

**UNIVERSIDAD COLEGIO MAYOR NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO**



**DANIEL FELIPE VELOSA GARCÍA**

**MODELOS COMPARATIVOS PARA LA SELECCIÓN ÓPTIMA DE PORTAFOLIOS**

**TESIS PARA LA  
MAESTRÍA EN FINANZAS CUANTITATIVAS**

**DIRECTORA:  
MARÍA FERNANDA REYES ROA**

**FACULTAD DE ECONOMÍA**

**BOGOTÁ D.C, COLOMBIA - 2019**

## **RESUMEN**

Este trabajo investigativo consiste en comprobar si en un mercado con las características del colombiano, tiene valor agregado el utilizar FICs dentro de la cartera de un inversionista con el fin de que su portafolio tenga un mejor comportamiento. Para lograr este cometido, se compararán los resultados de los modelos de optimización para portafolios de inversión más conocidos en el mundo financiero, Markowitz (1952) y Black & Litterman (1991). Adicional a estos, se usará Markowitz con FICs y la metodología descrita por Matellini & Ziemann (2007) con el fin de entregar los resultados de Black&Litterman con FICS.

## **ABSTRACT**

This thesis will proof that even in a market with characteristics such as the Colombian's, there is an added value to an investor that includes CIFs (Collective Investment Funds) into his/her portfolio. In order to complete this task, we will compare two of the most use portfolio selection models, Markowitz (1952) and Black&Litterman (1991). In addition, we will be using Markowitz with FICs and a methodology described by Matellini & Ziemann (2007) to get the results from the Black&Litterman with CIFs.

## **PALABRAS CLAVES**

Aversión al riesgo, portafolio eficiente, portafolio óptimo, inversionista racional, ventas en corto, relación de Sharpe, "Security Market Line" (SML), "Hedge Funds", Fondos de Inversión Colectiva (FICs), "pooled funds", "Value at Risk" (VaR), modelo CAPM, Backtesting y el índice Turnover.

## **KEYWORDS**

Risk aversion, efficient portfolio, optimal portfolio, rational investor, short sells, Sharpe Ratio, Security Market Line (SML), Hedge Funds, mutual funds, pooled funds, Value at Risk, CAPM model, CIFs, Backtesting and Turnover Ratio.

## TABLA DE CONTENIDO

<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	4
<b>II. MARCO TEÓRICO</b>	5
<b>III. ESTRATEGIA EMPÍRICA</b>	10
<b>III.A MARKOWITZ</b>	10
<b>III.B BLACK-LITTERMAN (BL)</b>	11
<b>III.C BL CON HEDGE FUNDS</b>	12
<b>III.D ÍNDICADORES COMPARATIVOS</b>	15
<b>IV. DATOS</b>	18
<b>V. RESULTADOS</b>	20
<b>VI. CONCLUSIONES</b>	27
<b>VII. ANEXOS</b>	28
<b>VIII. BIBLIOGRAFÍA</b>	36

## I. INTRODUCCIÓN

Uno de los grandes retos que tienen los administradores de portafolios es lograr la mejor cartera posible para su cliente, generándole retornos positivos sin tener que asumir grandes cantidades de riesgo. Para esto, existen modelos de optimización de portafolios que encuentran cuál es la mejor relación rentabilidad/riesgo posible que el mercado puede ofrecer en ese momento.

El modelo inicial (Markowitz, 1952) no tenía en cuenta la información privilegiada que pudiera tener el inversionista acerca del comportamiento futuro de los activos. Para solucionar este inconveniente, Black & Litterman (1991) incorporan dentro del modelo los “views” de los inversionistas con el limitante de que estas pueden ser únicamente sobre los retornos esperados de los activos. Modelos posteriores han modificado esta implementación no sólo agregando la posibilidad de tener *views* para medidas como el riesgo (Bertsimas, Gupta, & Paschalidis, 2012) o adicionando activos no convesionales dentro de un portafolio de inversión como los son los *Hedge Funds* (Martellini & Ziemann, 2007).

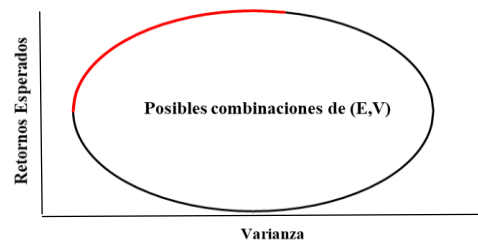
Esta investigación se basa en usar la ampliación del modelo de Black&Litterman descrito por Martellini & Ziemann (2007) para el caso colombiano y, observar si hay un valor agregado para el portafolio del inversionista al utilizar activos no convesionales como los FICs. Este documento centrará su aplicación a FICs abiertos sin pacto de permanencia administrados por fiduciarias.

Los datos usados en este documento son los cierres de precios de 37 acciones (mencionadas en el Anexo 1) extraídos de Bloomberg y de 10 FICs que reportan su información en la página web de la Superintendencia Financiera de Colombia.

## II. MARCO TEÓRICO

Después de la crisis en la Bolsa de Valores de Nueva York en 1929, y durante casi 10 años, las inversiones se basaban principalmente en el valor en libros de las compañías y en la historia del precio de la acción; este tipo de inversiones aunque “miopes e ingenuas”, tenían un componente valioso para algunos académicos: la moderación a la hora de invertir -Graham (1939), Parry (1939) y Gifford (1939)-. Para finales de los años 30s, según Graham (1939), las inversiones no eran nada más que una “apuesta indisciplinada sobre el futuro y sin estar lejos de ser tan solo un montón de especulaciones”. Para esta época, las decisiones de inversión estaban basadas en el análisis individual de los activos, argumentando que el valor de un activo era igual al valor presente neto de los dividendos futuros (Williams, 1938).

En 1952, Markowitz llega a la conclusión de que la regla para el futuro inversionista deberá ser la de “Diversificación con Retornos Esperados (E) – Varianza (V)”. Según esta regla, el inversionista deberá diversificar su dinero invirtiendo en activos que le den el máximo rendimiento esperado y la mínima varianza posible. Adicionalmente, describió las condiciones necesarias para poder encontrar un portafolio eficiente y óptimo para cada tipo de inversionista, dependiendo de su aversión al riesgo. Según el autor, la selección adecuada de un portafolio tiene dos etapas; la primera comienza con la observación de los posibles activos a considerar dentro del portafolio y termina con la fijación de creencias acerca del comportamiento de los mismos en el futuro. La segunda etapa, empieza con las creencias relevantes sobre el comportamiento futuro de las acciones y finaliza con la escogencia del portafolio; es en esta última etapa en la cual el autor basa su trabajo.



**Gráfico 1<sup>1</sup>. Posibles combinaciones de E, V**

---

<sup>1</sup> Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance, 77 - 91.

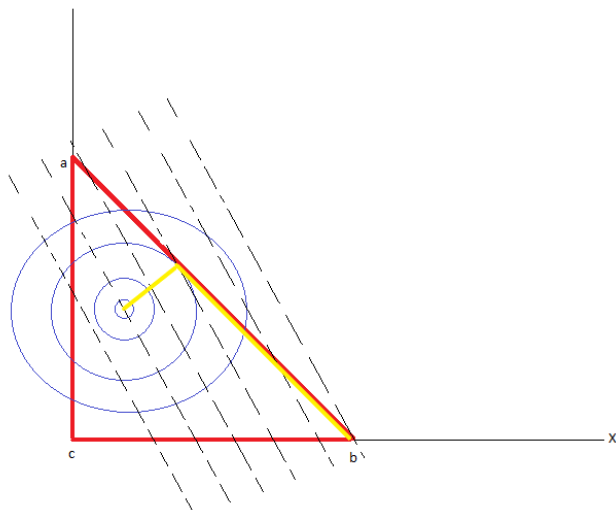
Como evidencia el Gráfico 1, en la zona delineada roja, a mayor retorno esperado y menos varianza tenga un portafolio, este será más óptimo para el inversionista. Si suponemos un portafolio de  $N$  activos, la necesidad de utilizar el 100% del dinero disponible para invertir (ecuación 3, restricción 1) y la no posibilidad de irse en corto (ecuación 3, restricción 2), donde se entiende como ventas en corto la posibilidad de pedir prestado un activo para venderlo más caro en un tiempo cercano y poder comprarlo de nuevo cuando su precio haya bajado y poder ganar la plusvalía, entonces tendríamos:

$$E = \sum_{i=1}^N W_i \mu_i \quad (1)$$

$$V = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \sigma_{i,j} \quad (2)$$

$$\text{s. a } \sum_{i=1}^N W_i = 1; W_i \geq 0 \forall i \quad (3)$$

Donde  $W_i$  es el peso asignado al activo  $i$ ,  $\mu_i$  es el valor esperado del retorno del mismo activo y donde  $\sigma_{i,j}$  es la covarianza entre los activos  $i$  y  $j$ . Las ecuaciones (1) y (2) hacen referencia al valor esperado de los retornos del portafolio y a la varianza del mismo, respectivamente. El gráfico 2 es una representación de las fórmulas (1) a la (3) para un ejemplo de 3 activos:



**Gráfico 2. Ejemplo de Markowitz con 3 activos**

El Gráfico 2, que tiene como eje  $x$  al peso asociado al activo 1 y como eje  $y$  el peso asociado al activo 2, muestra que el triángulo  $abc$  son todos los portafolios alcanzables, las líneas punteadas paralelas son las “isomedias” (todos los posibles portafolios con un retorno esperado dado) con pendiente  $-\frac{\mu_1-\mu_3}{\mu_2-\mu_3}$  e intercepto en  $\frac{E_0-\mu_3}{\mu_2-\mu_3}$ , siempre y cuando  $\mu_2 \neq \mu_3$ ; el sistema de elipses concéntricas son las “isovarianzas” (todos los posibles portafolios con una varianza dada) con centro en el portafolio  $X_{\min}$ , que es la cartera de mínima varianza<sup>2</sup>. Finalmente se encontrará, en amarillo, la “curva crítica”, a la que de ahora en adelante llamaremos curva de eficientes. Esta curva muestra, incluyendo a  $X_{\min}$ , todos los portafolios que con un  $E$  dado encuentran la mejor relación  $(E, V)$  posible; esto se da cuando la “isovarianza” y la “isomedia” se tocan tangencialmente.

La regla  $(E-V)$  implica diversificación para un amplio rango de  $\mu_i\sigma_{i,j}$ , como muestra el Gráfico 2 en la región  $abc$ , pero no quita la posibilidad de no-diversificación, lo que implica que si la mejor relación  $(E, V)$  la tiene un único activo, entonces el 100% del dinero a invertir deberá ir a este último.

Una vez reducido el mundo de posibles portafolios, tenemos que las mejores opciones se encuentran dentro de la curva de eficientes y la escogencia de un único portafolio para cualquier tipo de inversionista, independientemente de su aversión al riesgo (siempre y cuando este sea racional) la propone William Sharpe<sup>3</sup>, con la relación de Sharpe  $\frac{r_p-r_f}{\sigma_p}$  que muestra cuánta rentabilidad después de la tasa libre de riesgo nos entrega una inversión por unidad de riesgo<sup>4</sup>.

Desde la relación de Sharpe se deriva que sin importar la aversión del riesgo del inversionista, si es racional, entonces escogerá como portafolio óptimo el que se encuentre en el punto tangencial entre la relación de Sharpe y la frontera eficiente de Markowitz tal y como lo demuestran Bodie, Kane & Marcus (2011). La primera etapa mencionada por Markowitz, se basa en la observación y fijación de creencias acerca del futuro en el comportamiento de los posibles activos que pertenecerán al portafolio (Markowitz, 1952)

<sup>2</sup> Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 77 – 91. Para una mejor explicación de la matemática del ejemplo con tres activos.

<sup>3</sup> Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*, 49 - 58.

<sup>4</sup> Bodie, Kane & Marcus. (2011). *Investments*. Nueva York: McGrawll Hill.

Black & Litterman (1992) que crean un modelo basado en Markowitz y en el CAPM, en el cual es posible la implementación de los *views* de los inversionistas acerca de los activos referentes al portafolio en interés. Este modelo se basa en el posible conocimiento que pueden llegar a tener los inversionistas acerca de los mercados en los que están invirtiendo, pues en caso de no tener conocimiento sobre ellos, los *views* que toma el modelo son entregados por lo que Black&Litterman llaman los *Neutral Views*, que no son más que los *views* del portafolio óptimo establecido por el mercado, ya sea tomando como referencia un indicador o teniendo en cuenta todos los posibles activos (Izorek, 2004). Si el inversionista conoce sus posibles acciones de inversión, entonces este podrá entregarle al modelo unos *views* y unos intervalos de confianza sobre los mismos.

Black&Litterman logran que la alta concentración de pesos en pocos activos y composiciones muy sensibles a los *inputs* del modelo de Markowitz se atenúen teniendo en cuenta los *views* del mercado con relación a los retornos de los activos combinándolos, con los retornos esperados del mercado.

En Colombia ya se han hecho varias investigaciones académicas acerca de este modelo y su respectiva comparación versus el modelo de Markowitz; en estos estudios se demuestra el poder que tiene un modelo como Black&Litterman, para la elección de acciones para un portafolio óptimo, incluso en un mercado tan poco líquido como el colombiano (Rangel & Ávila, 2016).

En la misma línea, el trabajo de López, Viasus & Pérez (2015), demuestra que el modelo de Black&Litterman (BL) es una buena aproximación cuando los *views* de los inversionistas son acertados; Por ejemplo, para Rangel & Ávila (2016), el modelo de BL da un rendimiento esperado del 26.07%, mientras que el índice de referencia es de tan solo el 14.77%.

Ahora bien, aun sabiendo que el modelo de Black&Litterman puede llegar a mejores resultados que Markowitz dado su implementación de *views*, se han hecho algunas mejoras al mismo, agregando nuevas medidas de riesgo (Bertsimas, Gupta, & Paschalidis, 2012) o diversificando aún más el portafolio, con activos menos riesgosos y mucho menos correlacionados con los activos riesgosos que normalmente se tranzan en la bolsa día tras día. Esto es lo que hacen Martellini & Ziemann (2007), pues proponen un portafolio no solo con activos riesgosos cotizados en la bolsa, sino que también pretenden utilizar *Hedge Funds* como método para la disminución de la varianza

del portafolio óptimo; para el caso de estudio de este documento, se utilizarán como activos poco correlaciones con las acciones a los FICs abiertos sin pacto de permanencia.

### III. ESTRATEGIA EMPÍRICA

#### III.A MARKOWITZ

Para la replicación de este modelo en el mercado colombiano, se hicieron tres pasos: primero, se minimizó la varianza del portafolio dadas las condiciones listadas abajo con el fin de obtener el portafolio de mínima varianza:

$$\min_w w\Omega w' \text{ s. a } \sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0 \quad (4)$$

Donde  $\Omega$  es la matriz de varianza covarianza de los activos y  $w_i$  es el peso invertido en el activo riesgoso  $i$ . El segundo paso, es la maximización de la relación de Sharpe con las mismas condiciones anteriores para poder encontrar el punto en el que cualquier inversionista racional, sin importar su aversión al riesgo, encontrará su portafolio óptimo pues estará entonces ubicado en el punto tangencial entre la frontera eficiente y la Security Market Line (línea recta con pendiente igual a la relación de Sharpe que se genera de las combinaciones posibles entre el portafolio de activos riesgosos y el activo libre de riesgo) (Bodie, Kane & Marcus, 2011).

$$\max/\min_w \frac{E(R_p) - R_F}{\sigma_P} \text{ s. a } \sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0 \quad (5)$$

Siendo  $E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i r_i$  y  $\sigma_P = E[(R_p - E(R_p))(R_p - E(R_p))']$ . Como se mencionó, La relación de Sharpe mide cuánto exceso de retorno está generando el portafolio por cada punto de riesgo adquirido. Adicionalmente, se supone que el inversionista no pedirá prestado para poder hacer la inversión (restricción 1) y que no se harán ventas en corto (restricción 2). Este ejercicio dará como resultado final el portafolio que maximiza la relación de Sharpe y es por lo tanto, el portafolio óptimo y eficiente para el inversionista.

Finalmente, se realiza la maximización y minimización de la relación de Sharpe para así poder graficar la frontera de Markowitz tanto de su lado eficiente (la maximización) como de su sección ineficiente (la minimización) con las mismas restricciones más una adicional:  $\sigma_P = \bar{\sigma}$ , donde esta

última propone un riesgo  $\bar{\sigma}$  para el portafolio y lo que se debe encontrar es el mejor/peor retorno esperado asociado a ese  $\bar{\sigma}$ , dependiendo el caso.

### III.B BLACK-LITTERMAN (BL)

En este modelo se asume que: la primera, todos los activos tienen la misma distribución de probabilidades en sus retornos, que se asumirá como normal; y segundo, la varianza y las distribuciones condicionadas reales de las medias de los retornos son desconocidas para el modelo<sup>5</sup>.

Para la estimación, si el inversionista no tiene views acerca de los activos presentes en el modelo, entonces se usarán estos retornos implícitos del mercado en el modelo BL para obtener su óptimo. Por el contrario, si el inversionista tiene views acerca de los retornos de quienes componen el portafolio, entonces los pesos neutrales hallados en CAPM deberán ajustarse según los views del inversionista; para lograr lo anterior, se tiene que los retornos implícitos del CAPM son:

$$\boldsymbol{\pi} = \delta \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} \quad (6)$$

Donde  $\boldsymbol{\pi}$  es el vector Nx1 de retornos implícitos del mercado,  $\delta$  es el coeficiente de aversión al riesgo (que para este caso será igual a  $\frac{E(r_m) - R_f}{\sigma_m^2}$  con  $E(r_m)$  es el retorno esperado del portafolio del mercado y  $\sigma_m^2$  será la varianza del mismo),  $\boldsymbol{\Sigma}$  es la matriz de covarianzas y  $\boldsymbol{w}$  es el vector de pesos para cada uno de los activos de acuerdo a su capitalización en el mercado (Black & Litterman, 1991).

Con lo anterior se puede obtener el retorno esperado del portafolio,  $E(R)$  de la siguiente manera:

$$E(R) = [(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + P' \boldsymbol{\Omega} P]^{-1} [(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\pi} + P' \boldsymbol{\Omega} Q] \quad (7)$$

---

<sup>5</sup> Black & Litterman. (1991). Asset Allocation: Combining Investor Views With Market Equilibrium. The Journal of Fixed Income, 7 - 18.

Donde  $\tau$  es un número escalar que indica la incertidumbre de la distribución de probabilidad del CAPM,  $P$  es la matriz con los views de los inversionistas,  $Q$  es el vector de retornos esperados descritos en  $P$  y  $\Omega$  es la matriz diagonal de covarianzas con entradas de la incertidumbre dentro de cada *view*. Ya teniendo  $E(R)$  podemos obtener la nueva matriz de covarianzas del portafolio en donde se están teniendo en cuenta los views de los inversionistas<sup>6</sup>:

$$\Sigma_p = \Sigma + M \quad (8)$$

Donde  $M = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega P]^{-1}$  y con quien ahora se puede hallar el vector de pesos:

$$w_p = (\delta\Sigma)^{-1}\pi \quad (9)$$

### III.C BL CON HEDGE FUNDS

Los Hedge Funds son fondos de inversión alternativos que usan *pooled funds*. Estos fondos de inversión son accesibles únicamente a cierto tipo de inversionistas, pues como aún no están lo suficientemente regulados por la Comisión de Acciones y Divisas estadounidense (SEC, por sus siglas en inglés)<sup>7</sup>, estos necesitan asegurarse de que sus inversionistas son lo suficientemente confiables. Dada la baja liquidez que suelen tener este tipo de fondos, estos últimos les piden a sus inversionistas un mínimo de permanencia en el fondo de un año (periodo que se conoce como *lock-up period*). Esta industria tiene activos valorados por más de 3.2 trillones de dólares en más de 10.000 Hedge Funds del mercado estadounidense. Las características que tienen estos fondos en Estados Unidos son (Chen, 2018):

- Inversionistas calificados: personas con un ingreso anual de más de 200.000 dólares al año por más de dos años consecutivos.
- Amplia Latitud de inversión: estos fondos pueden invertir en cualquier tipo de activo (terrenos, derivados, activos, etc...)
- Apalancamiento financiero: estos fondos suelen endeudarse en grandes proporciones para poder maximizar sus retornos.

<sup>6</sup> Para profundizar la parte matemática véase también (Xu, Chen & Tsui, 2008) y (Black & Litterman, 1992).

<sup>7</sup> SEC. (10 de Junio de 2013). Obtenido de Securities and Exchange Comision: <https://www.sec.gov/Article/whatwedo.html>

- Estructura de honorarios: estos fondos cobran un “performance fee” del 2% y un 20% sobre cualquier ganancia que genere la inversión.

Las principales razones por las cuales los Hedge Funds han tenido tan buena acogida en el mercado se debe a que, primero, son fondos que suelen generar retornos anormales ajustados al riesgo y, segundo, puesto que existen beneficios de diversificación con respecto a otras posibilidades de inversión (Sornette, Anderson & Simonetti, 2000). Adicionalmente, es importante mencionar que los Hedge Funds no son los más usados en modelos basados en Mean-Variance (MV) debido a que estos, dada las posibles conformaciones de su cartera, pueden generar retornos con distribuciones no-normales, lo que hace que la optimización en este tipo de modelos se vea afectada por temas como la baja simetría y alta curtosis que generan este tipo de fondos, dada su baja volatilidad (Amin & Kat, 2003). La solución a este problema, consiste en cambiar la definición de riesgo que tienen Markowitz y Black&Litterman: la volatilidad, por algo más cercano al riesgo real del portafolio como lo puede ser el VaR, un CVaR, entre otros, pero este no es el alcance que se le dará a esta tesis.

Una de las limitaciones más grandes que tiene BL es que está basado en Markowitz, un modelo donde la volatilidad es usada para la definición del riesgo. Martellini & Ziemann (2007) hacen una extensión del modelo original de Black&Litterman donde se usa el cuarto momento del CAPM para la estimación de los “views” implícitos neutrales del mercado:

$$\boldsymbol{\mu} - r_0 = \alpha_1 \boldsymbol{\beta}^{(2)} + \alpha_2 \boldsymbol{\beta}^{(3)} + \alpha_3 \boldsymbol{\beta}^{(4)} \quad (12)$$

Donde  $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$  son los vectores betas:

$$\boldsymbol{\beta}^{(2)} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}{\boldsymbol{\mu}^{(2)}(\mathbf{r}_p)}; \boldsymbol{\beta}^{(3)} = \frac{\boldsymbol{\Omega}_w}{\boldsymbol{\mu}^{(3)}(\mathbf{r}_p)}; \boldsymbol{\beta}^{(4)} = \frac{\boldsymbol{\Psi}_w}{\boldsymbol{\mu}^{(4)}(\mathbf{r}_p)} \quad (13)$$

Donde  $\boldsymbol{\Omega}_w$  es el vector de co-simetría,  $\boldsymbol{\Psi}_w$  es el vector de co-curtosis para el vector de pesos  $\mathbf{w}$  (Hwang & Satchell, 1999) donde  $\boldsymbol{\mu}^{(i)}$  es el momento  $i$  de la maximización  $\Phi(\boldsymbol{\mu}(R_p), \boldsymbol{\mu}^{(2)}(R_p), \boldsymbol{\mu}^{(3)}(R_p), \boldsymbol{\mu}^{(4)}(R_p))$  (Martellini & Ziemann, 2007). Las variables  $\alpha_i$  pueden ser entendidas como las primas de riesgo asociadas a la covarianza, co-simetría y co-curtosis; los  $\hat{\alpha}_i$  se pueden obtener haciendo una regresión del modo GLS (Generalized Least Squares).

Al querer tener Hedge Funds en el portafolio, los cuales tienen data histórica mensual y no diaria, como sí la tienen los activos riesgosos, es necesario usar un modelo específico que mitigue el riesgo muestral, dejando un problema de **riesgo de especificación**. Este problema no se vería reflejado en el caso de estudio de esta tesis, dado que los FICs constan de información diaria.

Siendo  $\lambda$  el coeficiente de aversión al riesgo, que es constante pues no depende del nivel de riqueza, entre más ingreso tenga la persona, su nivel de aversión al riesgo no cambiará. En la práctica no son muchas las personas que funcionan con este tipo de aversión al riesgo, pues lo más común es tener un coeficiente de aversión al riesgo decreciente (DARA por sus siglas en inglés), es decir, que entre más riqueza tiene, menos adverso al riesgo es. Por temas de practicidad en la solución matemática se mantendrá el mismo supuesto de Martellini & Ziemann (2007) que consiste en asumir una función CARA (por sus siglas en inglés), la cual ya fue descrita en la parte superior y que tiene las siguientes primas de riesgo:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda \mu^{(2)}(\mathbf{r}_p)}{A}; \alpha_2 = \frac{\lambda^2 \mu^{(3)}(\mathbf{r}_p)}{2A}; \alpha_3 = \frac{\lambda^3 \mu^{(4)}(\mathbf{r}_p)}{6A} \quad (14)$$

$$\text{Con } A = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \mu^{(2)}(\mathbf{r}_p) - \frac{\lambda^3}{6} \mu^{(3)}(\mathbf{r}_p) + \frac{\lambda^4}{24} \mu^{(4)}(\mathbf{r}_p).$$

Es importante recalcar que tanto los vectores  $\beta$  como las primas de riesgo  $\alpha_i$  dependen del vector de pesos  $w$ . Entonces, desde la ecuación (12) podemos obtener la relación determinística entre los retornos esperados (parte izquierda de la ecuación) y el vector de pesos (parte derecha de la igualdad) para poder generar, ya bien sea las estimaciones de los retornos esperados implícitos basados exógenamente, en los pesos del portafolio, o los pesos del portafolio basados, exógenamente en los retornos esperados.

Para continuar con el proceso de optimización, se crea un portafolio (que se definirá como neutral y estará basado en los pesos del portafolio de mercado, Benchmark). Usando la ecuación (12) se obtienen los “views” que después serán utilizados para obtener los retornos esperados neutrales. Después se usará un modelo de predicción que será usado para generar los “views” de los inversionistas (sobre los retornos). Este último, es aplicado en la ecuación (7) y finalmente la ecuación (12) nos permite obtener los pesos óptimos del portafolio según Black-Litterman.

Para la creación de los “views” de los inversionistas sobre los retornos de los Hedge Funds, Martellini & Ziemann (2007) tienen en cuenta 3 posibles resultados para cada una de las estrategias: uno “bullish”, otro “bearish” y otro neutral con respecto a los retornos esperados, basados en un análisis de factores rezagado. Teniendo en cuenta que el acercamiento está basado en un análisis factorial condicional univariado, se espera considerar cada factor independientemente y estimar la correlación entre los retornos de los Hedge Funds y los valores del rezago de 3 meses.

En la serie se califican los valores de cada factor: **bajo** (0% - 33%), **medio** (33% - 66%) y **alto** (66% - 100%); luego, se consideran los retornos de los Hedge Funds de cada estrategia, condicional al estado de la naturaleza del rezago de 3 meses. La confianza de los “views” estará determinada por el valor de la diagonal i-ésima de la matriz de varianza-covarianza,  $\Omega_{ii}$ , de la distribución de los “views”:

$$\Omega_{ii} = \left(1 - \frac{|S|}{L}\right) \Sigma_{ii} \quad (15)$$

Donde L es el número total de factores y  $\Sigma_{ii}$  es la varianza de las estrategias de los Hedge Funds (Martellini & Ziemann, 2007).

### III.D ÍNDICADORES COMPARATIVOS

Para comparar los resultados se usarán, además de la rentabilidad del portafolio, el riesgo del mismo y la relación de Sharpe, los siguientes indicadores:

El Índice de Diversificación que ilustrará de 0 a 10 qué tan diversificada está la cartera en cuanto a sectores económicos se refiere (siendo 0 una diversificación nula y 10 la máxima posible)<sup>8</sup>; este último índice es calculado de la siguiente manera:

---

<sup>8</sup> México, G. F. (2005). Gobierno de México. Obtenido de [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/125437/nota\\_metodologica.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/125437/nota_metodologica.pdf)

$$ID = 10 \times \left(1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i^2\right) \quad (17)$$

Donde  $\alpha_i$  es el porcentaje de participación de la industria  $i$  dentro del portafolio y  $N$  serán el número de sectores económicos asociados al portafolio en cuestión.

Por otra parte tenemos el *Alpha Jensen*<sup>9</sup>, el cual es un indicador que mide la habilidad de obtener rentabilidades por encima del índice bursátil de referencia (en este caso el COLCAP) ajustado por el riesgo (Ucha, 2019); la fórmula para su cálculo es:

$$\alpha = (R_p - R_f) - (R_m - R_f)\beta_p \quad (18)$$

Donde  $R_p$  es la rentabilidad del portafolio,  $R_f$  es la tasa libre de riesgo,  $R_m$  es la rentabilidad del mercado y  $\beta_p$  es el Beta-Ponderado del portafolio seleccionado, donde  $\beta$  es un indicador del riesgo en comparación con el mercado (Damodaran, 2002). Adicional a esto, es importante mencionar que este indicador solo tiene en cuenta el riesgo medido por  $\beta$ , entonces este ratio no mide el grado de diversificación de la cartera. Ahora bien, si  $\alpha > 0$ , entonces el portafolio seleccionado tiene un valor agregado pues supera al mercado.

Finalmente, dentro de los nuevos ratios trabajados en esta tesis, tenemos al *Information Ratio*<sup>10</sup>, el cual mide el exceso de retorno del portafolio seleccionado sobre el Benchmark (en este caso el COLCAP). Su cálculo es:

$$IR = \frac{R_p - R_m}{\sigma_p} \quad (19)$$

Donde  $\sigma_p$  es la desviación estándar de las rentabilidades diarias del portafolio; si nos fijamos bien, hay una gran similitud entre la Relación de Sharpe y el IR pero la diferencia está radicada en la acidez del ratio pues por lo general la rentabilidad de un portafolio Benchmark es mayor a una tasa

---

<sup>9</sup>Ucha, A. P. (2019). Economipedia. Obtenido de <https://economipedia.com/definiciones/alfa-de-jensen.html>

<sup>10</sup> Murphy, C. B. (18 de Febrero de 2019). Investopedia. Obtenido de <https://www.investopedia.com/terms/i/informationratio.asp>

libre de riesgo; esto último se cumple a cabalidad en el caso de estudio de este documento pues tenemos que la rentabilidad esperada del COLCAP es de 7.5% E.A y la tasa libre de riesgo es del 4.5%.

Ahora bien, con el fin de dar robustez a los resultados hallados en este documento, se agregó una prueba de *Backtesting*. Esta prueba consistió en la verificación de la estabilidad de las cuatro aplicaciones, tanto para la rentabilidad, el riesgo y los pesos de todos los activos durante una ventana de un año (desde el 30/11/2017 hasta el 30/11/2018); la ventana móvil de tiempo (*rolling window*) evalúa las rentabilidades diarias de los activos en el último año, es decir, que se toman las rentabilidades desde el 30/11/2016. Lo anterior se realizó generando la optimización moviendo la ventana un día a la vez y analizando sus resultados; El anexo 8 muestra gráficamente los resultados de esta prueba para rentabilidad y riesgo.

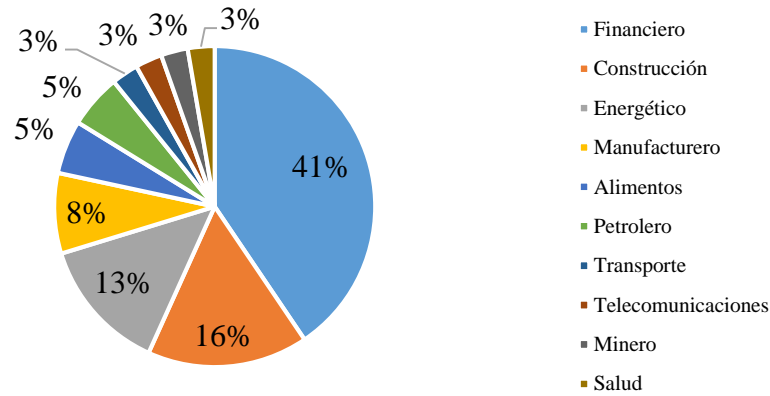
Ya para culminar con este apartado del documento, se explicará un indicador adicional basado en el *Backtesting*, este indicador es el *Asset Turnover Ratio*, el cual se calcula de la siguiente manera:

$$TO = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|)$$

Donde T es el número de periodos de revisión (dado que se acostumbra a calcular este índice en un periodo de un año, asumiremos  $T = 12$ ), N es el número total de activos dentro del portafolio y  $w_{j,t}$  es el peso del activo j dentro del portafolio en el momento t. Ahora bien, este indicador mide qué tan activo es el administrador del portafolio en su tarea. Para el ejercicio de esta investigación, este indicador mostrará qué tan estables son los pesos de cada uno de los activos dentro del portafolio obtenido por la aproximación de Black&Litterman con FICs a través del tiempo; esto se averiguará con una prueba de *Backtesting* (Breaking Down Finance, s.f.).

#### IV. DATOS

Para las cuatro aproximaciones se usarán los precios de cierre diarios de las treinta y siete (37) compañías listadas en el Anexo 1; estas compañías vienen de varios sectores económicos del país que para el caso de esta investigación se distribuyen de la siguiente manera:



**Gráfico 3. Participación de activos por sector económico**

Es importante aclarar que esta participación está basada en el número de acciones que tienen cada una de las empresas en circulación. Adicional a esto, tendremos una matriz de rendimientos diarios la cual es  $r_i(t) = \ln\left(\frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}}\right)$  donde  $P_{i,t}$  es el precio de la acción  $i$  en el momento del tiempo  $t$ . Finalmente, para obtener el vector de rendimientos anualizados tenemos:

$$R_i = e^{\left(\frac{1}{m}\sum_{t=1}^m r_i(t)\right) \times 252} - 1 \quad (10)$$

Siendo  $m$  el número de días hábiles que hay entre el 17/05/2013 hasta el 30/11/2018 y suponiendo que, en promedio, hay 252 días hábiles al año; la ecuación anterior es la forma de expresar de manera discreta el promedio anual de unos rendimientos diarios. Ahora bien, para el vector de la desviación estándar tenemos que:

$$\sigma_i = e^{\sqrt{VAR[r_i(t)]}} - 1 \quad (11)$$

La ecuación 11 muestra de manera discreta y anualizada, la desviación estándar de los retornos diarios de cada uno de los activos que se están teniendo en cuenta para esta investigación.

Ahora bien, los FICs son fondos de inversión donde se invierten recursos de terceros en un portafolio de activos conforme a lo establecido por cada uno de los fondos, y sus resultados económicos son distribuidos diariamente de manera proporcional al de la inversión (Asofiduciaria, 2017). Estos Fondos de Inversión Colectiva pueden ser utilizados para una mejor distribución del riesgo dentro del portafolio gracias a la baja correlación que suelen tener con las acciones (ver Anexo 7). Lo anterior se debe a la composición por tipo de producto de estos fondos, donde la mayor parte está concentrada en renta fija o en productos indexados a ciertas tasas como el IPC o la IBR.

Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado, para las aproximaciones tres (Markowitz con FICs) y cuatro (Black&Litterman con FICs) se usarán Fondos de Inversión Colectiva abiertos sin pacto de permanencia y en la misma ventana de tiempo en la cual se encuentran los activos riesgosos; la razón por la que se escogió esta clase de FICs tan específica es debido a que este tipo de fondos no tiene ningún costo asociado a la hora de que el inversionista toma la decisión de salir de él pues son “Sin pacto de permanencia”; esto es fundamental para el estudio pues no se están contemplando los costos de transacción que generan los FICs cerrados a la hora de querer salir de ellos. Adicionalmente, se escogieron los fondos administrados por las fiduciarias pues estas representan el 65% del mercado de FICs (Asociación Nacional de Instituciones Financieras, 2016).

COMPOSICIÓN DEL PORTAFOLIO POR TIPO DE RENTA									
	Alianza1	Alianza2	CrediCrp	BnColom	Davinda	Occident1	Occident2	GNB	Ponderado
Cta cte/ahorros	34.79%	41.36%	0.00%	27.97%	0.00%	0.00%	0.00%	29.00%	15.58%
Tasa fija	25.15%	20.12%	29.00%	22.60%	18.10%	22.68%	17.75%	20.12%	21.79%
IBR	16.24%	14.48%	18.00%	30.59%	20.71%	15.55%	16.86%	26.21%	19.07%
IPC	14.35%	13.99%	11.00%	14.85%	11.95%	19.34%	19.71%	18.25%	14.80%
DTF	8.61%	8.97%	14.00%	2.07%	20.24%	11.23%	10.58%	5.30%	11.82%
Disponible	0.00%	0.00%	26.00%	0.00%	29.00%	28.03%	35.10%	0.00%	15.79%
UVR	0.00%	0.00%	2.00%	1.37%	0.00%	2.05%	0.00%	0.00%	0.58%
Otros	0.86%	1.08%	0.00%	0.55%	0.00%	1.12%	0.00%	1.12%	0.57%
<b>TOTAL</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>
Valor del FICs (Millones)	\$2,958,448	\$928,445	\$530,117	\$1,267,929	\$3,206,171	\$1,981,884	\$687,468	\$248,561	\$11,809,022

**Tabla 1. FICs por tipo de renta**

La tabla 1 relaciona para cada Fondo de Inversión Colectiva, abierto sin pacto de permanencia y administrado por fiduciarias, su composición según el tipo de renta en el cual está invirtiendo al cierre de la ventana de estudio es este documento (30/11/2018). Adicional a esto, esta tabla muestra de manera ponderada por el valor de cada FIC, el total invertido en cada rubro (columna “Ponderado”). Como es posible notar, la tasa fija es el tipo de renta con más ponderación dentro de la cartera de FICs seleccionados (21.79%) y seguido por Indicador Bancario de Referencia<sup>11</sup> (19.07%).

Ahora, si se analiza la cartera de los FICs por sector económico se puede ver que el sector financiero es quien domina con más del 95% sobre los otros sectores, tal y como lo muestra la Tabla 2.

COMPOSICIÓN DEL PORTAFOLIO POR SECTOR ECONÓMICO									
	Alianza1	Alianza2	CrediCrp	BnColom	Davinda	Occident1	Occident2	GNB	Ponderado
Sec. Financiero	95.96%	98.00%	81.00%	98.08%	97.86%	95.48%	99.00%	97.83%	96.33%
Ent. Públicas	2.50%	2.00%	19.00%	1.92%	2.14%	2.25%	1.00%	2.17%	2.91%
Sec. Real	1.45%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.27%	0.00%	0.00%	0.74%
Otros	0.09%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.02%
<b>TOTAL</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>	<b>100%</b>
Valor del FICs (Millones)	\$2,958,448	\$928,445	\$530,117	\$1,267,929	\$3,206,171	\$1,981,884	\$687,468	\$248,561	\$11,809,022

**Tabla 2. FICs por sector económico**

<sup>11</sup> Asobancaria. (2016). Asobancaria. Obtenido de <https://www.asobancaria.com/ibr/>

## V. RESULTADOS

En esta sección se reportan los resultados de los portafolios óptimos obtenidos en cada una de los modelos, se revisan los indicadores anteriormente mencionados con el fin de compararlos y facilitar que el inversionista tome una decisión lo más informada posible.

TABLA RESUMEN DE RESULTADOS					
	Markowitz	Black&Litterman	Mrkwitz con FICs	BL con FICs	
Rentabilidad	11,73%	31,46%	19,59%	32,72%	
Riesgo	19,70%	37,59%	15,18%	38,33%	
Relación de Sharpe	0,3795	0,7239	1,0107	0,7426	-1
Information Ratio	0,2141	0,6372	0,796	0,6575	-1
Alpha Jensen	0,0722	0,3793	0,1285	0,3776	1
Índice de Diversificación	5,5114	8,1234	4,4701	8,1980	1
Turnover	331,11%	204,88%	335,41%	228,04%	-1

*Tabla 3. Resumen de resultados de los modelos*

La tabla 3 muestran que Black&Litterman supera en todos los índices calculados en este documento al modelo de Markowitz; en cuanto al semáforo que se encuentra a mano izquierda de ambas implementaciones de BL, estos hacen referencia a si dicho indicador mejoró (verde) o empeoró (rojo) al compararlo con el modelo de su izquierda.

En cuanto al indicador de rentabilidad, la aproximación BL muestra una superioridad versus la de Markowitz de 197 puntos básicos. Ahora bien, revisando la diferencia en este indicador entre BL y BL con FICs, se puede observar que la diferencia es de 1.26 puntos porcentuales.

Analizando el segundo indicador, se tiene que tanto BL como BL con FICs muestran un aumento de riesgo en comparación con el modelo de Markowitz, lo cual es coherente con la teoría de que “a mayor riesgo mayor será la rentabilidad” (Bodie, Kane & Marcus, 2011).

Al comparar la relación de Sharpe, se observa un incremento del modelo BL versus el de Markowitz de manera absoluta del 0.3444 y entre la aproximación BL contra BL con FICs, del 0.0187 lo que a su vez significa un crecimiento del ratio del 2.6%. Lo anterior muestra que ante

una tasa libre de riesgo del 4.25%, los excesos de retornos de BL son mayores por cada punto de riesgo asumido por el portafolio en comparación con Markowitz, y que a su vez BL con FICs supera a BL. Este resultado va alineado con lo obtenido al calcular el *Information Ratio* y muestra que en esta estimación BL es superior a Markowitz pues existe un crecimiento en el IR del 197.7% y que a su vez, el BL con FICs tiene como indicador 0.6575 que sobresale en 3.2 puntos porcentuales en comparación con la estimación de BL.

Al analizar el indicador Alpha Jensen, que muestra la capacidad de un portafolio de dar valor agregado sobre la rentabilidad del mercado, muestra como resultado que BL, nuevamente, es superior a la aproximación de Markowitz de manera absoluta en 0.3071 pero al calcular la diferencia en el indicador entre BL con FICs y BL, se tiene que en valor absoluto, este disminuye en 0.0017, pero esto una diferencia muy pequeña para el estudio de esta investigación.

Ahora bien, al ver los resultados del índice de diversificación de Markowitz, este es igual al 5.51 mientras que BL muestra un indicador del 8.12; esto sugiere que BL sí diversifica de mejor manera el portafolio, en cuanto a sectores económicos se refiere. Adicionalmente, la diferencia absoluta para este ratio entre la estimación de BL con FICs y la de BL es de 0.0746 lo que significa un crecimiento del 0.9%.

Es importante aclarar que el modelo de BL no tiene las mismas restricciones que Markowitz, lo que significa que en Black&Litterman el inversionista puede usar más o menos del dinero que tiene presupuestado para invertir y además, que podría irse en corto en caso de que el modelo así lo proponga. Siendo así, se podría decir que BL tiene una ventaja sobre Markowitz pues no tiene restricciones, pero para este último es fundamental contar con estas pues de no ser así la estimación no entregaría unos resultados lógicos (Michaud, 1989). Las pruebas de lo anteriormente mencionado se encuentran en el Anexo 4.

Cabe aclarar que gracias a que BL no tiene restricciones de índole presupuestal ni de ventas en corto, el modelo arrojó resultados en donde no se usó el 100% del dinero disponible a invertir y se utilizaron las ventas en corto para ciertos activos del portafolio; por esta razón no se puede calcular el ID con los resultados del modelo, sino que es necesario normalizarlos para que el indicador sea comparable entre los 3 modelos pero manteniendo la estructura original de la cartera. El proceso matemático de la normalización tiene lugar en el anexo 5. A continuación se presentarán las tablas

que muestran las participaciones de cada sector económico dentro de los portafolios óptimos de cada estimación.

<b>Sector</b>	<b>Participación (%)</b>
Energético	62.2%
Financiero	21.63%
Salud	11.96%
Manufacturero	2.52%
Petrolero	1.70%

*Tabla 4. Part. Por sector modelo Markowitz*

<b>Sector</b>	<b>Participación (%)</b>	<b>Part. % normalizada</b>
Energético	127.6%	25.7%
Salud	92.4%	18.6%
Financiero	22.1%	4.4%
Petrolero	18.0%	3.6%
Manufacturero	11.6%	2.3%
Minero	-3.2%	0.6%
Telecomunicaciones	-19.3%	3.9%
Transporte	-23.2%	4.7%
Alimentos	-45.9%	9.2%
Construcción	-134.1%	27.0%

*Tabla 5. Part. Por sector modelo BL*

<b>Sector</b>	<b>Participación (%)</b>	<b>Part. % normalizada</b>
Energético	128.2%	18.3%
Salud	92.0%	11.2%
Financiero	30.9%	29.4%
Petrolero	18.3%	2.2%
Manufacturero	11.7%	2.3%
Minero	-3.3%	0.4%
Telecomunicaciones	-18.0%	2.2%
Transporte	-22.5%	2.8%
Alimentos	-44.8%	6.2%

Construcción	-147.4%	19.7%
FICs	43.0%	5.3%

**Tabla 6. Part. Por sector económico modelo BL + FICs**

Para el modelo de Black-Litterman con FICs se hicieron varios escenarios con el fin de demostrar que estos Fondos de Inversión Colectiva si ayudan a tener un mejor comportamiento en el portafolio; los escenarios se presentan en el Anexo 6 en donde se podrá observar que en 15 de los 17 casos la relación de Sharpe, el Índice de Diversificación y el Information Ratio, son mejores con FICs que sin ellos; dentro de los 15 casos que demuestran una superioridad en casi todos los índices, se tiene que el de mejor comportamiento se da cuando el portafolio incluye a todos los FICs abiertos sin pactos de permanencia<sup>12</sup>, salvo al de Santander y Helm Plus, pues estos tienen un valor del fondo nulo ya hace más de un año. Lo anterior es resultado de una correlación negativa que se presenta entre los FICs con 18 de los activos riesgosos expuestos en el portafolio y también debido a que de los 15 activos con los que no se tiene una correlación negativa, son 13 los que presentan una baja corrección con los Fondos de Inversión Colectiva. Esto se puede observar en el Anexo 7.

Finalmente, para el indicador del *Turnover* se observa que Markowitz tiene un índice equivalente al 331.11%, lo que significa que en esa fracción promedio del valor del portafolio, este fue vendido a comprado durante el año de Backtesting. Esto implica que los pesos de cada activo dentro del portafolio hubiesen cambiado en un 331% en el último año, generando altos costos de transacción y de impuestos asociados.

Analizando el *Turnover* de BL, se observa que para la implementación sin FICs como para la que sí los tiene en cuenta, los pesos de cada uno de los activos dentro de los portafolios son menos variables que en la estimación de Markowitz.

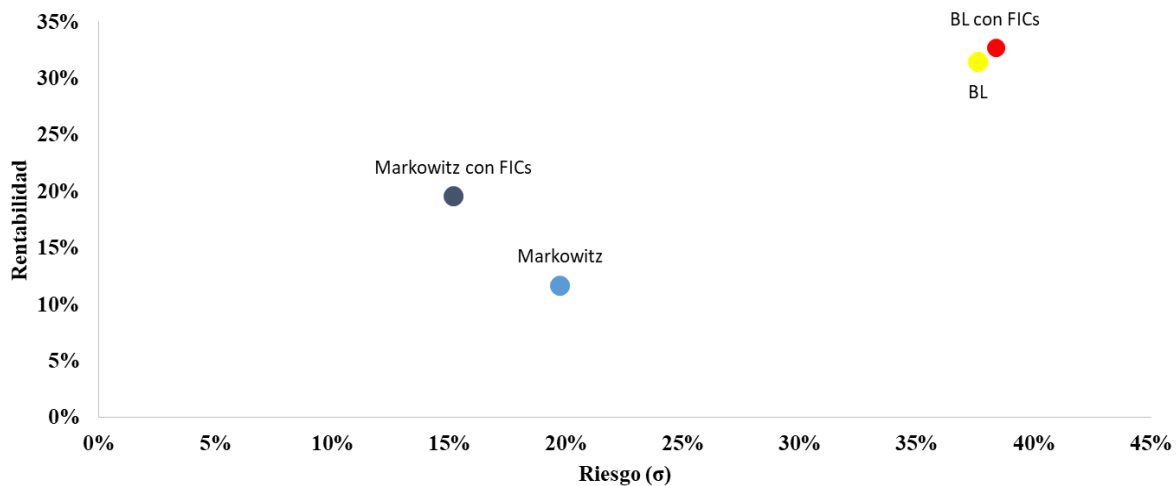
---

<sup>12</sup> *Asofiduciaria*. (2017). Obtenido de Asociación de Fiduciarias de Colombia:  
<https://www.asofiduciarias.org.co/educacion-financiera/fondos-de-inversion-colectiva/>



de la cartera, se debe a que es la acción de menor relación de Sharpe positiva (0.008) –lo anterior se puede analizar en los anexos 9.a, 9.b y 9.c, respectivamente para cada modelo-. Continuando con este análisis para el siguiente modelo, se encuentra dentro de los resultados que el motivo por el cual BL no escogió a BIOMAX como su activo menos ponderado dentro del portafolio, es gracias a que este tiene una correlación negativa con la mayoría de los otros activos dentro de la cartera, a comparación de GRUPSURA que tiene una correlación positiva con los mismos. Adicional a esto, para el tercer modelo se observa que en los 17 casos realizados, la composición de los activos riesgosos no es muy variante lo que nos lleva a concluir que independientemente del FIC que se utilice, la cartera compuesta por activos riesgosos será prácticamente igual en todos los casos.

A continuación se presenta la distribución de los portafolios óptimos según cada modelo, en las dimensiones (riesgo, rentabilidad).



**Gráfica 5. Portafolios óptimos por implementación**

## VI. CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta que el objetivo de la investigación es verificar si en un mercado como el colombiano, en donde este está limitado a muy pocas acciones, donde la liquidez es baja y donde se centralizan los activos riesgosos en un solo sector económico, tenía sentido y era útil para el inversionista tener en cuenta dentro de su portafolio activos diferenciados como los FICs.

Los resultados muestran que si hay una mejora en el comportamiento del portafolio cuando se tienen en cuenta Fondos de Inversión Colectiva abiertos sin pactos de permanencia administrados por Fiduciarias, pues estos no contienen dentro de su composición acciones sino, principalmente, activos de renta fija; como resultado de lo anterior, se encuentra una correlación entre los FICs y los activos riesgosos con niveles muy bajos o incluso, para la mayoría de los casos, negativos. Adicional a esto, dada la libertad que tiene el modelo de Black&Litterman (tanto para la aplicación tres como para la cuatro) al no tener ninguna clase de restricción y comparándose con Markowitz, un modelo que restringe la ecuación presupuestal del inversionista a no disponer de un crédito para invertir y a no hacer ventas en corto, esto genera una mayor posibilidad de acción para BL generando óptimos con grandes pesos en ventas en corto.

Gracias a las ventas en corto que surgieron los modelos de BL, el índice de diversificación no se ajusta a la realidad pues según como es calculado, este daría un valor negativo; como se pudo analizar en la sección de resultados, se hicieron algunos supuestos y ajustes a las ponderaciones de los sectores económicos con el fin de poder tener un índice comparable entre las cuatro implementaciones, pero esto no quiere decir que esta sea la única manera de hacerlos comparables y que queda a criterio del investigador.

Para futuros estudios acerca de este tema, se debería pensar en qué ocurre con los modelos de Black&Litterman cuando no se mide el riesgo como la desviación estándar del portafolio, sino se realiza con medidas más cercanas al riesgo tangible del mismo, como lo son el VaR o el CVaR. También se podría analizar qué sucedería con el modelo de BL con FICs, si en vez de usar los abiertos sin pacto de permanencia, se escogieran cualquier otro tipo de fondos como lo son los cerrados, los inmobiliarios, etc., o si se usaran restricciones dentro del modelo.

## VII. ANEXOS

### Anexo 1. Información de las empresas seleccionadas para el portafolio inicial:

Acción	Sector	Acciones en circulación	Fecha de emisión	Precio apertura
Ecopetrol	Petrolero	41,117	26/11/2007	\$ 1,400
AviancaPF	Transporte	336	11/05/2011	\$ 5,300
DaviviendaPF	Financiero	108	5/10/2010	\$ 21,980
ETB	Telecomunicaciones	3,551	3/09/2003	\$ 645
GrupoAval	Financiero	15,171	21/12/1998	\$ 303
EEB	Energético	9,181	28/07/2009	\$ 700
ISA	Energético	1,108	2/03/2001	\$ 900
Popular	Financiero	7,725	9/09/1996	\$ 61
Biomax	Petrolero	237	28/10/2009	\$ 641
Canacol	Energético	178	15/12/2010	\$ 29,350
CarvajalPF	Manufacturero	37	4/06/2012	\$ 5,170
Cemex	Construcción	557	16/11/2012	\$ 12,000
ElecTulua	Energético	0	26/06/2009	\$ 134,218
Éxito	Alimentos	448	8/05/1997	\$ 3,487
BBVA	Financiero	13,908	3/10/1994	\$ 246
AvVillasPF	Financiero	223	20/12/2000	\$ 2,179
BancoBogota	Financiero	331	17/02/1995	\$ 4,114
Occidente	Financiero	156	21/02/1995	\$ 231,499
BancolombiaPF	Financiero	452	26/07/1995	\$ 2,177
PazRio	Minero	24,871	17/02/1995	\$ 19
Carton	Manufacturero	108	23/02/1995	\$ 1,981
Celsia	Energético	1,070	19/10/2001	\$ 135
Cemargos	Construcción	1,152	17/02/1995	\$ 802
Marly	Salud	11	2/02/1995	\$ 1,322
Coltejer	Manufacturero	70	14/02/1997	\$ 29,909
Protección	Financiero	25	18/07/2005	\$ 26,669
GrupoSura	Financiero	469.037	17/02/1995	\$ 5,200
Bancolombia	Financiero	509.705	17/02/1995	\$ 3,775
Nutresa	Alimentos	460.123	9/03/1998	\$ 1,837
GrupoArgos	Construcción	645.4	17/02/1995	\$ 2,069
AvalPF	Financiero	7110.35	12/05/2011	\$ 1,315
GrupoSuraPF	Financiero	106.335	2/12/2011	\$ 32,300
GrupoArgosPF	Construcción	211.827	7/06/2012	\$ 16,140
Corficolombiana	Financiero	222.352	3/04/1995	\$ 3,553
CemargosPF	Construcción	209.198	17/05/2013	\$ 8,160
BVC	Financiero	60.514	27/06/2007	\$ 10,752
Concreto	Construcción	1134.255	8/09/1998	\$ 133

**Anexo 2.** Tabla de correlación entre los activos finales del portafolio de Markowitz.

<b>MATRIZ DE CORRELACIÓN DEL PORTAFOLIO ÓPTIMO</b>								
	<i>EEB</i>	<i>ISA</i>	<i>Proteccion</i>	<i>Biomax</i>	<i>Canacol</i>	<i>Carton</i>	<i>Marly</i>	<i>ElecTulua</i>
EEB	1							
ISA	0.1198	1						
Proteccion	0.0191	0.0054	1					
Biomax	-0.0205	-0.0353	-0.0001	1				
Canacol	0.1162	0.1272	0.0163	-0.0063	1			
Carton	0.0314	-0.0017	-0.0018	-0.0001	-0.0567	1		
Marly	-0.0218	-0.0183	-0.0005	-0.0002	0.0543	-0.0002	1	
ElecTulua	0.0145	-0.0078	-0.0005	-0.0002	0.0328	-0.0003	-0.0007	1

**Anexo 3.** Información acerca de los FICs utilizados en el tercer modelo. Esta información fue sacada a corte del 30/11/2018, momento de cierre de la ventana temporal de estudio en esta investigación.

<b>Nombre de la Fiduciaria</b>	<b>Tipo de FIC</b>	<b>Valor del fondo</b>
Santander	Abierto sin pacto	\$ 0
Alianza 1	Abierto sin pacto	\$ 2,958,448,004,647
Alianza 2	Abierto sin pacto	\$ 928,444,531,427
Helm Plus	Abierto sin pacto	\$ 0
FiduCredicorp	Abierto sin pacto	\$ 530,116,593,779
FiduBancolombia	Abierto sin pacto	\$ 1,267,929,027,227
fiduDavivienda	Abierto sin pacto	\$ 3,206,171,013,391
FiduOccidente1	Abierto sin pacto	\$ 1,981,884,271,007
FiduOccidente2	Abierto sin pacto	\$ 687,467,599,559
GNB Sudameris	Abierto sin pacto	\$ 248,561,333,307

**Anexo 4.** La primera tabla muestra los resultados del caso de Markowitz sin ninguna restricción; demostración de que el resultado para este modelo, sin ninguna restricción presupuestal o de ventas en corto, muestra resultados que no son lógicos. La segunda muestra la implementación de

Markowitz con la posibilidad de ventas en corto, sin ninguna mejora en la rentabilidad ni en el riesgo; el modelo, aunque teniendo la posibilidad de hacer ventas en corto, no las hace.

<b>CASO 1. SIN RESTRICCIONES</b>														
PFDVAV	EEB	ISA	PROTEC	BBVA	OCCI	POPU	BIOM	CNEC	CRTN	CRVJL	MARLY	ETULUA	Riesg	Rent
390%	1884%	1607%	1391%	482%	455%	594%	416%	290%	411%	137%	5646%	774%	1224%	934%

<b>CASO 2. CON POSIBILIDAD DE VENTAS EN CORTO</b>									
EEB	ISA	PROTEC	BIOM	CNEC	CRTN	MARLY	ETULUA	Riesg	Rent
3.7%	27.9%	21.6%	1.7%	9.8%	2.5%	12.0%	20.8%	19.7%	11.7%

**Anexo 5.** Explicación matemática de la normalización de los pesos de las carteras óptimas obtenidas en los modelos de BL y BL con FICs con el fin de poder tener un Índice de Diversificación comparable entre los cuatro modelos.

El proceso de normalización se realizó de la siguiente manera: primero se calculó el valor absoluto de los pesos que el resultado del modelo le dio a cada uno de los activos, con el fin de no tener en cuenta las ventas en corto (esto es posible pues independientemente de si el inversionista se fue en corto no, se hizo una inversión en ese activo). Segundo, se normalizaron los pesos dividiéndolos sobre la sumatoria del resultado anterior. Tercero, se calcula el índice. Matemáticamente:

$$\widehat{ID} = 10 \times \left( 1 - \sum_{i=1}^N \varsigma^2 \right); \varsigma = \frac{abs(\alpha_i)}{\sum abs(\alpha)}$$

**Anexo 6.** Tabla de resultados para los 17 casos realizados para el modelo de BL con FICs.

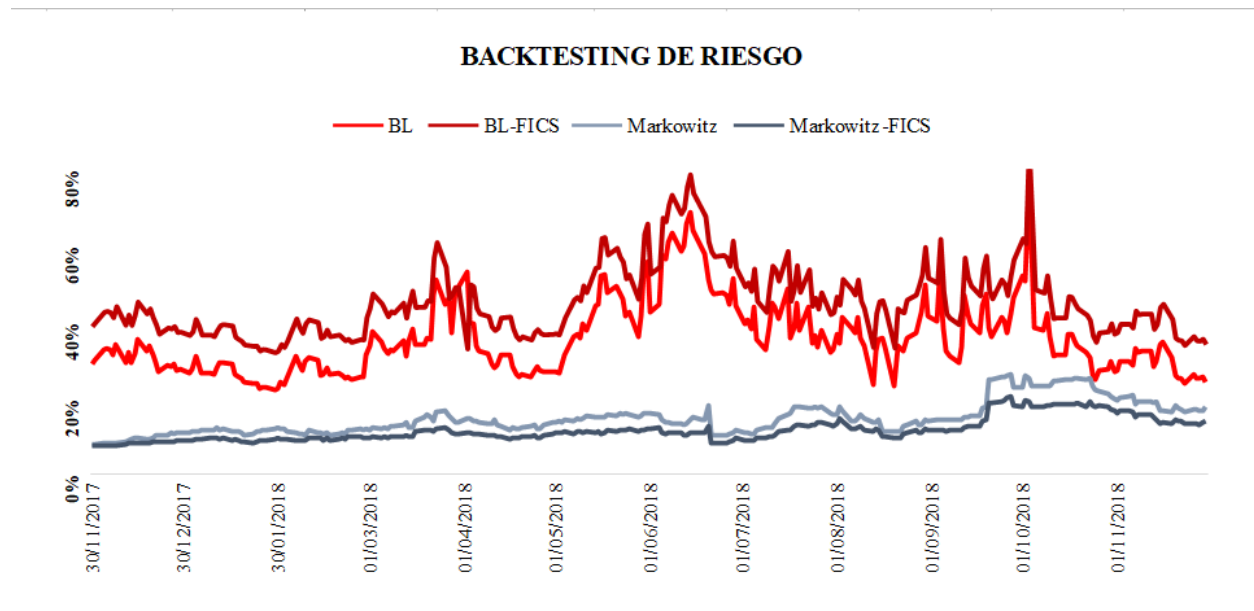
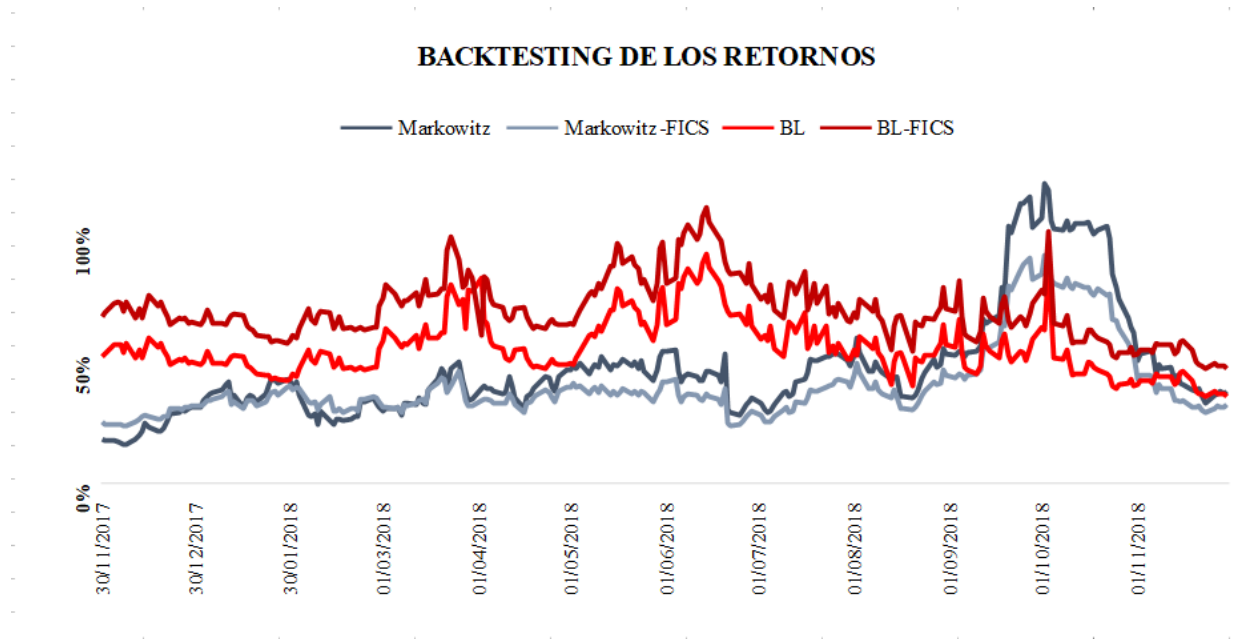
<b>MODELO BLACK&amp;LITTERMAN CON FICs</b>						
	<b>Rentabilidad</b>	<b>Riesgo</b>	<b>Sharpe</b>	<b>ID</b>	<b>Alpha Jensen</b>	<b>Inf. Ratio</b>
Caso1	32.71%	38.33%	0.7425	8.21	0.3777	0.657
Caso2	32.35%	38.12%	0.7372	8.09	0.3840	0.652
Caso3	32.29%	38.09%	0.7363	8.09	0.3839	0.651
Caso4	31.52%	37.63%	0.7247	8.04	0.3792	0.638
Caso5	31.49%	37.61%	0.7243	8.05	0.3785	0.638
Caso6	32.53%	38.22%	0.7398	8.17	0.3786	0.655
Caso7	31.48%	37.60%	0.7241	8.04	0.3784	0.637
Caso8	31.57%	37.66%	0.7255	8.10	0.3757	0.639
Caso9	31.46%	37.59%	0.7239	8.04	0.3788	0.637
Caso10	31.44%	37.58%	0.7236	8.04	0.3794	0.637
Caso11	31.62%	37.69%	0.7263	8.09	0.3764	0.640
Caso12	31.56%	37.65%	0.7253	8.08	0.3764	0.639
Caso13	31.51%	37.62%	0.7246	8.04	0.3790	0.638
Caso14	31.77%	37.77%	0.7285	8.15	0.3724	0.642
Caso15	31.66%	37.71%	0.7268	8.12	0.3750	0.640
Caso16	31.46%	37.59%	0.7238	8.04	0.3791	0.637
<b>Caso17</b>	<b>32.72%</b>	<b>38.33%</b>	<b>0.7426</b>	<b>8.20</b>	<b>0.3776</b>	<b>0.658</b>

### Anexo 7. Tabla de correlación para el caso número 4.

	ECP	PAVH	PFDV	ETB	AVAL	EEB	ISA	PROT	PAZR	EXI	BBVA	PFVI	BOGO	OCCI	POP	PFBCO	BIOM	CNCL	CRTN	CVJL	CELS	CMARG	CEMX	MRLY	
ECP	1.00																								
PAVH	0.62	1.00																							
PFDV	-0.05	-0.18	1.00																						
ETB	-0.79	-0.31	-0.05	1.00																					
AVAL	0.51	0.70	0.11	-0.15	1.00																				
EEB	-0.42	-0.63	0.73	0.13	-0.29	1.00																			
ISA	0.04	-0.21	0.85	-0.20	0.07	0.80	1.00																		
PROT	-0.24	-0.54	0.64	-0.07	-0.43	0.79	0.63	1.00																	
PAZR	0.48	0.41	-0.05	-0.48	0.15	-0.37	-0.19	-0.06	1.00																
EXI	0.73	0.87	-0.32	-0.37	0.71	-0.76	-0.38	-0.68	0.47	1.00															
BBVA	-0.03	0.22	-0.08	0.10	0.18	-0.29	-0.39	-0.26	0.42	0.33	1.00														
PFVI	-0.06	0.38	-0.30	0.12	0.25	-0.38	-0.51	-0.37	0.40	0.42	0.73	1.00													
BOGO	0.74	0.55	0.35	-0.56	0.72	-0.03	0.41	-0.09	0.26	0.55	0.03	-0.09	1.00												
OCCI	0.64	0.48	0.13	-0.52	0.48	-0.23	0.17	-0.22	0.31	0.55	0.16	0.00	0.67	1.00											
POP	0.17	0.15	-0.08	0.14	0.21	-0.22	-0.09	-0.28	-0.14	0.26	0.01	-0.18	0.22	0.40	1.00										
PFBCO	0.08	-0.09	0.90	-0.19	0.26	0.66	0.84	0.54	0.02	-0.21	-0.10	-0.26	0.47	0.18	-0.19	1.00									
BIOM	-0.21	-0.39	0.57	0.02	-0.26	0.70	0.77	0.55	-0.43	-0.60	-0.67	-0.75	0.00	-0.19	-0.14	0.51	1.00								
CNCL	0.28	0.19	0.35	-0.11	0.19	0.15	0.40	0.09	-0.18	0.08	-0.18	-0.43	0.45	0.18	0.41	0.21	0.36	1.00							
CRTN	0.03	-0.24	0.52	-0.28	-0.26	0.52	0.63	0.60	-0.01	-0.41	-0.30	-0.51	0.13	0.01	-0.15	0.48	0.61	0.33	1.00						
CVJL	0.18	-0.06	0.66	-0.23	0.10	0.57	0.87	0.50	-0.16	-0.27	-0.58	-0.65	0.41	0.23	-0.01	0.69	0.79	0.33	0.58	1.00					
CELS	0.72	0.83	0.12	-0.38	0.79	-0.40	0.05	-0.42	0.35	0.86	0.28	0.26	0.76	0.67	0.29	0.19	-0.31	0.35	-0.16	0.07	1.00				
CMARG	-0.51	-0.14	0.31	0.75	0.13	0.35	0.24	0.06	-0.55	-0.26	-0.12	-0.14	-0.11	-0.30	0.28	0.16	0.33	0.39	-0.07	0.15	-0.04	1.00			
CEMX	0.26	0.70	-0.36	0.17	0.63	-0.67	-0.52	-0.72	0.15	0.79	0.47	0.52	0.27	0.29	0.42	-0.34	-0.65	0.15	-0.58	-0.50	0.68	0.22	1.00		
MRLY	-0.68	-0.80	0.37	0.35	-0.59	0.78	0.43	0.68	-0.42	-0.93	-0.34	-0.35	-0.48	-0.66	-0.42	0.29	0.61	-0.09	0.39	0.29	-0.80	0.29	-0.77	1.00	
CLTJR	-0.50	-0.01	-0.28	0.61	0.05	-0.13	-0.30	-0.44	-0.29	-0.01	0.25	0.37	-0.38	-0.23	0.08	-0.34	-0.17	-0.20	-0.40	-0.35	-0.10	0.40	0.32	0.02	
ETULU	-0.44	-0.38	0.29	0.26	-0.38	0.43	0.18	0.29	-0.18	-0.42	0.27	0.07	-0.24	-0.20	0.01	0.07	0.12	0.28	0.18	-0.13	-0.20	0.32	-0.15	0.36	
GSUR	-0.14	0.09	0.48	0.42	0.57	0.30	0.35	0.04	-0.18	0.06	0.05	0.06	0.32	0.06	0.22	0.49	0.10	0.19	-0.14	0.25	0.30	0.71	0.31	0.04	
BCOL	0.22	-0.03	0.86	-0.35	0.29	0.62	0.85	0.54	0.12	-0.13	-0.09	-0.24	0.57	0.27	-0.19	0.98	0.46	0.22	0.49	0.69	0.25	0.03	-0.35	0.22	
NUTR	0.42	0.45	0.44	-0.21	0.66	0.12	0.46	0.00	0.05	0.43	-0.01	-0.06	0.75	0.57	0.40	0.47	0.05	0.49	0.08	0.38	0.72	0.31	0.39	-0.39	
GARG	0.37	0.53	0.29	0.07	0.79	-0.07	0.27	-0.29	-0.06	0.52	-0.01	-0.02	0.63	0.43	0.39	0.35	0.02	0.42	-0.18	0.30	0.73	0.49	0.57	-0.45	
PFAV	0.52	0.70	0.11	-0.15	0.98	-0.31	0.05	-0.44	0.17	0.72	0.19	0.25	0.71	0.47	0.21	0.27	-0.27	0.19	-0.28	0.09	0.80	0.13	0.64	-0.60	
PGGS	0.01	0.28	0.28	0.39	0.70	0.04	0.17	-0.19	-0.14	0.29	0.06	0.09	0.37	0.13	0.32	0.33	-0.04	0.20	-0.27	0.14	0.44	0.66	0.51	-0.19	
PGGA	0.40	0.66	0.01	0.10	0.80	-0.40	-0.07	-0.55	0.03	0.72	0.14	0.16	0.53	0.43	0.44	0.06	-0.25	0.31	-0.39	0.00	0.79	0.39	0.79	-0.66	
CORFI	-0.34	0.06	-0.57	0.57	0.05	-0.46	-0.76	-0.46	-0.15	0.18	0.33	0.46	-0.40	-0.29	0.26	-0.66	-0.59	-0.20	-0.62	-0.76	-0.09	0.30	0.58	-0.20	
PFCEM	-0.40	0.07	0.03	0.77	0.24	-0.01	-0.10	-0.25	-0.46	0.02	0.01	0.03	-0.12	-0.22	0.41	-0.11	0.04	0.32	-0.32	-0.12	0.10	0.92	0.52	-0.01	
BVC	0.53	0.38	0.47	-0.38	0.54	0.13	0.63	0.05	0.14	0.28	-0.31	-0.35	0.69	0.54	0.11	0.58	0.39	0.32	0.30	0.76	0.53	0.00	-0.04	-0.21	
CCRET	0.16	0.63	-0.53	0.24	0.53	-0.71	-0.62	-0.79	0.12	0.70	0.42	0.54	0.14	0.20	0.36	-0.48	-0.66	0.03	-0.66	-0.56	0.51	0.20	0.92	-0.70	
FS	0.78	0.71	-0.39	-0.40	0.56	-0.72	-0.30	-0.63	0.23	0.82	-0.07	-0.03	0.53	0.45	0.33	-0.27	-0.33	0.27	-0.29	-0.07	0.67	-0.24	0.58	-0.79	
FA1	-0.34	-0.58	0.75	0.01	-0.33	0.91	0.83	0.80	-0.24	-0.75	-0.29	-0.45	-0.01	-0.10	-0.24	0.69	0.71	0.12	0.63	0.67	-0.39	0.18	-0.76	0.73	
FA2	-0.12	-0.47	0.72	-0.28	-0.29	0.86	0.85	0.78	-0.07	-0.61	-0.27	-0.40	0.14	0.00	-0.33	0.72	0.67	0.12	0.68	0.67	-0.28	-0.05	-0.78	0.62	
FH	-0.10	0.23	-0.14	-0.08	-0.04	-0.19	-0.26	-0.13	0.27	0.21	0.44	0.54	-0.15	-0.27	-0.07	-0.12	-0.37	-0.41	-0.15	-0.33	0.17	-0.25	0.21	-0.32	
FC	-0.55	-0.76	0.59	0.18	-0.56	0.90	0.64	0.84	-0.35	-0.90	-0.66	-0.45	-0.29	-0.34	-0.21	0.47	0.67	0.04	0.55	0.47	-0.64	0.26	-0.79	0.85	
FB	-0.20	-0.34	0.66	-0.05	-0.20	0.72	0.74	0.58	-0.07	-0.53	-0.19	-0.30	0.10	-0.06	-0.26	0.63	0.60	0.16	0.55	0.58	-0.22	0.11	-0.58	0.54	
FD	-0.14	-0.46	0.80	-0.20	-0.26	0.87	0.89	0.79	-0.08	-0.63	-0.28	-0.44	0.14	-0.02	-0.31	0.78	0.72	0.16	0.70	0.73	-0.26	0.03	-0.77	0.64	
DO1	-0.09	-0.31	0.80	-0.20	-0.13	0.80	0.88	0.67	-0.02	-0.50	-0.20	-0.36	0.23	0.05	-0.29	0.80	0.68	0.22	0.64	0.71	-0.12	0.07	-0.63	0.53	
FO1	-0.49	-0.47	0.35	0.19	-0.32	0.59	0.39	0.49	-0.07	-0.60	-0.12	-0.13	-0.26	-0.40	-0.47	0.39	0.42	-0.22	0.29	0.25	-0.48	0.09	-0.54	0.66	
FG	0.06	-0.27	0.54	-0.24	-0.16	0.61	0.65	0.54	-0.07	-0.39	-0.21	-0.40	0.24	0.06	-0.13	0.52	0.52	0.35	0.54	0.54	-0.09	0.01	-0.50	0.36	

CLTJR	1.00																								
ETULU	0.25	1.00																							
GSUR	0.20	0.00	1.00																						
BCOL	-0.42	0.05	0.41	1.00																					
NUTR	-0.19	-0.05	0.60	0.51	1.00																				
GARG	0.06	-0.21	0.74	0.33	0.79	1.00																			
PFAV	0.04	-0.39	0.58	0.28	0.65	0.79	1.00																		
PGGS	0.23	-0.15	0.95	0.25	0.63	0.83	0.71	1.00																	
PGGA	0.17	-0.28	0.60	0.03	0.67	0.92	0.81	0.77	1.00																
CORFI	0.49	0.06	0.11	-0.73	-0.17	-0.01	0.06	0.24	0.25	1.00															
PFCEM	0.48	0.19	0.62	-0.25	0.28	0.54	0.24	0.68	0.57	0.56	1.00														
BVC	-0.23	-0.38	0.36	0.61	0.59	0.59	0.53	0.37	0.41	-0.64	-0.11	1.00													
CCRET	0.41	-0.14	0.23	-0.49	0.23	0.46	0.53	0.42	0.69	0.65	0.50	-0.16	1.00												
FS	-0.16	-0.53	-0.06	-0.20	0.34	0.48	0.58	0.19	0.63	0.08	0.01	0.35	0.55	1.00											
FA1	-0.22	0.36	0.18	0.67	0.07	-0.16	-0.34	-0.08	-0.47	-0.62	-0.18	0.24	-0.79	-0.67	1.00										
FA2	-0.34	0.32	0.03	0.75	0.10	-0.20	-0.31	-0.22	-0.52	-0.77	-0.42	0.32	-0.83	-0.57	0.91	1.00									
FH	0.17	0.08	-0.17	-0.11	0																				

## Anexo 8. Gráficas de la prueba de Backtesting.



**Anexo 9.a:** Tabla de pesos, rentabilidades y riesgos para cada uno de los activos del portafolio óptimo según la implementación de Markowitz.

	EEB	ISA	PROTECC	BMAX	CNEC	CRTN	MARLY	ETULUA
Peso	3.7%	27.9%	21.6%	1.7%	9.8%	2.5%	12.0%	20.8%
Rentabilidad	5.3%	8.5%	8.2%	4.6%	13.1%	4.7%	4.6%	25.8%
Riesgo	19.8%	26.9%	30.3%	43.5%	60.7%	38.4%	11.3%	73.0%

**Anexo 9.b:** Tabla de pesos, rentabilidades y riesgos para cada uno de los activos del portafolio óptimo según la implementación de Black&Litterman.

	ECOP	PFAH	PFDVA	ETB	GAVALL	EEB	ISA	PROTEC	PRIO	ÉXITO	BBVA	PFVILLAS	BOGO
Peso	9%	-23%	40%	-19%	-7%	48%	57%	29%	-3%	-49%	11%	-15%	-3%
Rentabilidad	-5%	-12%	5%	-6%	-4%	5%	8%	8%	-7%	-14%	2%	-4%	-2%
Riesgo	37%	39%	25%	28%	24%	20%	27%	30%	110%	29%	27%	27%	20%
	OCCI	POPU	PFBCOL	BIOMX	CNEC	CRTN	CRVJL	CELSIA	CMARG	CHL	MARLY	CLTJR	ETULUA
Peso	8%	11%	17%	9%	14%	12%	3%	-12%	6%	-39%	92%	-4%	20%
Rentabilidad	1%	2%	2%	5%	13%	5%	2%	-4%	-3%	-18%	5%	-4%	26%
Riesgo	16%	25%	24%	43%	61%	38%	45%	25%	28%	35%	11%	66%	73%
	GSURA	BCOLOM	NUTRE	GARGOS	PFAVAL	PFGSURA	PFGARGOS	CORFI	PFCMARGOS	BVC	CNCNCRETO		
Peso	-2%	20%	3%	-9%	-18%	-21%	-18%	-32%	-19%	-16%	-56%		
Rentabilidad	-3%	2%	-1%	-5%	-4%	-4%	-8%	-7%	-5%	-4%	-22%		
Riesgo	22%	26%	18%	27%	20%	23%	29%	22%	24%	25%	33%		

**Anexo 9.c:** Tabla de pesos, rentabilidades y riesgos para cada uno de los activos del portafolio óptimo según la implementación de Black&Litterman con FICs.

	ECOP	PFAH	PFDVA	ETB	GAVAL	EEB	ISA	PROTEC	PRIO	ÉXITO	BBVA	PFVILLAS	BOGO
Peso	10%	-23%	40%	-18%	-6%	47%	58%	28%	-3%	-48%	11%	-15%	-4%
Rentabilidad	-5%	-12%	5%	-6%	-4%	5%	8%	8%	-7%	-14%	2%	-4%	-2%
Riesgo	37%	39%	25%	28%	24%	20%	27%	30%	110%	29%	27%	27%	20%
	OCCI	POPU	PFBCOL	BIOMX	CNEC	CRTN	CRVJL	CELSIA	CMARG	CHL	MARLY	CLTJR	ETULUA
Peso	8%	11%	16%	9%	14%	12%	3%	-11%	7%	-39%	92%	-4%	20%
Rentabilidad	1%	2%	2%	5%	13%	5%	2%	-4%	-3%	-18%	5%	-4%	26%
Riesgo	16%	25%	24%	43%	61%	38%	45%	25%	28%	35%	11%	66%	73%
	GSURA	BCOLOM	NUTRE	GARGOS	PFAVAL	PFGSURA	PFGARGOS	CORFI	PFCMARGOS	BVC	CNCNCRETO	FCALII	FCALI2
Peso	-2%	20%	3%	-9%	-19%	-21%	-18%	-32%	-20%	-17%	-56%	12%	2%
Rentabilidad	-3%	2%	-1%	-5%	-4%	-4%	-8%	-7%	-5%	-4%	-22%	19%	33%
Riesgo	22%	26%	18%	27%	20%	23%	29%	22%	24%	25%	33%	52%	46%
	FCCRD	FCBC	FCDVA	FCIOCCII	FCIOCCII	FCGNB							
	CRP	OL			I2	B							

Peso	2%	2%	12%	9%	3%	1%
Rentabilidad	38%	1%	16%	6%	-6%	3%
Riesgo	53%	26%	18%	29%	50%	65%

## VIII. BIBLIOGRAFÍA

- Amin & Kat. (2003). Stocks, Bonds and Hedge Funds: Not a Free Lunch! *The Journal of Portfolio Management*, 113-120.
- Asobancaria. (2016). *Asobancaria*. Retrieved from <https://www.asobancaria.com/ibr/>
- Asofiduciaria*. (2017). Retrieved from Asociación de Fiduciarias de Colombia: <https://www.asofiduciarias.org.co/educacion-financiera/fondos-de-inversion-colectiva/>
- Bertsimas, D., Gupta, V., & Paschalidis, I. C. (2012). Inverse Optimization: A New Perspective on the Black-Litterman Model. *Operations Research*, 1389-1403.
- Black & Litterman. (1991). Asset Allocation: Combining Investor Views With Market Equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, 7 - 18.
- Black & Litterman. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, 28 - 43.
- Bodie, Kane & Marcus. (2011). *Investments*. Nueva York: McGrawll Hill.
- Breaking Down Finance. (n.d.). *Breaking Down Finance*. Retrieved from <https://breakingdownfinance.com/trading-strategies/passive-investing/portfolio-turnover/>
- Chen, J. (2018, Octubre 22). *Investopedia*. Retrieved from <https://www.investopedia.com/terms/h/hedgefund.asp>
- Damodaran, A. (2002). *Investment valuation tools and techniques for determining the value of any asset*. Nueva York.
- Gifford, C. (1939). *The Economic Journal*, 121-122.
- Graham, B. (1939). Book Reviews. *Journal of Political Economy*, 276-278.
- Hwang & Satchell. (1999, Agosto 11). *University of Warwick*. Retrieved from <https://warwick.ac.uk/fac/soc/wbs/subjects/finance/research/wpaperseries/1999/99-88.pdf>
- Izorek, T. (2004, Julio 20). *Duke Fuqua School of Business*. Retrieved from [https://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453\\_2006/Idzorek\\_onBL.pdf](https://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2006/Idzorek_onBL.pdf)
- López, Viasus & Pérez. (2015, Junio). Optimización de Portafolios Mediante el Modelo de Black-Litterman Supervisado por la Teoría de Control. Colombia.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 77 - 91.
- Martellini, L., & Ziemann, V. (2007). Extending Black-Litterman Analysis Beyond the Mean-Variance Framework. *Journal of Portfolio Management*, 33 - 45.
- México, G. F. (2005). *Gobierno de México*. Retrieved from [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/125437/nota\\_metodologica.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/125437/nota_metodologica.pdf)

- Michaud, R. (1989). The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal? *Financial Analysts Journal*, 31 - 42.
- Murphy, C. B. (2019, Febrero 18). *Investopedia*. Retrieved from <https://www.investopedia.com/terms/i/informationratio.asp>
- Parry, C. L. (1939). Reviews and New Books. *The American Economic Review*, 118-119.
- Rangel & Ávila. (2016, Octubre 28). Optimización de Portafolios en el Mercado de Capitales Colombiano: Modelo Propuesto por Black-Litterman. Bogotá, Bogotá D.C, Colombia: Colegio de Estudios Superiores de Administración - CESA.
- SEC. (2013, Junio 10). Retrieved from Securities and Exchange Comision: <https://www.sec.gov/Article/whatwedo.html>
- Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*, 49 - 58.
- Sornette, Anderson & Simonetti. (2000). Portfolio Theory for 'Fat Tails'. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 523 - 535.
- Ucha, A. P. (2019). *Economipedia*. Retrieved from <https://economipedia.com/definiciones/alfa-de-jensen.html>
- Williams, J. B. (1938). *The Theory of Investment Value*. Amsterdam: North-Holland Pub. Co.
- Xu, Chen & Tsui. (2008, Abril 29). *Berkeley University*. Retrieved from <https://www.stat.berkeley.edu/~nolan/vigre/reports/Black-Litterman.pdf>