior sistema de ecuaciones se realiza mediante la aplicación de la siguiente fórmula: $f(x) \approx f'(\bar{x})\hat{x}_t$, donde $\hat{x} = x_t - \bar{x}$ es la desviación con respecto al estado estacionario.

Consumo

De la ecuación de Euler de los hogares (3.8)

$$q_t u'_c(c_t, l_t) = \beta E_t u'_c(c_{t+1}, l_{t+1}) [q_{t+1} (1 - \delta) + r_{t+1}]$$

³El stock de capital de los hogares está descrito por una ley de movimiento, mientras que el stock de capital de los empresarios no.

Dado que $u'_c(c_t, l_t) = \frac{1}{c_t}$, se tiene que:

$$\frac{q_t}{c_t} = E_t \left(\frac{\beta (q_{t+1}(1 - \delta) + r_{t+1})}{c_{t+1}} \right) \quad (3.45)$$

Al aplicar la formula de linealización, se obtiene:

$$\frac{1}{\bar{c}} \hat{q}_t - \frac{\bar{q}}{\bar{c}^2} \hat{c}_t = -\frac{\beta (\bar{q} (1 - \delta) + \bar{r})}{\bar{c}^2} E_t \hat{c}_{t+1} + \frac{\beta (1 - \delta)}{\bar{c}} E_t \hat{q}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{c}} E_t \hat{r}_{t+1} \quad (3.46)$$

Trabajo

De la ecuación de productividad marginal del trabajo (3.16)

$$w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t}$$

Aplicando la formula de linealización se obtiene:

$$\hat{w}_t = \frac{1 - \alpha}{\bar{l}} \hat{y}_t - \frac{(1 - \alpha) \bar{y}}{\bar{l}^2} \hat{l}_t \quad (3.47)$$

Despejando la variable trabajo (\hat{l}_t), se tiene:

$$\frac{(1 - \alpha) \bar{y}}{\bar{l}^2} \hat{l}_t = \frac{1 - \alpha}{\bar{l}} \hat{y}_t - \hat{w}_t \quad (3.48)$$

$$\hat{l}_t = \frac{\bar{l}}{\bar{y}} \hat{y}_t - \frac{\bar{l}^2}{(1 - \alpha) \bar{y}} \hat{w}_t \quad (3.49)$$

Salarios

De la ecuación intratemporal de los hogares (3.9):

$$w_t = -\frac{u'_l(c_t, l_t)}{u'_c(c_t, l_t)}$$

Dada la siguientes función de utilidad con preferencias separables:

$$u(c_t, l_t) = \ln(c_t) + \nu(1 - l_t)$$

Donde $u'_c(c_t, l_t) = \frac{1}{c_t}$ y $u'_l(c_t, l_t) = -\nu$. Reemplazando las derivadas, se tiene que

$$w_t = -\frac{-\nu}{\frac{1}{c_t}}$$

$$w_t = \nu c_t$$

Aplicando la formula de linealización:

$$\hat{w}_t = \nu \hat{c}_t \quad (3.50)$$

Rendimientos de capital

De la ecuación de productividad del capital (3.15):

$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$$

Al aplicar la fórmula de linealización se tiene:

$$\hat{r}_t = \frac{\alpha}{k} \hat{y}_t - \frac{\alpha \bar{y}}{k^2} \hat{k}_t \quad (3.51)$$

Inversión

$$i_t = \frac{n_t}{1 - q_t g(\bar{\omega}_t)}$$

Aplicando la formula de linealización, se consigue:

$$\hat{i}_t = \frac{1}{1 - \bar{q} g(\bar{\omega})} \hat{n}_t + \frac{g(\bar{\omega}) \bar{n}}{(1 - \bar{q} g(\bar{\omega}))^2} \hat{q}_t + \frac{\bar{q} \bar{n} g'(\bar{\omega})}{(1 - \bar{q} g(\bar{\omega}))^2} \hat{\omega}_t \quad (3.52)$$

Función de producción

Dada la ecuación (3.12)

$$y_t = \theta_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}$$

Aplicando la fórmula de linealización:

$$\hat{y}_t = \bar{k}^\alpha \bar{l}^{1-\alpha} \hat{\theta}_t + \alpha \bar{\theta} \bar{k}^{\alpha-1} \bar{l}^{1-\alpha} \hat{k}_t + (1 - \alpha) \bar{\theta} \bar{k}^\alpha \bar{l}^{1-\alpha-1} \hat{l}_t$$

Dado el estado estacionario de la ecuación (3.12):

$$\bar{y} = \bar{\theta} \bar{k}^\alpha \bar{l}^{1-\alpha}$$

$$\hat{y}_t = \frac{\bar{y}}{\bar{\theta}} \hat{\theta}_t + \alpha \frac{\bar{y}}{\bar{k}} \hat{k}_t + (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{l}} \hat{l}_t$$

Consumo de los emprendedores

De la ecuación de equilibrio macroeconómico (3.43)

$$c_t + e_t + i_t = y_t$$

Aplicando la formula de linealización

$$\hat{e}_t = \hat{y}_t - \hat{i}_t - \hat{c}_t \quad (3.53)$$

Patrimonio de los empresarios

Dada la ecuación (3.37)

$$n_t = z_t [q_t (1 - \delta) + r_t]$$

Aplicando la formula de linealización

$$\hat{n}_t = [\bar{q} (1 - \delta) + \bar{r}] \hat{z}_t + [(1 - \delta) \bar{z}] \hat{q}_t + \bar{z} \hat{r}_t \quad (3.54)$$

Ecuación de Euler de los empresarios

Dada la ecuación (3.42)

$$q_t = \gamma \beta E_t \left([r_{t+1} + q_{t+1} (1 - \delta)] \frac{q_{t+1} f(\bar{\omega}_{t+1})}{1 - q_{t+1} g(\bar{\omega}_{t+1})} \right)$$

Agrupando términos

$$q_t = E_t \left(\frac{\gamma \beta (1 - \delta) q_{t+1}^2 f(\bar{\omega}_{t+1})}{1 - q_{t+1} g(\bar{\omega}_{t+1})} \right) + E_t \left(\frac{\gamma \beta r_{t+1} q_{t+1} f(\bar{\omega}_{t+1})}{1 - q_{t+1} g(\bar{\omega}_{t+1})} \right)$$

Se aplica la fórmula de linealización a cada término, tal que:

$$\begin{aligned}\hat{q}_t = & \frac{2\beta\gamma(1-\delta)\bar{q}f(\bar{\omega})}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} E_t\hat{q}_{t+1} + \frac{\beta\gamma(1-\delta)\bar{q}^2f'(\bar{\omega})}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} E_t\hat{\omega}_{t+1} + \frac{\beta\gamma(1-\delta)\bar{q}^2f(\bar{\omega})g(\bar{\omega})}{(1-\bar{q}g(\bar{\omega}))^2} E_t\hat{q}_{t+1} + \frac{\beta\gamma(1-\delta)\bar{q}^2f(\bar{\omega})\bar{q}g'(\bar{\omega})}{(1-\bar{q}g(\bar{\omega}))^2} E_t\hat{\omega}_{t+1} \\ & + \frac{\beta\gamma\bar{q}f(\bar{\omega})}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} E_t\hat{r}_{t+1} + \frac{\beta\gamma\bar{r}f(\bar{\omega})}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} E_t\hat{q}_{t+1} + \frac{\beta\gamma\bar{r}\bar{q}f'(\bar{\omega})\hat{\omega}_{t+1}}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} + \frac{\beta\gamma\bar{r}\bar{q}f(\bar{\omega})g(\bar{\omega})}{(1-\bar{q}g(\bar{\omega}))^2} E_t\hat{q}_{t+1} + \frac{\beta\gamma\bar{r}\bar{q}f(\bar{\omega})\bar{q}g'(\bar{\omega})}{(1-\bar{q}g(\bar{\omega}))^2} E_t\hat{\omega}_{t+1}\end{aligned}$$

Al agrupar términos se tiene:

$$\begin{aligned}\hat{q}_t = & \frac{\beta\gamma f(\bar{\omega})}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \left(\bar{r} + 2\bar{q}(1-\delta) + \frac{\bar{q}^2g(\bar{\omega})(1-\delta)}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} + \frac{g(\bar{\omega})\bar{q}\bar{r}}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \right) E_t\hat{q}_{t+1} + \left(\frac{\bar{q}\beta\gamma f(\bar{\omega})}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \right) E_t\hat{r}_{t+1} \\ & + \frac{\bar{q}\beta\gamma}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \left(\bar{q}(1-\delta)f'(\bar{\omega}) + \frac{g'(\bar{\omega})f(\bar{\omega})(1-\delta)\bar{q}^2}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} + \bar{r}f'(\bar{\omega}) + \frac{g'(\bar{\omega})\bar{q}\bar{r}f(\bar{\omega})}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \right) E_t\hat{\omega}_{t+1}\end{aligned}\tag{3.55}$$

Pérdida de eficiencia

Dada la ecuación (3.23):

$$\pi_t = -\Phi(\omega_t)\mu$$

$$\hat{\pi}_t = -\phi(\bar{\omega})\mu\hat{\omega}_t\tag{3.56}$$

Bancarrota

Dada la ecuación de contrato óptimo (3.32)

$$q_t = \frac{1}{(1-\Phi(\bar{\omega}_t)\mu) + \frac{f(\bar{\omega}_t)\mu\phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega}_t)}}$$

La cual es posible escribirla tal que:

$$\frac{1}{q_t} = (1-\Phi(\bar{\omega}_t)\mu) + \frac{f(\bar{\omega}_t)\mu\phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega}_t)}$$

Dado que $f'(\omega) = -(1-\Phi(\omega_t))$, es posible reescribir la expresión anterior tal que:

$$\frac{1}{q_t} = (1-\Phi(\bar{\omega}_t)\mu) - \frac{f(\bar{\omega}_t)\mu\phi(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\omega_t))}$$

Al aplicar la fórmula de linealización se tiene que:

$$-\frac{1}{\bar{q}^2}\hat{q}_t = -\phi(\bar{\omega})\mu\hat{\omega}_t - \frac{f'(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))}\hat{\omega}_t - \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi'(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))}\hat{\omega}_t - \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})^2}{(1-\Phi(\bar{\omega}))^2}\hat{\omega}_t$$

Factorizando $\hat{\omega}_t$ en el lado derecho de la ecuación:

$$-\frac{1}{\bar{q}^2}\hat{q}_t = -\left[\phi(\bar{\omega})\mu + \frac{f'(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi'(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})^2}{(1-\Phi(\bar{\omega}))^2}\right]\hat{\omega}_t$$

Multiplicando a ambos lados por -1 y reordenando términos, se tiene que

$$\left[\phi(\bar{\omega})\mu + \frac{f'(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi'(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})^2}{(1-\Phi(\bar{\omega}))^2}\right]\hat{\omega}_t = \frac{1}{\bar{q}^2}\hat{q}_t$$

$$\hat{\omega}_t = \frac{1}{\left[\phi(\bar{\omega})\mu + \frac{f'(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi'(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})^2}{(1-\Phi(\bar{\omega}))^2}\right]\bar{q}^2}\hat{q}_t \quad (3.57)$$

Función de densidad de probabilidad log-normal

Dada la función de distribución acumulada de la variable aleatoria ω :

$$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\sigma_\omega\sqrt{2\pi}} \int_0^{\bar{\omega}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_\omega}{\sigma_\omega}\right)^2\right] d\omega$$

Es posible definir su derivada como la función de densidad de probabilidad de la forma:

$$\phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{1}{\sigma_\omega\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_\omega}{\sigma_\omega}\right)^2\right]$$

Para ver el desarrollo matemático de las dos funciones anteriores, ver el Función de distribución normal.

Capital del empresario

Dada la ecuación (3.34):

$$q_t z_{t+1} = q_t i_t f(\bar{\omega}_t) - e_t$$

$$z_{t+1} = i_t f(\bar{\omega}_t) - \frac{e_t}{q_t}$$

Al aplicar la fórmula de linealización

$$\hat{z}_{t+1} = [f'(\bar{\omega}) \bar{i}] \hat{\omega}_t + f(\bar{\omega}) \hat{i}_t - \frac{1}{\bar{q}} \hat{e}_t + \frac{\bar{e}}{\bar{q}^2} \hat{q}_t \quad (3.58)$$

Capital del hogar

Dada la ecuación (3.44) de la forma:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t[1 - \Phi(\bar{\omega}_t)\mu]$$

Aplicando la fórmula de linealización

$$\hat{k}_{t+1} = (1 - \delta) \hat{k}_t + (1 - \Phi(\bar{\omega}) \mu) \hat{i}_t - (\bar{i} \mu \phi(\bar{\omega})) \hat{\omega}_t \quad (3.59)$$

Choque de productividad

Dada la ecuación (3.13)

$$\theta_t = \theta_{t-1}^\rho + \epsilon_t$$

Aplicando la fórmula de linealización

$$\hat{\theta}_t = \rho \hat{\theta}_{t-1} + \epsilon_t \quad (3.60)$$

A continuación se presentan las ecuaciones de participación de los empresarios y de los hogares en la producción. Estas ecuaciones están determinadas de forma exógena al sistema de ecuaciones, y se definen de forma no linealizada, como se explica a continuación.

Participación del empresario

De la ecuación de participación total (3.22):

$$f(\bar{\omega}_t) + g(\bar{\omega}_t) = [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)\mu]$$

$$f(\bar{\omega}_t) = [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)\mu] - g(\bar{\omega}_t)$$

Se define la desviación del estado estacionario de la participación del empresario tal que

$$f(\hat{\omega}_t) \equiv -\Phi'(\bar{\omega})\mu\hat{\omega}_t - g'(\bar{\omega})\hat{\omega}_t$$

$$f(\hat{\omega}_t) = -\Phi'(\bar{\omega})\mu\hat{\omega}_t - g'(\bar{\omega})\hat{\omega}_t$$

Dado que $\Phi'(\bar{\omega}) = \phi(\bar{\omega})$, se tiene que

$$f(\hat{\omega}_t) = -(g'(\bar{\omega}) + \mu\phi(\bar{\omega}))\hat{\omega}_t$$

Si se reemplaza a $g'(\bar{\omega}_t) = -\mu\phi(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega}))$ dentro de la ecuación anterior, se tiene

$$f(\hat{\omega}_t) = -(-\mu\phi(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega})) + \mu\phi(\bar{\omega}))\hat{\omega}_t$$

$$f(\hat{\omega}_t) = -(1 - \Phi(\bar{\omega}))\hat{\omega}_t$$

Dado que $f'(\bar{\omega}_t) = -(1 - \Phi(\bar{\omega}))$, se tiene que

$$f(\hat{\omega}_t) = f'(\bar{\omega})\hat{\omega}_t \tag{3.61}$$

Participación del hogar

De la ecuación de participación del prestamista (3.20), se tiene:

$$g(\bar{\omega}_t) = \int_0^{\bar{\omega}_t} \omega\Phi(d\omega) - \Phi\mu + [1 - \Phi]\bar{\omega}_t$$

Cuya derivada es

$$g'(\bar{\omega}_t) = -\mu\phi(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega}))$$

Aplicando la fórmula de la linealización, es posible definir la forma linealizada $g(\hat{\omega}_t)$ tal que

$$g(\hat{\omega}_t) = g'(\bar{\omega})\hat{\omega}_t \tag{3.62}$$

Resumen de las ecuaciones linealizadas

Ecuación de Euler de hogares	$1 - \frac{\bar{c}}{\bar{e}} \hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{e}^2} \hat{c}_t = - \frac{\beta(\bar{q}(1-\delta) + \bar{r})}{\bar{e}^2} E_t \hat{c}_{t+1} + \frac{\beta(1-\delta)}{\bar{e}} E_t \hat{q}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{e}} E_t \hat{r}_{t+1}$
Ecuación de decisión de trabajo	$\hat{l}_t = \frac{\bar{l}}{\bar{y}} \hat{y}_t - \frac{\bar{l}^2}{(1-\alpha)\bar{y}} \hat{w}_t$
Salarios	$\hat{w}_t = \nu \hat{c}_t$
Rendimientos de capital	$\hat{r}_t = \frac{\alpha}{\bar{k}} \hat{y}_t - \frac{\alpha \bar{y}}{\bar{k}^2} \hat{k}_t$
Inversión	$\hat{i}_t = \frac{1}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \hat{n}_t + \frac{g(\bar{\omega})\bar{n}}{(1-\bar{q}g(\bar{\omega}))^2} \hat{q}_t + \frac{\bar{q}\bar{n}g'(\bar{\omega})}{(1-\bar{q}g(\bar{\omega}))^2} \hat{\omega}_t$
Función de producción	$\hat{y}_t = \frac{\bar{y}}{\bar{\theta}} \hat{\theta}_t + \frac{\alpha \bar{y}}{\bar{k}} \hat{k}_t + \frac{(1-\alpha)\bar{y}}{\bar{l}} \hat{l}_t$
Consumo de empresarios	$\hat{c}_t = \hat{y}_t - \hat{i}_t - \hat{c}_t$
Patrimonio de empresarios	$\hat{n}_t = [\bar{q}(1-\delta) + \bar{r}] \hat{z}_t + [(1-\delta)\bar{z}] \hat{q}_t + \bar{z} \hat{r}_t$
Ecuación de Euler de los empresarios	$q_t = \frac{\beta \gamma f(\bar{\omega})}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \left(\bar{r} + 2\bar{q}(1-\delta) + \frac{\bar{q}^2 g(\bar{\omega})(1-\delta)}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} + \frac{g(\bar{\omega})\bar{q}\bar{r}}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \right) E_t \hat{q}_{t+1} + \left(\frac{\bar{q}\beta \gamma f(\bar{\omega})}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \right) E_t \hat{r}_{t+1} \\ + \frac{\bar{q}\beta \gamma}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \left(\bar{q}(1-\delta) f'(\bar{\omega}) + \frac{g'(\bar{\omega})f(\bar{\omega})(1-\delta)\bar{q}^2}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} + \bar{r} f'(\bar{\omega}) + \frac{g'(\bar{\omega})\bar{q}\bar{r}f(\bar{\omega})}{1-\bar{q}g(\bar{\omega})} \right) E_t \hat{\omega}_{t+1}$
Participación de los empresarios	$f(\hat{\omega}_t) = f'(\bar{\omega}) \hat{\omega}_t$
Participación del prestamista	$g(\hat{\omega}_t) = g'(\bar{\omega}) \hat{\omega}_t$
Valor crítico de la bancarrota	$\hat{\omega}_t = \frac{1}{\left[\phi(\bar{\omega})\mu + \frac{f'(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi'(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})^2}{(1-\Phi(\bar{\omega}))^2} \right] q^2} \hat{q}_t$
Función de densidad de probabilidad log-normal	$\Phi(\hat{\omega}_t) = \phi(\bar{\omega}) \hat{\omega}_t$
Capital de los empresario	$\hat{z}_{t+1} = [f'(\bar{\omega})\bar{i}] \hat{\omega}_t + f(\bar{\omega}) \hat{i}_t - \frac{1}{\bar{q}} \hat{c}_t + \frac{\bar{e}}{\bar{q}^2} \hat{q}_t$
Capital de los hogares	$\hat{k}_{t+1} = (1-\delta) \hat{k}_t + (1-\Phi(\bar{\omega})\mu) \hat{i}_t - (\bar{i}\mu\phi(\bar{\omega})) \hat{\omega}_t$
Choque de productividad	$\hat{\theta}_{t+1} = \rho \hat{\theta}_t + \epsilon_t$

3.1.3 Introducción de las expectativas de aprendizaje por medio de la ecuación de Euler de los hogares

Hasta la anterior sesión, el modelo es similar al de uno bajo el supuesto de expectativas racionales. El siguiente paso es modificar la ecuación intertemporal de los hogares para implementar el aprendizaje de expectativas. Bajo la nueva ecuación de Euler, se fundamenta el comportamiento de la ley de movimiento real de los parámetros del modelo, los cuales son desconocidos, a diferencia de lo que se supone en el mundo de expectativas racionales.

En consecuencia, se encontrará la regla de decisión óptima de consumo para los hogares (c_t). Se asume que los agentes no tienen conocimiento completo de los parámetros del modelo, y forman creencias a través de sendas futuras de las variables relevantes en su decisión óptima de consumo. Así, el operador \hat{E}_t denota el valor esperado de expectativas no racionales.

Para la construcción de la senda óptima de consumo de los hogares se siguen los siguientes pasos:

1. Linealizar la restricción presupuestaria de hogares, con base en la aplicación de la siguiente fórmula de linealización $f(x) \approx f'(\bar{x})\hat{x}_t$, donde $\hat{x} = x_t - \bar{x}$ es la desviación con respecto al estado estacionario.
2. Iterar hacia el futuro la restricción presupuestaria.
3. Iterar la ecuación de Euler de los hogares hacia atrás desde un período T hasta t.
4. Combinar las ecuaciones iteradas hacia el futuro y pasado.
5. Despejar la variable clave para la ecuación de Euler, en este caso es el consumo.

Linealizar la restricción presupuestaria de hogares

Dada la siguiente restricción presupuestaria:

$$c_t + q_t E_t k_{t+1} = w_t l_t + r_t k_t + (1 - \delta) q_t k_t$$

Su forma linealizada es:

$$\hat{c}_t + \bar{q}E_t\hat{k}_{t+1} + \bar{k}\hat{q}_t = \bar{w}\hat{l}_t + \bar{l}\hat{w}_t + \bar{r}\hat{k}_t + \bar{k}\hat{r}_t + \bar{q}(1 - \delta)\hat{k}_t + (1 - \delta)\bar{k}\hat{q}_t$$

$$\hat{c}_t + \bar{q}E_t\hat{k}_{t+1} = \bar{w}\hat{l}_t + \bar{l}\hat{w}_t + \bar{r}\hat{k}_t + \bar{k}\hat{r}_t + \bar{q}(1 - \delta)\hat{k}_t + (1 - \delta)\bar{k}\hat{q}_t - \bar{k}\hat{q}_t$$

Factorizando términos

$$\hat{c}_t + \bar{q}E_t\hat{k}_{t+1} = \bar{w}\hat{l}_t + \bar{l}\hat{w}_t + \bar{k}\hat{r}_t + (\bar{r} + \bar{q}(1 - \delta))\hat{k}_t + \bar{k}[(1 - \delta) - 1]\hat{q}_t$$

$$\hat{c}_t + \bar{q}E_t\hat{k}_{t+1} = \bar{w}\hat{l}_t + \bar{l}\hat{w}_t + \bar{k}\hat{r}_t + (\bar{r} + \bar{q}(1 - \delta))\hat{k}_t - \delta\bar{k}\hat{q}_t$$

Dividiendo a ambos lados por \bar{q} , se tiene que:

$$\frac{1}{\bar{q}}\hat{c}_t + E_t\hat{k}_{t+1} = \frac{\bar{w}}{\bar{q}}\hat{l}_t + \frac{\bar{l}}{\bar{q}}\hat{w}_t + \frac{\bar{k}}{\bar{q}}\hat{r}_t + \frac{(\bar{r} + \bar{q}(1 - \delta))}{\bar{q}}\hat{k}_t - \frac{\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{q}_t$$

Dado que el estado estacionario de la ecuación (3.8) es $\frac{1}{\beta} = \frac{\bar{r} + \bar{q}(1 - \delta)}{\bar{q}}$, es posible reemplazarlo en la anterior ecuación así:

$$\frac{1}{\bar{q}}\hat{c}_t + E_t\hat{k}_{t+1} = \frac{\bar{w}}{\bar{q}}\hat{l}_t + \frac{\bar{l}}{\bar{q}}\hat{w}_t + \frac{\bar{k}}{\bar{q}}\hat{r}_t + \beta^{-1}\hat{k}_t - \frac{\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{q}_t \quad (3.63)$$

Iterar hacia el futuro la restricción presupuestaria

Para iterar hacia el futuro, es necesario reescribir la ecuación anterior tal que

$$\begin{aligned} \beta^{-1}\hat{k}_t &= \frac{1}{\bar{q}}\hat{c}_t - \frac{\bar{w}}{\bar{q}}\hat{l}_t - \frac{\bar{l}}{\bar{q}}\hat{w}_t - \frac{\bar{k}}{\bar{q}}\hat{r}_t + \frac{\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{q}_t + E_t\hat{k}_{t+1} \\ \hat{k}_t &= \frac{\beta}{\bar{q}}\hat{c}_t - \frac{\beta\bar{w}}{\bar{q}}\hat{l}_t - \frac{\beta\bar{l}}{\bar{q}}\hat{w}_t - \frac{\beta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{r}_t + \frac{\beta\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{q}_t + \beta E_t\hat{k}_{t+1} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Donde las expectativas futuras de \hat{k}_t tienen la siguiente forma

$$\hat{E}_t\hat{k}_{t+1} = \hat{E}_t \left[\frac{\beta}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{c}_{t+1} - \frac{\beta\bar{w}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{l}_{t+1} - \frac{\beta\bar{l}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{w}_{t+1} - \frac{\beta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{r}_{t+1} + \frac{\beta\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{q}_{t+1} + \beta\hat{E}_{t+1}\hat{k}_{t+2} \right] \quad (3.65)$$

\hat{E}_t denota las creencias subjetivas o no racionales. En el caso donde se está

trabajando con expectativas racionales, se emplea la notación usual de E_t . Además, se asume que las creencias son homogéneas y por tanto satisfacen la ley de probabilidad estándar tal que $\hat{E}_t \hat{E}_{t+i} = \hat{E}_t$.

Reemplazando la ecuación $\hat{E}_t \hat{k}_{t+1}$ dentro de la ecuación \hat{k}_t , se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{k}_t &= \frac{\beta}{\bar{q}} \hat{c}_t - \frac{\beta \bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_t - \frac{\beta \bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_t - \frac{\beta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_t + \frac{\beta \delta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{q}_t \\ &+ \beta \hat{E}_t \left[\frac{\beta}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} - \frac{\beta \bar{w}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{l}_{t+1} - \frac{\beta \bar{l}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{w}_{t+1} - \frac{\beta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{r}_{t+1} + \frac{\beta \delta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_{t+1} + \beta \hat{E}_{t+1} \hat{k}_{t+2} \right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \hat{k}_t &= \frac{\beta}{\bar{q}} \hat{c}_t - \frac{\beta \bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_t - \frac{\beta \bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_t - \frac{\beta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_t + \frac{\beta \delta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{q}_t \\ &+ \frac{\beta^2}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} - \frac{\beta^2 \bar{w}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{l}_{t+1} - \frac{\beta^2 \bar{l}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{w}_{t+1} - \frac{\beta^2 \bar{k}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{r}_{t+1} + \frac{\beta^2 \delta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_{t+1} + \beta^2 \hat{E}_t \hat{E}_{t+1} \hat{k}_{t+2} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Como se tiene que $\hat{E}_t \hat{E}_{t+i} = \hat{E}_t$:

$$\begin{aligned} \hat{k}_t &= \frac{\beta}{\bar{q}} \hat{c}_t - \frac{\beta \bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_t - \frac{\beta \bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_t - \frac{\beta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_t + \frac{\beta \delta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{q}_t \\ &+ \frac{\beta^2}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} - \frac{\beta^2 \bar{w}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{l}_{t+1} - \frac{\beta^2 \bar{l}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{w}_{t+1} - \frac{\beta^2 \bar{k}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{r}_{t+1} + \frac{\beta^2 \delta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_{t+1} + \beta^2 \hat{E}_t \hat{k}_{t+2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Tomando las expectativas un período adicional, se consigue:

$$\hat{E}_t \hat{k}_{t+2} = \hat{E}_t \left[\frac{\beta}{\bar{q}} \hat{E}_{t+1} \hat{c}_{t+2} - \frac{\beta \bar{w}}{\bar{q}} \hat{E}_{t+1} \hat{l}_{t+2} - \frac{\beta \bar{l}}{\bar{q}} \hat{E}_{t+1} \hat{w}_{t+2} - \frac{\beta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{E}_{t+1} \hat{r}_{t+2} + \frac{\beta \delta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{E}_{t+1} \hat{q}_{t+2} + \beta \hat{E}_{t+2} \hat{k}_{t+3} \right] \quad (3.69)$$

Reemplazando la ecuación $\hat{E}_t \hat{k}_{t+2}$ en la ecuación \hat{k}_t , se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{k}_t &= \frac{\beta}{\bar{q}}\hat{c}_t - \frac{\beta\bar{w}}{\bar{q}}\hat{l}_t - \frac{\beta\bar{l}}{\bar{q}}\hat{w}_t - \frac{\beta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{r}_t + \frac{\beta\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{q}_t \\
&\quad + \frac{\beta^2}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{c}_{t+1} - \frac{\beta^2\bar{w}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{l}_{t+1} - \frac{\beta^2\bar{l}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{w}_{t+1} - \frac{\beta^2\bar{k}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{r}_{t+1} + \frac{\beta^2\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{q}_{t+1} \\
+ \beta^2\hat{E}_t &\left[\frac{\beta}{\bar{q}}\hat{E}_{t+1}\hat{c}_{t+2} - \frac{\beta\bar{w}}{\bar{q}}\hat{E}_{t+1}\hat{l}_{t+2} - \frac{\beta\bar{l}}{\bar{q}}\hat{E}_{t+1}\hat{w}_{t+2} - \frac{\beta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{E}_{t+1}\hat{r}_{t+2} + \frac{\beta\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{E}_{t+1}\hat{q}_{t+2} + \beta\hat{E}_{t+2}\hat{k}_{t+3} \right]
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
\hat{k}_t &= \frac{\beta}{\bar{q}}\hat{c}_t - \frac{\beta\bar{w}}{\bar{q}}\hat{l}_t - \frac{\beta\bar{l}}{\bar{q}}\hat{w}_t - \frac{\beta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{r}_t + \frac{\beta\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{q}_t + \frac{\beta^2}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{c}_{t+1} - \frac{\beta^2\bar{w}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{l}_{t+1} - \frac{\beta^2\bar{l}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{w}_{t+1} - \frac{\beta^2\bar{k}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{r}_{t+1} + \frac{\beta^2\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{q}_{t+1} \\
+ \frac{\beta^3}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{E}_{t+1}\hat{c}_{t+2} - \frac{\beta^3\bar{w}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{E}_{t+1}\hat{l}_{t+2} - \frac{\beta^3\bar{l}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{E}_{t+1}\hat{w}_{t+2} - \frac{\beta^3\bar{k}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{E}_{t+1}\hat{r}_{t+2} + \frac{\beta^3\delta\bar{k}}{\bar{q}}\hat{E}_t\hat{E}_{t+1}\hat{q}_{t+2} + \beta^3\hat{E}_t\hat{E}_{t+2}\hat{k}_{t+3}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Dado lo anterior, es posible seguir iterando hacia ∞ y se encuentra la siguiente forma funcional

$$\begin{aligned}
\hat{k}_t &= \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^T \frac{1}{\bar{q}} \hat{c}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^T \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^T \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^T \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_{t+T-1} + \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^T \frac{\delta\bar{k}}{\bar{q}} \hat{q}_{t+T-1} \\
\hat{k}_t &= \beta \left[\hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{1}{\bar{q}} \hat{c}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_{t+T-1} + \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\delta\bar{k}}{\bar{q}} \hat{q}_{t+T-1} \right] \\
\beta^{-1}\hat{k}_t &= \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{1}{\bar{q}} \hat{c}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_{t+T-1} + \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\delta\bar{k}}{\bar{q}} \hat{q}_{t+T-1} \\
\beta^{-1}\hat{k}_t &= \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{1}{\bar{q}} \hat{c}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\delta\bar{k}}{\bar{q}} \hat{q}_T
\end{aligned}$$

Reorganizando términos, se tiene que

$$\hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{1}{\bar{q}} \hat{c}_T = \beta^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{q}_T \quad (3.72)$$

La anterior ecuación describe la restricción presupuestaria del flujo de los hogares.

Iterar hacia el pasado la ecuación de Euler

En línea con lo anterior, se parte la ecuación de Euler de los hogares de la forma:

$$\frac{1}{\bar{c}} \hat{q}_t - \frac{\bar{q}}{\bar{c}^2} \hat{c}_t = -\frac{\beta (\bar{q} (1 - \delta) + \bar{r})}{\bar{c}^2} E_t \hat{c}_{t+1} + \frac{\beta (1 - \delta)}{\bar{c}} E_t \hat{q}_{t+1} + \frac{\beta}{\bar{c}} E_t \hat{r}_{t+1}$$

Multiplicando a ambos lados por \bar{c} , se tiene que

$$\hat{q}_t - \frac{\bar{q}}{\bar{c}} \hat{c}_t = -\frac{\beta (\bar{q} (1 - \delta) + \bar{r})}{\bar{c}} E_t \hat{c}_{t+1} + \beta (1 - \delta) E_t \hat{q}_{t+1} + \beta E_t \hat{r}_{t+1}$$

Dado que en estado estacionario $\frac{\bar{q}}{\bar{c}} = E_t \left(\frac{\beta (\bar{q} (1 - \delta) + \bar{r})}{\bar{c}} \right)$, se tiene que

$$\hat{q}_t - \frac{\bar{q}}{\bar{c}} \hat{c}_t = -\frac{\bar{q}}{\bar{c}} E_t \hat{c}_{t+1} + \beta (1 - \delta) E_t \hat{q}_{t+1} + \beta E_t \hat{r}_{t+1}$$

Reescribiendo la ecuación anterior:

$$\frac{\bar{q}}{\bar{c}} E_t \hat{c}_{t+1} = -\hat{q}_t + \frac{\bar{q}}{\bar{c}} \hat{c}_t + \beta (1 - \delta) E_t \hat{q}_{t+1} + \beta E_t \hat{r}_{t+1}$$

$$E_t \hat{c}_{t+1} = -\frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t + \hat{c}_t + \frac{\beta (1 - \delta) \bar{c}}{\bar{q}} E_t \hat{q}_{t+1} + \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} E_t \hat{r}_{t+1}$$

Ahora, se itera recursivamente desde un periodo T hacia atrás hasta llegar a t.

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = -\frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_{T-1} + \frac{\beta (1 - \delta) \bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_T + \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{r}_T + \hat{c}_{T-1} \quad (3.73)$$

Rezagando un período, se tiene que

$$\hat{E}_t \hat{c}_{T-1} = \hat{E}_t \left[-\frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_{T-2} + \frac{\beta (1 - \delta) \bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_{T-1} + \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{r}_{T-1} + \hat{c}_{T-2} \right] \quad (3.74)$$

Reemplazando la ecuación (3.74) en (3.73) y sabiendo que $\hat{E}_t \hat{c}_{T-1} = \hat{c}_{T-1}$.

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = -\frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_{T-1} + \frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_T + \frac{\beta\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{r}_T + \hat{E}_t \left[-\frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_{T-2} + \hat{c}_{T-2} + \frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_{T-1} + \frac{\beta\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{r}_{T-1} \right]$$

Reescribiendo

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = -\frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t [\hat{q}_{T-1} + \hat{q}_{T-2}] + \frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t [\hat{q}_T + \hat{q}_{T-1}] + \frac{\beta\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t [\hat{r}_T + \hat{r}_{T-1}] + \hat{c}_{T-2}$$

Si se itera repetitivamente con base en reemplazo de c_{T-i} , hasta llegar al periodo t , se tiene que

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = -\frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t [\hat{q}_{T-1} + \hat{q}_{T-2} + \dots + \hat{q}_t] + \frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t [\hat{q}_T + \hat{q}_{T-1} + \dots + \hat{q}_{t+1}] + \frac{\beta\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t [\hat{r}_T + \hat{r}_{T-1} + \dots + \hat{r}_{t+1}] + \hat{c}_t$$

Factorizando a \hat{q}_T con temporales iguales, se tiene que

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = \hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{T-1} \frac{\beta\bar{c}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{T-2} \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} + \frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_T$$

Se suma y resta al lado derecho de la ecuación la expresión, $\left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_T$, tal que

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = \hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{T-1} \frac{\beta\bar{c}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{T-2} \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} + \frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_T + \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_T - \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_T$$

Así, se posibilita escribir la siguiente ecuación

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = \hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{T-1} \frac{\beta\bar{c}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{T-1} \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} + \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_T \quad (3.75)$$

La anterior es la ecuación de Euler iterada hacia atrás.

Combinar las ecuaciones iteradas hacia el futuro

Al reemplazar la ecuación (3.75) en la ecuación (3.72), se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{T-1} \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{T-1} \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} + \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{E}_t \hat{q}_T \right) &= \beta^{-1} \hat{k}_t \\ + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{q}_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t \right) + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \sum_{T=t}^{T-1} \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \sum_{T=t}^{T-1} \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_T \\ = \beta^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \hat{q}_T \end{aligned}$$

Despejar la variable consumo

Si se tiene en cuenta que para una variable cualquiera a_T ⁴:

$$E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \sum_{T=t}^{T-1} a_T = \frac{\beta}{1-\beta} E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} a_T$$

Se consigue que:

$$\begin{aligned} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t \right) + \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} + \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} \\ = \beta^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_T \end{aligned}$$

Reorganizando términos:

$$\begin{aligned} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t \right) &= \beta^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_T \\ - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_T &- \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} - \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} \end{aligned}$$

⁴También empleado por Preston (2005).

Ahora, se hace uso de la siguiente propiedad de la sumatoria:

$$E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} a_T = a_t + E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \beta a_{T+1}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t \right) &= \beta^{-1} \hat{k}_t + \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_t + \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_t + \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_t - \left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_{T+1} \\ &+ \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} - \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} \\ &- \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} a_t = \frac{1}{(1-\beta)} a_t$$

El lado izquierdo de la ecuación cambia de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\beta} \left(\hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t \right) &= \beta^{-1} \hat{k}_t + \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_t + \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_t + \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_t - \left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_{T+1} \\ &+ \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} - \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_{T+1} \\ &- \frac{\tilde{\beta}}{1-\tilde{\beta}} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-t} \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} \hat{r}_{T+1} \end{aligned}$$

Agrupando términos se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\beta} \left(\hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t \right) &= \beta^{-1} \hat{k}_t + \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_t + \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_t + \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_t - \left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_{T+1} \\ &+ \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-1} \left[\frac{\bar{k}}{\bar{q}} - \frac{\beta}{1-\beta} \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} \right] \hat{r}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \tilde{\beta}^{T-1} \left[\left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \right) - \frac{\beta}{1-\beta} \left(\frac{\beta(1-\delta)\bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \right) \right] \hat{q}_{T+1} \end{aligned}$$

Despejando el lado izquierdo $(\hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{c}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{q}} \hat{q}_t &= (1-\beta) \left(\beta^{-1} \hat{k}_t + \frac{\bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_t + \frac{\bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_t + \frac{\bar{k}}{\bar{q}} \hat{r}_t - \left(\frac{\bar{c}}{\bar{q}} + \frac{\delta \bar{k}}{\bar{q}} \right) \hat{q}_t \right) + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \frac{(1-\beta) \bar{w}}{\bar{q}} \hat{l}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \frac{(1-\beta) \bar{l}}{\bar{q}} \hat{w}_{T+1} \\ &+ \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \left[\frac{(1-\beta) \bar{k}}{\bar{q}} - \frac{\beta^2 \bar{c}}{\bar{q}} \right] \hat{r}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \left[\frac{(1-\beta) \bar{c}}{\bar{q}} + \frac{(1-\beta) \delta \bar{k}}{\bar{q}} - \frac{\beta^2 (1-\delta) \bar{c}}{\bar{q}} - \frac{\beta \bar{c}}{\bar{q}} \right] \hat{q}_{T+1} \end{aligned}$$

La anterior ecuación describe la senda óptima de consumo de los hogares bajo expectativas arbitrarias y es la que permite la implementación del mecanismo de aprendizaje.

3.1.4 Formación de creencias de los agentes en el contexto de aprendizaje dentro del modelo

Conexión con el modelo original de expectativas racionales

El primer paso muestra las diferentes representaciones de solución del sistema de ecuaciones que permiten hacer la conexión entre el mundo de expectativas racionales y de aprendizaje de expectativas. Un segundo paso es obtener la solución del método de Blanchard y Kahn, el cual ofrece un sistema matricial de ecuaciones expresado en términos de las variables de estado (*Minimum State Variable*), tal que:

$$W_{t+1} = \Omega_0^{RE} + \Omega_1^{RE} K_t + \Omega_2^{RE} \varepsilon_t$$

Donde el vector W_t es una matriz que incluye tanto variables de control como variables de estado, Ω_1^{RE} es la matriz de coeficientes, K_t es una matriz de variables de estado (en el presente modelo capital de los hogares k_t y capital del empresario z_t), Ω_2^{RE} es el vector de coeficientes que acompañan el choque, y ε_t es el choque de tecnología.

La anterior solución también se puede representar mediante la siguiente forma estructural:

$$A_0 W_t = A_1 + A_5 W_{t-1} + A_3 W_{t+1} + A_4 \sum_{T=0}^{\infty} \beta^T W_T + C \varepsilon_t$$

Donde $\sum_{T=0}^{\infty} \beta^T W_T$ representa el flujo futuro descontado de la variable consumo (c_t) bajo su regla de decisión. Tanto el coeficiente A_4 como la variable que la acompaña

solo se emplean bajo el modelo de aprendizaje de expectativas con el flujo descontado del consumo y, en su lugar, la ecuación empleada se excluye tanto de A_3 como de W_{t+1} . Lo opuesto sucede bajo expectativas racionales. Además, C es un vector que acompaña al choque de tecnología.

Bajo aprendizaje se tiene que:

$$W_{t+1} = T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) + T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)K_t + T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)\varepsilon_t$$

Donde $T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo del vector intercepto), $T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo de la matriz de transición) y $T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)$ (Mapeo de la matriz de incidencia de choques) son los mapas de coeficientes de la Ley de movimiento real o verdadera de estos, la cual combina los parámetros del sistema de ecuaciones con los parámetros estimados por los agentes bajo su ley de movimiento percibida.

El mapeo de los agentes (o ley de movimiento real) se construye empleando los coeficientes A_0 , A_1 , A_3 , A_4 y A_5 y los valores estimados por los agentes no racionales por medio de su ley de movimiento percibido, mediante su mecanismo de formación de creencias o expectativas. En tal sentido se tiene que:

$$F_0 = [I - \Omega_1^L]^{-1}[1/\beta - \Omega_1^L][(1 - \beta)[I - \Omega_1^L]]^{-1}\Omega_0^L$$

$$F_1 = \Omega_1^L(1 - \beta)[I - \Omega_1^L]^{-1}$$

Ahora se define:

$$T_I = A_0^{-1}[A_3\Omega_0^L] + A_0^{-1}[A_4F_0] = A_0^{-1}[A_3\Omega_0^L + A_4F_0]$$

$$T_C = A_0^{-1}[A_3\Omega_1^L] + A_0^{-1}[A_4F_1] = A_0^{-1}[A_3\Omega_1^L + A_4F_1]$$

A partir de las anteriores definiciones, se consigue:

$$T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1}T_I$$

$$T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1}[A_0^{-1}(A_2 + A_5\Omega_1^L)]$$

Como $A_2 = 0$

$$T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1}[A_0^{-1}A_5\Omega_1^L]$$

Finalmente,

$$T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) = (I - T_C)^{-1}C$$

Formación de las creencias o expectativas de los agentes

La formación de creencias se realiza a través de un sistema de ecuaciones que se actualiza por medio de la ley de movimiento percibida por los agentes del modelo, mediante el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR), que se expondrá más adelante. Los agentes aprenden sobre los parámetros asociados al comportamiento de las variables *consumo de los hogares* (\hat{c}_t), *trabajo* (\hat{l}_t), *salario* (\hat{w}_t), *tasa de interés* (\hat{r}_t), *inversión* (\hat{i}_t), *producto* (\hat{y}_t), *consumo de los empresarios* (\hat{e}_t), *patrimonio del empresario* (\hat{n}_t), *precio de la inversión* (\hat{q}_t), *participación del empresario* ($f(\hat{\omega}_t)$) y *participación de los hogares* ($g(\hat{\omega}_t)$), *bancarrota* ($\hat{\omega}_t$), *pérdida de eficiencia* (π_t), *función de densidad acumulada* ($\Phi(\hat{\omega}_t)$), *capital de los hogares* (\hat{k}_{t+1}) y *capital de empresarios* (\hat{z}_{t+1}). Cada variable estará en función de las variables de estado, es decir, del *capital de los hogares* (\hat{k}_t) y el *capital de los empresarios* (\hat{z}_t). A continuación se presenta dicho sistema:

$$\hat{c}_t = \xi_0^c + \xi_1^c \hat{k}_t + \xi_2^c \hat{z}_t \quad (3.76)$$

$$\hat{l}_t = \xi_0^l + \xi_1^l \hat{k}_t + \xi_2^l \hat{z}_t \quad (3.77)$$

$$\hat{w}_t = \xi_0^w + \xi_1^w \hat{k}_t + \xi_2^w \hat{z}_t \quad (3.78)$$

$$\hat{r}_t = \xi_0^r + \xi_1^r \hat{k}_t + \xi_2^r \hat{z}_t \quad (3.79)$$

$$\hat{i}_t = \xi_0^i + \xi_1^i \hat{k}_t + \xi_2^i \hat{z}_t \quad (3.80)$$

$$\hat{y}_t = \xi_0^y + \xi_1^y \hat{k}_t + \xi_2^y \hat{z}_t \quad (3.81)$$

$$\hat{e}_t = \xi_0^e + \xi_1^e \hat{k}_t + \xi_2^e \hat{z}_t \quad (3.82)$$

$$\hat{n}_t = \xi_0^n + \xi_1^n \hat{k}_t + \xi_2^n \hat{z}_t \quad (3.83)$$

$$\hat{q}_t = \xi_0^q + \xi_1^q \hat{k}_t + \xi_2^q \hat{z}_t \quad (3.84)$$

$$f(\hat{\omega}_t) = \xi_0^{f(\bar{\omega})} + \xi_1^{f(\bar{\omega})} \hat{k}_t + \xi_2^{f(\bar{\omega})} \hat{z}_t \quad (3.85)$$

$$g(\hat{\omega}_t) = \xi_0^{g(\bar{\omega})} + \xi_1^{g(\bar{\omega})} \hat{k}_t + \xi_2^{g(\bar{\omega})} \hat{z}_t \quad (3.86)$$

$$\hat{\omega}_t = \xi_0^{\bar{\omega}} + \xi_1^{\bar{\omega}} \hat{k}_t + \xi_2^{\bar{\omega}} \hat{z}_t \quad (3.87)$$

$$\hat{\pi}_t = \xi_0^\pi + \xi_1^\pi \hat{k}_t + \xi_2^\pi \hat{z}_t \quad (3.88)$$

$$\Phi(\hat{\omega}_t) = \xi_0^{\Phi(\bar{\omega})} + \xi_1^{\Phi(\bar{\omega})} \hat{k}_t + \xi_2^{\Phi(\bar{\omega})} \hat{z}_t \quad (3.89)$$

$$\hat{k}_{t+1} = \xi_0^k + \xi_1^k \hat{k}_t + \xi_2^k \hat{z}_t \quad (3.90)$$

$$\hat{z}_{t+1} = \xi_0^z + \xi_1^z \hat{k}_t + \xi_2^z \hat{z}_t \quad (3.91)$$

El anterior sistema de formación de creencias puede expresarse en forma matricial de la siguiente manera. Sea:

$$Z_t^{LMP} = \Omega_t Q_{t-1}$$

$$Z_t^{LMP} = \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{l}_t \\ \hat{w}_t \\ \hat{r}_t \\ \hat{i}_t \\ \hat{y}_t \\ \hat{e}_t \\ \hat{n}_t \\ \hat{p}_t \\ f(\hat{\omega}_t) \\ g(\hat{\omega}_t) \\ \hat{\omega}_t \\ \hat{\pi}_t \\ \Phi(\hat{\omega}_t) \\ \hat{k}_{t+1} \\ \hat{z}_{t+1} \end{bmatrix}; \Omega_t = \begin{bmatrix} \xi_0^c & \xi_1^c & \xi_2^c \\ \xi_0^l & \xi_1^l & \xi_2^l \\ \xi_0^w & \xi_1^w & \xi_2^w \\ \xi_0^r & \xi_1^r & \xi_2^r \\ \xi_0^i & \xi_1^i & \xi_2^i \\ \xi_0^y & \xi_1^y & \xi_2^y \\ \xi_0^e & \xi_1^e & \xi_2^e \\ \xi_0^n & \xi_1^n & \xi_2^n \\ \xi_0^q & \xi_1^q & \xi_2^q \\ \xi_0^{f(\bar{\omega})} & \xi_1^{f(\bar{\omega})} & \xi_2^{f(\bar{\omega})} \\ \xi_0^{g(\bar{\omega})} & \xi_1^{g(\bar{\omega})} & \xi_2^{g(\bar{\omega})} \\ \xi_0^{\bar{\omega}} & \xi_1^{\bar{\omega}} & \xi_2^{\bar{\omega}} \\ \xi_0^\pi & \xi_1^\pi & \xi_2^\pi \\ \xi_0^{\Phi(\bar{\omega})} & \xi_1^{\Phi(\bar{\omega})} & \xi_2^{\Phi(\bar{\omega})} \\ \xi_0^k & \xi_1^k & \xi_2^k \\ \xi_0^z & \xi_1^z & \xi_2^z \end{bmatrix}; Q_{t-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix}$$

Como se observa, Z_t^{LMP} es un subconjunto de la matriz W_t y contiene los elementos del sistema de ecuaciones del pronosticador bajo la Ley de Movimiento Percibida (LMP).

Por otra parte, se tiene a:

$$Z_t^{LMR} = T(\Omega_t^L)Q_{t-1}$$

Es la ley de movimiento real de la economía. Esta ley de movimiento real es el resultado del mapeo de expectativas que tienen los agentes, la cuál es retroalimentada por la estimación de los parámetros de la ley de movimiento percibida por los agentes en el periodo inmediatamente anterior. La representación matricial de la Ley de Movimiento Real (LMR) es la siguiente:

$$Z_t^{LMR} = \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{l}_t \\ \hat{w}_t \\ \hat{r}_t \\ \hat{i}_t \\ \hat{y}_t \\ \hat{e}_t \\ \hat{n}_t \\ \hat{q}_t \\ f(\hat{\omega}_t) \\ g(\hat{\omega}_t) \\ \hat{\omega}_t \\ \hat{\pi}_t \\ \Phi(\hat{\omega}_t) \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix}; T(\Omega_t^L) = \begin{bmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \tau_{1,3} \\ \tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \tau_{2,3} \\ \tau_{3,1} & \tau_{3,2} & \tau_{3,3} \\ \tau_{4,1} & \tau_{4,2} & \tau_{4,3} \\ \tau_{5,1} & \tau_{5,2} & \tau_{5,3} \\ \tau_{6,1} & \tau_{6,2} & \tau_{6,3} \\ \tau_{7,1} & \tau_{7,2} & \tau_{7,3} \\ \tau_{8,1} & \tau_{8,2} & \tau_{8,3} \\ \tau_{9,1} & \tau_{9,2} & \tau_{9,3} \\ \tau_{10,1} & \tau_{10,2} & \tau_{10,3} \\ \tau_{11,1} & \tau_{11,2} & \tau_{11,3} \\ \tau_{12,1} & \tau_{12,2} & \tau_{12,3} \\ \tau_{13,1} & \tau_{13,2} & \tau_{13,3} \\ \tau_{14,1} & \tau_{14,2} & \tau_{14,3} \\ \tau_{15,1} & \tau_{15,2} & \tau_{15,3} \\ \tau_{16,1} & \tau_{16,2} & \tau_{16,3} \end{bmatrix}; Q_{t-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix}$$

Se sabe que la solución del modelo bajo expectativas racionales implica que los coeficientes ξ de cada modelo econométrico sean invariantes en el tiempo, es decir, $\xi_{1,t-1} = \xi_{1,t} = \xi_{1,t+1}$. Además, implicaría que el término de intercepto en el modelo econométrico es estadísticamente no significativo, $\xi_0 = 0$. Por tanto, es necesario suponer que los agentes aprenden a partir de modelos econométricos cuando el término

de intercepto y el coeficiente de respuesta ante las variables regresoras, son variantes en el tiempo, $\xi_{0,t} \neq \xi_{0,t-1}$, $\xi_{1,t} \neq \xi_{1,t-1}$ y $\xi_{2,t} \neq \xi_{2,t-1}$.

Para llevar a cabo el proceso de aprendizaje, los agentes estiman las ecuaciones para actualizar los coeficientes variantes en el tiempo a medida que obtienen nueva información. Los únicos coeficientes que no se actualizan son los que acompañan al choque tecnología, como se dijo anteriormente. Para llevar a cabo la estimación, se aplica la herramienta de Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR) que se explica a continuación.

A partir de la ecuación de simulación del ciclo de las variables de variable de estado mínima en el período t :

$$W_{t+1} = T_0(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L) + T_1(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)K_t + T_2(\Omega_{0,t}^L, \Omega_{1,t}^L)\varepsilon_t$$

Se define al algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR) de la forma:

$$R_t = R_{t-1} + g(Q_{t-1}Q'_{t-1} - R_{t-1}) \quad (3.92)$$

$$\Omega_t^L = \Omega_{t-1}^L + g(R_t^{-1}Q_{t-1})(Z_t^{LMR} - \Omega_{t-1}^L'Q_{t-1}) \quad (3.93)$$

Donde:

- Ω_t^L es el vector j -dimensional que contiene los coeficientes a estimar en el periodo t , $\Omega_t^L = [\xi_0^j, \xi_1^j, \xi_2^j]$, con $j = [c; l; w; r; i; y; e; n; q; f(\bar{\omega}); g(\bar{\omega}); \pi; \Phi(\bar{\omega}); k; z]$. El valor en el período cero antes del choque coincide con el valor de expectativas racionales
- R_t es la matriz de precisión que incluye las varianzas y las covarianzas.
- g es el parámetro de ponderación del error (ganancia) del algoritmo. Esta ganancia regula el peso que atribuyen los agentes pronosticadores al error de pronósticos de las variables, el cual se activa con los cambios generados por el choque de tecnología. Entre más grande sea el valor de g , los agentes asumen un mayor grado de ignorancia con respecto a los parámetros.

En el presente estudio, esta ganancia se trabajo de dos sentidos: (i) ganancia constante, y (ii) ganancia decreciente en función del tiempo, es decir, con el tiempo de denominador.

- Q_{t-1} es el vector de variables regresoras del modelo econométrico de los agentes tal que $Q'_{t-1} = [1, k_t, z_t]$.
- $Z_t^{LMR} = [\hat{c}_t; \hat{l}_t; \hat{w}_t; \hat{r}_t; \hat{i}_t; \hat{y}_t; \hat{e}_t; \hat{n}_t; \hat{q}_t; f(\hat{\omega}_t); g(\hat{\omega}_t); \hat{\omega}_t; \hat{\pi}_t; \Phi(\hat{\omega}_t); \hat{k}_t; \hat{z}_t]$ es el vector de variables dependientes.

Estabilidad del proceso de aprendizaje. El sistema de aprendizaje es estable si los coeficientes estimados por los agentes ($\hat{\Omega}_t^L$) convergen monotónicamente hacia el valor de los coeficientes de expectativas racionales (Ω^{RE}) con el paso de los períodos. Es decir, que hay un aprendizaje. Matemáticamente, esto se verifica mediante la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria:

$$\dot{\hat{\Omega}}_t^L = R(M_q(\hat{\Omega}_t^L))^{-1}[T_1(\hat{\Omega}_t^L)' - \Omega_t^{RE}]$$

$$\dot{R} = M_q(\hat{\Omega}_t^L) - R$$

La estabilidad se obtiene si la parte real de los valores propios del sistema es negativa. Esto está comprobado, ya que las estimaciones de los agentes convergen monotónicamente a sus valores de expectativas racionales. Es decir, asintóticamente, R converge a $M_q(\hat{\Omega}_1^L)$.

Ejemplo ilustrativo del proceso de actualización de expectativas

La secuencia de actualización de los pronósticos de los agentes es la siguientes. En el periodo t , los agentes forman creencias con base en los parámetros estimados con la información disponible en $t-1$. Operativamente en el modelo, la primera estimación de los coeficientes es el valor de expectativas racionales. Ésta estimación se aleja luego del choque de tecnología de los agentes, con base en la regla de pronóstico de los MCR. Posteriormente, generan su aprendizaje hasta que convergen al verdadero valor de los parámetros.

Para dar más claridad a lo anterior, como ejemplo, se mostrará la estimación de la ecuación de la variable consumo de la Ley de Movimiento Percibida de los agentes de la forma:

$$\hat{c}_t = \xi_0^c + \xi_1^c \hat{k}_t + \xi_2^c \hat{z}_t$$

La estimación de la anterior ecuación se realiza utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos, con ganancia contante en este ejemplo. También se hace con una ganancia constante. En el presente caso, g tiene un valor de 0,002.

El valor inicial que toman la variable dependiente y las variables independientes, así como el valor de los coeficientes provienen de la solución de expectativas racionales. Es decir, los valores que tomarán las matrices Ω_{t-1} , Z_t^{LMR} y Q_{t-1} son obtenidos de la solución de expectativas racionales únicamente en la primera simulación del algoritmo. A partir de la segunda simulación, dichos valores se alejan a raíz de la simulación y el error de pronóstico que genera una diferencia entre la ley de movimiento percibida por los agentes y la ley de movimiento real. De manera que es posible definir las anteriores matrices así:

$$\Omega_{t-1}^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \\ \xi_2^{c,RE} \end{bmatrix}$$

Donde el superíndice c hace referencia a los coeficientes asociados a la ecuación inicial. Recuérdese que la matriz Ω_t es j -dimensional y varía según la ecuación a estimar.

La matriz de precisión inicial será igual a:

$$R_{t-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

Por último, la matriz de variables dependientes es:

$$Q_{t-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

La anterior matriz hace referencia a las variables dependientes de la ecuación inicial. Además, los valores de las variables k_t y z_t son previamente estimados mediante la solución de expectativas racionales.

Posteriormente, se procede a estimar la matriz de precisión inicial R_t utilizando:

$$R_t = R_{t-1} + g(Q_{t-1}Q'_{t-1} - R_{t-1})$$

Ampliando la ecuación anterior, se tiene que

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ k_t \\ z_t \end{bmatrix} [1; k_t; z_t] - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} 1 & k_t & z_t \\ k_t & k_t^2 & k_t z_t \\ z_t & z_t k_t & z_t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} 0 & k_t & z_t \\ k_t & k_t^2 - \sigma_k^2 & k_t z_t \\ z_t & z_t k_t & z_t^2 - \sigma_z^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.002k_t & 0.002z_t \\ 0.002k_t & 0.002(k_t^2 - \sigma_k^2) & 0.002k_t z_t \\ 0.002z_t & 0.002z_t k_t & 0.002(z_t^2 - \sigma_z^2) \end{bmatrix}$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0.002k_t & 0.002z_t \\ 0.002k_t & 0.002(k_t^2 - \sigma_k^2) + \sigma_k^2 & 0.002k_t z_t \\ 0.002z_t & 0.002z_t k_t & 0.002(z_t^2 - \sigma_z^2) + \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & 0.002k_t & 0.002z_t \\ 0.002k_t & 0.002k_t^2 + 0.998\sigma_k^2 & 0.002k_t z_t \\ 0.002z_t & 0.002z_t k_t & 0.002z_t^2 + 0.998\sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, se supone que R_t es invertible y por tanto es posible continuar con el algoritmo de aprendizaje.

Luego, se procede a estimar la matriz de los coeficientes utilizando la siguiente

ecuación:

$$\Omega_t = \Omega_{t-1} + g(R_t^{-1}Q_{t-1})(Z_t^{LMR} - \Omega'_{t-1}Q_{t-1})$$

Ampliando la anterior ecuación, se tiene que:

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \\ \xi_2^{c,RE} \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.002k_t & 0.002z_t \\ 0.002k_t & 0.002k_t^2 + 0.998\sigma_k^2 & 0.002k_t z_t \\ 0.002z_t & 0.002z_t k_t & 0.002z_t^2 + 0.998\sigma_z^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \\ z_t \end{bmatrix} \right) \\ \left([c_t] - \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} & \xi_1^{c,RE} & \xi_2^{c,RE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \\ z_t \end{bmatrix} \right)$$

Donde la matriz Z_t^{LMR} contiene el valor estimado para la variable de este ejemplo, es decir, la variable consumo tal que $Z_t^{LMR} = [c_t]$.

Continuando

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \\ \xi_2^{c,RE} \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.002k_t & 0.002z_t \\ 0.002k_t & 0.002k_t^2 + 0.998\sigma_k^2 & 0.002k_t z_t \\ 0.002z_t & 0.002z_t k_t & 0.002z_t^2 + 0.998\sigma_z^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \\ z_t \end{bmatrix} \right) \\ \left([c_t] - \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} + \xi_1^{c,RE} k_t + \xi_2^{c,RE} z_t \end{bmatrix} \right)$$

Dado que es necesario conocer la inversa de la matriz de precisión R_t , se define a R_t^{-1} como

$$R_t^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

Utilizando la definición anterior, se tiene que

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \\ \xi_2^{c,RE} \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k_t \\ z_t \end{bmatrix} \right) \left([c_t] - [\xi_0^{c,RE} + \xi_1^{c,RE} k_t + \xi_2^{c,RE} z_t] \right)$$

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \\ \xi_2^{c,RE} \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} R_{11} + R_{12}k_t + R_{13}z_t \\ R_{21} + R_{22}k_t + R_{23}z_t \\ R_{31} + R_{32}k_t + R_{33}z_t \end{bmatrix} \right) \left([c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE} k_t - \xi_2^{c,RE} z_t] \right)$$

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \\ \xi_2^{c,RE} \end{bmatrix} + 0.002 \left(\begin{bmatrix} (R_{11} + R_{12}k_t + R_{13}z_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE} k_t - \xi_2^{c,RE} z_t) \\ (R_{21} + R_{22}k_t + R_{23}z_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE} k_t - \xi_2^{c,RE} z_t) \\ (R_{31} + R_{32}k_t + R_{33}z_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE} k_t - \xi_2^{c,RE} z_t) \end{bmatrix} \right)$$

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} \\ \xi_1^{c,RE} \\ \xi_2^{c,RE} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.002(R_{11} + R_{12}k_t + R_{13}z_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE} k_t - \xi_2^{c,RE} z_t) \\ 0.002(R_{21} + R_{22}k_t + R_{23}z_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE} k_t - \xi_2^{c,RE} z_t) \\ 0.002(R_{31} + R_{32}k_t + R_{33}z_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE} k_t - \xi_2^{c,RE} z_t) \end{bmatrix}$$

$$\Omega_t^c = \begin{bmatrix} \xi_0^{c,RE} + 0.002(R_{11} + R_{12}k_t + R_{13}z_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE} k_t - \xi_2^{c,RE} z_t) \\ \xi_1^{c,RE} + 0.002(R_{21} + R_{22}k_t + R_{23}z_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE} k_t - \xi_2^{c,RE} z_t) \\ \xi_2^{c,RE} + 0.002(R_{31} + R_{32}k_t + R_{33}z_t)(c_t - \xi_0^{c,RE} - \xi_1^{c,RE} k_t - \xi_2^{c,RE} z_t) \end{bmatrix}$$

La matriz Ω_t^c estimada comienza con la solución de expectativas racionales; pero se aleja gradualmente gracias al parámetro de ganancia y al error de pronóstico de la ecuación (3.172). Nótese que el proceso anterior debe hacerse para las demás variables dentro del sistema de creencias de los agentes del modelo. Es decir, dado que el vector Ω_t^j es j -dimensional, donde

$$j = [c; l; w; r; i; y; e; n; p; f(\bar{w}); g(\bar{w}); \bar{w}; \pi; \Phi(\bar{w}); k; z]$$

Se repite el proceso para las demás variables dentro de j .

Los agentes emplean el anterior algoritmo para estimar los coeficientes variantes en el tiempo asociados a la matriz Ω_t ; los cuales alimentan la verdadera ley de movimiento de la economía a través del mapeo de expectativas, es decir, alimentan a $W_t = T_0(\Omega_{0,t}^L) + T_1(\Omega_{1,t}^L)K_{t-1} + T_2(\Omega_{2,t}^L)\varepsilon_t$.

3.1.5 Función de distribución normal

Sea x una variable aleatoria con una distribución normal, es posible definir a una variable aleatoria ω con una distribución log-normal tal que $\omega = \exp(x)$. De manera similar, si una variable ω está log-normalmente distribuida, entonces $x = \log(\omega)$ tiene una distribución normal.

La función de distribución acumulada de ω se define como:

$$\Phi(\omega) \equiv F_\omega(\bar{\omega}) = P[\omega \leq \bar{\omega}]$$

Dado que $\omega = \exp(x)$, es posible reescribir la función así:

$$F_\omega(\bar{\omega}) = P[\exp(x) \leq \bar{\omega}] = P[x \leq \ln(\bar{\omega})] = F_x(\ln(\bar{\omega}))$$

Donde

$$F_X(\ln(\bar{\omega})) = P[x \leq \ln(\bar{\omega})]$$

La anterior ecuación describe la función de distribución acumulada de X evaluada hasta el punto $\ln(\bar{\omega})$. Recuerde que $\ln(\bar{\omega}) = \bar{X}$.

Por otro lado, es posible definir a la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria ω así:

$$\phi(\omega) \equiv f_\omega(\bar{\omega}) = \frac{d}{d\omega} F_\omega(\bar{\omega})$$

Dado lo anterior, se puede reescribir tal que

$$f_\omega(\bar{\omega}) = \frac{d}{d\omega} F_x(\ln(\bar{\omega}))$$

Aplicando la derivada se tiene que

$$f_{\omega}(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{\omega}} f_x(\ln(\bar{\omega}))$$

Dado que la definición de función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X que se distribuye normal con media μ_x y varianza σ_x^2 de la forma:

$$f_x(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right]$$

Reemplazando la ecuación anterior dentro de la ecuación previa, se tiene que:

$$\phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{1}{\sigma_{\omega} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}} \right)^2 \right]$$

La anterior ecuación describe la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria ω .

Una vez definida la función de densidad de probabilidad, es posible definir la función de distribución acumulada. Recuerde que la primera es igual a la derivada de la segunda. De manera similar, la función de distribución acumulada es igual a la integral definida de la función de densidad de probabilidad.

$$F_{\omega}(\bar{\omega}) = F_x(\ln(\bar{\omega})) = \int_{-\infty}^{\ln(\bar{\omega})} f_x(\bar{x}) dx \quad (3.94)$$

Los límites de integración son iguales al dominio de la variable aleatoria. Recuerde que el dominio de la función de distribución acumulada de una variable aleatoria x con distribución normal son todos los reales, pero el dominio de una variable aleatoria ω con distribución log-normal son los reales positivos.

Reemplazando la ecuación $f_x(\bar{x})$ dentro de la ecuación $F_{\omega}(\bar{\omega})$, se tiene que

$$F_{\omega}(\bar{\omega}) = F_x(\ln(\bar{\omega})) = \int_{-\infty}^{\ln(\bar{\omega})} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] dx$$

Dado los límites de integración, $-\infty < \ln(\omega) < \ln(\bar{\omega})$, es posible aplicar una transformación exponencial tal que $0 < \omega < \bar{\omega}$. Cambiando los límites de integración se tiene que

$$\begin{aligned}
F_{\omega}(\bar{\omega}) &= \int_0^{\bar{\omega}} \frac{1}{\sigma_{\omega}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right)^2\right] d\omega \\
\Phi(\bar{\omega}) &= \frac{1}{\sigma_{\omega}\sqrt{2\pi}} \int_0^{\bar{\omega}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right)^2\right] d\omega
\end{aligned} \tag{3.95}$$

El siguiente paso es derivar la ecuación $\phi(\bar{\omega})$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\phi(\bar{\omega}) &= \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{1}{\sigma_{\omega}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right)^2\right] \\
\phi'(\bar{\omega}) &= \left[\frac{\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right)^2} \right) \left(-\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}^2}\right) \frac{1}{\bar{\omega}} \right) \bar{\omega}\sigma_{\omega}\sqrt{2\pi} - \sigma_{\omega}\sqrt{2\pi} \left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right)^2} \right)}{(\bar{\omega}\sigma_{\omega}\sqrt{2\pi})^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\phi'(\bar{\omega}) = \left[\frac{-\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right)^2} \right) \ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\bar{\omega}\sigma_{\omega}\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\bar{\omega}\sigma_{\omega}^2} \right] - \left[\frac{-\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right)^2} \right)}{\bar{\omega}^2\sigma_{\omega}\sqrt{2\pi}} \right]$$

$$\phi'(\bar{\omega}) = \frac{-\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right)^2} \right)}{\bar{\omega}\sigma_{\omega}\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\bar{\omega}\sigma_{\omega}^2} + \frac{1}{\bar{\omega}} \right]$$

Reemplazando a $\phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{\omega}\sigma_{\omega}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right)^2}$, se tiene que

$$\phi'(\bar{\omega}) = -\phi(\bar{\omega}) \left[\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\bar{\omega}\sigma_{\omega}^2} + \frac{1}{\bar{\omega}} \right]$$

$$\phi'(\bar{\omega}) = \frac{-\phi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}} \left[\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_{\omega}}{\sigma_{\omega}^2} + 1 \right]$$

Dado que la media de la distribución log-normal es $\mu_{\omega} = -\frac{1}{2}\sigma_{\omega}^2$, se tiene que:

$$\phi'(\bar{\omega}) = \frac{-\phi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}} \left[\frac{\ln(\bar{\omega}) + \frac{1}{2}\sigma_{\omega}^2}{\sigma_{\omega}^2} + 1 \right] \quad (3.96)$$

3.2 Desarrollo matemático y metodología del modelo con fricción en el mercado de bienes

Contenido

- C.3.1 Solución del modelo en niveles
- C.3.2 Linealización del sistema de ecuaciones
- C.3.3 Introducción de las expectativas de aprendizaje por medio de la ecuación de Euler de los hogares
- C.3.4 Formación de creencias de los agentes en el contexto del aprendizaje dentro del modelo

3.2.1 Solución del modelo en niveles

En esta economía cerrada hay hogares, empresarios y fondos mutuos. A su vez, los empresarios son propietarios de las firmas y son neutrales al riesgo. Los empresarios pueden tomar recursos adicionales a los propios (patrimonio, n_t) a través de fondos mutuos que obtienen recursos provenientes de los hogares. Los empresarios, cuyo número es infinito, pagan una prima de riesgo.

Hogares

El problema de los hogares es maximizar su nivel de consumo, trabajo y ahorro, tal que:

$$\max_{(c_t, l_t, k_{t+1})_0^\infty} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} u(c_t, l_t)$$

sujeto a: $c_t + (m_t - n_t) = w_t l_t + r_t k_t + (R_t - 1)b_t$

Donde, en su orden de escritura en la ecuación, c_t es el consumo de los hogares; l_t , el trabajo de los hogares; m_t , el tamaño del proyecto de inversión; n_t , el patrimonio neto inicial de los empresario; R_t , la tasa bruta cobrada por los créditos de los hogares a las empresas, los cuales son intermediados a través de un fondo mutuo; y b_t , el monto

de créditos de los hogares a las empresas.

Cada una de las firmas del continuo de firmas tiene un riesgo idiosincrático y los créditos son intermediados por el fondo mutuo, de tal modo que los hogares no enfrentan el riesgo de los créditos. Asimismo, los créditos son hechos de forma intra-período, por lo cual, se sigue un equilibrio planteado por Carlstrom and Fuerst (1998), en el cual $R_t = 1$.

De otro lado, $(m_t - n_t)$ denota el ahorro de los hogares valuado al nivel de precios actual y $(m_t - n_t) = k_{t+1} - (1 - \delta)k_t$, donde k_{t+1} y k_t son el capital de los hogares en el período $t + 1$ y t , respectivamente; y δ es la tasa de depreciación del capital.

Por tanto, la restricción se puede escribir como: $c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = w_t l_t + r_t k_t$.

Al reescribir el problema anterior, se tiene que:

$$\max_{(c_t, l_t, k_{t+1})_{\delta}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} u(c_t, l_t) \quad (3.97)$$

$$\text{sujeto a: } c_t + k_{t+1} = w_t l_t + r_t k_t + (1 - \delta)k_t \quad (3.98)$$

Una vez definido el problema de los hogares, se puede solucionar mediante el lagrangiano de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(c_t, l_t) - \lambda_t [c_t + k_{t+1} - w_t l_t - r_t k_t - (1 - \delta)k_t]] \quad (3.99)$$

A partir del lagrangiano, se pueden hallar las condiciones de primer orden, y se consigue que:

$$[c_t] : u'_c(c_t, l_t) - \lambda_t = 0 \quad (3.100)$$

$$[l_t] : u'_l(c_t, l_t) + \lambda_t w_t = 0 \quad (3.101)$$

$$[k_{t+1}] : -\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} ((1 - \delta) + r_{t+1}) = 0 \quad (3.102)$$

$$[\lambda_t] : c_t + k_{t+1} - w_t l_t - r_t k_t - (1 - \delta)k_t = 0 \quad (3.103)$$

Reemplazando la ecuación (3.100) en la ecuación (3.102) y considerando que $\lambda_{t+1} = u'_c(c_{t+1}, l_{t+1})$, se halla la siguiente ecuación intertemporal de Euler que relaciona el

consumo presente con el consumo futuro:

$$u'_c(c_t, l_t) = \beta u'_c(c_{t+1}, l_{t+1}) [(1 - \delta) + r_{t+1}] \quad (3.104)$$

Luego, al combinar las ecuaciones (3.100) y (3.101), se halla la ecuación intratemporal que marca la decisión entre consumo y trabajo ⁵.

$$-\frac{u'_l(c_t, l_t)}{u'_c(c_t, l_t)} = w_t \quad (3.105)$$

Firmas

Las firmas tienen el problema de maximizar su beneficio dado un nivel de producción con una tecnología Cobb-Douglas. Por consiguiente,

$$\max_{(k_t, l_t)} y_t - r_t k_t - w_t l_t \quad (3.106)$$

$$\text{sujeto a: } y_t = \frac{F(k_t, l_t)}{p_t} \quad (3.107)$$

Donde y_t es el ingreso de producción y p_t denota es el *markup* de precios de bienes finales. $F(k_t, l_t)$ se define de la siguiente forma:

$$F(k_t, l_t) = \theta_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha} \quad (3.108)$$

$$\theta_t = \theta_{t-1}^\rho + \epsilon_t \quad (3.109)$$

La ecuación (3.109) define el choque de productividad que recibirá la firma en el periodo t. Donde $\epsilon_t \sim N(0, 1)$.

El siguiente paso es reemplazar la restricción en la función objetivo en (3.106), de la siguiente forma:

$$\max_{(k_t, l_t)} \frac{F(k_t, l_t)}{p_t} - r_t k_t - w_t l_t \quad (3.110)$$

⁵La función de utilidad específica empleada es $\ln(c_t) + v(1 - l_t)$.

Al derivar con respecto al capital k_t , se tiene:

$$[k_t] : \frac{F'_k(k_t, l_t)}{p_t} - r_t = 0$$

Al derivar con respecto al trabajo l_t , se tiene:

$$[l_t] : \frac{F'_l(k_t, l_t)}{p_t} - w_t = 0$$

En consecuencia, el resultado del problema de las firmas es el siguiente:

$$r_t = \frac{F'_k(k_t, l_t)}{p_t} = \alpha \frac{y_t}{k_t p_t} \quad (3.111)$$

$$w_t = \frac{F'_l(k_t, l_t)}{p_t} = (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t p_t} \quad (3.112)$$

Empresarios

Los empresarios, que son neutrales al riesgo, financian el presupuesto de las firmas que financian la producción en el periodo t con recursos propios y recursos que provienen de los hogares a través del fondo mutuo. Estos recursos son invertidos en la producción de bienes de capital.

Cada empresario que financia la producción de sus bienes finales, observa un choque idiosincrático de tecnología (ω_t) y, dependiendo del resultado del choque, toma su decisión de consumo. Cuando $\omega_t < \bar{\omega}_t$, el empresario no puede pagar y se declara en bancarrota, por lo cual no consume. En tal caso, su proyecto de inversión es monitoreado y adquirido por el fondo mutuo. Cuando $\omega_t \geq \bar{\omega}_t$, el empresario paga el préstamo y obtiene ingresos para consumir.

En síntesis:

$\omega_t \geq \bar{\omega}_t$ Empresario paga el préstamo y usa sus ingresos

$\omega_t < \bar{\omega}_t$ Empresario se declara en bancarrota y se queda sin ingreso

$\bar{\omega}_t$ es el valor crítico del éxito del proyecto y es una variable aleatoria con distribución log-normal e independiente e idénticamente distribuida en el tiempo. $\bar{\omega}_t \sim \text{LogN}(-\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2)$, $\Phi(\bar{\omega}_t)$ es la función de distribución, y $\phi(\bar{\omega}_t)$ es la función de densidad de $\bar{\omega}_t$. Las siguientes son sus formas funcionales.

$$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\bar{\omega}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\log(\omega) + \frac{1}{2}\sigma^2)^2}{\sigma^2}} d\omega \quad (3.113)$$

$$\phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{\omega}\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\log(\bar{\omega}) - \bar{x})^2}{\sigma^2}} \quad (3.114)$$

La siguiente ecuación será de utilidad para la linealización.

$$\phi'(\bar{\omega}) = \frac{-\phi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}} \left[\frac{\log(\bar{\omega}) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma^2} + 1 \right] \quad (3.115)$$

El desarrollo matemático de las anteriores tres ecuaciones es el mismo del Función de distribución normal de la sección anterior.

Recuérdese que el proyecto del empresario es financiado con recursos provenientes de los hogares por el intermedio del fondo mutuo. En tal sentido, los hogares tienen derecho a una participación del producto generado por el empresario. En consecuencia, se definen las siguientes ecuaciones:

$$g(\bar{\omega}_t) = \int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \Phi\mu + [1 - \Phi]\bar{\omega}_t \quad (3.116)$$

$$f(\bar{\omega}_t) = \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \omega \Phi(d\omega) - [1 - \Phi]\bar{\omega}_t \quad (3.117)$$

Donde $g(\bar{\omega}_t)$ es la participación de la producción que reciben los hogares a través del fondo mutuo, por prestar recursos. Por su parte, $f(\bar{\omega}_t)$ es la participación de la producción que recibe el empresario.

Al derivar y utilizar la regla de Leibniz, es posible derivar las anteriores ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
g'(\bar{\omega}_t) &= \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \left[\int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \Phi\mu + [1 - \Phi]\bar{\omega}_t \right] \\
g'(\bar{\omega}_t) &= \bar{\omega}\Phi'(\bar{\omega}) - \mu\Phi'(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega})) - \bar{\omega}\Phi'(\bar{\omega}) = -\mu\Phi'(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega})) \\
f'(\bar{\omega}_t) &= \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \left[\int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \omega \Phi(d\omega) - [1 - \Phi]\bar{\omega}_t \right] \\
f'(\bar{\omega}_t) &= -\bar{\omega}\Phi'(\bar{\omega}) - (1 - \Phi(\bar{\omega})) + \bar{\omega}\Phi'(\bar{\omega}) = -(1 - \Phi(\bar{\omega}))
\end{aligned}$$

Las anteriores dos funciones más el costo de monitoreo ($\Phi(\bar{\omega})\mu$) de la economía suman la unidad, es decir, todo el producto:

$$f(\bar{\omega}_t) + g(\bar{\omega}_t) + \Phi\mu = 1$$

$$f(\bar{\omega}_t) + g(\bar{\omega}_t) = [1 - \Phi\mu] \quad (3.118)$$

La parte derecha de la ecuación (3.118) es el costo esperado de bancarrota ($\Phi(\bar{\omega})\mu$) a raíz de los costos de monitoreo (μ). Se asimila a la pérdida de eficiencia de la economía por la falta de información completa.

$$\pi_t = -\Phi\mu \quad (3.119)$$

El término $[1 - \Phi]$ es un término que implica una transferencia del prestatario al prestamista según la probabilidad de éxito del proyecto en función del valor de ω .

Luego de definir el comportamiento del prestamista (hogares por medio del fondo mutuo) y del prestatario (empresario), se procede a solucionar el problema de este último, el cual consiste en maximizar su beneficio esperado.⁶

⁶Los empresarios declarados en bancarrota tienen un beneficio de cero ya que toda su producción se va al fondo de capital mutuo.

$$\begin{aligned}
\text{Beneficio esperado} &= \underbrace{p_t m_t \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \omega \Phi(d\omega)}_{\text{Ingresos del empresario}} - \underbrace{\int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} (m_t - n_t) \Phi(d\omega)}_{\text{Pago del préstamo}} \\
&= p_t m_t \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \omega \Phi(\omega)(d\omega) - \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} p_t m_t \bar{\omega}_t \Phi(\omega)(d\omega) \\
&= p_t m_t \left(\int_{\bar{\omega}}^{\infty} \omega \Phi(d\omega) - \bar{\omega}_t \int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} \Phi(d\omega) \right) \\
&= p_t m_t \left(\int_{\bar{\omega}}^{\infty} \omega \Phi(d\omega) - \bar{\omega}_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)] \right) \\
&= p_t m_t f(\bar{\omega}_t)
\end{aligned}$$

El beneficio esperado debe ser mayor a cero, de lo contrario el empresario decidirá no invertir y conservar su patrimonio inicial n_t . Por consiguiente, el beneficio esperado debe ser mayor a su patrimonio inicial, de la siguiente forma:

$$\underbrace{p_t m_t f(\bar{\omega}_t)}_{\text{Beneficio esperado del empresario}} > \underbrace{n_t}_{\text{Patrimonio inicial}}$$

Condición de retorno nulo para el fondo mutuo

Antes de pasar a analizar la maximización de beneficios del empresario, se analiza la condición de retorno nulo del fondo mutuo, el cual no obtiene margen alguno por su intermediación, ya que se asume competencia perfecta. En tal sentido, los ingreso del fondo es igual a sus costos. El fondo mutuo es financiado en su totalidad con recursos de los hogares. Asimismo, como se dijo anteriormente, el fondo mutuo realiza préstamos intra-período y no recibe ni paga intereses del préstamo.

Por tanto, si el fondo mutuo obtiene $m_t - n_t$ unidades de consumo por parte de los hogares, este debe devolver la misma cantidad de unidades a los prestamistas (hogares).

$$E(\text{Ingreso}) = E(\text{Costos})$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{\bar{\omega}_t}^{\infty} (m_t - n_t)\Phi(d\omega)}_{\text{Ingreso (pago del préstamo)}} + \underbrace{p_t m_t \left(\int_{\infty}^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \int_{\infty}^{\bar{\omega}} \mu \Phi(\omega) \right)}_{\text{Ingreso (bancarrota)}} \\
&= (m_t - n_t)[1 - \Phi(\bar{\omega}_t)] + p_t m_t \left(\int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \mu \Phi(\bar{\omega}_t) \right) \\
&= p_t m_t \bar{\omega}_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)] + p_t m_t \left(\int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \mu \Phi(\bar{\omega}_t) \right) \\
&= p_t m_t \left(\int_0^{\bar{\omega}_t} \omega \Phi(d\omega) - \mu \Phi(\bar{\omega}_t) + \bar{\omega}_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)] \right) \\
&= p_t m_t g(\bar{\omega}_t)
\end{aligned}$$

En consecuencia, la condición de retorno nulo para el fondo mutuo, y a su vez para los hogares, es:

$$\underbrace{p_t m_t g(\bar{\omega}_t)}_{\text{Ingreso esperado del prestamista}} = \underbrace{m_t - n_t}_{\text{Costo esperado}}$$

Maximización de beneficio de los empresarios

Una vez conocidas las condiciones a las cuales se enfrenta el empresario, se define el problema de maximización del beneficio. El problema está sujeto a la condición de retorno nulo por parte del fondo mutuo (que presta los recursos de los hogares).

$$\max_{\bar{\omega}_t, m_t} p_t m_t f(\bar{\omega}_t) \tag{3.120}$$

$$\text{sujeto a: } p_t m_t g(\bar{\omega}_t) = m_t - n_t \tag{3.121}$$

El lagrangiano del problema anterior es:

$$\mathcal{L} = p_t m_t f(\bar{\omega}_t) - \lambda_t (p_t m_t g(\bar{\omega}_t) - m_t + n_t) \tag{3.122}$$

Las condiciones de primer orden están dadas por

$$\bar{\omega}_t : p_t m_t f'(\bar{\omega}_t) - \lambda p_t m_t g'(\bar{\omega}_t) = 0 \tag{3.123}$$

$$m_t : p_t f(\bar{\omega}_t) - \lambda (p_t g(\bar{\omega}_t) - 1) = 0 \tag{3.124}$$

$$\lambda_t : p_t m_t g(\bar{\omega}_t) - m_t + n_t = 0 \quad (3.125)$$

Al combinar las ecuaciones (3.123) y (3.124), se tiene:

$$p_t f(\bar{\omega}_t) = \frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})} (p_t g(\bar{\omega}_t) - 1) \quad (3.126)$$

De la ecuación (3.125), se tiene:

$$m_t = \frac{n_t}{1 - p_t g(\bar{\omega}_t)} \quad (3.127)$$

De la ecuación (3.126), es posible encontrar la ecuación del contrato óptimo de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} p_t f(\bar{\omega}_t) &= \frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})} p_t g(\bar{\omega}_t) - \frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})} \\ p_t \left[f(\bar{\omega}_t) - \frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})} g(\bar{\omega}_t) \right] &= -\frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})} \\ p_t &= \frac{-\frac{f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega})}}{\frac{g'(\bar{\omega}_t)f(\bar{\omega}_t) - f'(\bar{\omega}_t)g(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega}_t)}} \\ p_t &= \frac{-f'(\bar{\omega}_t)}{g'(\bar{\omega}_t)f(\bar{\omega}_t) - f'(\bar{\omega}_t)g(\bar{\omega}_t)} \\ p_t &= \frac{1}{\frac{f'(\bar{\omega}_t)g(\bar{\omega}_t)}{f'(\bar{\omega}_t)} - \frac{g'(\bar{\omega}_t)f(\bar{\omega}_t)}{f'(\bar{\omega}_t)}} \\ p_t &= \frac{1}{g(\bar{\omega}_t) - \frac{g'(\bar{\omega}_t)f(\bar{\omega}_t)}{f'(\bar{\omega}_t)}} \end{aligned}$$

Como se tiene que:

$$g'(\bar{\omega}_t) = -\mu\phi(\bar{\omega}_t) + (1 - \Phi(\bar{\omega}_t))$$

$$f'(\bar{\omega}_t) = -(1 - \Phi(\bar{\omega}_t))$$

Se reemplazan estas dos ecuaciones y teniendo en cuenta que $g(\bar{\omega}_t) = (1 - \Phi(\bar{\omega}_t\mu)) - f(\bar{\omega}_t)$, se consigue que:

$$p_t = \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t\mu)) - f(\bar{\omega}_t) + \frac{(-\mu\phi(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega}_t)))f(\bar{\omega}_t)}{f'(\bar{\omega}_t)}}$$

$$p_t = \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t \mu)) - f(\bar{\omega}_t) \left[1 + \frac{-\mu \phi(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega}_t))}{f'(\bar{\omega}_t)} \right]}$$

$$p_t = \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t \mu)) - f(\bar{\omega}_t) \left[\frac{f'(\bar{\omega}_t) + (1 - \Phi(\bar{\omega}_t)) - \mu \phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega}_t)} \right]}$$

Como $f'(\bar{\omega}_t) = -(1 - \Phi(\bar{\omega}_t))$, se obtiene:

$$p_t = \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t \mu)) + \frac{f(\bar{\omega}_t) \mu \phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega}_t)}} \quad (3.128)$$

La ecuación (3.128) describe el contrato financiero óptimo.

Decisión de consumo de los empresarios

Una vez los empresarios reciben sus ingresos, toman su decisión de consumo teniendo en cuenta su restricción presupuestaria. Esto se plantea en el siguiente problema:

$$\max_{e_t, z_{t+1}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma \beta)^t e_t \quad (3.129)$$

$$\text{sujeto a: } e_t + z_{t+1} = p_t m_t f(\bar{\omega}_t) \quad (3.130)$$

Donde e_t es el consumo de los empresarios y z_{t+1} es su capital en el período $t + 1$ ⁷. Ambas variables representan la suma de los gastos. La restricción plantea que los gastos de los empresarios deben ser iguales a los ingresos dados por $p_t m_t f(\bar{\omega}_t)$. El parámetro γ denota el factor de descuento adicional para los empresarios, tal que $0 < \gamma < 1$.

El lagrangiano del anterior problema es:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma \beta)^t e_t - \lambda_t [e_t + z_{t+1} - p_t m_t f(\bar{\omega}_t)] \quad (3.131)$$

Reemplazando la ecuación (3.127) en la ecuación anterior, se consigue:

⁷El capital de los hogares es k_t y el capital de los empresarios es z_t .

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma\beta)^t e_t - \lambda_t [e_t + z_{t+1} - p_t \left[\frac{n_t}{1 - p_t g(\bar{\omega}_t)} \right] f(\bar{\omega}_t)] \quad (3.132)$$

El patrimonio neto de los empresarios al principio del período consiste en la valoración del mercado de su capital acumulado (z_t). De manera que es posible definirlo de la forma:

$$n_t = z_t [(1 - \delta) + r_t] \quad (3.133)$$

Al reemplazar la ecuación (3.133) en el lagrangiano, se obtiene:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} (\gamma\beta)^t e_t - \lambda_t [e_t + z_{t+1} - p_t \left[\frac{z_t [(1 - \delta) + r_t]}{1 - p_t g(\bar{\omega}_t)} \right] f(\bar{\omega}_t)] \quad (3.134)$$

En consecuencia, las condiciones de primer orden son:

$$e_t : 1 - \lambda_t = 0 \quad (3.135)$$

$$z_{t+1} : -\lambda_t + \gamma\beta\lambda_{t+1} \left(p_{t+1} \frac{1}{1 - p_{t+1} g(\bar{\omega}_{t+1})} (r_{t+1} + (1 - \delta)) f(\bar{\omega}_{t+1}) \right) = 0 \quad (3.136)$$

$$\lambda_t : e_t + z_{t+1} - p_t m_t f(\bar{\omega}_t) = 0 \quad (3.137)$$

Al combinar (3.135) y (3.136), se tiene la ecuación de *Euler* para los empresarios.

$$1 = \gamma\beta \left([(1 - \delta) + r_{t+1}] \frac{p_{t+1} f(\bar{\omega}_{t+1})}{1 - p_{t+1} g(\bar{\omega}_{t+1})} \right) \quad (3.138)$$

Ecuaciones de cierre del modelo

Para cerrar el modelo, se introducen las siguientes dos condiciones que implican que el mercado se vacía. La ecuación (3.139) se cierra el mercado de bienes de consumo, y la ecuación (3.140) cierra el mercado de bienes de capital.

$$c_t + e_t + i_t = y_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)\mu] \quad (3.139)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \quad (3.140)$$

Finalmente, a partir de (3.127) valuada por el *markup*, se define el total de producción generada por los empresarios, así:

$$p_t m_t \equiv y_t = \frac{p_t n_t}{1 - p_t g(\bar{\omega}_t)} \quad (3.141)$$

3.2.2 Linealización del sistema de ecuaciones

Se aplica la siguiente fórmula de linealización $f(x) \approx f'(\bar{x})\hat{x}_t$, donde $\hat{x} = x_t - \bar{x}$ es la desviación con respecto al estado estacionario.

Consumo

De la ecuación de Euler de los hogares (3.104) de la forma:

$$u'_c(c_t, l_t) = \beta u'_c(c_{t+1}, l_{t+1}) [(1 - \delta) + r_{t+1}]$$

Dado que $u'_c(c_t, l_t) = \frac{1}{c_t}$, se tiene que:

$$\frac{1}{c_t} = \beta \frac{1}{c_{t+1}} [(1 - \delta) + r_{t+1}]$$

Aplicando la formula de linealización, se tiene que:

$$\frac{1}{\bar{c}^2} \hat{c}_t = \frac{\beta (1 - \delta + \bar{r})}{\bar{c}^2} \hat{c}_{t+1} - \frac{\beta}{\bar{c}} \hat{r}_{t+1}$$

$$\hat{c}_t = \beta (1 - \delta + \bar{r}) \hat{c}_{t+1} - \beta \bar{c} \hat{r}_{t+1}$$

Dado que el estado estacionario de la ecuación de Euler de los hogares puede ser escrito de la siguiente forma, $1 = \beta (1 - \delta + \bar{r})$, se tiene que

$$\hat{c}_t = \hat{c}_{t+1} - \beta \bar{c} \hat{r}_{t+1} \quad (3.142)$$

Trabajo

De la ecuación de productividad marginal del trabajo (3.112)

$$w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t p_t}$$

$$w_t p_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t}$$

$$\bar{p}\hat{w}_t + \bar{w}\hat{p}_t = \frac{1-\alpha}{\bar{l}}\hat{y}_t - \frac{(1-\alpha)\bar{y}}{\bar{l}^2}\hat{l}_t$$

Despejando la variable trabajo (\hat{l}_t), se tiene:

$$\frac{\bar{l}^2\bar{p}}{(1-\alpha)\bar{y}}\hat{w}_t + \frac{\bar{l}^2\bar{w}}{(1-\alpha)\bar{y}}\hat{p}_t = \frac{\bar{l}}{\bar{y}}\hat{y}_t - \hat{l}_t \quad (3.143)$$

$$\hat{l}_t = -\frac{\bar{l}^2\bar{p}}{(1-\alpha)\bar{y}}\hat{w}_t - \frac{\bar{l}^2\bar{w}}{(1-\alpha)\bar{y}}\hat{p}_t + \frac{\bar{l}}{\bar{y}}\hat{y}_t \quad (3.144)$$

Salarios

De la ecuación intratemporal de los hogares (3.105):

$$w_t = -\frac{u'_l(c_t, l_t)}{u'_c(c_t, l_t)}$$

Donde $u'_c(c_t, l_t) = \frac{1}{c_t}$ y $u'_l(c_t, l_t) = -\nu$. Reemplazando las derivadas, se tiene que

$$w_t = \nu c_t$$

Aplicando la formula de linealización, se tiene que

$$\hat{w}_t = \nu\hat{c}_t \quad (3.145)$$

Rendimientos de capital

De la ecuación de productividad del capital (3.111):

$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t p_t}$$

$$r_t p_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$$

Al aplicar la fórmula de linealización se tiene:

$$\bar{p}\hat{r}_t + \bar{r}\hat{p}_t = \frac{\alpha}{\bar{k}}\hat{y}_t - \frac{\alpha\bar{y}}{\bar{k}^2}\hat{k}_t$$

$$\hat{r}_t = \frac{\alpha}{\bar{k}\bar{p}}\hat{y}_t - \frac{\alpha\bar{y}}{\bar{k}^2\bar{p}}\hat{k}_t - \frac{\bar{r}}{\bar{p}}\hat{p}_t \quad (3.146)$$

Inversión

A partir de la ecuación:

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = w_t l_t + r_t k_t$$

Combinando con la ecuación de movimiento de capital $k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$, se tiene que:

$$c_t + i_t = w_t l_t + r_t k_t$$

Ahora, dada la ecuación (3.106) de la forma

$$y_t = r_t k_t + w_t l_t$$

Se tiene que

$$c_t + i_t = y_t$$

Dado que $y_t = \frac{p_t n_t}{1 - p_t g(\bar{\omega}_t)}$, se puede escribir la anterior ecuación de la siguiente forma:

$$c_t + i_t = \frac{n_t p_t}{1 - p_t g(\bar{\omega}_t)} \quad (3.147)$$

Lo anterior se hace con el fin de ajustar el sistema de ecuaciones para que no tenga dos definiciones de la misma variable, en este caso y_t , y proceder a programarla.

Aplicando la fórmula de linealización a la anterior ecuación, se tiene que:

$$\hat{c}_t + \hat{i}_t = \frac{\bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{n}_t + \frac{\bar{n}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{p}_t + \frac{\bar{n}\bar{p}g(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{p}_t + \frac{\bar{p}\bar{n}g'(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{\omega}_t$$

Factorizando términos comunes se tiene que:

$$\hat{c}_t + \hat{i}_t = \frac{\bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{n}_t + \left[\frac{\bar{n}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} + \frac{\bar{n}\bar{p}g(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \right] \hat{p}_t + \frac{\bar{p}\bar{n}g'(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{\omega}_t$$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_t + \hat{i}_t &= \frac{\bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{n}_t + \left[\frac{\bar{n}(1 - \bar{p}g(\bar{\omega})) + \bar{n}\bar{p}g(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \right] \hat{p}_t + \frac{\bar{p}\bar{n}g'(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{\omega}_t \\
\hat{c}_t + \hat{i}_t &= \frac{\bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{n}_t + \left[\frac{\bar{n} - \bar{n}\bar{p}g(\bar{\omega}) + \bar{n}\bar{p}g(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \right] \hat{p}_t + \frac{\bar{p}\bar{n}g'(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{\omega}_t \\
\hat{c}_t + \hat{i}_t &= \frac{\bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{n}_t + \left[\frac{\bar{n}}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \right] \hat{p}_t + \frac{\bar{p}\bar{n}g'(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{\omega}_t \\
\hat{i}_t &= \frac{\bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{n}_t + \left[\frac{\bar{n}}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \right] \hat{p}_t + \frac{\bar{p}\bar{n}g'(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{\omega}_t - \hat{c}_t
\end{aligned} \tag{3.148}$$

Función de producción

A la ecuación $y_t = \theta_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}$, se le aplica la fórmula de linealización:

$$\hat{y}_t = \bar{k}^\alpha \bar{l}^{1-\alpha} \hat{\theta}_t + \alpha \bar{\theta} \bar{k}^{\alpha-1} \bar{l}^{1-\alpha} \hat{k}_t + (1 - \alpha) \bar{\theta} \bar{k}^\alpha \bar{l}^{-\alpha-1} \hat{l}_t$$

Dado que el estado estacionario de la variable del producto (y_t) es:

$$\bar{y} = \bar{\theta} \bar{k}^\alpha \bar{l}^{1-\alpha}$$

$$\hat{y}_t = \frac{\bar{y}}{\bar{\theta}} \hat{\theta}_t + \alpha \frac{\bar{y}}{\bar{k}} \hat{k}_t + (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{l}} \hat{l}_t$$

Consumo de los empresarios

De la ecuación de equilibrio macroeconómico $c_t + e_t + i_t = y_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t) \mu]$ se obtiene la ecuación $e_t = y_t [1 - \Phi(\bar{\omega}_t) \mu] - c_t - i_t$, a la cual se le aplica la fórmula de linealización:

$$\hat{e}_t = (1 - \Phi(\bar{\omega}) \mu) \hat{y}_t - [\bar{y} \mu \phi(\bar{\omega})] \hat{\omega}_t - \hat{c}_t - \hat{i}_t \tag{3.149}$$

Patrimonio de los empresarios

A la ecuación de patrimonio neto $n_t = z_t [(1 - \delta) + r_t]$, se le aplica la fórmula de linealización, tal que:

$$\hat{n}_t = (1 - \delta + \bar{r}) \hat{z}_t + \bar{z} \hat{r}_t \tag{3.150}$$

Ecuación de Euler de los empresarios

A la ecuación:

$$1 = \gamma\beta \left([(1 - \delta) + r_{t+1}] \frac{p_{t+1}f(\bar{\omega}_{t+1})}{1 - p_{t+1}g(\bar{\omega}_{t+1})} \right)$$

$$1 = \frac{\gamma\beta(1 - \delta)p_{t+1}f(\bar{\omega}_{t+1})}{1 - p_{t+1}g(\bar{\omega}_{t+1})} + \frac{\gamma\beta r_{t+1}p_{t+1}f(\bar{\omega}_{t+1})}{1 - p_{t+1}g(\bar{\omega}_{t+1})}$$

Se le aplica la fórmula de linealización:

$$0 = \frac{\gamma\beta(1 - \delta)f(\bar{\omega})}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{p}_{t+1} + \frac{\gamma\beta(1 - \delta)\bar{p}f'(\bar{\omega})}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{\omega}_{t+1} + \frac{\gamma\beta(1 - \delta)\bar{p}f(\bar{\omega})g(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{p}_{t+1} + \frac{\gamma\beta(1 - \delta)\bar{p}^2 f(\bar{\omega})g'(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{\omega}_{t+1}$$

$$+ \frac{\gamma\beta f(\bar{\omega})\bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{r}_{t+1} + \frac{\gamma\beta \bar{r}f(\bar{\omega})}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{p}_{t+1} + \frac{\gamma\beta \bar{r}\bar{p}f'(\bar{\omega})}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{\omega}_{t+1} + \frac{\gamma\beta \bar{r}f(\bar{\omega})\bar{p}g(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{p}_{t+1} + \frac{\gamma\beta \bar{r}f(\bar{\omega})\bar{p}^2 g'(\bar{\omega})}{(1 - \bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{\omega}_{t+1}$$

Factorizando los términos comunes de las anteriores ecuaciones, se tiene:

$$0 = \frac{\beta\gamma f(\bar{\omega})}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \left((1 - \delta) + \frac{g(\bar{\omega})(1 - \delta)\bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} + \bar{r} + \frac{\bar{r}\bar{p}g(\bar{\omega})}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \right) \hat{p}_{t+1} + \frac{\beta\gamma f(\bar{\omega})\bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{r}_{t+1}$$

$$+ \frac{\beta\gamma \bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \left((1 - \delta) f'(\bar{\omega}) + \frac{g'(\bar{\omega})f(\bar{\omega})(1 - \delta)\bar{p}}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} + \bar{r} f'(\bar{\omega}) + \frac{g'(\bar{\omega})\bar{p}\bar{r}f(\bar{\omega})}{1 - \bar{p}g(\bar{\omega})} \right) \hat{\omega}_{t+1}$$
(3.151)

Pérdida de eficiencia

A la ecuación $\pi_t = -\Phi(\omega_t)\mu$, se le aplica la fórmula de linealización, así:

$$\hat{\pi}_t = -\phi(\bar{\omega})\mu\hat{\omega}_t$$
(3.152)

Bancarrota

La ecuación de contrato óptimo:

$$p_t = \frac{1}{(1 - \Phi(\bar{\omega}_t\mu)) + \frac{f(\bar{\omega}_t)\mu\phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega}_t)}}$$

Se puede escribir de esta forma tal que:

$$\frac{1}{p_t} = (1 - \Phi(\bar{\omega}_t)\mu) + \frac{f(\bar{\omega}_t)\mu\phi(\bar{\omega})}{f'(\bar{\omega}_t)}$$

Dado que $f'(\omega) = -(1 - \Phi(\omega_t))$, es posible reescribir la expresión anterior:

$$\frac{1}{p_t} = (1 - \Phi(\bar{\omega}_t)\mu) - \frac{f(\bar{\omega}_t)\mu\phi(\bar{\omega})}{(1 - \Phi(\omega_t))}$$

Al aplicar la fórmula de linealización se tiene que:

$$-\frac{1}{\bar{p}^2}\hat{p}_t = -\phi(\bar{\omega})\mu\hat{\omega}_t - \frac{f'(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))}\hat{\omega}_t - \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi'(\bar{\omega})}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))}\hat{\omega}_t - \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})^2}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))^2}\hat{\omega}_t$$

Factorizando $\hat{\omega}_t$ en el lado derecho de la ecuación:

$$-\frac{1}{\bar{p}^2}\hat{p}_t = -\left[\phi(\bar{\omega})\mu + \frac{f'(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi'(\bar{\omega})}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})^2}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))^2}\right]\hat{\omega}_t$$

Multiplicando a ambos lados por -1 y reordenando términos, se tiene que

$$\left[\phi(\bar{\omega})\mu + \frac{f'(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi'(\bar{\omega})}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})^2}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))^2}\right]\hat{\omega}_t = \frac{1}{\bar{p}^2}\hat{p}_t$$

$$\hat{\omega}_t = \frac{1}{\left[\phi(\bar{\omega})\mu + \frac{f'(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi'(\bar{\omega})}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})^2}{(1 - \Phi(\bar{\omega}))^2}\right]\bar{p}^2}\hat{p}_t \quad (3.153)$$

Función de distribución de probabilidad log-normal

Dada la función de distribución acumulada de la variable aleatoria ω :

$$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\sigma_\omega\sqrt{2\pi}} \int_0^{\bar{\omega}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_\omega}{\sigma_\omega}\right)^2\right] d\omega$$

Es posible definir su derivada como la función de densidad de probabilidad de la forma:

$$\phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{1}{\sigma_\omega\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\bar{\omega}) - \mu_\omega}{\sigma_\omega}\right)^2\right]$$

Para ver el desarrollo matemático de las dos funciones anteriores, ver el Función de distribución normal.

Capital de los empresario

Dada la ecuación (3.130):

$$z_{t+1} = y_t f(\bar{\omega}_t) - e_t$$

Al aplicar la fórmula de linealización, se tiene que

$$\hat{z}_{t+1} = [\bar{y} f'(\bar{\omega})] \hat{\omega}_t + f(\bar{\omega}) \hat{y}_t - \hat{e}_t \quad (3.154)$$

Capital de los hogares

A la ley de movimiento del capital $k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$, se le aplica la fórmula de linealización y se tiene que

$$\hat{k}_{t+1} = (1 - \delta) \hat{k}_t + \hat{i}_t \quad (3.155)$$

Choque de productividad

A la ecuación $\theta_t = \rho \theta_{t-1} + \epsilon_t$, se le aplica la fórmula de linealización:

$$\hat{\theta}_t = \rho \hat{\theta}_{t-1} + \epsilon_t \quad (3.156)$$

A continuación se presentan las ecuaciones de participación de los empresarios y de los hogares en la producción. Estas ecuaciones están determinadas de forma exógena al sistema de ecuaciones, y se definen de forma no linealizada.

Participación del empresario

De la ecuación de participación total $f(\bar{\omega}_t) + g(\bar{\omega}_t) = [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)\mu]$, se obtiene que $f(\bar{\omega}_t) = [1 - \Phi(\bar{\omega}_t)\mu] - g(\bar{\omega}_t)$

Ahora, se define la desviación del estado estacionario de la participación del empresario tal que:

$$f(\hat{\omega}_t) \equiv -\Phi'(\bar{\omega})\mu \hat{\omega}_t - g'(\bar{\omega}) \hat{\omega}_t$$

$$f(\hat{\omega}_t) = -\Phi'(\bar{\omega})\mu \hat{\omega}_t - g'(\bar{\omega}) \hat{\omega}_t$$

Dado que $\Phi'(\bar{\omega}) = \phi(\bar{\omega})$, se tiene que

$$f(\hat{\bar{\omega}}_t) = -(g'(\bar{\omega}) + \mu\phi(\bar{\omega}))\hat{\bar{\omega}}_t$$

Si se reemplaza a $g'(\bar{\omega}_t) = -\mu\phi(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega}))$ dentro de la ecuación anterior, se tiene

$$f(\hat{\bar{\omega}}_t) = -(-\mu\phi(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega})) + \mu\phi(\bar{\omega}))\hat{\bar{\omega}}_t$$

$$f(\hat{\bar{\omega}}_t) = -(1 - \Phi(\bar{\omega}))\hat{\bar{\omega}}_t$$

Dado que $f'(\bar{\omega}_t) = -(1 - \Phi(\bar{\omega}))$, se tiene que

$$f(\hat{\bar{\omega}}_t) = f'(\bar{\omega})\hat{\bar{\omega}}_t \tag{3.157}$$

Participación de los hogares

De la ecuación de participación del prestamista se tiene:

$$g(\bar{\omega}_t) = \int_0^{\bar{\omega}_t} \omega\Phi(d\omega) - \Phi\mu + [1 - \Phi]\bar{\omega}_t$$

Su derivada es:

$$g'(\bar{\omega}_t) = -\mu\phi(\bar{\omega}) + (1 - \Phi(\bar{\omega}))$$

Aplicando la fórmula de la linealización, es posible definir la forma linealizada $g(\hat{\bar{\omega}}_t)$ tal que

$$g(\hat{\bar{\omega}}_t) = g'(\bar{\omega})\hat{\bar{\omega}}_t \tag{3.158}$$

Resumen de las ecuaciones linealizadas

Ecuación de Euler de hogares	$\hat{c}_t = \hat{c}_{t+1} - \beta \bar{c} \hat{r}_{t+1}$
Ecuación intratemporal	$\hat{l}_t = -\frac{\bar{p}\bar{p}}{(1-\alpha)\bar{y}} \hat{w}_t - \frac{\bar{p}\bar{w}}{(1-\alpha)\bar{y}} \hat{p}_t + \frac{\bar{l}}{\bar{y}} \hat{y}_t$
Salarios	$\hat{w}_t = \nu \hat{c}_t$
Rendimientos de capital	$\hat{r}_t = \frac{\alpha}{k\bar{p}} \hat{y}_t - \frac{\alpha\bar{y}}{k^2\bar{p}} \hat{k}_t - \frac{\bar{r}}{\bar{p}} \hat{p}_t$
Producción del empresario	$\hat{i}_t = \frac{\bar{p}}{1-\bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{n}_t + \left[\frac{\bar{n}}{(1-\bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \right] \hat{p}_t + \frac{\bar{p}m g'(\bar{\omega})}{(1-\bar{p}g(\bar{\omega}))^2} \hat{w}_t - \hat{c}_t$
Función de producción	$\hat{y}_t = \frac{\bar{y}}{\theta} \hat{\theta}_t + \alpha \frac{\bar{y}}{k} \hat{k}_t + (1-\alpha) \frac{\bar{y}}{l} \hat{l}_t$
Consumo de empresarios	$\hat{c}_t = (1 - \Phi(\bar{\omega})\mu) \hat{y}_t - [\bar{y}\mu\phi(\bar{\omega})] \hat{w}_t - \hat{c}_t - \hat{i}_t$
Patrimonio de empresarios	$\hat{n}_t = (1 - \delta + \bar{r}) \hat{z}_t + \bar{z} \hat{r}_t$
Ecuación de Euler de los empresarios	$0 = \frac{\beta\gamma f(\bar{\omega})}{1-\bar{p}g(\bar{\omega})} \left((1-\delta) + \frac{g(\bar{\omega})(1-\delta)\bar{p}}{1-\bar{p}g(\bar{\omega})} + \bar{r} + \frac{\bar{r}\bar{p}g(\bar{\omega})}{1-\bar{p}g(\bar{\omega})} \right) \hat{p}_{t+1} + \frac{\beta\gamma f(\bar{\omega})\bar{p}}{1-\bar{p}g(\bar{\omega})} \hat{r}_{t+1} \\ + \frac{\beta\gamma\bar{p}}{1-\bar{p}g(\bar{\omega})} \left((1-\delta) f'(\bar{\omega}) + \frac{g'(\bar{\omega})f(\bar{\omega})(1-\delta)\bar{p}}{1-\bar{p}g(\bar{\omega})} + \bar{r} f'(\bar{\omega}) + \frac{g'(\bar{\omega})\bar{p}\bar{r}f(\bar{\omega})}{1-\bar{p}g(\bar{\omega})} \right) \hat{w}_{t+1}$
Participación de los empresarios	$f(\hat{w}_t) = f'(\bar{\omega}) \hat{w}_t$
Participación del prestamista	$g(\hat{w}_t) = g'(\bar{\omega}) \hat{w}_t$
Pérdida de eficiencia	$\hat{\pi}_t = -\phi(\bar{\omega})\mu \hat{w}_t$
Valor crítico de bancarrota	$\hat{w}_t = \frac{1}{\left[\phi(\bar{\omega})\mu + \frac{f'(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi'(\bar{\omega})}{(1-\Phi(\bar{\omega}))} + \frac{f(\bar{\omega})\mu\phi(\bar{\omega})^2}{(1-\Phi(\bar{\omega}))^2} \right] \bar{p}^2} \hat{p}_t$
Función de densidad de probabilidad log-normal	$\Phi(\hat{w}_t) \equiv \phi(\bar{\omega}) \hat{w}_t$
Capital de los empresario	$\hat{z}_{t+1} = [\bar{y} f'(\bar{\omega})] \hat{w}_t + f(\bar{\omega}) \hat{y}_t - \hat{c}_t$
Capital de los hogares	$\hat{k}_{t+1} = (1-\delta) \hat{k}_t + \hat{i}_t$
Choque de productividad	$\hat{\theta}_t = \rho \hat{\theta}_{t-1} + \epsilon_t$

3.2.3 Introducción de las expectativas de aprendizaje por medio de la ecuación de Euler de los hogares

Esta sección presenta la modificación de la ecuación intertemporal de los hogares para implementar el aprendizaje de expectativas, de tal modo que se refleje el comportamiento de la ley de movimiento real de los parámetros del modelo.

En consecuencia, se encontrará la decisión óptima de consumo para los hogares (c_t).

Se sabe que los hogares toman sus decisiones óptimas de consumo. Para la construcción de la senda óptima de los hogares se siguen los siguientes pasos:

1. Linealizar la restricción presupuestaria de hogares, con base en la aplicación de la siguiente fórmula de linealización $f(x) \approx f'(\bar{x})\hat{x}_t$, donde $\hat{x} = x_t - \bar{x}$ es la desviación con respecto al estado estacionario.
2. Iterar hacia el futuro la restricción presupuestaria.
3. Iterar la ecuación de Euler de los hogares hacia atrás desde un periodo T hasta t.
4. Combinar las ecuaciones iteradas hacia el futuro y pasado.
5. Despejar la variable clave para la ecuación de Euler, en este caso es el consumo.

Linealizar la restricción presupuestaria de hogares

Dada la siguiente restricción presupuestaria:

$$c_t + E_t k_{t+1} = w_t l_t + r_t k_t + (1 - \delta)k_t$$

Su forma linealizada es:

$$\hat{c}_t + E_t \hat{k}_{t+1} = \bar{w} \hat{l}_t + \bar{l} \hat{w}_t + \bar{r} \hat{k}_t + \bar{k} \hat{r}_t + (1 - \delta) \hat{k}_t \quad (3.159)$$

$$\hat{c}_t + E_t \hat{k}_{t+1} = \bar{w} \hat{l}_t + \bar{l} \hat{w}_t + (\bar{r} + (1 - \delta)) \hat{k}_t + \bar{k} \hat{r}_t$$

Dado que en estado estacionario $\frac{1}{\beta} = \bar{r} + (1 - \delta)$, se tiene que:

$$\hat{c}_t + E_t \hat{k}_{t+1} = \beta^{-1} \hat{k}_t + \bar{w} \hat{l}_t + \bar{l} \hat{w}_t + \bar{k} \hat{r}_t$$

Iterar hacia el futuro la restricción presupuestaria

En primer lugar, se reescribe la ecuación anterior tal que:

$$\beta^{-1} \hat{k}_t = \hat{c}_t + E_t \hat{k}_{t+1} - \bar{w} \hat{l}_t - \bar{l} \hat{w}_t - \bar{k} \hat{r}_t$$

Luego, se tiene que:

$$k_t = \beta \hat{c}_t + \beta E_t \hat{k}_{t+1} - \beta \bar{w} \hat{l}_t - \beta \bar{l} \hat{w}_t - \beta \bar{k} \hat{r}_t \quad (3.160)$$

De forma análoga a la anterior ecuación aplicada en el período $t + 1$ se consigue:

$$\hat{E}_t \hat{k}_{t+1} = \hat{E}_t \left[\beta \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} + \beta \hat{E}_{t+1} \hat{k}_{t+2} - \beta \bar{w} \hat{E}_t \hat{l}_{t+1} - \beta \bar{l} \hat{E}_t \hat{w}_{t+1} - \beta \bar{k} \hat{E}_t \hat{r}_{t+1} \right] \quad (3.161)$$

\hat{E}_t denota las expectativas no racionales de los agentes. Cuando se está trabajando con expectativas racionales, se usa la notación usual E_t . Además, se asume que las creencias son homogéneas y por tanto satisfacen la ley de probabilidad estándar tal que $\hat{E}_t \hat{E}_{t+i} = \hat{E}_t$.

Reemplazando la ecuación $\hat{E}_t \hat{k}_{t+1}$ en la ecuación k_t , se tiene que:

$$\hat{k}_t = \beta \hat{c}_t - \beta \bar{w} \hat{l}_t - \beta \bar{l} \hat{w}_t - \beta \bar{k} \hat{r}_t + \beta \hat{E}_t \left[\beta \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} - \beta \bar{w} \hat{E}_t \hat{l}_{t+1} - \beta \bar{l} \hat{E}_t \hat{w}_{t+1} - \beta \bar{k} \hat{E}_t \hat{r}_{t+1} + \beta \hat{E}_{t+1} \hat{k}_{t+2} \right] \quad (3.162)$$

$$\hat{k}_t = \beta \hat{c}_t - \beta \bar{w} \hat{l}_t - \beta \bar{l} \hat{w}_t - \beta \bar{k} \hat{r}_t + \beta^2 \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} - \beta^2 \hat{E}_t \bar{w} \hat{l}_{t+1} - \beta^2 \hat{E}_t \bar{l} \hat{w}_{t+1} - \beta^2 \hat{E}_t \bar{k} \hat{r}_{t+1} + \beta^2 \hat{E}_t \hat{E}_{t+1} \hat{k}_{t+2} \quad (3.163)$$

Como se tiene que $\hat{E}_t \hat{E}_{t+i} = \hat{E}_t$:

$$\hat{k}_t = \beta \hat{c}_t - \beta \bar{w} \hat{l}_t - \beta \bar{l} \hat{w}_t - \beta \bar{k} \hat{r}_t + \beta^2 \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} - \beta^2 \hat{E}_t \bar{w} \hat{l}_{t+1} - \beta^2 \hat{E}_t \bar{l} \hat{w}_{t+1} - \beta^2 \hat{E}_t \bar{k} \hat{r}_{t+1} + \beta^2 \hat{E}_t \hat{k}_{t+2} \quad (3.164)$$

Tomando las expectativas un período adicional hacia adelante, se consigue:

$$\hat{E}_t \hat{k}_{t+2} = \hat{E}_t \left[\beta \hat{E}_{t+1} \hat{c}_{t+2} - \beta \bar{w} \hat{E}_{t+1} \hat{l}_{t+2} - \beta \bar{l} \hat{E}_{t+1} \hat{w}_{t+2} - \beta \bar{k} \hat{E}_{t+1} \hat{r}_{t+2} + \beta \hat{E}_{t+2} \hat{k}_{t+3} \right] \quad (3.165)$$

Reemplazando la ecuación de $\hat{E}_t \hat{k}_{t+2}$ en la ecuación de \hat{k}_t , se tiene que

$$k_t = \beta \hat{c}_t - \beta \bar{w} \hat{l}_t - \beta \bar{l} \hat{w}_t - \beta \bar{k} \hat{r}_t + \beta^2 k_t \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} - \beta^2 k_t \bar{w} \hat{E}_t \hat{l}_{t+1} - \beta^2 k_t \bar{l} \hat{E}_t \hat{w}_{t+1} - \beta^2 k_t \bar{k} \hat{r}_{t+1} \\ + \beta^2 k_t \left[\beta \hat{E}_t \hat{c}_{t+2} - \beta \bar{w} \hat{E}_t \hat{l}_{t+2} - \beta \bar{l} \hat{E}_t \hat{w}_{t+2} - \beta \hat{E}_t \bar{k} \hat{r}_{t+2} + \beta \hat{E}_t k_t \hat{k}_{t+3} \right] \quad (3.166)$$

$$\hat{k}_t = \beta \hat{c}_t - \beta \bar{w} \hat{l}_t - \beta \bar{l} \hat{w}_t - \beta \bar{k} \hat{r}_t + \beta^2 \hat{E}_t \hat{c}_{t+1} - \beta^2 \hat{E}_t \bar{w} \hat{l}_{t+1} - \beta^2 \hat{E}_t \bar{l} \hat{w}_{t+1} - \beta^2 \hat{E}_t \bar{k} \hat{r}_{t+1} \\ + \beta^3 \hat{E}_t \hat{c}_{t+2} - \beta^3 \hat{E}_t \bar{w} \hat{l}_{t+2} - \beta^3 \hat{E}_t \bar{l} \hat{w}_{t+2} - \beta^3 \hat{E}_t \bar{k} \hat{r}_{t+2} + \beta^3 \hat{E}_t \hat{k}_{t+3} \quad (3.167)$$

A partir de lo anterior, es posible seguir iterando hacia ∞ y se encuentra la siguiente forma funcional:

$$\hat{k}_t = \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^T \hat{c}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^T \bar{w} \hat{l}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^T \bar{l} \hat{w}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^T \bar{k} \hat{r}_{t+T-1} \\ \hat{k}_t = \beta \left[\hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \hat{c}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \bar{w} \hat{l}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \bar{l} \hat{w}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \bar{k} \hat{r}_{t+T-1} \right] \\ \beta^{-1} \hat{k}_t = \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \hat{c}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \bar{w} \hat{l}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \bar{l} \hat{w}_{t+T-1} - \hat{E}_t \sum_{T=1}^{\infty} \beta^{T-1} \bar{k} \hat{r}_{t+T-1} \\ \beta^{-1} \hat{k}_t = \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \hat{c}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{w} \hat{l}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{l} \hat{w}_T - \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{k} \hat{r}_T$$

Reorganizando términos, se tiene que

$$\hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \hat{c}_T = \beta^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{w} \hat{l}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{l} \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{k} \hat{r}_T \quad (3.168)$$

La anterior ecuación describe la restricción presupuestaria de los hogares en flujos hacia infinito.

Iterar hacia el pasado la ecuación de Euler

Se parte de la siguiente ecuación $\hat{c}_t = E_t \hat{c}_{t+1} - \beta \bar{c} E_t \hat{r}_{t+1}$, la cual se reescribe así:

$$E_t \hat{c}_{t+1} = \hat{c}_t + \beta \bar{c} E_t \hat{r}_{t+1}$$

Ahora, se itera esta ecuación de forma recursiva desde un periodo T hacia atrás hasta llegar a t, partiendo de lo siguiente:

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = \hat{E}_t \hat{c}_{T-1} + \beta \bar{c} \hat{E}_t \hat{r}_T \quad (3.169)$$

Al rezagar un período, se obtiene:

$$\hat{E}_t \hat{c}_{T-1} = \beta \bar{c} \hat{E}_t \hat{r}_{T-1} + \hat{E}_t \hat{c}_{T-2} \quad (3.170)$$

Ahora, se reemplaza la ecuación (3.170) en la ecuación (3.169) y sabiendo que $\hat{E}_t \hat{c}_{T-1} = \hat{c}_{T-1}$.

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = \beta \bar{c} \hat{E}_t \hat{r}_T + \beta \bar{c} \hat{E}_t \hat{r}_{T-1} + \hat{E}_t \hat{c}_{T-2}$$

Al reescribir, se tiene:

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = \beta \bar{c} [\hat{r}_T + \hat{r}_{T-1}] + \hat{c}_{T-2}$$

Si se itera repetitivamente con base en reemplazo de c_{T-i} , hasta llegar al período t, se tiene la siguiente ecuación:

$$\hat{E}_t \hat{c}_T = \hat{c}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{T-1} \beta \bar{c} \hat{r}_{T+1} \quad (3.171)$$

Combinar las ecuaciones iteradas hacia el futuro

Al reemplazar la ecuación (3.171) en la ecuación (3.168), se consigue que:

$$\hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \left(\hat{c}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{T-1} \beta \bar{c} \hat{r}_{T+1} \right) = \beta^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{w} \hat{l}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{l} \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{k} \hat{r}_T$$

$$\hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \hat{c}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \sum_{T=t}^{T-1} \beta \bar{c} \hat{r}_{T+1} = \beta^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{w} \hat{l}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{l} \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{k} \hat{r}_T$$

Si se tiene en cuenta que para una variable cualquiera a_T ⁸:

$$E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \sum_{T=t}^{T-1} a_T = \frac{\beta}{1-\beta} E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} a_T$$

Se consigue que:

$$\hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \hat{c}_t + \frac{\beta}{1-\beta} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \beta \bar{c} \hat{r}_{T+1} = \beta^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{w} \hat{l}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{l} \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{k} \hat{r}_T$$

Despejar la variable consumo

Reorganizando términos:

$$\hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \hat{c}_t = \beta^{-1} \hat{k}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{w} \hat{l}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{l} \hat{w}_T + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{k} \hat{r}_T - \frac{\beta}{1-\beta} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \beta \bar{c} \hat{r}_{T+1}$$

Ahora, se hace uso de la siguiente propiedad de la sumatoria:

$$E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} a_T = a_t + E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \beta a_{T+1}$$

Aplicando lo anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \hat{c}_t &= \beta^{-1} \hat{k}_t + \bar{w} \hat{l}_t + \bar{l} \hat{w}_t + \bar{k} \hat{r}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{w} \hat{l}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{l} \hat{w}_{T+1} \\ &\quad + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{k} \hat{r}_{T+1} - \frac{\beta}{1-\beta} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \beta \bar{c} \hat{r}_{T+1} \end{aligned}$$

⁸También empleado por Preston (2005).

Teniendo en cuenta que:

$$E_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} a_t = \frac{1}{(1-\beta)} a_t$$

El lado izquierdo de la ecuación cambia de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\beta} \hat{c}_t &= \beta^{-1} \hat{k}_t + \bar{w} \hat{l}_t + \bar{l} \hat{w}_t + \bar{k} \hat{r}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{w} \hat{l}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{l} \hat{w}_{T+1} \\ &\quad + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{k} \hat{r}_{T+1} - \frac{\beta}{1-\beta} \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \beta \bar{c} \hat{r}_{T+1} \end{aligned}$$

Agrupando términos se tiene que

$$\frac{1}{1-\beta} \hat{c}_t = \beta^{-1} \hat{k}_t + \bar{w} \hat{l}_t + \bar{l} \hat{w}_t + \bar{k} \hat{r}_t + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{w} \hat{l}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \bar{l} \hat{w}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \left[\bar{k} - \frac{\beta}{1-\beta} \beta \bar{c} \right] \hat{r}_{T+1}$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_t &= (1-\beta) \left[\beta^{-1} \hat{k}_t + \bar{w} \hat{l}_t + \bar{l} \hat{w}_t + \bar{k} \hat{r}_t \right] + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} (1-\beta) \bar{w} \hat{l}_{T+1} + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} (1-\beta) \bar{l} \hat{w}_{T+1} \\ &\quad + \hat{E}_t \sum_{T=t}^{\infty} \beta^{T-t} \left[(1-\beta) \bar{k} - \beta^2 \bar{c} \right] \hat{r}_{T+1} \end{aligned}$$

La anterior ecuación describe la senda óptima de consumo de los hogares bajo expectativas arbitrarias.

3.2.4 Formación de creencias de los agentes en el contexto de aprendizaje dentro del modelo

Formación de las creencias o expectativas de los agentes

La formación de creencias se realiza a través de un sistema de ecuaciones que se actualiza por medio de la ley de movimiento percibida por los agentes del modelo, mediante el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR), que se expondrá más adelante. Los agentes aprenden sobre los parámetros asociados al comportamiento de las variables *consumo de los hogares* (\hat{c}_t), *trabajo* (\hat{l}_t), *salario* (\hat{w}_t), *tasa de interés*

(\hat{r}_t), inversión (\hat{i}_t), producto (\hat{y}_t), consumo de los empresarios (\hat{e}_t), patrimonio del empresario (\hat{n}_t), mark-up de precios (\hat{p}_t), participación del empresario ($f(\hat{\omega}_t)$) y participación de los hogares ($g(\hat{\omega}_t)$), bancarrota ($\hat{\omega}_t$), pérdida de eficiencia (π_t), función de densidad acumulada ($\Phi(\hat{\omega}_t)$), capital de los hogares (\hat{k}_{t+1}) y capital de empresarios (\hat{z}_{t+1}). En este, cada variable estará en función de las variables de estado, es decir, del capital de los hogares (\hat{k}_t) y el capital de los empresarios (\hat{z}_t). A continuación se presenta dicho sistema:

$$\hat{c}_t = \xi_0^c + \xi_1^c \hat{k}_t + \xi_2^c \hat{z}_t \quad (3.172)$$

$$\hat{l}_t = \xi_0^l + \xi_1^l \hat{k}_t + \xi_2^l \hat{z}_t \quad (3.173)$$

$$\hat{w}_t = \xi_0^w + \xi_1^w \hat{k}_t + \xi_2^w \hat{z}_t \quad (3.174)$$

$$\hat{r}_t = \xi_0^r + \xi_1^r \hat{k}_t + \xi_2^r \hat{z}_t \quad (3.175)$$

$$\hat{i}_t = \xi_0^i + \xi_1^i \hat{k}_t + \xi_2^i \hat{z}_t \quad (3.176)$$

$$\hat{y}_t = \xi_0^y + \xi_1^y \hat{k}_t + \xi_2^y \hat{z}_t \quad (3.177)$$

$$\hat{e}_t = \xi_0^e + \xi_1^e \hat{k}_t + \xi_2^e \hat{z}_t \quad (3.178)$$

$$\hat{n}_t = \xi_0^n + \xi_1^n \hat{k}_t + \xi_2^n \hat{z}_t \quad (3.179)$$

$$\hat{p}_t = \xi_0^p + \xi_1^p \hat{k}_t + \xi_2^p \hat{z}_t \quad (3.180)$$

$$f(\hat{\omega}_t) = \xi_0^{f(\bar{\omega})} + \xi_1^{f(\bar{\omega})} \hat{k}_t + \xi_2^{f(\bar{\omega})} \hat{z}_t \quad (3.181)$$

$$g(\hat{\omega}_t) = \xi_0^{g(\bar{\omega})} + \xi_1^{g(\bar{\omega})} \hat{k}_t + \xi_2^{g(\bar{\omega})} \hat{z}_t \quad (3.182)$$

$$\hat{\omega}_t = \xi_0^{\bar{\omega}} + \xi_1^{\bar{\omega}} \hat{k}_t + \xi_2^{\bar{\omega}} \hat{z}_t \quad (3.183)$$

$$\hat{\pi}_t = \xi_0^\pi + \xi_1^\pi \hat{k}_t + \xi_2^\pi \hat{z}_t \quad (3.184)$$

$$\Phi(\hat{\omega}_t) = \xi_0^{\Phi(\bar{\omega})} + \xi_1^{\Phi(\bar{\omega})} \hat{k}_t + \xi_2^{\Phi(\bar{\omega})} \hat{z}_t \quad (3.185)$$

$$\hat{k}_{t+1} = \xi_0^k + \xi_1^k \hat{k}_t + \xi_2^k \hat{z}_t \quad (3.186)$$

$$\hat{z}_{t+1} = \xi_0^z + \xi_1^z \hat{k}_t + \xi_2^z \hat{z}_t \quad (3.187)$$

El anterior sistema de formación de creencias puede expresarse en forma matricial de la siguiente manera. Sea

$$Z_t^{LMP} = \Omega_t Q_{t-1}$$

$$Z_t^{LMP} = \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{l}_t \\ \hat{w}_t \\ \hat{r}_t \\ \hat{i}_t \\ \hat{y}_t \\ \hat{e}_t \\ \hat{n}_t \\ \hat{p}_t \\ f(\hat{\omega}_t) \\ g(\hat{\omega}_t) \\ \hat{\omega}_t \\ \hat{\pi}_t \\ \Phi(\hat{\omega}_t) \\ \hat{k}_{t+1} \\ \hat{z}_{t+1} \end{bmatrix}; \Omega_t = \begin{bmatrix} \xi_0^c & \xi_1^c & \xi_2^c \\ \xi_0^l & \xi_1^l & \xi_2^l \\ \xi_0^w & \xi_1^w & \xi_2^w \\ \xi_0^r & \xi_1^r & \xi_2^r \\ \xi_0^i & \xi_1^i & \xi_2^i \\ \xi_0^y & \xi_1^y & \xi_2^y \\ \xi_0^e & \xi_1^e & \xi_2^e \\ \xi_0^n & \xi_1^n & \xi_2^n \\ \xi_0^p & \xi_1^p & \xi_2^p \\ \xi_0^{f(\bar{\omega})} & \xi_1^{f(\bar{\omega})} & \xi_2^{f(\bar{\omega})} \\ \xi_0^{g(\bar{\omega})} & \xi_1^{g(\bar{\omega})} & \xi_2^{g(\bar{\omega})} \\ \xi_0^{\bar{\omega}} & \xi_1^{\bar{\omega}} & \xi_2^{\bar{\omega}} \\ \xi_0^\pi & \xi_1^\pi & \xi_2^\pi \\ \xi_0^{\Phi(\bar{\omega})} & \xi_1^{\Phi(\bar{\omega})} & \xi_2^{\Phi(\bar{\omega})} \\ \xi_0^k & \xi_1^k & \xi_2^k \\ \xi_0^z & \xi_1^z & \xi_2^z \end{bmatrix}; Q_{t-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix}$$

Como se observa, Z_t^{LMP} es un subconjunto de la matriz W_t y contiene los elementos del sistema de ecuaciones del pronosticador bajo la Ley de Movimiento Percibida (LMP).

Por otra parte, se tiene a:

$$Z_t^{LMR} = T(\Omega_t^L)Q_{t-1}$$

Es la ley de movimiento real de la economía. Esta ley de movimiento real es el resultado del mapeo de expectativas que tienen los agentes, la cuál es retroalimentada por la estimación de los parámetros de la ley de movimiento percibida por los agentes en el periodo inmediatamente anterior. La representación matricial de la ley de movimiento real (LMR) es la siguiente:

$$Z_t^{LMR} = \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{l}_t \\ \hat{w}_t \\ \hat{r}_t \\ \hat{i}_t \\ \hat{y}_t \\ \hat{e}_t \\ \hat{n}_t \\ \hat{p}_t \\ f(\hat{\omega}_t) \\ g(\hat{\omega}_t) \\ \hat{\omega}_t \\ \hat{\pi}_t \\ \Phi(\hat{\omega}_t) \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix}; T(\Omega_t^L) = \begin{bmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \tau_{1,3} \\ \tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \tau_{2,3} \\ \tau_{3,1} & \tau_{3,2} & \tau_{3,3} \\ \tau_{4,1} & \tau_{4,2} & \tau_{4,3} \\ \tau_{5,1} & \tau_{5,2} & \tau_{5,3} \\ \tau_{6,1} & \tau_{6,2} & \tau_{6,3} \\ \tau_{7,1} & \tau_{7,2} & \tau_{7,3} \\ \tau_{8,1} & \tau_{8,2} & \tau_{8,3} \\ \tau_{9,1} & \tau_{9,2} & \tau_{9,3} \\ \tau_{10,1} & \tau_{10,2} & \tau_{10,3} \\ \tau_{11,1} & \tau_{11,2} & \tau_{11,3} \\ \tau_{12,1} & \tau_{12,2} & \tau_{12,3} \\ \tau_{13,1} & \tau_{13,2} & \tau_{13,3} \\ \tau_{14,1} & \tau_{14,2} & \tau_{14,3} \\ \tau_{15,1} & \tau_{15,2} & \tau_{15,3} \\ \tau_{16,1} & \tau_{16,2} & \tau_{16,3} \end{bmatrix}; Q_{t-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix}$$

Se sabe que la solución del modelo bajo expectativas racionales implica que los coeficientes ξ de cada modelo econométrico sean invariantes en el tiempo, es decir, $\xi_{1,t-1} = \xi_{1,t} = \xi_{1,t+1}$. Además, implicaría que el término de intercepto en el modelo econométrico es estadísticamente no significativo, $\xi_0 = 0$. Por tanto, es necesario suponer que los agentes aprenden a partir de modelos econométricos cuando el término de intercepto y el coeficiente de respuesta ante las variables regresoras, son variantes en el tiempo, $\xi_{0,t} \neq \xi_{0,t-1}$, $\xi_{1,t} \neq \xi_{1,t-1}$ y $\xi_{2,t} \neq \xi_{2,t-1}$.

Para llevar a cabo el proceso de aprendizaje, los agentes estiman las ecuaciones (3.172) - (3.187), actualizando los coeficientes variantes en el tiempo a medida que obtienen nueva información. Los únicos coeficientes que no se actualizan son los que acompañan al choque tecnología, como se dijo anteriormente. Para llevar a cabo la estimación, se aplica la herramienta de Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR) que se explica a continuación.

A partir de la ecuación de simulación del ciclo de las variables de variable de estado mínima en el período t :

$$W_t = T_0(\Omega_{0,t}^L) + T_1(\Omega_{1,t}^L)K_{t-1} + T_2(\Omega_{2,t}^L)\varepsilon_t$$

Se define al algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR) de la forma:

$$R_t = R_{t-1} + g(Q_{t-1}Q'_{t-1} - R_{t-1}) \quad (3.188)$$

$$\Omega_t = \Omega_{t-1} + g(R_t^{-1}Q_{t-1})(Z_t^{LMR} - \Omega'_{t-1}Q_{t-1}) \quad (3.189)$$

Donde:

- Ω_t es el vector j -dimensional que contiene los coeficientes a estimar en el periodo t , $\Omega_t^j = [\xi_0^j, \xi_1^j, \xi_2^j]$, con $j = [c; l; w; r; i; y; e; n; p; f(\bar{\omega}); g(\bar{\omega}); \bar{\omega}; \pi; \Phi(\bar{\omega}); k; z]$.
- R_t es la matriz de precisión que incluye las varianzas y las covarianzas.
- g es el parámetro de ganancia del algoritmo. Esta ganancia regula el peso que atribuyen los agentes pronosticadores al error de pronósticos de las variables, el cual se activa con los cambios generados por el choque de tecnología. Para comprender un poco mejor su función, suponga que $g \rightarrow 0$. En tal caso, los agentes le dan un nulo peso a los errores de pronóstico, y están estimando que estos son totalmente transitorios y no implican un cambio en el valor real del parámetro. En contraste, entre más grande sea el valor de g , los agentes toman estos cambios como permanentes y le dan un gran peso a las variables.

En el presente trabajo, esta ganancia se trabaja de dos sentidos: (i) ganancia constante, y (ii) ganancia decreciente en función del tiempo, es decir, con el tiempo de denominador.

- Q_{t-1} es el vector de variables regresoras del modelo econométrico de los agentes tal que $Q'_{t-1} = [1, k_t, z_t]$.
- $Z_t^{LMR} = [\hat{c}_t; \hat{l}_t; \hat{w}_t; \hat{r}_t; \hat{i}_t; \hat{y}_t; \hat{e}_t; \hat{n}_t; \hat{p}_t; f(\hat{\omega}_t); g(\hat{\omega}_t); \hat{\omega}_t; \hat{\pi}_t; \Phi(\hat{\omega}_t); \hat{k}_t; \hat{z}_t]$ es el vector de variables dependientes.

Conexión con el modelo original de expectativas racionales

El contenido de esta sección es el mismo que explica en la subsección del modelo con fricción en el mercado de inversión, por lo cual no se desarrolla aquí.

Ejemplo ilustrativo del proceso de actualización de expectativas

El contenido de esta sección es el mismo que explica en la subsección del modelo con fricción en el mercado de inversión, por lo cual no se desarrolla aquí.