

---

# Cohomología de De Rham y Dualidad de Poincare

---

Johan Santiago Caro Valencia

Supervisor:  
Juan Camilo Arias Uribe



Universidad del Rosario  
Escuela de Ciencias e Ingeniería  
Matemáticas aplicadas y ciencias de la computación  
Bogotá, Colombia  
Abril, 2026

*Agradezco a mis padres Jeaneth y Javier y a mi hermano Alejandro, por apoyarme sin dudarle en cada paso que doy y por darme las herramientas para alcanzar esta meta.*

*A mi abuela Maria, por recibirme con los brazos abiertos en Bogotá y hacerme sentir en casa. Gracias por haberme acompañado con tanto cariño durante esta etapa de mi vida.*

*A la memoria de Miia, quien empezó este camino a mi lado y, aunque lastimosamente no pudo llegar a ver el final de este capítulo conmigo, su compañía incondicional sigue viva en mi corazón.*

*A mi tutor, Juan Camilo, por su dedicación y dirección en la redacción de este trabajo. Gracias por guiarme, por ayudarme a encaminar con firmeza mis pasos hacia el mundo de las matemáticas.*

# Abstract

Esta tesis presenta un desarrollo riguroso y autocontenido de la cohomología de De Rham y el teorema de dualidad de Poincaré, resultados fundamentales que conectan el análisis diferencial con la topología global. El trabajo inicia estableciendo las bases del álgebra exterior, el álgebra homológica y la geometría de las variedades diferenciables. A partir de allí, se unifica el cálculo mediante la teoría de las formas diferenciales, culminando en el teorema de Stokes generalizado. Esta maquinaria analítica permite construir el complejo de De Rham y calcular sus invariantes homotópicos mediante la secuencia de Mayer-Vietoris. Posteriormente, se desarrolla la cohomología con soporte compacto para demostrar el isomorfismo de la dualidad de Poincaré utilizando el emparejamiento de integración y el lema de los cinco. Finalmente, se exploran las profundas consecuencias de esta simetría, abarcando desde invariantes clásicos como los números de Betti y la característica de Euler, hasta aplicaciones en la física teórica y las implicaciones de la matriz de intersección en las estructuras exóticas de  $\mathbb{R}^4$ .

**Palabras clave:** Variedades diferenciables, Formas diferenciales, Cohomología de De Rham, Dualidad de Poincaré, Álgebra homologica.

This thesis presents a rigorous and self-contained development of de Rham cohomology and the Poincaré duality theorem, fundamental results bridging differential analysis and global topology. The work begins by establishing the foundations of exterior algebra, homological algebra, and the geometry of smooth manifolds. From there, calculus is unified through the theory of differential forms, culminating in the generalized Stoke's theorem. This analytical machinery allows for the construction of the de Rham complex and the computation of its homotopy invariants via the Mayer-Vietoris sequence. Subsequently, compactly supported cohomology is developed to prove the Poincaré duality isomorphism using the integration pairing and the five lemma. Finally, the profound consequences of this symmetry are explored, ranging from classical invariants such as Betti numbers and the Euler characteristic, to applications in theoretical physics and the implications of the intersection matrix for exotic structures on  $\mathbb{R}^4$ .

**Keywords:** Smooth manifolds, Differential forms, De Rham cohomology, Poincaré duality, Homological algebra.

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Objetivos</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Preliminares algebraicos</b>	<b>1</b>
1.1. El álgebra exterior . . . . .	1
1.2. Álgebra homológica . . . . .	4
<b>2. Variedades diferenciables y espacios tangentes</b>	<b>7</b>
2.1. Fundamentos en el espacio euclidiano . . . . .	7
2.1.1. Funciones suaves . . . . .	7
2.2. Variedades topológicas . . . . .	9
2.3. La estructura diferencial . . . . .	9
2.4. Ejemplos de variedades diferenciables . . . . .	12
2.5. Aplicaciones suaves y difeomorfismos . . . . .	15
2.6. Particiones de la unidad . . . . .	16
2.7. Vectores tangentes en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	18
2.8. El espacio tangente en variedades . . . . .	21
2.9. La diferencial de una aplicación . . . . .	22
2.10. El fibrado tangente . . . . .	23
2.11. El fibrado cotangente . . . . .	25
2.12. Subvariedades . . . . .	26
<b>3. Formas diferenciales</b>	<b>28</b>
3.1. Derivación de formas diferenciales . . . . .	28
3.1.1. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	28
3.1.2. El complejo de De Rham en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	31
3.1.3. Formas diferenciales en variedades . . . . .	33
3.1.4. El pullback y la derivada global . . . . .	34
3.2. Integración de formas diferenciales . . . . .	35
3.2.1. Orientación en variedades . . . . .	35
3.2.2. Integración de formas . . . . .	36
3.2.3. El teorema de Stokes generalizado . . . . .	37

<b>4. Cohomología de De Rham</b>	<b>40</b>
4.1. El complejo de De Rham . . . . .	40
4.2. Invarianza homotópica . . . . .	42
4.3. El lema de Poincaré . . . . .	44
4.4. La secuencia de Mayer-Vietoris . . . . .	45
4.5. Cálculo de la cohomología de esferas . . . . .	45
4.6. Cohomología del plano perforado y el toro . . . . .	46
4.6.1. El plano perforado $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . . . . .	46
4.6.2. El toro $T^2$ . . . . .	47
<b>5. Dualidad de Poincaré y aplicaciones</b>	<b>49</b>
5.1. Cohomología con soporte compacto . . . . .	49
5.1.1. El lema de Poincaré para soporte compacto . . . . .	50
5.2. Sucesión de Mayer-Vietoris para soporte compacto . . . . .	52
5.3. El emparejamiento de integración . . . . .	53
5.4. El teorema de dualidad de Poincaré . . . . .	54
5.5. Aplicaciones de la cohomología de De Rham . . . . .	57
5.5.1. Los números de Betti y la conectividad del espacio . . . . .	57
5.5.2. El grado topológico y el teorema de la bola peluda . . . . .	58
5.5.3. El teorema de Gauss-Bonnet generalizado . . . . .	58
5.6. Consecuencias de la dualidad de Poincaré . . . . .	59
5.6.1. Teoría de intersección transversal . . . . .	59
5.6.2. La característica de Euler en dimensión impar . . . . .	60
5.6.3. La signatura y la matriz de intersección en dimensión 4 . . . . .	61
5.6.4. Estructuras exóticas y la ruptura topológica-suave . . . . .	62
<b>Bibliografía</b>	<b>64</b>



# Objetivos

## 1.1 Objetivo General

Demostrar rigurosamente la dualidad de Poincaré en el contexto de variedades diferenciables cerradas orientables, construyendo el marco teórico necesario a partir de los fundamentos de las variedades diferenciables, las formas diferenciales, la integración y la cohomología de de Rham, para comprender la relación entre los grupos de cohomología y homología de dichas variedades.

## 1.2 Objetivos Específicos

1. Estudiar las propiedades fundamentales de las variedades diferenciables necesarias para entender el contexto geométrico del problema.
2. Analizar el concepto de formas diferenciales y su papel en la integración sobre variedades diferenciables.
3. Introducir y desarrollar la teoría de la cohomología de de Rham, entendiendo su relación con las formas diferenciales cerradas y exactas.
4. Estudiar y demostrar el lema de Poincaré como resultado intermedio esencial para establecer la dualidad.
5. Formalizar y demostrar la dualidad de Poincaré, explicando su significado topológico y algebraico.
6. Identificar y analizar aplicaciones relevantes de la dualidad de Poincaré en áreas de las matemáticas y la física.

# Introducción

El desarrollo de la topología diferencial y la geometría riemanniana tiene sus raíces en las investigaciones del siglo XIX sobre la naturaleza intrínseca del espacio. A partir de los teoremas de C. F. Gauss en 1827 sobre superficies, la geometría fue generalizada a dimensiones arbitrarias por B. Riemann en su disertación *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Sobre las hipótesis que constituyen la base de la geometría*) de 1854 [23]. Sin embargo, el estudio de las propiedades topológicas globales de estas variedades requería un lenguaje analítico más ágil que el cálculo tensorial clásico. Este avance se materializó a principios del siglo XX cuando Élie Cartan introdujo el álgebra de las formas diferenciales exteriores, un formalismo que permitió abstraer y generalizar los teoremas del cálculo vectorial de manera independiente a las coordenadas [22].

Dentro de este marco, la presente tesis tiene como objetivo principal estudiar y estructurar de manera rigurosa dos de los resultados fundamentales de la geometría contemporánea, la cohomología de De Rham y el teorema de dualidad de Poincaré.

La motivación detrás de la cohomología de De Rham surge de la conexión entre el análisis de ecuaciones diferenciales y la topología global. En 1931, Georges de Rham demostró que la obstrucción analítica para que una forma cerrada sea globalmente exacta está dictada enteramente por la topología del espacio [15]. Mientras que el lema de Poincaré garantiza la exactitud local, los grupos de cohomología miden el fracaso de esta propiedad a nivel global, traduciendo los invariantes topológicos de la variedad a la dimensión de espacios vectoriales reales [24].

El punto central de esta teoría, y el núcleo de este trabajo, es el teorema de dualidad de Poincaré. Formulado por Henri Poincaré en su artículo *Analysis Situs* en 1895 [20] mediante relaciones entre los números de Betti, este resultado adquiere su forma moderna a través del emparejamiento de integración de formas. El teorema establece que, para cualquier variedad diferenciable compacta y orientable, existe un isomorfismo perfecto entre los grupos de cohomología en grados complementarios [5]. Como se detalla en el texto, esta dualidad es la manifestación analítica de la teoría geométrica de intersección transversal y constituye una herramienta indispensable para la clasificación de espacios.

Para abordar estos resultados, esta tesis se ha estructurado en cinco capítulos que siguen un desarrollo constructivo y autocontenido. El recorrido inicia estableciendo los cimientos teóricos preliminares, unificando el álgebra exterior con el álgebra homológica para definir los complejos de cocadenas y las herramientas diagramáticas elementales, para estas construcciones nos basaremos en dos de los libros más importantes en el estudio introductorio del álgebra

homologica [21] y [25]. Sobre esta base algebraica, el texto transita hacia el contexto geométrico formalizando las variedades diferenciables, los espacios tangentes y las particiones de la unidad, elementos necesarios para conectar el comportamiento local con el global.

Una vez establecido este escenario topológico, se unifica el cálculo diferencial e integral mediante la teoría de las formas diferenciales. Este desarrollo conduce al teorema de Stokes generalizado, el cual subsume el análisis clásico y conecta la derivada exterior con la frontera topológica. Esta integración permite dar el paso hacia la construcción rigurosa de la cohomología de De Rham. Tras demostrar su invarianza homotópica y el lema de Poincaré, se desarrolla la secuencia exacta de Mayer-Vietoris para calcular explícitamente los invariantes de espacios fundamentales como las esferas y el toro.

Finalmente, el trabajo concluye unificando estos conceptos en la dualidad de Poincaré y sus aplicaciones. Mediante la construcción de la cohomología con soporte compacto, se demuestra formalmente el isomorfismo de dualidad, dando paso a la exploración de sus consecuencias geométricas y físicas. Estas abarcan desde teoremas clásicos de topología, como el teorema de la bola peluda y la característica de Euler [16], hasta el efecto Aharonov-Bohm y las implicaciones de la matriz de intersección en la existencia de estructuras exóticas para el espacio  $\mathbb{R}^4$  [10].

A través de este recorrido continuo, este trabajo busca ofrecer una perspectiva integradora, mostrando que la topología, el álgebra y el análisis diferencial no son disciplinas aisladas, sino herramientas inseparables en el estudio moderno de la geometría.



# Capítulo 1

## Preliminares algebraicos

El cálculo en variedades diferenciables se distingue del cálculo multivariable clásico por su naturaleza intrínseca y global. Mientras que en  $\mathbb{R}^n$  trabajamos con vectores y gradientes asociados a coordenadas fijas, en variedades generales estas nociones se formalizan mediante el lenguaje de los tensores y las formas diferenciales. Como señalan Bott y Tu [5], las formas diferenciales son la herramienta natural para transitar de la geometría local a la topología global, permitiendo la integración y la definición de la cohomología de De Rham.

Para comprender qué es una forma diferencial en una variedad, primero debemos entender qué es una forma en un solo espacio vectorial estático. Este capítulo condensa los requerimientos puramente algebraicos de este trabajo. En la primera parte, construiremos el álgebra exterior, la estructura que captura las nociones de volumen y orientación. En la segunda parte, introduciremos el marco formal del álgebra homológica, el cual nos permitirá estudiar sistemáticamente las secuencias de operadores que definen la topología de la variedad.

### 1.1. El álgebra exterior

Trabajaremos sobre un espacio vectorial real  $V$  de dimensión finita  $n$ . El concepto dual al de vector es el de funcional lineal.

**Definición 1.1.1** (Espacio dual). *El espacio dual de  $V$ , denotado por  $V^*$ , es el conjunto de todas las transformaciones lineales  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ .*

$$V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R}).$$

*Los elementos de  $V^*$  se denominan covectores o 1-formas.*

La relación entre  $V$  y  $V^*$  se materializa mediante la elección de bases.

**Proposición 1.1.2** (Base dual). *Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $V$ . Existe una única base  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$  de  $V^*$ , llamada la base dual, definida por la condición:*

$$\epsilon^i(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde  $\delta_i^j$  es la delta de Kronecker. En consecuencia,  $\dim(V^*) = \dim(V) = n$ .

*Demostración.* La demostración de la existencia y unicidad de esta base es un resultado estándar de álgebra lineal; puede ser encontrada en [6].  $\square$

Esta relación nos permite expresar cualquier covector  $\alpha \in V^*$  en términos de la base dual como  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i) \epsilon^i$ .

Entre todos los tensores multilineales, los más relevantes para la geometría y en consecuencia para esta tesis son los alternantes, pues son los objetos algebraicos capaces de medir volúmenes con signo y definir orientaciones.

**Definición 1.1.3** (Tensor alternante). *Un  $k$ -tensor  $T : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es alternante si el intercambio de dos argumentos cualesquiera invierte el signo del resultado:*

$$T(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -T(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots).$$

*El espacio vectorial de todos los  $k$ -tensores alternantes sobre  $V$  se denota por  $A_k(V)$ . A sus elementos se les llama  $k$ -covectores o  $k$ -formas alternantes.*

Por convención,  $A_0(V) = \mathbb{R}$  y  $A_1(V) = V^*$ . Para  $k > n$ , el espacio  $A_k(V)$  es el espacio nulo  $\{0\}$ , una consecuencia directa de la independencia lineal en dimensión  $n$  [24].

Aunque el espacio  $A_k(V)$  es un subespacio de los  $k$ -tensores generales, a menudo es útil construir formas alternadas a partir de tensores arbitrarios mediante el operador de alternancia.

**Definición 1.1.4** (Operador de alternancia). *El operador de alternancia  $A : L_k(V) \rightarrow A_k(V)$ , donde  $L_k(V)$  denota el espacio vectorial de todas las formas  $k$ -multilineales sobre  $V$ , se define como la suma signada sobre todas las permutaciones  $S_k$ :*

$$Af = \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \sigma f$$

donde  $(\sigma f)(v_1, \dots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ .

Deseamos una operación que nos permita construir formas de grado superior a partir de formas simples. Dado que el producto tensorial ordinario no preserva la alternancia, definimos el producto cuña.

**Definición 1.1.5** (Producto cuña). *Sean  $\omega \in A_k(V)$  y  $\eta \in A_l(V)$ . Definimos su producto cuña  $\omega \wedge \eta \in A_{k+l}(V)$  como:*

$$\omega \wedge \eta = \frac{1}{k!l!} A(\omega \otimes \eta).$$

donde  $\otimes$  denota el producto tensorial de formas multilineales.

**Observación 1.1.6.** *La normalización  $\frac{1}{k!l!}$  es la convención adoptada por Tu [24]. Su propósito es compensar el hecho de que el operador  $A$  suma  $k!l!$  términos redundantes. Esta elección asegura que el producto de covectores base coincida con el determinante.*

**Proposición 1.1.7** (Propiedades del producto cuña). *El producto cuña es una operación bilineal y asociativa que satisface:*

1. *Anticonmutatividad graduada:*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

2. *Relación con el determinante: Si  $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in V^*$  son 1-formas:*

$$(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k)(v_1, \dots, v_k) = \det[\alpha^i(v_j)].$$

La existencia del producto cuña nos permite unificar la colección de espacios  $A_k(V)$  en una única estructura.

**Definición 1.1.8** (El álgebra exterior). *Definimos el álgebra exterior de  $V$  como la suma directa:*

$$A_*(V) = \bigoplus_{k=0}^n A_k(V) = A_0(V) \oplus A_1(V) \oplus \dots \oplus A_n(V).$$

Con esta estructura,  $(A_*(V), \wedge)$  se convierte en un álgebra asociativa graduada sobre  $\mathbb{R}$  con unidad.

**Teorema 1.1.9** (Base y dimensión). *Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $V$  y  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$  su base dual. El conjunto de  $k$ -covectores*

$$\{\epsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

*forma una base para el espacio  $A_k(V)$ . Por lo tanto, la dimensión de este espacio está dada por:*

$$\dim A_k(V) = \binom{n}{k}.$$

*Demostración.* Una prueba detallada utilizando combinatoria y la expansión del determinante se encuentra en [24].  $\square$

De este teorema se desprenden dos hechos fundamentales que nos servirán más adelante cuando hablemos de la dualidad de Poincaré: la dimensión de  $A_n(V)$  es  $\binom{n}{n} = 1$ , y existe una simetría dimensional  $\dim A_k(V) = \dim A_{n-k}(V)$ .

Finalmente, debemos establecer cómo se comportan estas formas al transformar los espacios vectoriales subyacentes. Si  $L : V \rightarrow W$  es una transformación lineal, induce una aplicación lineal transpuesta  $L^* : W^* \rightarrow V^*$ , definida por  $(L^*\alpha)(v) = \alpha(L(v))$ . Esta aplicación se extiende naturalmente al álgebra exterior completa.

**Proposición 1.1.10.** *El pullback  $L^*$  es un homomorfismo de álgebras, es decir:*

$$L^*(\omega \wedge \eta) = L^*\omega \wedge L^*\eta.$$

Esta construcción puramente algebraica es el prototipo local de la operación de pullback para formas diferenciales que definiremos en los capítulos siguientes utilizando la diferencial de una aplicación suave (la demostración puede ser encontrada en [24]).

## 1.2. Álgebra homológica

El teorema de Stokes revelará más adelante una profunda conexión entre la topología del espacio y el análisis de las formas, sugiriendo que el operador de derivada exterior  $d$ , con su propiedad fundamental de nilpotencia  $d^2 = 0$ , encierra información estructural que trasciende el cálculo local.

Para decodificar esta información, en esta sección introducimos el lenguaje del álgebra homológica. Con el fin de mantener la fluidez geométrica del texto, solo enunciaremos y contextualizaremos los resultados algebraicos que se trabajarán en el resto del documento.

La estructura fundamental que abstrae las propiedades de las formas diferenciales es el complejo diferencial graduado [25].

**Definición 1.2.1** (Complejo de cocadenas). *Un complejo de cocadenas  $(C^\bullet, d)$  es una secuencia de espacios vectoriales reales  $\{C^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  conectados por aplicaciones lineales  $d^k : C^k \rightarrow C^{k+1}$ , que satisfacen la condición de nilpotencia:*

$$d^{k+1} \circ d^k = 0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Esta condición implica que la imagen de un operador está contenida en el núcleo del siguiente. Utilizando la terminología estándar de Rotman [21], clasificamos sus elementos:

**Definición 1.2.2** (Cociclos, cobordes y cohomología). *Sea  $(C^\bullet, d)$  un complejo de cocadenas.*

- *El espacio de  $k$ -cociclos es  $Z^k(C^\bullet) = \ker(d^k) = \{c \in C^k \mid dc = 0\}$ .*
- *El espacio de  $k$ -cobordes es  $B^k(C^\bullet) = \text{im}(d^{k-1}) = \{c \in C^k \mid \exists a \in C^{k-1}, da = c\}$ .*

*El  $k$ -ésimo grupo de cohomología del complejo se define como el espacio vectorial cociente:*

$$H^k(C^\bullet) = \frac{Z^k(C^\bullet)}{B^k(C^\bullet)} = \frac{\ker(d^k)}{\text{im}(d^{k-1})}.$$

Para formalizar la idea de que la cohomología es una traducción de problemas geométricos a algebraicos, utilizamos la teoría de categorías. Una categoría consiste en objetos y morfismos [21], y el paso de una a otra se realiza mediante funtores.

**Definición 1.2.3** (Mapa de cadenas). *Sean  $(A^\bullet, d_A)$  y  $(B^\bullet, d_B)$  dos complejos de cocadenas. Un mapa de cadenas es una secuencia de aplicaciones lineales  $f^k : A^k \rightarrow B^k$  que conmutan con los diferenciales:*

$$d_B^k \circ f^k = f^{k+1} \circ d_A^k.$$

**Proposición 1.2.4** (Functorialidad de la cohomología). *La asignación que asocia a cada complejo de cocadenas su  $k$ -ésimo espacio de cohomología es un funtor covariante  $H^k$ . Específicamente, si  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  es un mapa de cadenas, induce una aplicación lineal bien definida en cohomología:*

$$H^k(f) = f^* : H^k(A^\bullet) \rightarrow H^k(B^\bullet), \quad f^*([\alpha]) = [f(\alpha)].$$

La demostración de esta functorialidad puede revisarse en detalle en [25].

El cálculo directo de los grupos de cohomología suele ser intratable. La estrategia estándar es relacionar complejos desconocidos con complejos más simples mediante secuencias exactas. Una secuencia de espacios vectoriales se dice exacta si la imagen de cada mapa entrante coincide exactamente con el núcleo del mapa saliente [21]. A continuación, enunciamos los tres lemas fundamentales que sustentarán nuestros cálculos topológicos.

**Teorema 1.2.5** (Lema del zig-zag). *Sea  $0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \rightarrow 0$  una secuencia exacta corta de complejos de cocadenas. Entonces, existe una aplicación lineal natural  $\delta^* : H^k(C^\bullet) \rightarrow H^{k+1}(A^\bullet)$ , llamada homomorfismo conector, tal que la siguiente secuencia larga es exacta:*

$$\dots \xrightarrow{g^*} H^{k-1}(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^*} H^k(A^\bullet) \xrightarrow{f^*} H^k(B^\bullet) \xrightarrow{g^*} H^k(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(A^\bullet) \dots$$

La construcción del homomorfismo  $\delta^*$  y la prueba de exactitud se realizan mediante cacería de diagramas; la demostración detallada puede encontrarse en Hafkenschied [12] o en Weibel [25].

El cimiento algebraico subyacente que garantiza la existencia del homomorfismo conector  $\delta^*$  es un célebre resultado sobre diagramas conmutativos conocido como el lema de la serpiente:

**Lema 1.2.6** (Lema de la serpiente). *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de espacios vectoriales, donde las dos filas son secuencias exactas:*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

*Entonces existe una secuencia exacta que relaciona los núcleos y conúcleos de las aplicaciones verticales de la siguiente manera:*

$$\ker(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}} \ker(\beta) \xrightarrow{\bar{g}} \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}'} \operatorname{coker}(\beta) \xrightarrow{\bar{g}'} \operatorname{coker}(\gamma)$$

La demostración completa y formal de esta exactitud también requiere cacería de diagramas y puede ser consultada en Rotman [21].

Finalmente, introducimos otro pilar técnico del álgebra homológica, el cual utilizaremos como argumento central para demostrar que la dualidad de Poincaré induce un isomorfismo global al ensamblar piezas locales:

**Lema 1.2.7** (Lema de los cinco). *Sea el siguiente diagrama conmutativo de espacios vectoriales, en el cual las dos filas son secuencias exactas:*

$$\begin{array}{ccccccccc} V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & V_4 & \longrightarrow & V_5 \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 \\ W_1 & \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & W_3 & \longrightarrow & W_4 & \longrightarrow & W_5 \end{array}$$

Si los mapas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  y  $\alpha_5$  son isomorfismos, entonces el mapa central  $\alpha_3$  también es un isomorfismo.

Dado que es un ejercicio estándar en categorías abelianas y espacios vectoriales, la demostración formal y completa de este lema puede ser encontrada en Weibel [25] o Rotman [21].

**Observación 1.2.8.** *Es pertinente observar que el enunciado del lema que hemos presentado utiliza una hipótesis más fuerte que la requerida en la formulación mínima estándar. No obstante, en el contexto de nuestra demostración de la dualidad de Poincaré en el Capítulo 5, la hipótesis de inducción sobre los recubrimientos abiertos nos garantizará de manera natural que los cuatro mapas flanqueantes  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5)$  sean isomorfismos completos. Por ello, se ha optado por enunciar esta versión directa, la cual se ajusta a las necesidades exactas de nuestra demostración.*

Por último, necesitamos un criterio algebraico para determinar cuándo dos mapas de cadenas inducen el mismo morfismo en cohomología.

**Definición 1.2.9** (Homotopía de cadenas). *Sean  $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  dos mapas de cadenas. Una homotopía de cadenas entre  $f$  y  $g$  es una secuencia de operadores lineales  $P^k : A^k \rightarrow B^{k-1}$  tal que:*

$$f - g = d_B P + P d_A.$$

*Si existe tal operador  $P$ , decimos que  $f$  y  $g$  son homotópicos ( $f \sim g$ ).*

**Proposición 1.2.10** (Invarianza homotópica). *Si dos mapas de cadenas  $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  son homotópicos, entonces inducen el mismo mapa en cohomología:*

$$f^* = g^* : H^k(A^\bullet) \rightarrow H^k(B^\bullet).$$

La demostración de esta invarianza se deduce evaluando algebraicamente la diferencia mediante el operador  $P$ , garantizando que el resultado es siempre un coborde (ver [21]). Este resultado algebraico tendrá una interpretación geométrica directa en el desarrollo de la teoría: la homotopía topológica entre aplicaciones inducirá homotopía algebraica entre sus mapas de cadenas.

## Capítulo 2

# Variedades diferenciables y espacios tangentes

En este capítulo introduciremos las variedades diferenciables, el marco geométrico fundamental para la teoría de la cohomología de De Rham. Intuitivamente, una variedad es un espacio que localmente se asemeja al espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  [24], pero que a nivel global carece de un sistema de coordenadas único. Para formalizar esta noción y permitir un cálculo intrínseco (libre de coordenadas), construiremos la estructura diferenciable mediante el aparato técnico de las cartas y los atlas maximales, estableciendo así el escenario riguroso sobre el cual definiremos las formas diferenciales.

Una vez definida la variedad, necesitaremos abstraer la noción de linealización local para poder hacer cálculo. Dado que en un espacio abstracto no podemos restar puntos para definir vectores como flechas, construiremos los vectores tangentes de manera intrínseca utilizando el concepto algebraico de derivación [24]. La unión estructurada de todos estos espacios dará lugar al fibrado tangente, cuya dualización natural nos entregará finalmente el fibrado cotangente [14], completando la arquitectura necesaria para nuestro estudio.

### 2.1. Fundamentos en el espacio euclidiano

En esta sección estableceremos los conceptos básicos de suavidad en espacios euclidianos  $\mathbb{R}^n$ , que servirán como base para definir la estructura diferenciable.

**Observación 2.1.1.** *A lo largo de este trabajo se adoptará la notación estándar de la geometría diferencial, donde los índices de las coordenadas se escriben como superíndices. De este modo, un punto se denotará como  $p = (p^1, \dots, p^n)$ , y sus coordenadas por  $x^1, \dots, x^n$ .*

#### 2.1.1. Funciones suaves

El cálculo en variedades lo construiremos generalizando el comportamiento local de las funciones en  $\mathbb{R}^n$ . Una noción fundamental para esto es la de suavidad.

**Definición 2.1.2.** Sea  $k$  un entero no negativo. Decimos que una función real  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^k$  en un punto  $p \in U$  si todas sus derivadas parciales

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_j}}$$

con  $j \leq k$  existen y son continuas en  $p$ . Decimos que la función  $f$  es  $C^\infty$  si es  $C^k$  para todo  $k \geq 0$ .

Además, también definiremos aplicación suave, una definición que nos será útil más adelante cuando construyamos aplicaciones (mapas) entre variedades.

**Definición 2.1.3** (Aplicación suave  $C^\infty$  entre espacios euclidianos). Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  un conjunto abierto. Una aplicación  $G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice suave ( $C^\infty$ ) si cada una de sus  $n$  funciones componentes  $G^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $G(x) = (G^1(x), \dots, G^n(x))$ , es  $C^\infty$ .

**Observación 2.1.4.** La clase de funciones suaves es más amplia y flexible que la de funciones reales-analíticas. Una función suave no necesariamente coincide localmente con su serie de Taylor. Un ejemplo clásico [24] que ilustra esta distinción crucial es  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Esta función es suave en todo  $\mathbb{R}$  (en particular, todas sus derivadas en  $x = 0$  se anulan). Sin embargo, su serie de Taylor alrededor del origen es idénticamente nula, por lo que no converge a  $f(x)$  para  $x > 0$ . Esta flexibilidad de las funciones suaves es lo que permite construir herramientas fundamentales en variedades diferenciables, como las particiones de la unidad.

Aunque las funciones suaves no siempre coinciden con su serie de Taylor, sí pueden ser aproximadas localmente por polinomios. El teorema de Taylor con resto es la herramienta que formaliza esta idea. Pero antes de enunciar este teorema debemos definir qué es un conjunto estrellado.

**Definición 2.1.5.** Un subconjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que es estrellado (o en forma de estrella) con respecto a un punto  $p \in S$  si, para todo punto  $x \in S$ , el segmento de recta que une  $p$  con  $x$  está completamente contenido en  $S$ .

**Teorema 2.1.6** (Teorema de Taylor con resto). Sea  $f$  una función  $C^\infty$  en un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  que es estrellado con respecto a un punto  $p = (p^1, \dots, p^n) \in U$ . Entonces, existen funciones  $g_1(x), \dots, g_n(x) \in C^\infty(U)$  tales que

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x),$$

y además se cumple que

$$g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Este teorema nos asegura que podemos linealizar una función suave en el entorno de un punto de una manera controlada. Esta idea será clave para relacionar las derivaciones con los vectores tangentes. La demostración de este teorema puede ser encontrada en el capítulo 1 de [24].

## 2.2. Variedades topológicas

La definición de una variedad diferenciable se construye sobre una estructura topológica subyacente, conocida como variedad topológica. Por lo tanto, previo a la introducción de la estructura diferenciable, debemos establecer las condiciones topológicas que debe satisfacer dicho espacio.

**Definición 2.2.1** (Homeomorfismo). *Un homeomorfismo es una función  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$  que es biyectiva, continua y cuya inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  es también continua.*

**Definición 2.2.2** (Localmente euclidiano). *Un espacio topológico  $M$  es localmente euclidiano de dimensión  $n$  si para cada punto  $p \in M$  existe un entorno abierto  $U$  que contiene a  $p$  y un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ , donde  $V$  es un subconjunto abierto del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .*

**Definición 2.2.3** (Espacio de Hausdorff). *Un espacio topológico  $M$  es un espacio de Hausdorff (o  $T_2$ ) si para cada par de puntos distintos  $p, q \in M$ , existen entornos abiertos  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $q$  tales que su intersección es vacía:*

$$U \cap V = \emptyset.$$

**Definición 2.2.4** (Segundo numerable). *Un espacio topológico  $M$  es segundo numerable contable (cumple el segundo axioma de numerabilidad, de ahora en adelante lo simplificaremos a segundo numerable) si existe una base numerable para su topología. Es decir, si existe una colección contable de conjuntos abiertos  $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que todo conjunto abierto  $U \subseteq M$  puede expresarse como una unión de elementos de  $\mathcal{B}$ .*

**Definición 2.2.5** (Variedad topológica). *Una variedad topológica es un espacio topológico que es localmente euclidiano, es de Hausdorff y es segundo numerable.*

La definición estándar de una variedad topológica se fundamenta en estos tres axiomas. Este es el enfoque adoptado en textos de referencia como [24] y [19]. No obstante, algunos autores como Spivak [22] omiten la condición de ser segundo numerable. Sin embargo, esta generalización admite la existencia de variedades "patológicas" (no metrizable) como la recta larga, donde la teoría de integración de formas diferenciales no puede desarrollarse adecuadamente. Por esta razón, en este trabajo exigiremos la condición de ser segundo numerable.

## 2.3. La estructura diferencial

Al haber definido la variedad topológica, hemos establecido un escenario que, si bien globalmente puede ser complejo, localmente es indistinguible de  $\mathbb{R}^n$  desde un punto de vista topológico. Para poder aplicar las herramientas del cálculo necesitamos una estructura adicional: una estructura diferenciable.

**Definición 2.3.1** (Carta). Una carta en una variedad topológica  $M$  de dimensión  $n$  es un par  $(U, \phi)$ , donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $M$  y  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

- El conjunto  $U$  se llama un entorno coordinado.
- La aplicación  $\phi$  se llama aplicación coordinada o sistema de coordenadas en  $U$ .

Una sola carta nos da un sistema de coordenadas para una parte de la variedad. Para poder trabajar en toda la variedad, necesitamos una colección de cartas que la cubran por completo.

**Definición 2.3.2** (Atlas). Un atlas para  $M$  es una colección de cartas  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  tal que la unión de todos los entornos coordinados es la variedad  $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ .

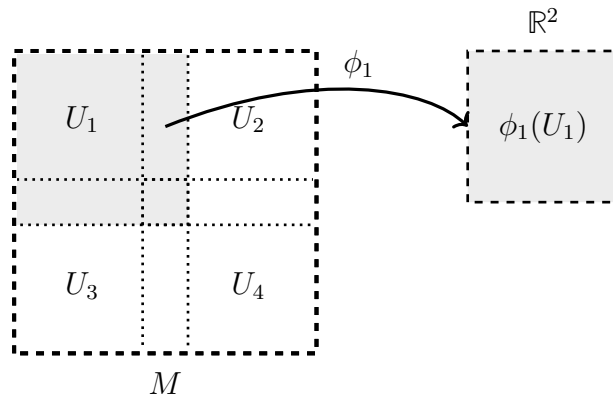


Figura 2.1: Representación de un cuadrado abierto (variedad  $M$ ) cubierto por cuatro cartas que forman el atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha=1}^4$ .

Se ha definido un atlas como una colección de cartas que cubre toda la variedad  $M$ . Sin embargo, para que esta colección sea útil para el cálculo, no basta con parchar la variedad; necesitamos que estos parches “peguen” entre sí de una manera suave.

**Definición 2.3.3** ( $C^\infty$ -compatibilidad y función de transición). Dos cartas  $(U, \phi)$  y  $(V, \psi)$  de una variedad topológica  $M$  son  $C^\infty$ -compatibles si las dos aplicaciones

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad \text{y} \quad \phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

son suaves ( $C^\infty$ ). Estas aplicaciones se denominan funciones de transición (Figura 2.2) entre las cartas. Si la intersección  $U \cap V$  es vacía, las cartas se consideran automáticamente  $C^\infty$ -compatibles.

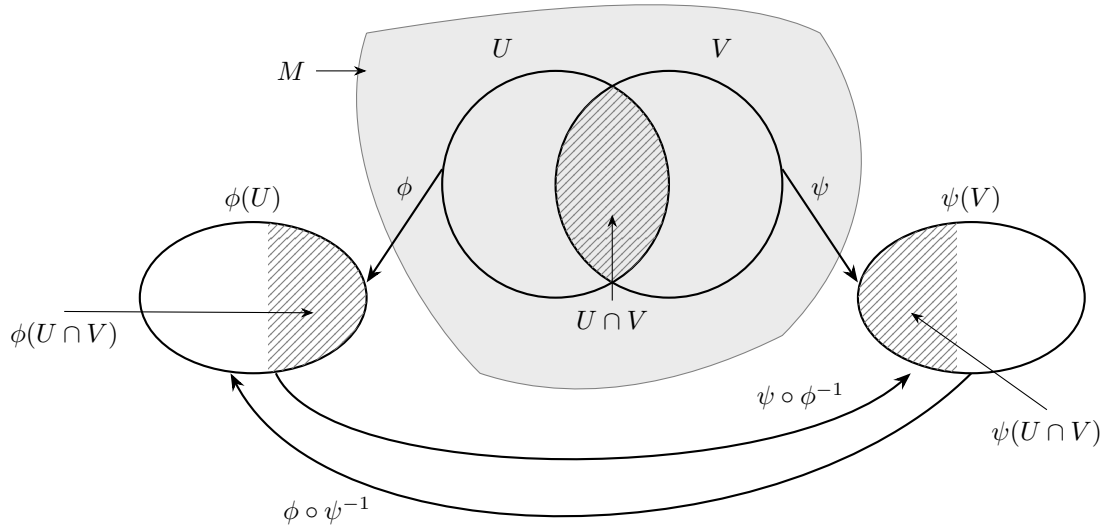


Figura 2.2: Funciones de transición.

Para extender esta noción local a una estructura global, formalizamos la relación entre una carta individual y una colección de ellas:

**Definición 2.3.4** (Compatibilidad con un atlas). *Se dice que una carta  $(V, \psi)$  es  $C^\infty$ -compatible con un atlas  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  si la carta  $(V, \psi)$  es  $C^\infty$ -compatible con cada una de las cartas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  que conforman el atlas  $\mathcal{U}$ .*

Antes de proceder, debemos asegurarnos de que esta noción de compatibilidad es robusta. El siguiente lema es crucial, pues demuestra que la compatibilidad es una propiedad transitiva.

**Lema 2.3.5.** *Sea  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  un atlas en un espacio localmente euclidiano  $M$ . Si dos cartas  $(V, \psi)$  y  $(W, \sigma)$  son ambas  $C^\infty$ -compatibles con el atlas  $\mathcal{U}$ , entonces son compatibles entre sí.*

*Demostración.* Sea  $p \in V \cap W$ . Como  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  es un atlas para  $M$ ,  $p \in U_\alpha$  para algún  $\alpha$ . Entonces  $p$  pertenece a la intersección  $V \cap W \cap U_\alpha$ .

En el dominio  $\psi(V \cap W \cap U_\alpha)$ , podemos descomponer la función de transición  $\sigma \circ \psi^{-1}$  insertando la identidad  $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha$ :

$$\sigma \circ \psi^{-1} = \sigma \circ (\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha) \circ \psi^{-1} = (\sigma \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \psi^{-1}).$$

- La aplicación  $(\phi_\alpha \circ \psi^{-1})$  es la función de transición entre la carta  $(V, \psi)$  y la carta  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  del atlas  $\mathcal{U}$ . Por hipótesis, la carta  $(V, \psi)$  es compatible con el atlas  $\mathcal{U}$ , lo que significa, por definición, que esta función de transición es  $C^\infty$ .
- La aplicación  $(\sigma \circ \phi_\alpha^{-1})$  es la función de transición entre la carta  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  del atlas  $\mathcal{U}$  y la carta  $(W, \sigma)$ . Por hipótesis, la carta  $(W, \sigma)$  también es compatible con el atlas  $\mathcal{U}$ , lo que significa que esta función de transición es  $C^\infty$ .

Dado que  $\sigma \circ \psi^{-1}$  es la composición de dos funciones  $C^\infty$ , entonces  $\sigma \circ \psi^{-1}$  es también  $C^\infty$  en el dominio  $\psi(V \cap W \cap U_\alpha)$ , y por lo tanto, es  $C^\infty$  en el punto  $\psi(p)$ .

Como  $p$  fue un punto arbitrario de  $V \cap W$ , hemos demostrado que  $\sigma \circ \psi^{-1}$  es  $C^\infty$  en todo su dominio  $\psi(V \cap W)$ . El argumento es análogo para  $\sigma^{-1} \circ \psi$ . Por lo tanto, las cartas  $(V, \psi)$  y  $(W, \sigma)$  son  $C^\infty$  compatibles entre sí.  $\square$

El Lema 2.3.5 nos asegura que la  $C^\infty$ -compatibilidad es una propiedad coherente. Esto nos permite ahora definir el concepto de un atlas maximal.

**Definición 2.3.6** (Atlas maximal). *Un atlas  $C^\infty$  es un atlas en el que todas sus cartas son mutuamente  $C^\infty$ -compatibles. Un atlas se dice maximal si no está contenido en ningún otro atlas  $C^\infty$  más grande.*

**Teorema 2.3.7** (Atlas maximal único). *Todo atlas  $C^\infty$  en un espacio localmente euclidiano está contenido en un único atlas  $C^\infty$  maximal.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  un atlas  $C^\infty$  y adjuntemos todas las cartas  $(V_i, \psi_i)$  que son compatibles con él (es decir, compatibles con cada carta de  $\mathcal{U}$ ). Por el Lema 2.3.5, las cartas  $(V_i, \psi_i)$  son compatibles entre sí. Así, la colección ampliada de cartas es un atlas.

Denotemos a este nuevo atlas ampliado como  $\mathcal{M}$ . Cualquier carta compatible con este nuevo atlas  $\mathcal{M}$  debe ser, en particular, compatible con el atlas original  $\mathcal{U}$  (ya que  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ ). Por la construcción de  $\mathcal{M}$ , dicha carta ya pertenece a  $\mathcal{M}$ . Esto prueba que el nuevo atlas  $\mathcal{M}$  es maximal.

Si  $\mathcal{M}'$  es otro atlas maximal que contiene a  $\mathcal{U}$ , entonces todas las cartas en  $\mathcal{M}'$  son compatibles con  $\mathcal{U}$  y, por construcción, deben pertenecer a  $\mathcal{M}$ . Esto prueba que  $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ . Como ambos son maximales sólo es posible que  $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ . Por lo tanto, el atlas maximal que contiene a  $\mathcal{U}$  es único.  $\square$

El Teorema 2.3.7 es el resultado que consolida la construcción de la estructura diferenciable. Demuestra que cualquier atlas  $C^\infty$ , por simple que sea, genera de forma única un atlas  $C^\infty$  maximal.

**Definición 2.3.8** (Variedad diferenciable). *Una variedad diferenciable es una variedad topológica  $M$  dotada de un atlas  $C^\infty$  maximal. Este atlas maximal se conoce como la estructura diferenciable de  $M$ .*

## 2.4. Ejemplos de variedades diferenciables

Aunque la definición formal requiere un atlas maximal, el Teorema 2.3.7 simplifica el proceso de verificación: basta con encontrar un atlas  $C^\infty$ .

**Ejemplo 2.4.1** (Espacio euclidiano). *El espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  es el ejemplo más básico de variedad diferenciable. Es de Hausdorff y segundo numerable, y por lo tanto una variedad topológica. Sea  $(r^1, \dots, r^n)$  el sistema de coordenadas estándar en  $\mathbb{R}^n$ . La carta  $(\mathbb{R}^n, id)$  es un homeomorfismo global. El atlas  $\mathcal{U} = \{(\mathbb{R}^n, id)\}$  es trivialmente un atlas  $C^\infty$ .*

**Ejemplo 2.4.2** (El gráfico de una función suave). Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función  $C^\infty$ . El gráfico de  $f$ , denotado por  $\Gamma_f$ , es el subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+m}$  definido por:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in U\}$$

Como subespacio de  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,  $\Gamma_f$  es de Hausdorff y segundo numerable. Definimos una carta global  $\phi : \Gamma_f \rightarrow U$  mediante la proyección  $\phi(x, f(x)) = x$ .

1. La aplicación  $\phi(x, y) = x$  es continua (restricción de una proyección).
2. La inversa  $\phi^{-1}(x) = (x, f(x))$  es continua porque sus componentes son continuas.

Como  $\phi$  es un homeomorfismo y  $U$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma_f$  es localmente euclidiano. El atlas formado por esta única carta confiere a  $\Gamma_f$  estructura de variedad diferenciable.

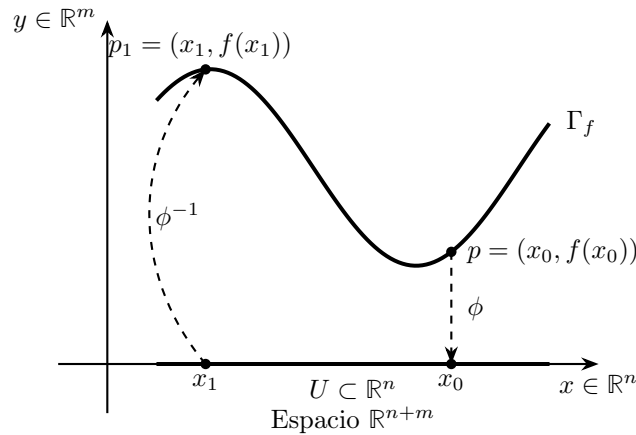


Figura 2.3: El gráfico  $\Gamma_f$  de una función suave es una variedad diferenciable.

**Proposición 2.4.3** (Atlas de una variedad producto). Si  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  y  $\mathcal{V} = \{(V_i, \psi_i)\}$  son atlas  $C^\infty$  para las variedades  $M$  y  $N$  de dimensiones  $m$  y  $n$ , respectivamente, entonces la colección de cartas producto

$$\mathcal{W} = \{(U_\alpha \times V_i, \phi_\alpha \times \psi_i : U_\alpha \times V_i \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n})\}$$

forma un atlas  $C^\infty$  para la variedad producto  $M \times N$ . En consecuencia,  $M \times N$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m + n$ .

*Demostración.* Primero,  $M \times N$  es de Hausdorff y segundo numerable porque es producto de espacios que lo son (Proposición A.22 y Corolario A.21 de [24]).

Para la condición localmente euclidiana: Dado  $(p, q) \in M \times N$ , existen cartas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  y  $(V_i, \psi_i)$  tales que  $p \in U_\alpha$  y  $q \in V_i$ . La aplicación producto  $\phi_\alpha \times \psi_i$  es un homeomorfismo sobre el abierto  $\phi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_i(V_i) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ .

Finalmente, verificamos la compatibilidad  $C^\infty$ . La función de transición entre dos cartas producto es:

$$(\phi_\beta \times \psi_j) \circ (\phi_\alpha \times \psi_i)^{-1} = (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) \times (\psi_j \circ \psi_i^{-1})$$

Sus componentes son las funciones de transición de  $M$  y  $N$  respectivamente, las cuales son suaves por hipótesis. Por lo tanto,  $\mathcal{W}$  es un atlas  $C^\infty$ .  $\square$

**Ejemplo 2.4.4** (El círculo unitario  $S^1$ ). Consideremos  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ . Construimos un atlas  $\mathcal{A}$  con cuatro cartas:

- $U_1 = \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 > 0\}$ ,  $\phi_1(x_1, x_2) = x_1$ .
- $U_2 = \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 < 0\}$ ,  $\phi_2(x_1, x_2) = x_1$ .
- $U_3 = \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_1 > 0\}$ ,  $\phi_3(x_1, x_2) = x_2$ .
- $U_4 = \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_1 < 0\}$ ,  $\phi_4(x_1, x_2) = x_2$ .

Cada  $\phi_i$  es un homeomorfismo al intervalo  $(-1, 1)$ . Las funciones de transición son suaves. Por ejemplo, en  $U_1 \cap U_3$ :

$$(\phi_3 \circ \phi_1^{-1})(x_1) = \sqrt{1 - (x_1)^2}$$

que es  $C^\infty$  en  $(0, 1)$ . Por lo tanto,  $S^1$  es una variedad diferenciable.

**Ejemplo 2.4.5** (El toro). El toro  $T^2 = S^1 \times S^1$ . Por la Proposición 2.4.3, es una variedad diferenciable de dimensión 2. Generalizando, el toro  $n$ -dimensional  $T^n$  es una variedad de dimensión  $n$ .

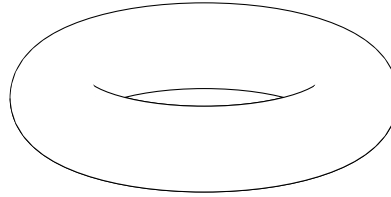


Figura 2.4: Toro ( $T^2$ ).

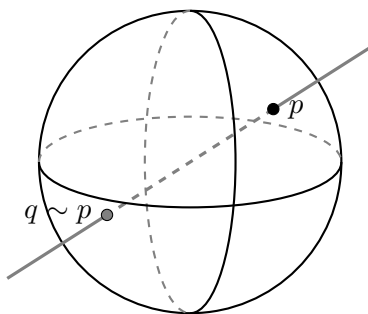
**Ejemplo 2.4.6** (Espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^n$ ). El espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^n$  es el conjunto de líneas que pasan por el origen en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Se define formalmente como el espacio cociente  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ , donde  $x \sim \lambda x$  para todo escalar no nulo  $\lambda$ .

Antes de dotarlo de estructura diferenciable, es necesario verificar sus propiedades topológicas. La demostración de que  $\mathbb{R}P^n$  es de Hausdorff y segundo numerable es un ejercicio clásico de topología cociente; los detalles completos de estas pruebas se pueden consultar en [14] o en [24].

Sabiendo que es una variedad topológica, construimos su estructura diferenciable mediante el atlas estándar de  $n+1$  cartas afines  $U_i = \{[x^0 : \dots : x^n] \mid x^i \neq 0\}$ . Las aplicaciones coordenadas  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  se definen como:

$$\phi_i([x]) = \left( \frac{x^0}{x^i}, \dots, \widehat{\frac{x^i}{x^i}}, \dots, \frac{x^n}{x^i} \right)$$

donde el término con sombrero se omite. Las funciones de transición resultantes son funciones racionales con denominador no nulo en los dominios de intersección, lo que garantiza su suavidad. Por lo tanto, el atlas es  $C^\infty$ .

Figura 2.5: Representación de  $\mathbb{RP}^2$ .

## 2.5. Aplicaciones suaves y difeomorfismos

Una vez definidos los objetos de estudio (las variedades diferenciables), es imperativo establecer cómo interactúan entre sí. En álgebra lineal estudiamos espacios vectoriales y las transformaciones lineales que los preservan; en topología, estudiamos espacios topológicos y funciones continuas. En el contexto de la geometría diferencial, los morfismos adecuados son las aplicaciones suaves. Estas son funciones que respetan la estructura diferenciable definida por los atlas [24].

**Definición 2.5.1** (Aplicación suave  $C^\infty$ ). Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables de dimensiones  $m$  y  $n$ , respectivamente. Una aplicación  $F : M \rightarrow N$  se dice suave o  $C^\infty$  en un punto  $p \in M$  si existen una carta  $(U, \phi)$  en  $M$  tal que  $p \in U$  y una carta  $(V, \psi)$  en  $N$  tal que  $F(U) \subseteq V$ , de modo que la representación local de  $F$ :

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

es una aplicación suave entre subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$  (ver Definición 2.1.3).

La aplicación  $F$  se dice suave si es suave en cada punto  $p \in M$ . El conjunto de todas las aplicaciones suaves de  $M$  a  $N$  se denota por  $C^\infty(M, N)$ .

Es fundamental que notemos que esta definición es consistente gracias a la compatibilidad de los atlas. Si cambiamos las cartas elegidas, la suavidad de las funciones de transición garantiza que la propiedad de ser suave se preserve. La demostración detallada de esta independencia de las coordenadas se puede encontrar en [24, Prop. 6.8] o [14, Lema 2.4].

Habiendo definido los morfismos, surge la pregunta natural de equivalencia: ¿cuándo podemos decir que dos variedades diferenciables son “la misma”? En topología, dos espacios son equivalentes (homeomorfos) si existe una biyección continua con inversa continua [19]. Sin embargo, en geometría diferencial exigimos más: la estructura de cálculo debe preservarse intacta en ambas direcciones. Esto nos lleva al concepto de difeomorfismo.

**Definición 2.5.2** (Difeomorfismo). Una aplicación  $F : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo si cumple tres condiciones:

1.  $F$  es una biyección (inyectiva y sobreyectiva).
2.  $F$  es una aplicación suave.
3. Su inversa,  $F^{-1} : N \rightarrow M$ , también es una aplicación suave.

Si existe tal aplicación entre  $M$  y  $N$ , decimos que las variedades son difeomorfas y escribimos  $M \cong N$ .

Dos variedades difeomorfas son indistinguibles desde el punto de vista de las propiedades diferenciables. Cualquier invariante calculado usando cálculo (como la cohomología de De Rham, que definiremos más adelante) será idéntico para ambas.

Finalmente, introducimos un caso particular de aplicación suave que será el bloque constructor de toda la teoría de formas diferenciales: las funciones que van de la variedad a los números reales.

**Definición 2.5.3** (Funciones suaves  $C^\infty(M)$ ). *Una función suave en una variedad  $M$  es una aplicación suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{R}$  tiene su estructura diferenciable estándar. El conjunto de todas las funciones suaves en  $M$  forma un álgebra conmutativa sobre los reales, denotada por  $C^\infty(M)$ .*

**Observación 2.5.4.** *Conviene precisar la estructura algebraica mencionada. El espacio  $C^\infty(M)$  es una  $\mathbb{R}$ -álgebra conmutativa. Esto significa que es un espacio vectorial real equipado con un producto bilineal, asociativo y conmutativo.*

Las operaciones se definen punto a punto utilizando la estructura de cuerpo de  $\mathbb{R}$ . Para cualquiera  $f, g \in C^\infty(M)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y para todo  $p \in M$ :

- *Suma:*  $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ .
- *Producto por escalar:*  $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$ .
- *Producto de funciones:*  $(f \cdot g)(p) = f(p)g(p)$ .

Esta álgebra posee un elemento identidad multiplicativo: la función constante 1 (donde  $1(p) = 1$  para todo  $p$ ).

Es precisamente sobre esta álgebra  $C^\infty(M)$  donde definiremos, en las secciones siguientes, los vectores tangentes como derivaciones, iniciando así la construcción de la maquinaria lineal sobre la variedad.

## 2.6. Particiones de la unidad

Para extender conceptos locales (definidos en cartas coordenadas) a toda la variedad, necesitamos una herramienta técnica que nos permita “suavizar” la transición entre diferentes abiertos y sumar contribuciones locales de manera coherente. Esta herramienta es la partición de la unidad. Antes de definirla, necesitamos precisar el concepto de soporte.

**Definición 2.6.1** (Soporte de una función). *Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. El soporte de  $f$ , denotado por  $\text{supp}(f)$ , es la clausura en  $M$  del conjunto de puntos donde la función no se anula:*

$$\text{supp}(f) = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

*Decimos que  $f$  tiene soporte compacto si  $\text{supp}(f)$  es un subconjunto compacto de  $M$ .*

La importancia del soporte radica en que nos permite localizar el comportamiento de una función. Una función con soporte compacto es cero, excepto en una región acotada.

Para manejar sumas infinitas sobre la variedad sin problemas de convergencia, introducimos la noción de finitud local.

**Definición 2.6.2** (Finitud local). *Una colección de subconjuntos  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  de un espacio topológico  $M$  se dice localmente finita si cada punto  $p \in M$  posee un entorno abierto  $V$  que intersecta solo a un número finito de conjuntos  $A_\alpha$ .*

Ahora podemos definir el concepto central que actúa como el “pegamento” analítico en la teoría de variedades.

**Definición 2.6.3** (Partición de la unidad). *Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  un cubrimiento abierto de  $M$ . Una partición de la unidad subordinada al cubrimiento  $\mathcal{U}$  es una colección de funciones suaves  $\{\rho_\alpha : M \rightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in J}$  que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Soporte subordinado: Para cada  $\alpha$ ,  $\text{supp}(\rho_\alpha) \subseteq U_\alpha$ .*
2. *Finitud local: La colección de soportes  $\{\text{supp}(\rho_\alpha)\}$  es localmente finita.*
3. *Suma unitaria: Para todo punto  $p \in M$ , la suma de las funciones es 1:*

$$\sum_{\alpha \in J} \rho_\alpha(p) = 1.$$

*Nótese que, gracias a la condición de finitud local, la suma en el punto 3 es en realidad una suma finita en cualquier entorno de  $p$ , por lo que no hay problemas de convergencia.*

La existencia de particiones de la unidad es lo que distingue a las variedades paracompactas (como las que estudiamos aquí, de Hausdorff y segundo numerables) de espacios topológicos más rígidos.

**Teorema 2.6.4** (Existencia de particiones de la unidad). *Toda variedad diferenciable  $M$  admite particiones de la unidad. Específicamente, para cualquier cubrimiento abierto  $\mathcal{U}$ , existe una partición de la unidad subordinada a  $\mathcal{U}$ .*

*Demostración.* (Idea) La demostración es técnica y se basa en la existencia de “funciones chichón” (bump functions) en  $\mathbb{R}^n$  y en la propiedad de segundo numerable para extraer subcubrimientos manejables. Una construcción detallada se encuentra en el Teorema 13.7 de Tu [24].  $\square$

Esta herramienta será fundamental en los capítulos posteriores, donde la utilizaremos para definir la integral global de una forma diferencial dividiéndola en trozos que caben dentro de cartas coordenadas.

## 2.7. Vectores tangentes en $\mathbb{R}^n$

El concepto de vector tangente es fundamental en geometría diferencial. En el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , aunque visualizamos los vectores como flechas, Loring Tu [24] sugiere que la propiedad más fundamental de un vector es su capacidad para derivar funciones.

La conexión entre la visión geométrica de un vector y su acción sobre las funciones la proporciona la derivada direccional. En  $\mathbb{R}^n$ , un vector  $v = (v^1, \dots, v^n)$  en un punto  $p$  define un operador  $D_v$  sobre las funciones suaves.

**Definición 2.7.1** (Derivada direccional). *La derivada direccional de una función  $f$  en un punto  $p$  en la dirección de un vector  $v$  se denota por  $D_v f(p)$  y se define como:*

$$D_v f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv).$$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos la fórmula operacional:

$$D_v f(p) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Para formalizar esta idea localmente, utilizamos el concepto de germen, el cual intuitivamente, busca estudiar el comportamiento de la función en vecindades suficientemente cercanas a  $p$ .

**Definición 2.7.2** (Germen). *Consideremos el conjunto de pares  $(U, f)$ , donde  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es un entorno abierto de  $p$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^\infty$ . Decimos que dos pares  $(U, f)$  y  $(V, g)$  son equivalentes, lo cual denotamos por  $(U, f) \sim (V, g)$ , si existe un entorno abierto  $W \subseteq U \cap V$  de  $p$  tal que:*

$$f|_W = g|_W$$

*Un germen de una función suave en  $p$  es una clase de equivalencia  $[(U, f)]$  bajo esta relación. El conjunto de todos los gérmenes en  $p$  se denota por  $C_p^\infty$ .*

**Definición 2.7.3** (Derivación). *Una derivación en el punto  $p$  es una aplicación lineal  $X : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las siguientes dos condiciones para cualesquiera  $f, g \in C_p^\infty$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ :*

1. *Linealidad:*  $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$ .
2. *Regla de Leibniz:*  $X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$ .

Denotamos por  $\text{Der}_p(\mathbb{R}^n)$  al espacio vectorial de todas las derivaciones en  $p$ .

Antes de establecer la relación formal entre los vectores clásicos y los operadores de derivación, debemos precisar a qué conjunto pertenecen dichos vectores geométricos.

**Definición 2.7.4** (Espacio tangente geométrico en  $\mathbb{R}^n$ ). Para un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , el espacio tangente geométrico en  $p$ , denotado por  $T_p(\mathbb{R}^n)$ , se define formalmente como el conjunto de pares  $\{p\} \times \mathbb{R}^n = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$ . Intuitivamente, este espacio representa el conjunto de todas las flechas (vectores) que tienen su origen anclado en el punto  $p$ .

**Proposición 2.7.5.** Para cada vector geométrico  $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ , el operador derivada direccional  $D_v : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  es una derivación.

*Demostración.* Antes de verificar las propiedades algebraicas, es imperativo demostrar que el operador  $D_v$  está bien definido sobre el espacio de gérmenes  $C_p^\infty$ .

Sea  $[f] \in C_p^\infty$  un germen representado por dos funciones equivalentes  $(U, f)$  y  $(V, g)$ . Por la definición de equivalencia de gérmenes, existe un entorno abierto  $W \subseteq U \cap V$  que contiene a  $p$  tal que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in W$ . Dado que la derivada direccional es un operador estrictamente local (su valor se calcula mediante un límite que depende exclusivamente del comportamiento de la función en una vecindad arbitrariamente pequeña alrededor de  $p$ ), se deduce que:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial g}{\partial x^i}(p) \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto, el valor de la suma

$$D_v([f]) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

es exactamente el mismo sin importar si se evalúa usando el representante  $f$  o el representante  $g$ . Esto prueba que la acción de  $D_v$  sobre  $C_p^\infty$  es independiente de la elección del representante y, en consecuencia, está bien definida.

Ahora verifiquemos que  $D_v$  satisface las dos condiciones de una derivación:

1. Linealidad: Sean  $f, g \in C_p^\infty$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ . Por la linealidad de la derivada parcial:

$$\begin{aligned} D_v(af + bg) &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(af + bg)(p) \\ &= \sum_{i=1}^n v^i \left( a \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + b \frac{\partial g}{\partial x^i}(p) \right) \\ &= a \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + b \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial g}{\partial x^i}(p) \\ &= aD_v(f) + bD_v(g). \end{aligned}$$

2. Regla de Leibniz: Usando la regla del producto para derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
 D_v(fg) &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(fg)(p) \\
 &= \sum_{i=1}^n v^i \left( \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)g(p) + f(p) \frac{\partial g}{\partial x^i}(p) \right) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \right) g(p) + f(p) \left( \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial g}{\partial x^i}(p) \right) \\
 &= D_v(f)g(p) + f(p)D_v(g).
 \end{aligned}$$

Dado que cumple ambas condiciones,  $D_v$  es una derivación.  $\square$

Ahora establecemos el isomorfismo que justifica nuestra definición abstracta de vectores tangentes como derivaciones. La demostración se basa en la brindada por Tu en [24].

**Teorema 2.7.6** (Isomorfismo canónico). *La aplicación  $\phi : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Der}_p(\mathbb{R}^n)$  definida por  $\phi(v) = D_v$  es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

*Demostración.* Debemos demostrar que la aplicación  $\phi$  es lineal, inyectiva y sobreyectiva.

**1. Linealidad:** Sean  $v, w \in T_p(\mathbb{R}^n)$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ . Evaluamos  $\phi(av + bw)$  en una función suave arbitraria  $f$ :

$$\phi(av + bw)(f) = D_{av+bw}(f) = \sum_{i=1}^n (av^i + bw^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Distribuyendo y separando la suma por linealidad en  $\mathbb{R}$ , obtenemos:

$$a \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + b \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = aD_v(f) + bD_w(f) = (a\phi(v) + b\phi(w))(f).$$

Como esto se cumple para toda función suave  $f$ , concluimos que  $\phi(av + bw) = a\phi(v) + b\phi(w)$ , demostrando así que  $\phi$  es una aplicación lineal.

**2. Inyectividad:** Supongamos que  $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$  es tal que  $\phi(v) = D_v = 0$  (la derivación nula). Esto significa que  $D_v(f) = 0$  para toda función suave  $f$ . Consideremos en particular las funciones coordenadas  $x^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $x^j(p) = p^j$ . Aplicando la derivación  $D_v$  a  $x^j$ :

$$0 = D_v(x^j) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^n v^i \delta_i^j = v^j.$$

Dado que  $v^j = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , concluimos que  $v = 0$ . Por lo tanto, el núcleo de  $\phi$  es trivial y la aplicación es inyectiva.

**3. Sobreyectividad:** Sea  $D \in \text{Der}_p(\mathbb{R}^n)$  una derivación arbitraria. Queremos encontrar un vector  $v$  tal que  $D = D_v$ . Sea  $f$  cualquier función suave definida en un entorno de  $p$ . Por el

teorema de Taylor con resto, podemos escribir  $f$  como:

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i)g_i(x),$$

donde  $g_i$  son funciones suaves tales que  $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ .

Aplicamos la derivación  $D$  a ambos lados de la igualdad. Usando la linealidad de  $D$  y el hecho de que la derivada de una función constante es cero ( $D(f(p)) = 0$ ):

$$D(f) = D\left(\sum_{i=1}^n (x^i - p^i)g_i(x)\right) = \sum_{i=1}^n D((x^i - p^i)g_i(x)).$$

Aplicamos la regla de Leibniz a cada término del producto:

$$D((x^i - p^i)g_i) = D(x^i - p^i)g_i(p) + (p^i - p^i)D(g_i).$$

Observemos que el segundo término se anula porque el factor  $(p^i - p^i)$  es cero (la evaluación se realiza en el punto  $p$ ). Además, por linealidad,  $D(x^i - p^i) = D(x^i) - D(p^i) = D(x^i)$ . Sustituyendo esto:

$$D(f) = \sum_{i=1}^n D(x^i)g_i(p) = \sum_{i=1}^n D(x^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Si definimos ahora un vector  $v$  cuyas componentes sean  $v^i = D(x^i)$ , la expresión anterior es exactamente la definición de la derivada direccional  $D_v(f)$ :

$$D(f) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = D_v(f).$$

Como esto es válido para cualquier función  $f$ , hemos demostrado que  $D = D_v = \phi(v)$ . Por lo tanto,  $\phi$  es sobreyectiva.  $\square$

Este isomorfismo es la piedra angular que nos permite abandonar la intuición geométrica de los vectores como flechas y adoptar una perspectiva puramente algebraica. Dado que en una variedad diferenciable general no disponemos de una estructura lineal global para definir vectores geoméricamente, utilizaremos la equivalencia demostrada para tomar el camino de las derivaciones. Así, en la siguiente sección, definiremos el espacio tangente en una variedad abstracta  $M$  directamente como el espacio de derivaciones sobre las funciones suaves, una construcción que es intrínseca y no depende de un espacio ambiente.

## 2.8. El espacio tangente en variedades

Habiendo establecido que en  $\mathbb{R}^n$  los vectores son equivalentes a las derivaciones, utilizamos esta propiedad algebraica para definir vectores en una variedad diferenciable  $M$  general.

**Definición 2.8.1** (Espacio tangente  $T_pM$ ). Sea  $p \in M$ . El espacio tangente a  $M$  en  $p$ , denotado por  $T_pM$ , se define como el conjunto de todas las derivaciones en  $p$  sobre el álgebra  $C^\infty(M)$ .

$$T_pM = \{X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid X_p \text{ es lineal y satisface la regla de Leibniz}\}.$$

Este conjunto tiene estructura de espacio vectorial real [4].

Aunque la definición es abstracta, su relación con las coordenadas es concreta gracias a las cartas locales.

**Teorema 2.8.2** (Base del espacio tangente). Sea  $(U, \phi) = (x^1, \dots, x^n)$  una carta local alrededor de  $p$ . Los operadores de derivada parcial inducidos, definidos por:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p))$$

forman una base para el espacio vectorial  $T_pM$ . En consecuencia,  $\dim(T_pM) = \dim(M) = n$ .

*Demostración.* La demostración se reduce al caso de  $\mathbb{R}^n$  utilizando el difeomorfismo local  $\phi$ . La demostración formal puede ser revisada en [14].  $\square$

Esto significa que cualquier vector tangente  $v \in T_pM$  puede escribirse de manera única como una combinación lineal de las derivadas parciales de la carta.

## 2.9. La diferencial de una aplicación

Una de las ventajas del enfoque de derivaciones es que proporciona una forma natural de linealizar aplicaciones suaves, generalizando la matriz jacobiana.

**Definición 2.9.1** (La diferencial / pushforward). Sea  $F : M \rightarrow N$  una aplicación suave y sea  $p \in M$ . La diferencial de  $F$  en  $p$ , denotada por  $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$  (o  $F_{*,p}$ ), se define por:

$$dF_p(v)(g) = v(g \circ F)$$

para todo vector  $v \in T_pM$  y toda función  $g \in C^\infty(N)$ .

**Proposición 2.9.2** (Representación en coordenadas: la jacobiana). Sean  $(x^1, \dots, x^n)$  coordenadas locales en  $M$  alrededor de  $p$ , y  $(y^1, \dots, y^m)$  coordenadas locales en  $N$  alrededor de  $F(p)$ .

La acción de la diferencial  $dF_p$  sobre los vectores de la base canónica  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right\}$  está dada por:

$$dF_p \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}(p) \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_{F(p)}.$$

En consecuencia, la matriz que representa a la transformación lineal  $dF_p$  respecto a estas bases es precisamente la matriz jacobiana de la representación local de  $F$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Sea  $g$  una función suave arbitraria en  $N$ . Aplicamos la definición de la diferencial al vector base  $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ :

$$dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) (g) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (g \circ F).$$

Consideremos  $g \circ F$  localmente como una función compuesta  $g(y^1(x), \dots, y^m(x))$ . Por la regla de la cadena del cálculo multivariable, evaluada en el punto  $p$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (g \circ F) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y^i} \Big|_{F(p)} \cdot \frac{\partial (y^i \circ F)}{\partial x^j} \Big|_p.$$

Reordenando los términos para verlos como operadores actuando sobre  $g$ :

$$dF_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) (g) = \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial (y^i \circ F)}{\partial x^j} (p) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{F(p)} \right) (g).$$

Como esto vale para cualquier función  $g$ , la igualdad se mantiene a nivel del operador.  $\square$

## 2.10. El fibrado tangente

Hasta ahora hemos trabajado en un solo punto. Para hacer cálculo global, necesitamos considerar la totalidad de los vectores tangentes.

**Definición 2.10.1** (Fibrado tangente). *El fibrado tangente  $TM$  es la unión disjunta de todos los espacios tangentes de  $M$ :*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

**Teorema 2.10.2** (Estructura de variedad de  $TM$ ). *Si  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , entonces el fibrado tangente  $TM$  admite una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión  $2n$ .*

*Demostración.* Para dotar a  $TM$  de una estructura de variedad, construimos un atlas a partir de las cartas de  $M$ . Sea  $(U, \phi)$  una carta en  $M$  con coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^n)$ . Cualquier vector tangente  $v \in T_p M$  (con  $p \in U$ ) se puede expresar de manera única en la base coordenada como:

$$v = \sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Esto nos permite definir una carta natural inducida  $\tilde{\phi} : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , donde  $TU = \pi^{-1}(U)$  es la preimagen bajo la proyección canónica, mediante el mapa biyectivo:

$$\tilde{\phi}(v) = (x^1(p), \dots, x^n(p), c^1, \dots, c^n).$$

La imagen de esta aplicación es el abierto  $\phi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ .

Para verificar la suavidad de la estructura resultante y que la colección  $\{(TU, \tilde{\phi})\}$  forma un atlas diferenciable, analizamos la compatibilidad entre dos cartas. Supongamos que tenemos otra carta  $(V, \psi)$  con coordenadas  $(y^1, \dots, y^n)$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Si  $v \in T_p M$  es un vector en la intersección, podemos escribirlo en ambas bases:

$$v = \sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^n d^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p.$$

Sabiendo por la regla de la cadena que:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j},$$

sustituimos esto en la expresión original de  $v$ :

$$\sum_{i=1}^n c^i \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Por la unicidad de la expansión en la base de las  $y$ , igualamos componentes para obtener:

$$d^j = \sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Por lo tanto, la función de transición  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$  mapea las coordenadas  $(x^1, \dots, x^n, c^1, \dots, c^n)$  a  $(y^1, \dots, y^n, d^1, \dots, d^n)$  de la siguiente manera:

$$(x^1, \dots, x^n, c^1, \dots, c^n) \mapsto \left( y^1(x), \dots, y^n(x), \sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial y^1}{\partial x^i}, \dots, \sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \right).$$

Las primeras  $n$  componentes corresponden a las funciones de cambio de coordenadas de la variedad base  $M$ , que son suaves por hipótesis. Las últimas  $n$  componentes son lineales en  $c^i$ , y sus coeficientes son exactamente las derivadas parciales de las funciones de transición de  $M$  (elementos de la matriz jacobiana). Como estas derivadas parciales son también funciones suaves, concluimos que las funciones de transición globales son de clase  $C^\infty$ . En consecuencia,  $TM$  hereda una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $2n$ , una demostración más en detalle y técnica puede ser encontrada en [24, 14].  $\square$

Con la construcción del fibrado tangente, hemos completado la descripción global de las direcciones y derivaciones sobre la variedad. Sin embargo, para desarrollar la teoría de integración y la cohomología de De Rham, el objeto de interés principal no es el vector, sino el objeto funcional que actúa sobre él. Siguiendo la lógica lineal establecida en el Capítulo 1, es necesario ahora dualizar esta construcción geométrica.

## 2.11. El fibrado cotangente

Dado que  $T_pM$  es un espacio vectorial, podemos considerar su espacio dual.

**Definición 2.11.1** (Espacio cotangente). *El espacio cotangente en  $p$ , denotado por  $T_p^*M$ , es el espacio dual de  $T_pM$ :*

$$T_p^*M = (T_pM)^* = \text{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

Los elementos de  $T_p^*M$  se llaman *covectores tangentes* o *1-formas* en  $p$ .

**Definición 2.11.2** (Diferencial de una función). *Sea  $f \in C^\infty(M)$ . La diferencial de  $f$  en  $p$ , denotada por  $df_p$ , es el covector  $df_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  definido por:*

$$df_p(v) = v(f), \quad \forall v \in T_pM.$$

**Proposición 2.11.3** (Base cotangente). *Si  $(x^1, \dots, x^n)$  son coordenadas locales, las diferenciales  $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$  forman la base dual de  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}$ . Es decir,  $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_j^i$ .*

*Demostración.* Usando la definición de la diferencial tomando la función  $f$  como la  $i$ -ésima función coordenada  $x^i$ , y el vector  $v$  como el  $j$ -ésimo vector de la base tangente  $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ :

$$dx^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (x^i).$$

Por la definición de la derivada parcial en coordenadas locales:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (x^i) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p).$$

Dado que las coordenadas son independientes, la derivada de  $x^i$  respecto a  $x^j$  es 1 si  $i = j$  y 0 si  $i \neq j$ . Por lo tanto:

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i.$$

Como el conjunto  $\{dx^i|_p\}$  tiene el cardinal correcto ( $n$ ) y satisface la condición de ortogonalidad con la base tangente, constituye la base dual única del espacio cotangente  $T_p^*M$ .  $\square$

Al igual que con el tangente, unimos estos espacios para formar una variedad.

**Definición 2.11.4** (Fibrado cotangente). *El fibrado cotangente  $T^*M$  es la unión disjunta de todos los espacios cotangentes:*

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Al igual que  $TM$ , el fibrado cotangente admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $2n$  [27]. Las coordenadas locales inducidas en  $T^*M$  son  $(x^1, \dots, x^n, c_1, \dots, c_n)$ , donde  $c_i$  son las componentes de un covector en la base  $dx^i$ .

Construimos el atlas de la siguiente manera: Sea  $(U, x^1, \dots, x^n)$  una carta en  $M$ . Cualquier covector  $\omega \in \pi^{-1}(U)$  en un punto  $p$  se escribe de forma única como  $\omega = \sum c_i dx^i|_p$ . Definimos las coordenadas inducidas en  $T^*M$  mediante el mapa:

$$\tilde{\phi}(\omega) = (x^1(p), \dots, x^n(p), c_1, \dots, c_n).$$

Para verificar la suavidad de la estructura del fibrado cotangente, analizamos la función de transición. Si  $(x^1, \dots, x^n, c_1, \dots, c_n)$  son las coordenadas en la carta  $U$  y  $(y^1, \dots, y^n, d_1, \dots, d_n)$  son las coordenadas en la carta  $V$ , entonces para un covector  $\omega = \sum c_i dx^i = \sum d_j dy^j$  en la intersección, las componentes se transforman de manera inversa a los vectores. Usando que  $dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$ :

$$\sum_i c_i \left( \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \right) = \sum_j d_j dy^j \implies d_j = \sum_i c_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}.$$

Por lo tanto, la función de transición global mapea las coordenadas de la siguiente manera:

$$(x^1, \dots, x^n, c_1, \dots, c_n) \mapsto \left( y^1(x), \dots, y^n(x), \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial x^i}{\partial y^1}, \dots, \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial x^i}{\partial y^n} \right).$$

Las funciones de transición son lineales en las componentes  $c_i$  y dependen de las derivadas de las funciones de cambio de coordenadas en  $M$ . Dado que el cambio de coordenadas en  $M$  es suave, la matriz jacobiana inversa (o sus transpuestas) también lo es, garantizando que  $T^*M$  es una variedad diferenciable [24, 14].

## 2.12. Subvariedades

Aunque en las primeras secciones de este capítulo definimos el concepto general de variedad diferenciable, hemos postergado la definición formal de subvariedad hasta este momento por una razón estructural profunda: la geometría de una subvariedad está intrínsecamente ligada al comportamiento lineal de sus espacios tangentes.

Para caracterizar adecuadamente qué subconjuntos de una variedad son suaves, no basta con la topología; necesitamos garantizar que el espacio tangente del subconjunto encaje linealmente dentro del espacio tangente de la variedad global. Habiendo desarrollado en las secciones anteriores la maquinaria de la diferencial, ahora tenemos el lenguaje preciso para formalizar esta relación. Además, establecer este marco geométrico aquí es indispensable para el siguiente capítulo, donde necesitaremos restringir formas diferenciales a subvariedades (como el borde de un dominio) para formular la teoría de integración y el teorema de Stokes.

**Definición 2.12.1** (Subvariedad regular). *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Un subconjunto  $S \subset M$  se dice que es una subvariedad regular de dimensión  $k$  ( $k \leq n$ ) si para cada punto  $p \in S$ , existe una carta coordenada  $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$  de  $M$  centrada en  $p$  ( $\phi(p) = 0$ ) tal que la intersección  $U \cap S$  se ve, bajo  $\phi$ , como un subespacio lineal de dimensión  $k$  en  $\mathbb{R}^n$ .*

Formalmente, esto significa que la imagen de la intersección satisface la anulaci3n de las 3ltimas  $n - k$  coordenadas:

$$\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap \{(r^1, \dots, r^n) \in \mathbb{R}^n \mid r^{k+1} = \dots = r^n = 0\}.$$

A una carta con estas propiedades se le denomina carta adaptada a  $S$  relativa a  $M$ .

La existencia de estas cartas adaptadas tiene consecuencias inmediatas que validan nuestra intuici3n geom3trica:

1. Estructura diferenciable: El conjunto  $S$ , equipado con la topolog3a subespacio, admite una estructura de variedad diferenciable de dimensi3n  $k$  de forma natural. Las cartas de  $S$  se obtienen simplemente restringiendo las primeras  $k$  coordenadas de las cartas adaptadas de  $M$ .
2. Suavidad de la inclusi3n: La aplicaci3n de inclusi3n can3nica  $\iota : S \hookrightarrow M$ , definida por  $\iota(p) = p$ , resulta ser una aplicaci3n suave ( $C^\infty$ ).

**Proposici3n 2.12.2.** Si  $S$  es una subvariedad regular de  $M$ , la diferencial de la inclusi3n en cualquier punto  $p \in S$ ,

$$d\iota_p : T_p S \rightarrow T_p M,$$

es una transformaci3n lineal inyectiva.

*Demostraci3n.* En una carta adaptada  $(U, \phi)$ , la inclusi3n  $\iota$  se representa localmente como la inyecci3n lineal  $(r^1, \dots, r^k) \mapsto (r^1, \dots, r^k, 0, \dots, 0)$ . La matriz jacobiana de esta aplicaci3n es la matriz identidad  $k \times k$  seguida de  $n - k$  filas de ceros. Dicha matriz tiene rango m3ximo  $k$ , lo que implica que la transformaci3n lineal inducida  $d\iota_p$  tiene n3cleo trivial y, por tanto, es inyectiva [14].  $\square$

Esta inyectividad nos permite identificar can3nicamente el espacio tangente  $T_p S$  con su imagen  $d\iota_p(T_p S)$  dentro de  $T_p M$ . Gracias a esta identificaci3n, en adelante podremos considerar a los vectores tangentes a la subvariedad como un subespacio de los vectores tangentes a la variedad ambiente ( $T_p S \subset T_p M$ ), una simplificaci3n conceptual que ser3 clave cuando definamos la restricci3n de formas diferenciales.

Esta construcci3n es la pieza final de este cap3tulo. En el Cap3tulo 1 construimos el 3lgebra exterior  $\Lambda^k(V^*)$ . Ahora, al reemplazar  $V$  por  $T_p M$ , podemos construir el espacio  $\Lambda^k(T_p^* M)$  en cada punto. Una forma diferencial se definir3 en el pr3ximo cap3tulo como una secci3n suave de esta uni3n de espacios.

## Capítulo 3

# Formas diferenciales

En el capítulo anterior construimos el escenario geométrico de las variedades y sus espacios tangentes. Para desarrollar una teoría de integración y análisis global, necesitamos herramientas intrínsecas que nos permitan “medir” la geometría del espacio. Las formas diferenciales cumplen precisamente este propósito: son la generalización covariante de los campos escalares y vectoriales del cálculo clásico, diseñadas algebraicamente para ser alimentadas con vectores y actuar como dispositivos de medición de longitudes, áreas y volúmenes [3].

El desarrollo de este capítulo comenzará analizando estas formas localmente en  $\mathbb{R}^n$ , donde unifican los operadores clásicos del cálculo vectorial tridimensional. Posteriormente, extendemos esta estructura a variedades generales mediante el fibrado cotangente y formalizaremos el concepto geométrico de orientación. Esta arquitectura nos permitirá definir rigurosamente la integral global y culminar con el teorema de Stokes generalizado, el cual revela la profunda dualidad analítica entre los dominios de integración (cadenas) y las formas diferenciales (cocadenas) [5].

### 3.1. Derivación de formas diferenciales

#### 3.1.1. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$

Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  con coordenadas estándar  $(x^1, \dots, x^n)$ . En cada punto  $p \in U$ , el espacio cotangente  $T_p^*(\mathbb{R}^n)$  posee una base canónica dada por las diferenciales de las coordenadas:  $\{(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\}$ .

**Definición 3.1.1** (*k*-forma diferencial). *Una k-forma diferencial  $\omega$  en  $U$  es una aplicación suave que asocia a cada punto  $p \in U$  un elemento del álgebra exterior  $\Lambda^k(T_p^*\mathbb{R}^n)$ . Es decir,  $\omega(p)$  es una aplicación *k*-lineal alternada sobre el espacio tangente  $T_p\mathbb{R}^n$ .*

*En términos de coordenadas locales, cualquier k-forma se puede expresar de manera única como una combinación lineal con coeficientes funcionales:*

$$\omega = \sum_I a_I dx^I$$

donde los  $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables de clase  $C^\infty$  y  $I$  denota un multi-índice.

**Observación 3.1.2** (Notación multi-índice y propiedades alternantes). *Un multi-índice de longitud  $k$  es una  $k$ -tupla de enteros  $I = (i_1, \dots, i_k)$ . Diremos que  $I$  es estrictamente ascendente si  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Denotamos el producto cuña básico correspondiente como:*

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

*Debido a la naturaleza alternante del producto cuña heredada del álgebra exterior, las 1-formas básicas satisfacen dos identidades algebraicas fundamentales:*

1. *El producto de una forma básica consigo misma se anula:  $dx^i \wedge dx^i = 0$ .*
2. *La permutación de dos formas invierte el signo:  $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ .*

Aunque la definición establece el rigor algebraico necesario, la interpretación geométrica es vital para la intuición general. Bachman [3] propone entender una  $k$ -forma no solo como un objeto algebraico, sino como una herramienta para medir el volumen  $k$ -dimensional proyectado, con orientación o con signo.

Consideremos  $k$  vectores  $v_1, \dots, v_k$  en el espacio tangente que generan un paralelepípedo  $k$ -dimensional.

- La forma básica  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  toma este paralelepípedo y lo proyecta ortogonalmente sobre el subespacio coordenado generado por los ejes  $\partial x^{i_1}, \dots, \partial x^{i_k}$ . El valor que devuelve la forma es el volumen (determinante) de esta “sombra” o proyección con signo [3].
- Una forma general  $\omega = \sum a_I dx^I$  descompone un objeto geométrico complejo en todas sus proyecciones posibles sobre los planos coordenados, mide el volumen de cada proyección y realiza una suma ponderada por los coeficientes  $a_I$ .

Esta perspectiva justifica por qué las formas diferenciales son los integrandos naturales: generalizan el concepto de medir longitudes ( $dx$ ), áreas ( $dx \wedge dy$ ) y volúmenes ( $dx \wedge dy \wedge dz$ ) mediante un sistema coherente de proyecciones con signo.

Para manejar eficientemente la combinatoria de estas proyecciones y evitar redundancias debidas a la antisimetría del producto cuña, se utiliza la notación de multi-índices definida anteriormente.

### La derivada exterior en $\mathbb{R}^n$

La derivada exterior es el operador fundamental que nos permite diferenciar formas de cualquier grado, conectando la geometría local con la topología global.

**Definición 3.1.3** (Derivada exterior local). *La derivada exterior es un operador lineal  $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$  definido de la siguiente manera:*

1. *Para una 0-forma (función escalar)  $f \in \Omega^0(U)$ ,  $df$  coincide con la diferencial total clásica:*

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

2. Para una  $k$ -forma general  $\omega = \sum_I a_I dx^I$ , definimos  $d\omega$  diferenciando los coeficientes y aplicando el producto cuña:

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx^I = \sum_I \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^I.$$

Este operador satisface una serie de propiedades algebraicas que lo caracterizan como una antiderivación de grado 1.

**Proposición 3.1.4** (Propiedades de  $d$ ). *La derivada exterior satisface:*

1. *Linealidad:*  $d(a\omega + b\eta) = ad\omega + bd\eta$  para  $a, b \in \mathbb{R}$ .
2. *Regla de Leibniz graduada:* Si  $\omega \in \Omega^k(U)$  y  $\eta \in \Omega^l(U)$ , entonces:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

3. *Nilpotencia:*  $d^2 = d \circ d = 0$ .

*Demostración.* 1. Linealidad: Es consecuencia inmediata de la linealidad de la derivada parcial y de la suma. Si  $\omega = \sum a_I dx^I$  y  $\eta = \sum b_I dx^I$ , entonces:

$$d(\omega + \eta) = d\left(\sum (a_I + b_I) dx^I\right) = \sum d(a_I + b_I) \wedge dx^I.$$

Como  $d(f + g) = df + dg$  para funciones, la suma se separa directamente.

2. Regla de Leibniz: Basta probarlo para monomios  $\omega = f dx^I$  y  $\eta = g dx^J$ , donde  $f, g$  son funciones e  $I, J$  multi-índices de longitud  $k$  y  $l$  respectivamente.

El producto cuña es  $\omega \wedge \eta = (f dx^I) \wedge (g dx^J) = fg dx^I \wedge dx^J$ . Aplicamos la definición de  $d$ :

$$d(\omega \wedge \eta) = d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J.$$

Usando la regla del producto para funciones ( $d(fg) = gdf + fdg$ ):

$$d(\omega \wedge \eta) = (gdf + fdg) \wedge dx^I \wedge dx^J = (gdf \wedge dx^I \wedge dx^J) + (fdg \wedge dx^I \wedge dx^J).$$

Ahora reordenamos los términos. Para el primer sumando,  $g$  es escalar y conmuta, así que tenemos  $(df \wedge dx^I) \wedge (g dx^J) = d\omega \wedge \eta$ .

Para el segundo sumando, debemos mover la 1-forma  $dg$  a través de la  $k$ -forma  $dx^I$ . Como el producto cuña es anticonmutativo, mover  $dg$  (grado 1) a través de  $k$  términos introduce un factor  $(-1)^{1 \cdot k} = (-1)^k$ .

$$fdg \wedge dx^I \wedge dx^J = f(-1)^k dx^I \wedge dg \wedge dx^J = (-1)^k (f dx^I) \wedge (dg \wedge dx^J).$$

Por tanto:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

3. Nilpotencia ( $d^2 = 0$ ). Procedemos en dos pasos.

*Caso base (0-formas):* Sea  $f$  una función.

$$d^2 f = d \left( \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i.$$

Por el teorema de Schwarz (igualdad de derivadas parciales mixtas [18]), sabemos que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ . Al expandir la suma, los términos con índices iguales se anulan porque el producto de dos formas idénticas es cero ( $dx^i \wedge dx^i = 0$ ), y los términos cruzados se cancelan a pares por su anticonmutatividad ( $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$ ).

*Caso general:* Sea  $\omega = \sum a_I dx^I$ . Usando la linealidad y la regla de Leibniz recién demostrada:

$$d^2 \omega = d \left( \sum da_I \wedge dx^I \right) = \sum d(da_I \wedge dx^I).$$

Aplicamos Leibniz con  $da_I$  (grado 1) y  $dx^I$ :

$$d(da_I \wedge dx^I) = d(da_I) \wedge dx^I - da_I \wedge d(dx^I).$$

El primer término es  $d^2 a_I \wedge dx^I$ , que es cero por el caso base. El segundo término implica  $d(dx^I)$ . Como  $dx^I$  son formas constantes (sus coeficientes son 1), sus derivadas son cero. Así,  $d^2 \omega = 0$ .  $\square$

Esta propiedad permite clasificar las formas diferenciales en dos categorías fundamentales para la cohomología.

**Definición 3.1.5** (Formas cerradas y exactas). *Sea  $\omega \in \Omega^k(U)$  una  $k$ -forma diferencial:*

1. *Se dice que  $\omega$  es cerrada si  $d\omega = 0$ . El espacio de formas cerradas se denota por  $Z^k(U)$ .*
2. *Se dice que  $\omega$  es exacta si existe  $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$  tal que  $\omega = d\eta$ . El espacio de formas exactas se denota por  $B^k(U)$ .*

*Debido a que  $d^2 = 0$ , toda forma exacta es cerrada ( $B^k \subseteq Z^k$ ).*

### 3.1.2. El complejo de De Rham en $\mathbb{R}^3$

Para dotar de intuición física y geométrica a la derivada exterior, analizaremos detalladamente el caso  $U = \mathbb{R}^3$ . Aquí, las formas diferenciales unifican los operadores clásicos del cálculo vectorial: gradiente, rotacional y divergencia.

En  $\mathbb{R}^3$ , podemos establecer identificaciones directas entre formas diferenciales y campos vectoriales. Esta correspondencia geométrica es posible debido a que  $\dim \wedge^1(\mathbb{R}^3) = \dim \wedge^2(\mathbb{R}^3) = 3$ , y a que el espacio admite un sistema de coordenadas globales  $(x, y, z)$ . Sea  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  un campo vectorial suave y  $f$  una función escalar.

Grado	Forma Diferencial	Objeto Vectorial
0	$f$	Función Escalar
1	$\omega^1 = Pdx + Qdy + Rdz$	Campo Vectorial $\mathbf{F}$
2	$\omega^2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$	Campo Vectorial $\mathbf{F}$
3	$\omega^3 = f dx \wedge dy \wedge dz$	Función Escalar (Densidad)

Cuadro 3.1: Identificación entre formas y campos en  $\mathbb{R}^3$  [24].

Analicemos explícitamente cómo actúa  $d$  en cada nivel:

### Del gradiente al rotacional ( $d$ sobre 0-formas)

Si  $f$  es una 0-forma, su derivada exterior es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Bajo la identificación de la Tabla 3.1, y utilizando la métrica euclidiana para establecer el isomorfismo entre el espacio cotangente y el espacio tangente, la 1-forma  $df$  corresponde al campo vectorial gradiente  $\nabla f$ .

### Del rotacional a la divergencia ( $d$ sobre 1-formas)

Sea  $\omega^1 = Pdx + Qdy + Rdz$ . Calculamos su derivada exterior aplicando linealidad y la regla del producto. Es instructivo ver el desarrollo completo para entender cómo surgen los términos del rotacional:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= d(Pdx) + d(Qdy) + d(Rdz) \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \right). \end{aligned}$$

Recordando que  $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ , reordenamos los términos según la base canónica de 2-formas ( $dy \wedge dz$ ,  $dz \wedge dx$ ,  $dx \wedge dy$ ):

$$d\omega^1 = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz - \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Los coeficientes resultantes corresponden exactamente a las componentes del vector rotacional  $\nabla \times \mathbf{F}$ .

**De la divergencia a funciones escalares ( $d$  sobre 2-formas)**

Sea  $\omega^2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ . Calculamos su diferencial término a término:

$$\begin{aligned} d(Pdy \wedge dz) &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz \\ d(Qdz \wedge dx) &= \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx = \frac{\partial Q}{\partial y} dx \wedge dy \wedge dz \\ d(Rdx \wedge dy) &= \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \frac{\partial R}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Sumando los resultados:

$$d\omega^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

El coeficiente escalar es precisamente la divergencia  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ .

Este comportamiento se resume en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \\ \parallel & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel \\ C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

La propiedad  $d^2 = 0$  implica las identidades vectoriales clásicas  $\text{rot}(\text{grad } f) = \mathbf{0}$  y  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$ .

**3.1.3. Formas diferenciales en variedades**

Hasta ahora hemos trabajado con formas en subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Para globalizar este concepto a una variedad diferenciable  $M$ , utilizamos la construcción de fibrados vectoriales.

**El fibrado de  $k$ -covectores**

Para cada punto  $p \in M$ , el espacio tangente  $T_p M$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Podemos construir el espacio de  $k$ -covectores alternados  $\Lambda^k(T_p^* M)$ . La unión disjunta de estos espacios para todo  $p \in M$  forma un nuevo fibrado sobre  $M$ .

**Definición 3.1.6** (Fibrado de  $k$ -covectores). *Definimos la  $k$ -ésima potencia exterior del fibrado cotangente, denotada por  $\Lambda^k(T^* M)$ , como:*

$$\Lambda^k(T^* M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^* M).$$

*Este conjunto admite una estructura natural de variedad diferenciable, ver [7] para su demostración.*

### Definición global de $k$ -forma

**Definición 3.1.7** (Forma diferencial global). *Una  $k$ -forma diferencial  $\omega$  sobre una variedad  $M$  es una sección suave del fibrado  $\Lambda^k(T^*M)$ . Es decir, es una aplicación suave  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k(T^*M)$  que satisface  $\pi \circ \omega = id_M$ , donde  $\pi : \Lambda^k(T^*M) \rightarrow M$  es la proyección canónica que asigna a cada  $k$ -covector su punto base en  $M$ .*

*Localmente, para cualquier carta coordenada  $(U, \phi)$ , la restricción  $\omega|_U$  coincide con la definición dada en la Sección 3.1.1.*

### 3.1.4. El pullback y la derivada global

Una propiedad distintiva de las formas diferenciales es que son contravariantes: pueden ser transportadas “hacia atrás” mediante aplicaciones suaves.

**Definición 3.1.8** (Pullback). *Sea  $F : N \rightarrow M$  una aplicación suave y  $\omega \in \Omega^k(M)$ . El pullback de  $\omega$  por  $F$ , denotado  $F^*\omega$ , es la forma en  $N$  definida puntualmente por:*

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k))$$

para vectores  $v_i \in T_pN$ .

El pullback preserva toda la estructura algebraica (suma y producto cuña) y, crucialmente, la estructura diferencial.

**Teorema 3.1.9** (Existencia y unicidad de  $d$  global). *En cualquier variedad diferenciable  $M$ , existe un único operador lineal  $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*+1}(M)$  que extiende la diferencial de funciones y satisface  $d^2 = 0$ . Además, este operador conmuta con el pullback:*

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

*Demostración.* Supongamos primero que existen dos operadores que cumplen los axiomas enunciados. En cualquier carta coordenada local  $(U, x^1, \dots, x^n)$ , una forma arbitraria se expresa como  $\omega = \sum a_I dx^I$ . Al exigir que el operador sea lineal, cumpla la regla de Leibniz graduada y satisfaga  $d(df) = 0$  (lo cual asumiendo la linealidad implica que  $d(dx^i) = 0$ ), su acción queda inexorablemente restringida a coincidir con la fórmula estándar en coordenadas, es decir,  $d\omega = \sum da_I \wedge dx^I$ . En consecuencia, el operador está determinado de manera única a nivel local y, por extensión, global.

Aprovechando esta unicidad, podemos definir el operador  $d$  localmente en cada carta de un atlas utilizando la fórmula estándar de  $\mathbb{R}^n$ . Para asegurar que esto origina un operador global coherente, debemos verificar que en la intersección de dos cartas las definiciones no entren en conflicto. Dado que en dicha intersección ambos operadores locales satisfacen todos los axiomas requeridos, el argumento de unicidad previo garantiza que coinciden en todo punto. Así, las restricciones locales se pegan perfectamente para definir  $d$  en toda la variedad  $M$ .

Finalmente, la afirmación  $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$  se verifica primero explícitamente para funciones (0-formas) valiéndose de la regla de la cadena. A continuación, asumiendo que el pullback distribuye sobre el producto cuña ( $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$ ) y aplicando la regla de Leibniz,

el resultado se extiende rigurosamente a 1-formas exactas y, por extensión de la linealidad, a una  $k$ -forma general  $\omega$ .

Una demostración más técnica y detallada de estas construcciones puede ser encontrada en el Capítulo 19 de Tu [24].  $\square$

Esta conmutatividad es la propiedad clave que asegurará que la estructura diferencial es intrínseca y no depende del observador. Sin embargo, para completar el ciclo del cálculo en variedades, no basta con saber derivar; necesitamos una teoría de integración robusta. Las formas diferenciales no solo son objetos derivables, sino que son los objetos geométricos que pueden integrarse de manera consistente sobre una variedad, siempre y cuando esta posea una estructura adicional fundamental: la orientación.

## 3.2. Integración de formas diferenciales

### 3.2.1. Orientación en variedades

Debemos formalizar primero la definición de orientación en el álgebra lineal antes de pasar a las variedades.

#### Orientación en espacios vectoriales

Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión  $n$ . Dos bases ordenadas  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $\beta' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$  se dicen consistentemente orientadas si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo.

Es fácil verificar que la orientación consistente de bases en un espacio vectorial define una relación de equivalencia, y, por tanto, esta divide al conjunto de todas las bases ordenadas en exactamente dos clases de equivalencia. Una orientación en  $V$  es simplemente la elección de una de estas dos clases como positiva.

#### Orientación en variedades

Para una variedad diferenciable  $M$ , una orientación es una elección coherente de orientaciones para cada espacio tangente  $T_p M$ .

**Definición 3.2.1** (Atlas orientado). *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Un atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  se dice orientado si para todo par de cartas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  y  $(U_\beta, \phi_\beta)$  con intersección no vacía, el determinante del jacobiano de la función de transición es positivo en todo punto de la intersección:*

$$\det(J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})) > 0.$$

**Definición 3.2.2** (Variedad orientable). *Una variedad  $M$  se dice orientable si admite un atlas orientado maximal.*

La siguiente proposición presenta una caracterización mucho más elegante y útil de la orientación utilizando formas diferenciales.

**Proposición 3.2.3** (Caracterización por formas de volumen). *Una variedad  $M$  de dimensión  $n$  es orientable si y solo si existe una  $n$ -forma global  $\omega \in \Omega^n(M)$  que no se anula en ningún punto de  $M$ .*

*A tal forma  $\omega$  se le denomina forma de volumen (o forma de orientación). Si tal forma existe, determina una orientación puntual declarando que una base  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset T_p M$  es positiva si  $\omega_p(v_1, \dots, v_n) > 0$ .*

*Demostración.* Tal como exponen Madsen y Tornehave en [15], esta equivalencia se demuestra de manera constructiva utilizando particiones de la unidad.

Si  $M$  es orientable, admite un atlas orientado. En cada carta  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  de este atlas se puede definir una  $n$ -forma local positiva (el *pullback* de la forma de volumen estándar  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  de  $\mathbb{R}^n$ ). Utilizando una partición de la unidad subordinada al recubrimiento  $\{U_\alpha\}$ , se suman estas formas locales para construir una forma global  $\omega$ . Dado que en las intersecciones las funciones de transición preservan la orientación (tienen jacobiano positivo), los términos de la suma no se cancelan entre sí, garantizando que la forma global  $\omega$  no se anule en ningún punto.

Recíprocamente, si existe una forma global  $\omega$  que nunca se anula, podemos cubrir  $M$  con cartas coordenadas locales. Si en alguna carta el jacobiano invierte el signo con respecto a  $\omega$ , simplemente invertimos una coordenada local (por ejemplo, cambiando  $x^1$  a  $-x^1$ ). Esto fuerza a que las funciones de transición entre todas estas cartas adaptadas tengan un jacobiano estrictamente positivo, conformando así un atlas orientado para  $M$ .  $\square$

**Observación 3.2.4.** *Esta proposición es fundamental porque traduce una propiedad topológica (orientabilidad) a la existencia de un objeto analítico global (la forma de volumen). Ejemplos clásicos incluyen la esfera  $S^n$ , que es orientable y por tanto en ella existe una forma de volumen global, y la banda de Möbius, en la cual, al no ser orientable, no existe ninguna de estas formas continuas globales.*

### 3.2.2. Integración de formas

En el cálculo clásico, integramos funciones  $f(x)dx$ . En variedades, integramos  $n$ -formas. La razón fundamental es que el valor de la integral de una función cambia al cambiar de coordenadas debido al factor jacobiano, mientras que una  $n$ -forma absorbe el jacobiano en su propia regla de transformación (el *pullback*), haciendo que la integral sea un invariante geométrico [14].

#### Integral en una carta local

Supongamos primero que el soporte de una  $n$ -forma  $\omega$  está contenido enteramente en una única carta coordenada  $(U, \phi)$  con coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ . Entonces  $\omega$  tiene la forma:

$$\omega = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Definimos la integral de  $\omega$  sobre  $U$  trasladando el problema a  $\mathbb{R}^n$  mediante el difeomorfismo  $\phi$ :

$$\int_U \omega := \int_{\phi(U)} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$$

. Gracias a la fórmula de cambio de variables para la integral, esta definición es independiente de la carta elegida, siempre que usemos un atlas orientado (donde el determinante del jacobiano es positivo).

### Integración global: partición de la unidad

Para integrar una forma  $\omega$  definida sobre toda la variedad  $M$ , necesitamos una herramienta técnica para dividir la forma en componentes que quepan en cartas locales y luego sumar los resultados. Esta herramienta es la partición de la unidad, definida en la Sección 2.6.

**Definición 3.2.5** (Integral global). *Sea  $M$  una variedad orientada compacta y  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  un atlas orientado que cubre  $M$ . Sea  $\{\rho_\alpha\}$  una partición de la unidad subordinada a este cubrimiento. Para cualquier  $\omega \in \Omega^n(M)$ , definimos su integral como:*

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega.$$

Como demuestran Bott y Tu [5], esta definición está bien planteada: el valor final es independiente de la elección del atlas y de la partición de la unidad. Es un número real intrínseco asociado a la forma y a la variedad orientada.

### 3.2.3. El teorema de Stokes generalizado

El punto culminante de la teoría de integración es el teorema de Stokes. Este resultado unifica el teorema fundamental del cálculo, el teorema de Green, el de la divergencia y el Stokes clásico en una sola fórmula elegante.

Para enunciarlo, primero debemos extender nuestro concepto de variedad para permitir espacios que tienen una “frontera” bien definida, como un disco cerrado o un cilindro finito.

**Definición 3.2.6** (Semiespacio superior). *Denotamos por  $\mathbb{H}^n$  al semiespacio superior de  $\mathbb{R}^n$ , definido como:*

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}.$$

*La frontera de este espacio es el hiperplano  $\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}$ , el cual identificamos naturalmente con  $\mathbb{R}^{n-1}$ .*

Con este modelo local, podemos definir formalmente las variedades con borde.

**Definición 3.2.7** (Variedad con borde). *Una variedad con borde  $M$  de dimensión  $n$  es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable, tal que para todo punto  $p \in M$ , existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  y un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ , donde  $V$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{H}^n$ .*

*El borde de  $M$ , denotado por  $\partial M$ , es el conjunto de puntos que se mapean a  $\partial\mathbb{H}^n$  bajo alguna carta coordenada.*

Es un resultado fundamental que  $\partial M$  es, por sí misma, una variedad diferenciable de dimensión  $n-1$  (sin borde), cuya construcción técnica detallada puede ser consultada en [24, 14]. Además, si  $M$  es orientable, esta orientación induce de manera natural una orientación coherente en su borde  $\partial M$ .

Dado que esta orientación inducida es la pieza geométrica que hace funcionar al teorema de Stokes, es preciso definirla con rigor. Para cada punto  $p \in \partial M$ , el espacio tangente total  $T_p M$  contiene al espacio tangente del borde  $T_p(\partial M)$  como un subespacio de dimensión  $n-1$ . Esto divide a los vectores de  $T_p M$  que no son tangentes al borde en dos categorías: los que apuntan hacia el interior de la variedad y los que apuntan hacia el exterior.

Si tomamos un vector saliente  $N_p \in T_p M$  (es decir, que apunta hacia el exterior), declaramos que una base ordenada  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  de  $T_p(\partial M)$  tiene *orientación positiva* si la base combinada  $\{N_p, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  tiene orientación positiva en el espacio total  $T_p M$ .

En términos de formas de volumen, si la orientación de  $M$  está definida por una  $n$ -forma global  $\omega$ , esto equivale a decir que la base  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  del borde es positiva si y solo si al ser evaluada junto con el vector saliente arroja un valor estrictamente positivo:

$$\omega_p(N_p, v_1, \dots, v_{n-1}) > 0.$$

Esta convención geométrica, que matemáticamente exige colocar el vector saliente en la primera posición (conocida en la literatura estándar como la regla “*outward normal first*”), es la generalización natural a  $n$  dimensiones de la clásica *regla de la mano derecha* utilizada en el cálculo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ . Esta elección precisa es la responsable directa de los balances de signos que aparecerán en nuestra demostración analítica del teorema de Stokes al restringir formas sobre la frontera del semiespacio euclidiano  $\mathbb{H}^n$ .

**Teorema 3.2.8** (Teorema de Stokes generalizado). *Sea  $M$  una variedad orientada compacta de dimensión  $n$  con borde  $\partial M$ , y sea  $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$  una  $(n-1)$ -forma con soporte compacto. Si dotamos a  $\partial M$  de la orientación inducida, entonces:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

*Demostración.* Sea  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  un atlas orientado de  $M$  y sea  $\{\rho_\alpha\}$  una partición de la unidad subordinada a este cubrimiento. Gracias a la linealidad tanto de la integral como del operador de derivada exterior  $d$ , podemos escribir:

$$\int_M d\omega = \sum_\alpha \int_M d(\rho_\alpha \omega) \quad \text{y} \quad \int_{\partial M} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial M} \rho_\alpha \omega.$$

En consecuencia, es suficiente demostrar la igualdad para una forma  $\psi = \rho_\alpha \omega$  que posea soporte compacto contenido en una única carta coordenada  $U$ . Si  $U$  es una carta interior, es difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  y la igualdad se reduce a  $0 = 0$ ; el caso sustancial ocurre cuando  $U$  es una carta de borde, difeomorfa al semiespacio superior  $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$ .

Asumamos entonces que trabajamos en  $\mathbb{H}^n$ . Expandimos la  $(n-1)$ -forma  $\psi$  de manera única utilizando la notación estándar:

$$\psi = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

donde el sombrero indica la omisión del término. Al calcular la derivada exterior  $d\psi$ , el factor de signo  $(-1)^{i-1}$  se cancela con el signo introducido al permutar  $dx^i$  a su posición ordenada, resultando en la divergencia clásica:

$$d\psi = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Procedemos a integrar este volumen sobre  $\mathbb{H}^n$ . Aplicando el teorema de Fubini, analizamos la integral término a término:

- Para los índices  $i < n$ , integramos primero respecto a la variable  $x^i$  en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Dado que  $f_i$  tiene soporte compacto, se anula en los límites:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i = f_i(\dots, \infty, \dots) - f_i(\dots, -\infty, \dots) = 0.$$

- Para el índice  $i = n$ , la integración respecto a  $x^n$  ocurre en el intervalo  $[0, \infty)$ . Evaluando en los límites obtenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^n = f_n(\dots, \infty) - f_n(\dots, 0) = -f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0).$$

Por lo tanto, la integral de volumen se reduce a la contribución negativa del término en la frontera:

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\psi = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}.$$

Por otro lado, evaluamos la integral sobre el borde. La frontera  $\partial\mathbb{H}^n$  se identifica con el hiperplano  $x^n = 0$ . Al restringir la forma  $\psi$  a este borde (mediante el pullback de la inclusión  $\iota^*$ ), cualquier término que contenga  $dx^n$  se anula. El único término que sobrevive es el correspondiente a  $i = n$ :

$$\iota^* \psi = (-1)^{n-1} f_n(x, 0) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}.$$

Para integrar esto correctamente, debemos considerar la orientación. La orientación inducida en el borde  $\partial\mathbb{H}^n$  por el vector normal saliente  $(-\partial/\partial x^n)$  difiere de la orientación estándar de  $\mathbb{R}^{n-1}$  por un factor de  $(-1)^n$ . Al combinar ambos signos, obtenemos:

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \psi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (-1)^n (-1)^{n-1} f_n(x, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}.$$

Observando que  $(-1)^n (-1)^{n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$ , concluimos que:

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \psi = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}.$$

Al comparar los resultados de la integral de volumen y la integral de superficie, verificamos la igualdad  $\int_{\mathbb{H}^n} d\psi = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \psi$ , completando así la demostración.  $\square$

## Capítulo 4

# Cohomología de De Rham

En los capítulos precedentes hemos construido la maquinaria fundamental del cálculo en variedades: las formas diferenciales, la derivada exterior y la integración. Hemos observado que la propiedad fundamental  $d^2 = 0$  permite clasificar las formas en cerradas y exactas, y que el Teorema de Stokes implica que las formas exactas no detectan información global en variedades cerradas.

En nuestro primer capítulo de preliminares, introdujimos el lenguaje abstracto del álgebra homológica para estudiar complejos de cocadenas y funtores. Ahora, aplicaremos ese marco teórico al caso concreto de las formas diferenciales. Definiremos la cohomología de De Rham, un invariante algebraico que destila la información topológica de la variedad a partir de sus propiedades analíticas. En este capítulo demostraremos que esta cohomología es un invariante homotópico, lo que culminará en el lema de Poincaré y en la poderosa herramienta de cálculo conocida como la secuencia de Mayer-Vietoris.

### 4.1. El complejo de De Rham

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Consideremos la secuencia de espacios vectoriales de  $k$ -formas  $\Omega^k(M)$  conectados por la derivada exterior  $d$ :

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0.$$

Dado que  $d^2 = 0$ , esta secuencia constituye un complejo de cocadenas en el sentido definido en el Capítulo 1. A este objeto se le denomina el complejo de De Rham de  $M$ , denotado por  $(\Omega^*(M), d)$ .

Para que esta construcción actúe verdaderamente como un funtor, debemos establecer cómo interactúa con las aplicaciones suaves entre variedades.

**Proposición 4.1.1** (Functorialidad de la Cohomología de De Rham). *Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación suave entre variedades diferenciables. El pullback induce una aplicación lineal en los espacios de formas  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ . Dado que el pullback conmuta con la derivada exterior ( $d \circ f^* = f^* \circ d$ ), la aplicación  $f^*$  es un morfismo de complejos de cocadenas.*

Como consecuencia directa de la teoría homológica (ver Capítulo 1),  $f$  induce un homomorfismo bien definido en los grupos de cohomología, el cual refleja la naturaleza contravariante del pullback invirtiendo la dirección de la aplicación original:

$$f^* : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M), \quad [\omega] \mapsto [f^*\omega].$$

*Demostración.* Como se estableció en la teoría homológica del Capítulo 1, para verificar que el homomorfismo inducido está bien definido debemos comprobar que el pullback envía cociclos en cociclos y cobordes en cobordes, respetando así las clases de equivalencia del cociente.

Primero, si  $\omega \in \Omega^k(N)$  representa un cociclo, es decir, es una forma cerrada ( $d\omega = 0$ ), entonces su pullback cumple:

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = f^*(0) = 0.$$

Por lo tanto,  $f^*\omega$  también es una forma cerrada (es un cociclo en  $M$ ).

Segundo, si cambiamos el representante de la clase por otra forma  $\omega' = \omega + d\eta$ , donde  $\eta \in \Omega^{k-1}(N)$ , la linealidad del pullback nos da:

$$f^*\omega' = f^*(\omega + d\eta) = f^*\omega + f^*(d\eta) = f^*\omega + d(f^*\eta).$$

Dado que  $f^*\omega'$  y  $f^*\omega$  difieren únicamente por el coborde  $d(f^*\eta)$ , ambas formas representan la misma clase de cohomología en  $H_{dR}^k(M)$ . Esto prueba concluyentemente que la asignación  $f^*([\omega]) = [f^*\omega]$  es independiente de la elección del representante y, en consecuencia, está perfectamente bien definida.  $\square$

**Definición 4.1.2** (Cohomología de De Rham). *El  $k$ -ésimo grupo de cohomología de De Rham de la variedad  $M$  se define como la cohomología del complejo de De Rham:*

$$H_{dR}^k(M) := \frac{\ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))}{\text{im}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))} = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}.$$

Los elementos de  $H_{dR}^k(M)$  son clases de equivalencia  $[\omega]$ , donde dos formas cerradas  $\omega$  y  $\omega'$  son equivalentes si difieren en una forma exacta ( $\omega - \omega' = d\eta$ ).

Antes de proceder al cálculo de estos grupos, es necesario precisar una propiedad topológica de la variedad que determina la estructura del grupo en grado cero: la conexidad.

**Definición 4.1.3** (Variedad conexa). *Se dice que una variedad  $M$  es conexa si no puede escribirse como la unión de dos conjuntos abiertos no vacíos y disjuntos. Es decir, si  $M = U \cup V$  con  $U, V$  abiertos y  $U \cap V = \emptyset$ , entonces necesariamente  $U = \emptyset$  o  $V = \emptyset$ .*

Para variedades diferenciables (que son localmente conexas por caminos), esto es equivalente a decir que dados dos puntos cualesquiera  $p, q \in M$ , existe una aplicación suave  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(1) = q$ .

Con esto, podemos caracterizar el primer grupo de cohomología.

**Proposición 4.1.4** (Cohomología en grado 0). *Si  $M$  es una variedad conexa, entonces:*

$$H_{dR}^0(M) \cong \mathbb{R}.$$

*Si  $M$  no es conexa y tiene  $k$  componentes conexas, entonces  $H_{dR}^0(M) \cong \mathbb{R}^k$ .*

*Demostración.* Por definición,  $H^0(M) = Z^0(M) = \ker(d : \Omega^0 \rightarrow \Omega^1)$ . Los elementos de  $\Omega^0(M)$  son funciones suaves  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . La condición  $df = 0$  implica que, localmente en cualquier carta coordenada, todas las derivadas parciales de  $f$  son nulas.

Sabemos del cálculo elemental que una función con derivada nula en un conjunto conexo es constante. Dado que  $M$  es conexa, esta función es globalmente constante:  $f(p) = c$  para todo  $p \in M$ . El espacio de funciones constantes es isomorfo a  $\mathbb{R}$  (identificando la función con su valor  $c$ ).

Si  $M$  tiene varias componentes conexas, la función puede tomar un valor constante diferente en cada componente, generando una copia de  $\mathbb{R}$  por cada una.  $\square$

## 4.2. Invarianza homotópica

La propiedad más profunda de la cohomología de De Rham es que no solo es un invariante diferenciable (preservado por difeomorfismos), sino un invariante topológico (preservado por equivalencias de homotopía).

Para demostrar esto, necesitamos construir explícitamente una homotopía de cadenas entre los mapas inducidos. Seguiremos la construcción de Bott y Tu [5] basada en la integración a lo largo de las fibras.

**Definición 4.2.1** (Aplicaciones homotópicas). *Dos aplicaciones suaves  $f, g : M \rightarrow N$  se dicen homotópicas ( $f \sim g$ ) si existe una aplicación suave  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que:*

$$F(x, 0) = f(x) \quad y \quad F(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in M.$$

Nuestro objetivo es probar que si  $f$  y  $g$  son homotópicas, entonces los mapas inducidos en cohomología coinciden, es decir,  $f^* = g^*$ . Esto se logrará si encontramos un operador lineal  $K : \Omega^q(N) \rightarrow \Omega^{q-1}(M)$  tal que  $g^* - f^* = dK + Kd$ .

Consideremos la proyección  $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  y la inclusión a la altura  $t$ ,  $i_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  dada por  $i_t(x) = (x, t)$ . Cualquier forma diferencial  $\omega$  en  $M \times \mathbb{R}$  puede descomponerse de manera única como una suma de formas que no contienen  $dt$  y formas que sí lo contienen:

$$\omega = \pi^* \phi + (\pi^* \psi) \wedge dt,$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son familias de formas en  $M$  que dependen suavemente del parámetro  $t$ .

Para ver esta descomposición, basta con observar la estructura local de la variedad producto. En cualquier carta coordenada  $(U, x^1, \dots, x^n)$  de  $M$ , el espacio cotangente de  $U \times \mathbb{R}$  está generado por la base canónica combinada  $\{dx^1, \dots, dx^n, dt\}$ . En consecuencia, al expandir cualquier  $k$ -forma  $\omega$  en esta base, podemos agrupar algebraicamente todos los monomios que

no contienen a  $dt$  para formar la parte espacial  $\phi_t$  (una  $k$ -forma), y factorizar el término  $dt$  de los sumandos restantes para obtener  $\psi_t$  (una  $(k-1)$ -forma). Dado que esta separación entre la dirección temporal  $\mathbb{R}$  y las direcciones espaciales  $M$  depende únicamente de la estructura del producto tensorial y es independiente de los cambios de coordenadas que se hagan estrictamente sobre  $M$ , la descomposición resulta ser globalmente única y bien definida.

**Definición 4.2.2** (Operador de homotopía). *Definimos el operador lineal  $K : \Omega^q(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{q-1}(M)$  mediante la integración de la componente  $dt$ :*

$$K(\pi^*\phi + (\pi^*\psi) \wedge dt) = \int_0^1 \psi(x, t) dt.$$

*Geoméricamente, este operador integra a lo largo de la fibra del intervalo  $[0, 1]$ , reduciendo el grado de la forma en uno.*

**Lema 4.2.3** (Fórmula de homotopía). *Sean  $i_0, i_1 : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  las inclusiones en  $t = 0$  y  $t = 1$ . Para cualquier forma  $\omega \in \Omega^q(M \times \mathbb{R})$ , se cumple la identidad:*

$$d \circ K(\omega) + K \circ d(\omega) = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

*Demostración.* Caso 1:  $\omega = \pi^*\phi(x, t)$ . (Términos sin  $dt$ ). Entonces  $K\omega = 0$ , por lo que  $dK\omega = 0$ . Calculamos la diferencial total en el espacio producto:

$$d\omega = d_M(\pi^*\phi) + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}(\pi^*\phi).$$

Aplicando  $K$  a  $d\omega$ :

$$Kd\omega = K\left(dt \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -K\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \wedge dt\right) = -\int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial t} dt.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$Kd\omega = -(\phi(1) - \phi(0)) = \phi(0) - \phi(1) = i_0^*\omega - i_1^*\omega.$$

(Nota: El signo depende de la convención de orientación. Siguiendo a Bott y Tu [5], el resultado es consistente módulo signo).

Caso 2:  $\omega = (\pi^*\psi) \wedge dt$ . Entonces  $i_0^*\omega = i_1^*\omega = 0$  (pues  $dt$  restringido a una sección constante es 0). Tenemos  $K\omega = \int_0^1 \psi dt$ . Por lo tanto,  $dK\omega = \int_0^1 (d_M\psi) dt$ . Por otro lado,  $d\omega = (d_M\psi) \wedge dt$ . Luego  $Kd\omega = -\int_0^1 d_M\psi dt$ . La suma de los términos se cancela, dando 0, que coincide con  $i_1^*\omega - i_0^*\omega$ .  $\square$

**Teorema 4.2.4** (Invarianza homotópica). *Si  $f, g : M \rightarrow N$  son aplicaciones homotópicas, entonces inducen el mismo homomorfismo en cohomología:*

$$f^* = g^* : H_{dR}^*(N) \rightarrow H_{dR}^*(M).$$

*Demostración.* Sea  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  la homotopía. Entonces  $f = F \circ i_0$  y  $g = F \circ i_1$ . Definimos el operador de homotopía compuesto  $L : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  como  $L = K \circ F^*$ . Para cualquier forma cerrada  $\omega \in \Omega^k(N)$  ( $d\omega = 0$ ):

$$g^*\omega - f^*\omega = i_1^*(F^*\omega) - i_0^*(F^*\omega).$$

Aplicando el lema anterior a la forma  $\eta = F^*\omega$ :

$$g^*\omega - f^*\omega = d(K\eta) + K(d\eta) = d(K(F^*\omega)) + K(F^*(d\omega)).$$

Como  $\omega$  es cerrada,  $d\omega = 0$ , anulando el segundo término. Así:

$$g^*\omega - f^*\omega = d(L\omega).$$

La diferencia es una forma exacta, por lo que  $[g^*\omega] = [f^*\omega]$  en cohomología.  $\square$

### 4.3. El lema de Poincaré

El resultado más importante de la invarianza homotópica es la determinación de la cohomología local de cualquier variedad.

**Corolario 4.3.1** (Lema de Poincaré). *Si  $U$  es un subconjunto abierto contráctil de  $\mathbb{R}^n$  (o cualquier variedad contráctil), entonces su cohomología es trivial en grados positivos:*

$$H_{dR}^k(U) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

**Observación 4.3.2.** *Un espacio  $U$  se dice contráctil si puede deformarse continuamente hasta un solo punto dentro de sí mismo. Formalmente, la aplicación identidad es homotópica a una aplicación constante. Ejemplos clásicos incluyen  $\mathbb{R}^n$  o cualquier bola abierta convexa.*

*El lema de Poincaré establece que la topología de estos espacios es demasiado simple para soportar cohomología no trivial: no tienen "agujeros" que las formas cerradas puedan detectar, garantizando que toda forma cerrada sea exacta ( $Z^k = B^k$  para  $k > 0$ ).*

*Demostración.* Si  $U$  es contráctil, la aplicación identidad  $\text{id} : U \rightarrow U$  es homotópica a la aplicación constante  $c : U \rightarrow \{p\} \hookrightarrow U$ . Por el teorema de invarianza,  $\text{id}^*$  es igual a  $c^*$  en cohomología. Pero la cohomología de un punto es trivial para  $k > 0$  (no hay formas de grado superior). Como  $\text{id}^*$  es la identidad en cohomología, esto fuerza a que  $H^k(U) = 0$  para  $k > 0$ .  $\square$

Esto significa que localmente (en cualquier bola abierta), toda forma cerrada es exacta. La cohomología de De Rham mide, por tanto, obstrucciones puramente globales.

## 4.4. La secuencia de Mayer-Vietoris

Para calcular la cohomología de variedades que no son contráctiles, necesitamos una herramienta para reconstruir la información global a partir de la local. Esta herramienta es la secuencia de Mayer-Vietoris.

Sea  $M = U \cup V$  una variedad cubierta por dos abiertos  $U$  y  $V$ . Las inclusiones naturales inducen un diagrama de restricciones de formas:

$$\Omega^*(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{j^*} \Omega^*(U \cap V)$$

donde  $i^*(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$  y  $j^*(\alpha, \beta) = \beta|_{U \cap V} - \alpha|_{U \cap V}$ .

**Proposición 4.4.1.** *La secuencia anterior se extiende a una secuencia exacta corta de complejos:*

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{j^*} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0.$$

*Demostración.* La inyectividad de  $i^*$  es evidente. El núcleo de  $j^*$  consiste en pares que coinciden en la intersección, es decir, formas globales bien definidas, lo que corresponde a la imagen de  $i^*$ . La sobreyectividad de  $j^*$  es el paso crucial y requiere las particiones de la unidad definidas en el Capítulo 2. Sea  $\{\rho_U, \rho_V\}$  una partición subordinada al cubrimiento  $\{U, V\}$ . Dada  $\gamma \in \Omega^*(U \cap V)$ , definimos:

$$\alpha = -\rho_V \gamma \quad (\text{en } U \cap V, \text{ cero fuera})$$

$$\beta = \rho_U \gamma \quad (\text{en } U \cap V, \text{ cero fuera})$$

Entonces  $j^*(\alpha, \beta) = \rho_U \gamma - (-\rho_V \gamma) = (\rho_U + \rho_V)\gamma = \gamma$ . □

Aplicando el lema del zig-zag (Capítulo 1) a esta secuencia exacta corta, obtenemos:

**Teorema 4.4.2** (Secuencia de Mayer-Vietoris). *Para  $M = U \cup V$ , existe una secuencia exacta larga en cohomología:*

$$\dots \rightarrow H^k(M) \xrightarrow{i^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{j^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(M) \rightarrow \dots$$

## 4.5. Cálculo de la cohomología de esferas

Como aplicación fundamental, calcularemos la cohomología de la esfera  $n$ -dimensional  $S^n$ .

Caso  $S^1$ : Cubrimos el círculo con dos arcos abiertos  $U$  y  $V$  (contráctiles) cuya intersección  $U \cap V$  consiste en dos intervalos disjuntos (homotópicamente equivalente a dos puntos). La secuencia de Mayer-Vietoris para  $k = 0$ :

$$0 \rightarrow H^0(S^1) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{j^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta^*} H^1(S^1) \rightarrow 0.$$

Como  $S^1$  es conexo,  $H^0(S^1) \cong \mathbb{R}$ . Por dimensión,  $1 - 2 + 2 - \dim H^1 = 0$ , lo que implica  $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ .

Caso General  $S^n$  ( $n > 1$ ): Cubrimos  $S^n$  con dos hemisferios  $U$  y  $V$  (contráctiles). Su intersección es una banda ecuatorial homotópicamente equivalente a  $S^{n-1}$ . Para  $k > 0$ , como  $U$  y  $V$  son contráctiles,  $H^k(U) = H^k(V) = 0$ . La secuencia exacta da:

$$0 \rightarrow H^k(S^n) \xrightarrow{0} H^k(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(S^n) \rightarrow 0.$$

Esto implica el isomorfismo  $\delta^* : H^k(S^{n-1}) \cong H^{k+1}(S^n)$ . Por inducción, obtenemos el resultado clásico:

$$H_{dR}^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \text{ o } k = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este resultado confirma que la cohomología detecta la dimensión de la variedad y su “cavidad” fundamental.

## 4.6. Cohomología del plano perforado y el toro

Para ilustrar la potencia de las herramientas desarrolladas (invarianza homotópica y Mayer-Vietoris), calcularemos la cohomología de dos espacios que modelan situaciones geométricas fundamentales: el plano con un agujero y la superficie de un toro.

### 4.6.1. El plano perforado $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Consideremos el plano euclidiano al que se le ha removido el origen,  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Este espacio no es contráctil, pues tiene un “agujero” que impide colapsar las curvas que rodean el origen.

Cálculo por invarianza homotópica: La aplicación de retracción  $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$  dada por  $r(x) = x/\|x\|$  y la inclusión  $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  son equivalencias de homotopía. Por el teorema de invarianza homotópica 4.2.4, sus grupos de cohomología son isomorfos:

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong H_{dR}^k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

Un generador de  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$  es la famosa forma de ángulo:

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Un cálculo directo muestra que  $d\omega = 0$  (es cerrada). Sin embargo, no es exacta globalmente. Si lo fuera,  $\omega = df$ , entonces por el Teorema de Stokes la integral sobre el círculo unitario cerrado debería ser 0. Pero sabemos por cálculo básico que:

$$\oint_{S^1} \omega = 2\pi \neq 0.$$

Esta forma “detecta” el agujero en el origen [24].

### 4.6.2. El toro $T^2$

El toro puede visualizarse como el producto cartesiano  $S^1 \times S^1$ . Para calcular su cohomología usando Mayer-Vietoris, descomponemos el toro en dos cilindros abiertos que se solapan en sus extremos.

Sea  $T^2 = U \cup V$ , donde:

- $U$  es el toro menos un círculo meridiano (homotópicamente equivalente a un cilindro  $S^1 \times (0, 1) \simeq S^1$ ).
- $V$  es otro cilindro similar que cubre la parte faltante.

La intersección  $U \cap V$  consiste en dos bandas cilíndricas disjuntas, por lo que es homotópicamente equivalente a la unión disjunta de dos círculos:  $U \cap V \simeq S^1 \sqcup S^1$ .

Aplicamos la secuencia de Mayer-Vietoris. Sabemos por equivalencia homotópica que  $H^0(U) \cong \mathbb{R}$ ,  $H^1(U) \cong \mathbb{R}$ , al igual que para  $V$ . Como  $U \cap V$  tiene dos componentes conexas, sus grupos son  $H^0(U \cap V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  y  $H^1(U \cap V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

Analizamos la secuencia exacta larga paso a paso evaluando las dimensiones de los espacios vectoriales:

**Grado 0:** Dado que el toro  $T^2$  es un espacio conexo, sabemos directamente que:

$$H_{dR}^0(T^2) \cong \mathbb{R}.$$

El tramo inicial de la secuencia es:

$$0 \rightarrow H^0(T^2) \xrightarrow{i_0^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{j_0^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta_0} H^1(T^2) \dots$$

El mapa  $j_0^* : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  toma funciones constantes en  $U$  y  $V$ , y las evalúa en las dos componentes de la intersección mediante la diferencia  $(a, b) \mapsto (b - a, b - a)$ . La imagen de  $j_0^*$  está generada por el vector  $(1, 1)$ , por lo que  $\dim \text{im}(j_0^*) = 1$ . Por la exactitud de la secuencia,  $\ker(\delta_0) = \text{im}(j_0^*)$ . Aplicando el primer teorema de isomorfismo (que garantiza que el dominio del mapa cocientado por su núcleo es isomorfo a la imagen), deducimos que la imagen de  $\delta_0$  dentro de  $H^1(T^2)$  tiene dimensión:

$$\dim \text{im}(\delta_0) = \dim H^0(U \cap V) - \dim \ker(\delta_0) = 2 - 1 = 1.$$

**Grado 1:** Continuamos con el siguiente bloque de la secuencia:

$$\dots \xrightarrow{\delta_0} H^1(T^2) \xrightarrow{i_1^*} H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{j_1^*} H^1(U \cap V) \xrightarrow{\delta_1} H^2(T^2) \rightarrow 0$$

El mapa  $j_1^* : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  restringe las 1-formas generadoras de los cilindros  $U$  y  $V$  a los dos cilindros más pequeños de  $U \cap V$ . Algebraicamente, su comportamiento es análogo al de grado 0:  $j_1^*(x, y) = (y - x, y - x)$ . En consecuencia, la imagen de  $j_1^*$  tiene dimensión 1, y su núcleo (los pares donde  $x = y$ ) también tiene dimensión 1.

Por la exactitud en  $H^1(U) \oplus H^1(V)$ , sabemos que  $\text{im}(i_1^*) = \ker(j_1^*)$ , de modo que  $\dim \text{im}(i_1^*) = 1$ . Ahora, por el teorema del rango-nulidad aplicado a  $i_1^*$ , la dimensión total de  $H^1(T^2)$  es la

suma de la dimensión de su núcleo y su imagen. Sabiendo por exactitud que  $\ker(i_1^*) = \text{im}(\delta_0)$ , y recordando del paso anterior que esto tiene dimensión 1, concluimos:

$$\dim H^1(T^2) = \dim \text{im}(\delta_0) + \dim \text{im}(i_1^*) = 1 + 1 = 2.$$

Por lo tanto,  $H_{dR}^1(T^2) \cong \mathbb{R}^2$ . De forma explícita, si parametrizamos el toro  $T^2 = S^1 \times S^1$  mediante el producto de dos coordenadas angulares  $(\theta, \varphi)$ , estos dos generadores de la cohomología corresponden a las 1-formas  $d\theta$  y  $d\varphi$ . Es fundamental notar que, aunque los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  no son funciones globales continuas (debido a su salto en  $2\pi$ ), sus diferenciales  $d\theta$  y  $d\varphi$  sí son 1-formas suaves, globales y cerradas en  $T^2$ . La prueba analítica de que representan clases de cohomología no triviales (es decir, que no son formas exactas) se obtiene al integrarlas: la integral de  $d\theta$  sobre el ciclo de la longitud y la de  $d\varphi$  sobre el meridiano arroja  $2\pi \neq 0$ , lo cual, por el teorema de Stokes, sería imposible si fuesen derivadas de una función global.

**Grado 2:** Para el final de la secuencia, observamos el tramo:

$$H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{j_1^*} H^1(U \cap V) \xrightarrow{\delta_1} H^2(T^2) \rightarrow 0$$

Por la exactitud en el último término, el mapa de borde  $\delta_1$  es sobreyectivo, lo que implica que  $\text{im}(\delta_1) \cong H^2(T^2)$ . Por el primer teorema de isomorfismo, el dominio del mapa módulo su núcleo es isomorfo a la imagen. En otras palabras, la imagen hereda la estructura del dominio del mapa (en este caso  $H^1(U \cap V)$ ) tras cocientarlo por su núcleo:

$$H^2(T^2) \cong \frac{H^1(U \cap V)}{\ker(\delta_1)}.$$

Por la exactitud en  $H^1(U \cap V)$ , sabemos que  $\ker(\delta_1) = \text{im}(j_1^*)$ . Sabiendo que el espacio total tiene dimensión 2 y que la imagen de  $j_1^*$  tiene dimensión 1, restamos las dimensiones:

$$\dim H^2(T^2) = 2 - 1 = 1.$$

Esto nos da el resultado final  $H_{dR}^2(T^2) \cong \mathbb{R}$ , cuyo generador geométrico es la 2-forma de área total de la superficie.

En resumen, la cohomología de De Rham del toro bidimensional se expresa formalmente como:

$$H_{dR}^k(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 2 \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A diferencia de la esfera  $S^2$  (cuya cohomología se concentra exclusivamente en grados 0 y 2), el toro posee una cohomología no trivial en grado 1, reflejando topológicamente la existencia de sus túneles característicos que las 1-formas cerradas logran detectar.

Con este cálculo, cerramos nuestro estudio de la cohomología estándar. A lo largo de este capítulo hemos visto cómo la interacción entre formas cerradas y exactas logra destilar la geometría de un espacio para contar sus “agujeros” en distintas dimensiones. Sin embargo, en las variedades orientables existe una simetría oculta aún más profunda entre estas dimensiones complementarias; una estructura que solo se revela al restringir el comportamiento de las formas diferenciales en el infinito. En el siguiente capítulo exploraremos esta bella arquitectura simétrica desarrollando la cohomología con soporte compacto y demostrando el teorema de dualidad de Poincaré.

## Capítulo 5

# Dualidad de Poincaré y aplicaciones

En el capítulo anterior, la cohomología de De Rham nos permitió extraer información topológica global mediante el cálculo de formas diferenciales. Sin embargo, en las variedades orientables existe una simetría interna que relaciona directamente la información geométrica de los grados complementarios  $k$  y  $n - k$ . Para estudiar esta relación, en la primera parte de este capítulo construiremos la cohomología con soporte compacto y definiremos el emparejamiento de integración. Apoyándonos en el álgebra homológica, demostraremos que este emparejamiento es no degenerado, es decir, que para toda clase de cohomología no trivial existe una clase en el grado complementario tal que la integral de su producto cuña es distinta de cero. Esta propiedad analítica induce un isomorfismo natural con el espacio dual, estableciendo así el teorema de dualidad de Poincaré [5, 1]. Una vez establecido este teorema, la segunda parte del capítulo abordará sus principales aplicaciones geométricas y físicas. Iniciaremos estudiando la conectividad del espacio a través de los números de Betti y el teorema de Gauss-Bonnet. Posteriormente, analizaremos la matriz de intersección en dimensión cuatro y sus consecuencias topológicas. El capítulo concluirá mostrando cómo las restricciones algebraicas de esta dualidad determinan la existencia de estructuras exóticas en  $\mathbb{R}^4$ .

### 5.1. Cohomología con soporte compacto

Recordemos que el soporte de una forma diferencial  $\omega \in \Omega^k(M)$ , denotado por  $\text{supp}(\omega)$ , es la clausura del conjunto de puntos donde  $\omega$  no se anula.

**Definición 5.1.1** (Complejo con soporte compacto). *Denotamos por  $\Omega_c^k(M)$  al subespacio vectorial de  $\Omega^k(M)$  formado por todas las  $k$ -formas cuyo soporte es un subconjunto compacto de  $M$ .*

*De las propiedades de la derivada exterior se tiene que  $\text{supp}(d\omega) \subseteq \text{supp}(\omega)$ . Esta inclusión geométrica garantiza que si  $\omega$  tiene soporte compacto,  $d\omega$  también lo tiene, por lo que el operador está bien definido al restringirse a estos subespacios:*

$$d : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M).$$

*Como la relación  $d^2 = 0$  se mantiene, la secuencia  $(\Omega_c^*(M), d)$  forma un complejo de cocadenas, llamado el complejo de De Rham con soporte compacto.*

**Definición 5.1.2** (Grupos de cohomología con soporte compacto). *El  $k$ -ésimo grupo de cohomología de De Rham con soporte compacto de  $M$  se define como:*

$$H_c^k(M) = \frac{\ker(d : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M))}{\text{im}(d : \Omega_c^{k-1}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M))} = \frac{Z_c^k(M)}{B_c^k(M)}.$$

**Observación 5.1.3.** *Si la variedad  $M$  es compacta, todo subconjunto cerrado (y en particular el soporte de cualquier forma) es automáticamente compacto. Por lo tanto, para variedades compactas, no hay diferencia entre los complejos:  $\Omega_c^*(M) = \Omega^*(M)$  y  $H_c^k(M) \cong H_{dR}^k(M)$ . La diferencia e interés de esta estructura surge en variedades no compactas, como  $\mathbb{R}^n$ .*

### 5.1.1. El lema de Poincaré para soporte compacto

En el Capítulo 4, el lema de Poincaré demostró que para  $\mathbb{R}^n$ , la cohomología estándar  $H_{dR}^*(\mathbb{R}^n)$  se concentra enteramente en grado 0. Para la cohomología con soporte compacto, la situación es drásticamente diferente (invertida).

**Teorema 5.1.4** (Lema de Poincaré para soporte compacto). *La cohomología con soporte compacto del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  está dada por:*

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

*Demostración.* La demostración se realiza por inducción sobre la dimensión  $n$ , utilizando la integración a lo largo de las fibras. Escribimos  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  con coordenadas espaciales  $x$  y coordenada temporal  $t$ . Toda forma en  $\Omega_c^k(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$  se descompone unívocamente como  $\phi + \psi \wedge dt$ , donde  $\phi$  y  $\psi$  son formas en el espacio base con coeficientes que dependen de  $t$  y tienen soporte compacto global.

Definimos el operador de integración  $e_* : \Omega_c^k(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})$  evaluando a lo largo del eje real:

$$e_*(\phi + \psi \wedge dt) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) dt.$$

Dado que las formas poseen soporte compacto global, la función integranda  $\psi(x, t)$  se anula idénticamente fuera de un intervalo finito en la coordenada  $t$ , lo que garantiza que esta integral a lo largo de todo el eje real esté bien definida y siempre converja. Para construir su operador inverso  $e^*$ , elegimos una función suave de "chichón" (*bump function*)  $e(t)$  con soporte compacto en  $\mathbb{R}$  tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} e(t) dt = 1$ . Definimos el mapa de extensión  $e^* : \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow \Omega_c^k(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$  mediante la multiplicación exterior:

$$e^*(\omega) = \omega \wedge e(t) dt.$$

Es analíticamente inmediato verificar que  $e_* \circ e^*(\omega) = e_*(\omega \wedge e(t) dt) = \omega \int_{-\infty}^{\infty} e(t) dt = \omega$ , por lo que  $e_* e^*$  es la identidad. Para ver que el orden inverso  $e^* e_*$  es homotópico a la identidad en el complejo, construimos explícitamente el operador de homotopía  $K$ :

$$K(\phi + \psi \wedge dt) = \int_{-\infty}^t \psi(x, s) ds - E(t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, s) ds, \quad \text{donde } E(t) = \int_{-\infty}^t e(s) ds.$$

Primero verificamos que el operador  $K$  está bien definido y preserva el soporte compacto. Si denotamos  $A(x, t) = \int_{-\infty}^t \psi(x, s) ds$  y  $B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, s) ds$ , podemos expresar la imagen del operador como  $K(\phi + \psi \wedge dt) = A(x, t) - E(t)B(x)$ . Como  $\psi$  posee soporte compacto en  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , existe un intervalo cerrado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  tal que  $\psi(x, t) = 0$  para  $t \notin [a, b]$ . Adicionalmente, por las propiedades de la función  $e(s)$ , la integral acumulada  $E(t)$  es nula para  $t$  suficientemente negativo y vale 1 para  $t$  suficientemente positivo. Por lo tanto, si  $t$  es suficientemente negativo, tanto  $A(x, t)$  como  $E(t)$  se anulan. Si  $t$  es suficientemente positivo, tenemos que  $A(x, t) = B(x)$  y  $E(t) = 1$ , lo que reduce la expresión a  $B(x) - B(x) = 0$ . Además, el soporte en la variable espacial  $x$  está contenido en la proyección del soporte compacto de  $\psi$  sobre  $\mathbb{R}^{n-1}$ , el cual es compacto. En consecuencia, el operador  $K : \Omega_c^k(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$  está perfectamente bien definido.

Ahora verificamos explícitamente la identidad de homotopía. Denotando por  $d_x$  la derivada exterior respecto a las variables espaciales  $x$ , y sabiendo que  $\phi$  tiene grado  $k$  y  $\psi$  grado  $k-1$  en dichas variables, la derivada total se expande como:

$$d(\phi + \psi \wedge dt) = d_x \phi + \left( d_x \psi + (-1)^k \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \wedge dt.$$

Usando la notación auxiliar  $A$  y  $B$ , calculamos la derivada exterior de la imagen de  $K$ :

$$dK(\phi + \psi \wedge dt) = d_x A - E d_x B + (-1)^{k-1} (\psi - e(t)B) \wedge dt.$$

Por otro lado, al aplicar  $K$  a la derivada total obtenemos:

$$Kd(\phi + \psi \wedge dt) = \int_{-\infty}^t \left( d_x \psi + (-1)^k \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) ds - E(t) \int_{-\infty}^{\infty} \left( d_x \psi + (-1)^k \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) ds.$$

Como  $d_x$  conmuta con la integración y  $\phi$  tiene soporte compacto (por lo que su integral sobre todo  $\mathbb{R}$  es cero y su integral parcial es  $\phi(x, t)$ ), esta expresión se simplifica a:

$$Kd(\phi + \psi \wedge dt) = d_x A + (-1)^k \phi - E d_x B.$$

Para encontrar la relación de homotopía, restamos ambas expresiones. Al hacerlo, los términos espaciales se cancelan algebraicamente de forma exacta:

$$dK(\phi + \psi \wedge dt) - Kd(\phi + \psi \wedge dt) = (-1)^{k-1} \phi + (-1)^{k-1} (\psi - e(t)B) \wedge dt.$$

Factorizando  $(-1)^{k-1}$ , el lado derecho se reescribe como  $(-1)^{k-1} [\phi + \psi \wedge dt - B \wedge e(t)dt]$ . Reconociendo que  $B \wedge e(t)dt = e^* \left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, s) ds \right) = e^* e_*(\phi + \psi \wedge dt)$ , concluimos la identidad fundamental:

$$\text{id} - e^* e_* = (-1)^{k-1} (dK - Kd).$$

Esta relación demuestra que  $e^* e_*$  es homotópico a la identidad. Como ya habíamos probado que  $e_* e^* = \text{id}$ , se concluye que  $e_*$  y  $e^*$  inducen isomorfismos inversos en cohomología:  $H_c^k(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \cong H_c^{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ .

Resta precisar el caso base  $n = 1$ . En grado cero, una 0-forma cerrada con soporte compacto en  $\mathbb{R}$  es una función suave  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $df = 0$ . Esto exige que  $f$  sea constante, pero la única función constante con soporte compacto en  $\mathbb{R}$  es la función nula. Luego,  $H_c^0(\mathbb{R}) = 0$ .

En grado uno, toda 1-forma compactamente soportada  $\omega = f(t) dt \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$  es cerrada. Consideremos la aplicación lineal  $I : \Omega_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $I(f(t) dt) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ . Esta aplicación se anula sobre las formas exactas  $dg$ , ya que  $\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) dt = 0$  debido a que  $g$  se anula fuera de un compacto. Recíprocamente, si  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$ , definimos  $g(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$ . Esta función es suave y cumple  $g'(t) = f(t)$ . Además, como  $f$  tiene soporte compacto,  $g(t) = 0$  para  $t$  suficientemente negativo. Por la anulación de la integral total, también se tiene  $g(t) = 0$  para  $t$  suficientemente positivo. Por tanto,  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  y  $dg = \omega$ , lo que demuestra que  $\ker I = d\Omega_c^0(\mathbb{R})$ . Dado que  $I$  es sobreyectiva (pues existe  $e \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  con integral 1), el primer teorema de isomorfismo garantiza que:

$$H_c^1(\mathbb{R}) = \frac{\Omega_c^1(\mathbb{R})}{d\Omega_c^0(\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}.$$

Finalmente, aplicando inductivamente el isomorfismo  $H_c^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}) \cong H_c^{k-1}(\mathbb{R}^m)$ , obtenemos que:

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

□

## 5.2. Sucesión de Mayer-Vietoris para soporte compacto

Para poder calcular esta cohomología globalmente, necesitamos una herramienta de pegado análoga a la vista en el capítulo anterior. Sin embargo, al trabajar con soporte compacto, no podemos usar la operación de restricción de formas: la restricción de una forma con soporte compacto en  $U \cup V$  a un abierto  $U$  podría perder su compacidad en la frontera de  $U$ .

En su lugar, tal como exponen Arias Abad [1] y Bott [5], debemos usar la operación opuesta: la extensión por cero. Si  $\omega \in \Omega_c^*(U)$ , podemos extenderla a una forma bien definida en  $M = U \cup V$  simplemente declarando que vale cero fuera de  $U$ . Esta extensión sigue siendo suave y su soporte sigue siendo compacto.

Sea  $M = U \cup V$ . Denotemos por  $j_U : \Omega_c^*(U \cap V) \rightarrow \Omega_c^*(U)$  la extensión por cero desde la intersección hacia  $U$ , y de manera análoga definamos  $i_U : \Omega_c^*(U) \rightarrow \Omega_c^*(M)$ . Construimos la siguiente secuencia:

$$0 \longrightarrow \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{(j_U, -j_V)} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{i_U + i_V} \Omega_c^*(M) \longrightarrow 0$$

**Proposición 5.2.1.** *La secuencia anterior es una secuencia exacta corta de complejos de cocadenas.*

*Demostración.* La inyectividad del primer mapa es evidente, ya que la extensión por cero de una forma no nula sigue siendo no nula. El núcleo del segundo mapa consiste en pares  $(\alpha, \beta)$  tales que su suma extendida en  $M$  se anula; esto fuerza a que  $\alpha = -\beta$  en la intersección y cero fuera de ella, lo que corresponde exactamente a la imagen del primer mapa.

La sobreyectividad del último mapa se demuestra utilizando una partición de la unidad  $\{\rho_U, \rho_V\}$  subordinada al recubrimiento  $\{U, V\}$ . Dada  $\omega \in \Omega_c^*(M)$ , las formas  $\rho_U\omega$  y  $\rho_V\omega$  tienen soporte compacto contenido estrictamente en  $U$  y  $V$ , respectivamente. Dado que  $\omega = \rho_U\omega + \rho_V\omega$ , la forma  $\omega$  es la imagen del par  $(\rho_U\omega, \rho_V\omega)$ , demostrando la exactitud.  $\square$

Al aplicar el lema del zig-zag (Teorema 1.2.5) a esta secuencia exacta corta, obtenemos el resultado que queremos.

**Teorema 5.2.2** (Mayer-Vietoris para soporte compacto). *Para un recubrimiento abierto  $M = U \cup V$ , existe una secuencia exacta larga en cohomología con soporte compacto. Debido a que los mapas de los complejos van en dirección contraria a las inclusiones topológicas, la secuencia avanza hacia la variedad "grande":*

$$\cdots \rightarrow H_c^k(U \cap V) \rightarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \rightarrow H_c^k(M) \xrightarrow{\delta^*} H_c^{k+1}(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

### 5.3. El emparejamiento de integración

La relación profunda entre la topología global y el soporte compacto se manifiesta a través de una operación algebraica fundamental: el producto cuña seguido de la integración.

Sea  $M$  una variedad orientable de dimensión  $n$ . Consideremos una clase de cohomología  $[\omega] \in H_{dR}^k(M)$  y una clase de cohomología con soporte compacto  $[\eta] \in H_c^{n-k}(M)$ . Podemos elegir formas representantes  $\omega \in \Omega^k(M)$  y  $\eta \in \Omega_c^{n-k}(M)$ , ambas cerradas ( $d\omega = 0$  y  $d\eta = 0$ ).

El producto cuña de estas dos formas,  $\omega \wedge \eta$ , es una  $n$ -forma en  $M$ . Dado que  $\eta$  tiene soporte compacto, el producto  $\omega \wedge \eta$  también tiene soporte compacto (pues se anula dondequiera que  $\eta$  se anule). Por lo tanto, podemos integrar esta  $n$ -forma sobre toda la variedad  $M$ .

**Definición 5.3.1** (Emparejamiento de Poincaré). *Definimos el emparejamiento bilineal de integración:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_{dR}^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

mediante la fórmula:

$$\langle [\omega], [\eta] \rangle = \int_M \omega \wedge \eta.$$

**Proposición 5.3.2.** *El emparejamiento de Poincaré está bien definido; es decir, el valor de la integral no depende de las formas representantes elegidas para las clases de cohomología.*

*Demostración.* Supongamos que elegimos otro representante para la clase  $[\omega]$ , digamos  $\omega' = \omega + d\alpha$ , donde  $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ . Evaluamos la integral con este nuevo representante:

$$\int_M (\omega + d\alpha) \wedge \eta = \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d\alpha \wedge \eta.$$

Para analizar el segundo término, utilizamos la regla de Leibniz para la derivada exterior aplicada al producto  $\alpha \wedge \eta$ :

$$d(\alpha \wedge \eta) = d\alpha \wedge \eta + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d\eta.$$

Dado que  $\eta$  es una forma cerrada ( $d\eta = 0$ ), el último término desaparece, resultando en  $d\alpha \wedge \eta = d(\alpha \wedge \eta)$ . Sustituyendo esto en la integral obtenemos:

$$\int_M d\alpha \wedge \eta = \int_M d(\alpha \wedge \eta).$$

La forma  $\alpha \wedge \eta$  tiene soporte compacto, por lo que podemos aplicar el teorema de Stokes generalizado (Capítulo 3). Como la variedad no tiene frontera topológica para los efectos de esta forma con soporte compacto, la integral de su derivada exterior es cero:

$$\int_M d(\alpha \wedge \eta) = 0.$$

Por lo tanto, la integral original se conserva. Un argumento simétrico utilizando el hecho de que  $\omega$  es cerrada demuestra que sumar una forma exacta  $d\beta \in \Omega_c^{n-k}(M)$  a  $\eta$  tampoco altera el resultado.  $\square$

## 5.4. El teorema de dualidad de Poincaré

Cualquier emparejamiento bilineal  $B : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  entre dos espacios vectoriales induce de manera natural una aplicación lineal  $L : V \rightarrow W^*$ , definida por la regla de asignación  $v \mapsto B(v, \cdot)$ . Es decir, a cada elemento  $v \in V$  se le asocia el funcional lineal  $L(v) \in W^*$  que actúa sobre cualquier  $w \in W$  mediante la evaluación  $L(v)(w) = B(v, w)$ .

**Definición 5.4.1** (Mapa de dualidad). *El emparejamiento de integración induce un homomorfismo lineal natural  $D_M$ :*

$$D_M : H_{dR}^k(M) \rightarrow \left( H_c^{n-k}(M) \right)^*$$

definido por  $D_M([\omega])([\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta$ .

El teorema de dualidad de Poincaré afirma que, bajo condiciones topológicas bastante generales, el emparejamiento de integración es no degenerado (es decir, ninguna clase no nula tiene integral nula contra todas las clases del grado complementario), lo cual garantiza algebraicamente que esta aplicación de dualidad es, de hecho, un isomorfismo.

**Teorema 5.4.2** (Dualidad de Poincaré). *Sea  $M$  una variedad diferenciable orientable de dimensión  $n$  que admite un buen cubrimiento finito (es decir, puede ser cubierta por una cantidad finita de abiertos tales que todas sus intersecciones no vacías son difeomorfas a  $\mathbb{R}^n$ ). Entonces, el mapa de dualidad  $D_M$  es un isomorfismo:*

$$H_{dR}^k(M) \cong \left( H_c^{n-k}(M) \right)^*.$$

**Observación 5.4.3.** *La restricción de admitir un buen cubrimiento finito es satisfecha por todas las variedades compactas. El teorema es válido para variedades orientables generales, pero la demostración requiere argumentos adicionales de límites directos que escapan al alcance de este texto, por lo cual, siguiendo la ruta trazada por Bott y Tu [5], nos enfocaremos en variedades cubiertas por colecciones finitas.*

La demostración de este teorema es uno de los ejemplos más elegantes del uso conjunto de herramientas locales (integración) y globales (álgebra homológica). El hilo conductor será un argumento inductivo sobre un buen cubrimiento, apoyado en el lema de los cinco.

*Demostración.* La demostración se divide en tres pasos lógicos fundamentales: el caso base para el espacio euclidiano, el paso de inducción para la unión de abiertos, y la conclusión global.

**Paso 1: El caso base ( $M = \mathbb{R}^n$ ).**

Debemos verificar que  $D_{\mathbb{R}^n} : H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow (H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n))^*$  es un isomorfismo para todo  $k$ . Analizamos los grados utilizando los lemas de Poincaré demostrados previamente:

- Si  $k \neq 0$ , sabemos por el lema de Poincaré clásico que  $H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ . Su grado complementario es  $n - k \neq n$ . Por el lema de Poincaré para soporte compacto (Teorema 5.1.4),  $H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n) = 0$ . Así, el mapa de dualidad es trivialmente un isomorfismo  $0 \rightarrow 0$ .
- Si  $k = 0$ ,  $H_{dR}^0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$  (generado por la función constante 1). El grado complementario es  $n$ , y  $H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$  (generado por una  $n$ -forma de volumen  $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  donde  $\int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n = 1$ ). El emparejamiento entre la clase constante  $[1]$  y  $[\omega]$  es:

$$\langle [1], [\omega] \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \wedge \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 1 \neq 0.$$

Dado que el emparejamiento es no degenerado, la aplicación inducida  $D_{\mathbb{R}^n}$  es un isomorfismo entre estos espacios unidimensionales.

**Paso 2: El paso inductivo (unión de abiertos).**

Supongamos que el teorema de dualidad es válido para dos conjuntos abiertos  $U$  y  $V$ , así como para su intersección  $U \cap V$ . Queremos demostrar que también es válido para su unión  $U \cup V$ .

Para lograrlo, utilizaremos las dos sucesiones de Mayer-Vietoris que hemos construido. La primera es la sucesión estándar para  $U \cup V$  (Teorema 4.4.2). La segunda es la sucesión para soporte compacto (Teorema 5.2.2). Aplicamos el funtor espacio dual  $(\cdot)^*$  a esta segunda sucesión. En álgebra lineal, el dual de una secuencia exacta revierte la dirección de las flechas y preserva la exactitud. Obtenemos una nueva secuencia exacta larga que avanza en el mismo sentido que la sucesión estándar.

Ensamblamos ambas secuencias en un solo diagrama, conectándolas verticalmente mediante los mapas de dualidad:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(U \cup V) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(U \cup V) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow D_{U \cup V} & & \downarrow D_U \oplus D_V & & \downarrow D_{U \cap V} & & \downarrow D_{U \cup V} \\ \dots & \rightarrow & (H_c^{n-k}(U \cup V))^* & \rightarrow & (H_c^{n-k}(U))^* \oplus (H_c^{n-k}(V))^* & \rightarrow & (H_c^{n-k}(U \cap V))^* \xrightarrow{\delta_*^*} (H_c^{n-k-1}(U \cup V))^* \rightarrow \dots \end{array}$$

Para poder invocar el lema de los cinco, es imperativo demostrar que los cuadrados de este diagrama conmutan (salvo signo). La conmutatividad del cuadro más complejo, el que invo-

lucra a los homomorfismos de conexión  $\delta^*$  y  $\delta_*^*$ , se verifica algebraicamente desglosando las integrales.

Tomemos una clase  $[\omega] \in H^k(U \cap V)$  y una clase  $[\eta] \in H_c^{n-k-1}(U \cup V)$ . Queremos comprobar que  $\int_{U \cup V} (\delta^* \omega) \wedge \eta = \pm \int_{U \cap V} \omega \wedge (\delta_* \eta)$ . Al aplicar la definición del mapa de conexión estándar,  $\delta^* \omega$  equivale a extender  $-d(\rho_U \omega)$  por cero, donde  $\{\rho_U, \rho_V\}$  es una partición de la unidad. Como  $\eta$  es cerrada,  $d(\rho_U \omega \wedge \eta) = d(\rho_U \omega) \wedge \eta$ . Por el teorema de Stokes sobre formas de soporte compacto, la integral total de esta derivada es nula, lo que fuerza la igualdad por integración por partes:

$$\int_{U \cup V} (\delta^* \omega) \wedge \eta = \int_{U \cup V} -d(\rho_U \omega) \wedge \eta = (-1)^{k+1} \int_{U \cup V} \rho_U \omega \wedge d\eta.$$

Por el otro lado del diagrama, la definición geométrica del mapa  $\delta_*$  para soporte compacto restringe la forma  $d(\rho_U \eta)$  a  $U \cap V$ . Al integrar el emparejamiento cruzado obtenemos exactamente la misma expresión analítica. Esta coincidencia asegura que los operadores de borde preservan la dualidad integral, garantizando la conmutatividad del diagrama completo [5].

Sabiendo esto, y por nuestra hipótesis de inducción, los mapas verticales  $D_U, D_V$  (y por ende  $D_U \oplus D_V$ ), así como  $D_{U \cap V}$ , son isomorfismos. Además, el isomorfismo también aplica para el grado  $k + 1$ , por lo que el mapa vertical de la extrema derecha también es un isomorfismo. Nos encontramos exactamente ante las hipótesis del lema de los cinco (Lema 1.2.7), por lo que concluimos algebraicamente que el mapa central  $D_{U \cup V}$  debe ser también un isomorfismo.

### Paso 3: Conclusión global (buenos cubrimientos).

Por hipótesis, la variedad  $M$  admite un buen cubrimiento finito  $\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$ . Razonamos por inducción matemática sobre el número de abiertos en el cubrimiento,  $m$ .

- Si  $m = 1$ , la variedad  $M = U_1$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , y la dualidad se cumple por el Paso 1.
- Supongamos que la dualidad se cumple para cualquier variedad cubierta por  $m - 1$  abiertos.
- Sea  $M$  cubierta por  $m$  abiertos. Escribimos  $M = U \cup V$ , donde  $U = U_1 \cup \dots \cup U_{m-1}$  y  $V = U_m$ .

Notemos que  $U$  es una unión de  $m - 1$  abiertos de un buen cubrimiento, por lo que cumple la dualidad por hipótesis de inducción. El conjunto  $V$  es un solo abierto (difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ), por lo que cumple la dualidad. La intersección  $U \cap V = (U_1 \cap U_m) \cup \dots \cup (U_{m-1} \cap U_m)$  es cubierta por  $m - 1$  conjuntos que, por la definición de buen cubrimiento, también son difeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ ; por tanto,  $U \cap V$  también cumple la dualidad.

Aplicando el Paso 2 a estos conjuntos  $U$  y  $V$ , concluimos que la dualidad es válida para su unión  $M = U \cup V$ . Por el principio de inducción, el teorema queda demostrado.  $\square$

El teorema de dualidad de Poincaré representa mucho más que un isomorfismo entre espacios vectoriales; es el principio fundamental que distingue a las variedades compactas orientables de los espacios topológicos arbitrarios. En la topología general, un espacio puede poseer agujeros en diferentes dimensiones sin ninguna correlación lógica entre ellos. Sin embargo, este teorema

demuestra que las variedades diferenciables cerradas poseen un código genético estrictamente simétrico. Conocer la estructura topológica de una variedad de dimensión  $n$  hasta el grado  $k$  determina de manera unívoca y obligatoria su comportamiento en el grado complementario  $n - k$ .

Más allá de esta profunda simetría estructural, la importancia de este teorema radica en su papel como el puente definitivo entre el análisis local y la topología global. A través del emparejamiento de integración, hemos demostrado cómo operaciones puramente analíticas sobre formas diferenciales como el producto cuña y la integral logran decodificar por completo la estructura global de la variedad.

Esta traducción analítico topológica, donde las propiedades algebraicas del complejo de De Rham revelan la simetría íntima del espacio, consolida a las formas diferenciales no solo como una herramienta de cálculo, sino como la piedra angular para comprender la geometría global de las variedades.

## 5.5. Aplicaciones de la cohomología de De Rham

La cohomología de De Rham proporciona invariantes globales midiendo la existencia de formas cerradas que no son exactas. Estos invariantes, aunque de naturaleza analítica, dictan el comportamiento topológico y físico del espacio.

### 5.5.1. Los números de Betti y la conectividad del espacio

La primera y más directa aplicación de la cohomología de De Rham es la cuantificación de los “agujeros” de una variedad  $M$ . Las dimensiones de los espacios vectoriales de cohomología, denotadas como  $b_k = \dim H_{dR}^k(M)$ , se conocen como los *números de Betti*.

Conceptualmente, cada número de Betti cuenta un tipo específico de característica topológica independiente de la métrica [24]:

- $b_0$  cuenta el número de componentes conexas de la variedad.
- $b_1$  cuenta el número de “túneles” o agujeros unidimensionales (como el agujero central de un toro).
- $b_2$  cuenta el número de cavidades o vacíos tridimensionales encerrados por superficies bidimensionales (como el interior hueco de una esfera).

El cálculo formal de estos números mediante formas diferenciales permite clasificar espacios sin recurrir a triangulaciones complejas, estableciendo un puente directo entre el cálculo y la topología [14].

**Ejemplo 5.5.1.** *Retomando los cálculos de cohomología desarrollados en el Capítulo 4, podemos calcular los números de Betti, definidos como  $b_k = \dim H_{dR}^k(M)$ , para la esfera bidimensional  $S^2$  y el toro  $\mathbb{T}^2$ .*

*Para la esfera  $S^2$ , determinamos que  $H_{dR}^0(S^2) \cong \mathbb{R}$ ,  $H_{dR}^1(S^2) \cong 0$  y  $H_{dR}^2(S^2) \cong \mathbb{R}$ . Por consiguiente, sus números de Betti correspondientes son  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 0$  y  $b_2 = 1$ . Topológicamente,*

esta sucesión confirma de manera analítica que la esfera consta de una única componente conexa, carece de ciclos unidimensionales independientes, y encierra exactamente una cavidad bidimensional.

En contraste, la aplicación de la sucesión exacta de Mayer-Vietoris al toro  $\mathbb{T}^2$  demostró que  $H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}$ ,  $H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}^2$  y  $H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}$ . Sus números de Betti son, por lo tanto,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 2$  y  $b_2 = 1$ . A diferencia de la esfera, el valor de  $b_1 = 2$  captura algebraicamente la presencia de los dos ciclos unidimensionales incontractibles del espacio (visualizados geoméricamente como el meridiano y la longitud del toro).

### 5.5.2. El grado topológico y el teorema de la bola peluda

Para una variedad  $M$  compacta y orientable de dimensión  $n$ , se tiene que  $H_{dR}^n(M) \cong \mathbb{R}$ . Dada una aplicación suave  $f : M \rightarrow N$  entre dos variedades de la misma dimensión, el *pullback* de formas induce un mapa lineal  $f^* : H_{dR}^n(N) \rightarrow H_{dR}^n(M)$  (Proposición 4.1.1). Este mapa lineal es, esencialmente, la multiplicación por una constante denominada el grado topológico,  $\deg(f)$ .

El grado se calcula explícitamente eligiendo una forma de volumen  $\omega$  en  $N$ :

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega.$$

Como se demuestra en [16],  $\deg(f)$  es siempre un número entero y representa el número neto de veces que  $M$  recubre a  $N$ . Un corolario clásico de este invariante, detallado rigurosamente por Guillemin y Pollack [11], es el siguiente:

**Teorema 5.5.2** (Teorema de la bola peluda). *No existe un campo vectorial continuo y en ninguna parte nulo sobre una esfera de dimensión par,  $S^{2k}$ .*

La idea fundamental es que un campo vectorial no nulo permitiría construir una homotopía suave entre la aplicación identidad (grado 1) y la aplicación antípoda (grado  $-1$  en dimensión par), lo cual contradice la invariancia homotópica del grado calculado en la cohomología.

### 5.5.3. El teorema de Gauss-Bonnet generalizado

En el estudio de variedades riemannianas, la desviación de un espacio respecto a la planitud se cuantifica mediante su curvatura. Algebraicamente, en el lenguaje de las formas diferenciales, esta información global se codifica en la denominada matriz de curvatura  $\Omega$ , la cual está inherentemente asociada a la métrica de la variedad.

Esta matriz  $\Omega$  posee una estructura particular: sus entradas son 2-formas diferenciales ( $\Omega_{ij} \in \Omega^2(M)$ ). Geométricamente, cada entrada  $\Omega_{ij}$  actúa como un medidor infinitesimal; al evaluarla sobre un área minúscula, cuantifica exactamente cuánto “gira” o cambia de dirección un vector al ser transportado a lo largo de un circuito cerrado en esa región de la variedad.

Dado que la métrica de la variedad impone una noción estricta de distancia y ángulos, la matriz de curvatura  $\Omega$  resulta ser rígidamente antisimétrica ( $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ ). Es precisamente esta antisimetría la que permite utilizar el álgebra exterior para calcular su pfaffiano. Al evaluar este invariante algebraico (adecuadamente normalizado según la dimensión) sobre la matriz

$\Omega$ , se obtiene como resultado una nueva forma diferencial global de grado máximo,  $e(\Omega)$ , que representa a la clase de Euler.

El marco de la cohomología de De Rham asegura que  $e(\Omega)$  es siempre una forma cerrada, definiendo una clase en  $H_{dR}^n(M)$  que es completamente independiente de la métrica elegida [15]. El teorema de Gauss-Bonnet generalizado establece que la integral de esta curvatura recupera exactamente la característica de Euler topológica  $\chi(M)$ :

$$\int_M e(\Omega) = \chi(M).$$

Este resultado, expuesto a profundidad en [22], es considerado uno de los pilares de la geometría diferencial, pues demuestra que la integral global de una propiedad puramente local (la curvatura métrica) está cuantizada y rigidamente dictada por la topología del espacio.

## 5.6. Consecuencias de la dualidad de Poincaré

La simetría inducida por el isomorfismo  $H_{dR}^k(M) \cong (H_{dR}^{n-k}(M))^*$  impone restricciones profundas en las variedades orientables. Mientras que la cohomología de De Rham proporciona invariantes puramente analíticos, la dualidad de Poincaré actúa como un puente estructural, proveyendo métodos precisos para intersecar subvariedades y clasificar espacios en dimensiones específicas.

### 5.6.1. Teoría de intersección transversal

Geoméricamente, la dualidad de Poincaré traduce el problema topológico de intersecar subvariedades al cálculo algebraico de multiplicar formas diferenciales. Dada una variedad compacta y orientable  $M$  de dimensión  $n$ , a cada subvariedad cerrada y orientada  $S \subset M$  de dimensión  $k$  se le puede asociar una clase de cohomología única  $[\eta_S] \in H_{dR}^{n-k}(M)$ , conocida como su clase dual de Poincaré. Esta forma representativa  $\eta_S$  se construye de manera que su soporte se concentre en una vecindad tubular de la subvariedad  $S$  [5].

El poder analítico de esta dualidad se manifiesta al considerar dos subvariedades cerradas  $A$  y  $B$ , de dimensiones complementarias  $k$  y  $n - k$ . Geométricamente, decimos que estas subvariedades se intersecan de forma transversal si no son tangentes en ninguno de sus puntos de contacto; es decir, en cada punto de intersección  $p \in A \cap B$ , la suma directa de sus espacios tangentes genera la totalidad del espacio tangente de la variedad ambiente ( $T_p A \oplus T_p B = T_p M$ ).

Bajo esta condición geométrica, la intersección  $A \cap B$  está constituida por un conjunto discreto y finito de puntos. Al pasar al álgebra exterior, las clases duales de estas subvariedades corresponden a formas de grados  $n - k$  y  $k$ , cuyo producto cuña es una  $n$ -forma. La integral de este producto cuña:

$$\int_M \eta_A \wedge \eta_B$$

calcula exactamente la suma algebraica de los puntos de intersección entre  $A$  y  $B$ , donde cada punto aporta un valor de  $+1$  o  $-1$  dependiendo de la compatibilidad de sus orientaciones locales [11]. Este enfoque, detallado extensamente en la literatura clásica de topología diferencial [13],

permite evadir las dificultades geométricas de la teoría de perturbación, reduciendo el estudio de la transversalidad a la integración de formas diferenciales.

### 5.6.2. La característica de Euler en dimensión impar

La característica de Euler se define analíticamente como la suma alternada de los números de Betti:  $\chi(M) = \sum (-1)^k b_k$ . Por el teorema de dualidad de Poincaré, los números de Betti en dimensiones complementarias son idénticos, es decir,  $b_k = b_{n-k}$ .

En cualquier variedad compacta de dimensión impar ( $n = 2m + 1$ ), los índices  $k$  y  $n - k$  poseen siempre paridades opuestas. En consecuencia, sus respectivos términos en la suma de Euler tienen signos contrarios y se cancelan mutuamente de forma exacta. Por lo tanto, sin necesidad de recurrir a triangulaciones o métricas específicas, se concluye algebraicamente que toda variedad compacta y orientable de dimensión impar tiene una característica de Euler estrictamente nula [14].

Esta restricción algebraica tiene una consecuencia geométrica profunda a través del teorema de Poincaré-Hopf, el cual establece que la suma de los índices de las singularidades de cualquier campo vectorial en una variedad es igual a su característica de Euler [16]. Al ser  $\chi(M) = 0$  para dimensiones impares, se garantiza la existencia de al menos un campo vectorial continuo que no se anula en ninguna parte sobre cualquier variedad orientable de dimensión impar.

**Ejemplo 5.6.1** (Cancelación topológica en  $S^3$  y  $\mathbb{T}^3$ ). *Para ilustrar de manera explícita el mecanismo de cancelación algebraica impuesto por la dualidad de Poincaré en dimensiones impares, resulta instructivo examinar y contrastar el comportamiento de la esfera tridimensional  $S^3$  y del toro tridimensional  $\mathbb{T}^3$ . Ambos espacios constituyen variedades compactas, orientables y de dimensión  $n = 3$ .*

*Para la esfera tridimensional  $S^3$ , sus grupos de cohomología de De Rham determinan de manera estándar que  $H_{dR}^0(S^3) \cong \mathbb{R}$ ,  $H_{dR}^1(S^3) = 0$ ,  $H_{dR}^2(S^3) = 0$  y  $H_{dR}^3(S^3) \cong \mathbb{R}$ . Por consiguiente, sus números de Betti correspondientes son:*

$$b_0(S^3) = 1, \quad b_1(S^3) = 0, \quad b_2(S^3) = 0, \quad b_3(S^3) = 1.$$

*Al evaluar su característica de Euler, la suma alternada se desenvuelve directamente como:*

$$\chi(S^3) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0.$$

*Si bien en la esfera el cálculo resulta directo debido a la trivialidad de los grupos intermedios, el verdadero poder estructural de la dualidad se manifiesta en el toro tridimensional  $\mathbb{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ . Para hallar su cohomología de manera explícita, se puede aplicar el teorema de Künneth, la cual implica que el polinomio de Poincaré de un espacio producto (cuyos coeficientes son los números de Betti) es el producto de los polinomios de sus factores (una demostración de este teorema puede ser encontrada en [5]). Sabiendo que los números de Betti de la circunferencia  $S^1$  son  $b_0 = 1$  y  $b_1 = 1$ , su polinomio asociado es  $P_{S^1}(t) = 1 + t$ . En consecuencia, para el toro tridimensional obtenemos:*

$$P_{\mathbb{T}^3}(t) = (P_{S^1}(t))^3 = (1 + t)^3 = 1 + 3t + 3t^2 + t^3.$$

Los coeficientes de la expansión binomial dictan directamente que sus números de Betti son:

$$b_0(\mathbb{T}^3) = 1, \quad b_1(\mathbb{T}^3) = 3, \quad b_2(\mathbb{T}^3) = 3, \quad b_3(\mathbb{T}^3) = 1.$$

Al calcular su invariante global, la alternancia de signos agrupa los términos simétricos de la siguiente manera:

$$\chi(\mathbb{T}^3) = (b_0 - b_3) + (-b_1 + b_2) = (1 - 1) + (-3 + 3) = 0.$$

Este contraste resulta matemáticamente profundo. Mientras que en  $S^3$  la anulación está ligada a la vacuidad de la cohomología intermedia, en  $\mathbb{T}^3$  el espacio posee una topología altamente no trivial ( $b_1 = b_2 = 3$ ). No obstante, la rigidez de la dualidad obliga a que las dimensiones complementarias coincidan perfectamente ( $b_k = b_{3-k}$ ), garantizando de forma idéntica que los términos se aniquilen por pares. Este comportamiento numérico ejemplifica con precisión por qué la característica de Euler se anula invariablemente en dimensión impar, independientemente de la complejidad estructural de los grupos de De Rham asociados.

### 5.6.3. La signatura y la matriz de intersección en dimensión 4

En el estudio de variedades compactas y orientables de dimensión par  $n = 2k$ , el grupo de cohomología de dimensión media  $H_{dR}^k(M)$  adquiere una estructura algebraica particular. El caso de la dimensión cuatro ( $n = 4, k = 2$ ) resulta de excepcional importancia. Geométricamente, esto obedece a que dos superficies bidimensionales en un espacio de cuatro dimensiones se intersecan genéricamente en un conjunto discreto de puntos. La dualidad de Poincaré formaliza esta noción geométrica induciendo una forma bilineal sobre el espacio  $H_{dR}^2(M)$ , definida mediante el producto cuña:

$$Q([\alpha], [\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta.$$

Dado que el producto cuña de dos 2-formas es conmutativo ( $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$ ), la forma bilineal  $Q$ , conocida como la forma de intersección, es estrictamente simétrica. Adicionalmente, el isomorfismo de Poincaré asegura que esta forma es no degenerada. Si se restringe el estudio a la cohomología con coeficientes enteros, esta propiedad implica que la matriz asociada a  $Q$  tiene un determinante igual a  $\pm 1$ , constituyendo lo que se denomina una matriz unimodular [17].

Al diagonalizar esta matriz simétrica sobre los números reales, el teorema de Sylvester garantiza que la cantidad de autovalores positivos (denotada por  $b^+$ ) y la cantidad de autovalores negativos (denotada por  $b^-$ ) son independientes de la base elegida. Estos enteros representan, respectivamente, las dimensiones máximas de los subespacios donde la forma de intersección  $Q$  es definida positiva y definida negativa. El invariante topológico definido como la diferencia

$$\sigma(M) = b^+ - b^-$$

se conoce como la signatura de la variedad.

La importancia de la signatura y de la matriz de intersección en el estudio de la cuarta dimensión radica en que la matriz  $Q$  encapsula casi la totalidad de la información estructural

de los espacios simplemente conexos. El teorema de Freedman establece que, en la categoría topológica continua, la forma de intersección determina a la variedad de manera única salvo homeomorfismo [9]. Más aún, la signatura  $\sigma(M)$  es un invariante bajo cobordismo orientado y, mediante el teorema de Hirzebruch, se ancla firmemente a la estructura diferencial al poder calcularse a partir de las clases de Pontryagin de la variedad.

La peculiaridad geométrica de esta matriz de intersección trasciende la abstracción matemática y guarda una correspondencia profunda con la física teórica. En la década de 1980, S. Donaldson revolucionó la topología al estudiar la matriz  $Q$  utilizando la teoría de calibre. Específicamente, aplicó las ecuaciones de Yang-Mills, que constituyen el modelo matemático de las fuerzas nucleares en el modelo estándar, sobre variedades de dimensión cuatro. Al analizar el espacio de soluciones de estas ecuaciones, Donaldson demostró que la categoría diferenciable impone restricciones analíticas severas: la mayoría de las matrices unimodulares que definen variedades topológicas no admiten una estructura suave [8].

Este vínculo entre la topología diferencial y la física cuántica fue profundizado por E. Witten y N. Seiberg. Utilizando el formalismo de la supersimetría, introdujeron las ecuaciones de Seiberg-Witten, cuyos invariantes topológicos permitieron clasificar estas variedades con gran eficacia y consolidaron la rama de la topología cuántica [26].

Una de las consecuencias matemáticas más profundas de la interacción entre la forma de intersección de Poincaré y la teoría de calibre es el descubrimiento de que  $\mathbb{R}^4$  es el único espacio euclidiano que admite una familia no numerable de estructuras diferenciables exóticas, un resultado formalizado a través de los trabajos de Taubes y Gompf [10]. Desde la perspectiva de la relatividad general, que modela el espacio-tiempo como una variedad suave cuatridimensional, la existencia de estos atlas incompatibles plantea implicaciones físicas directas. Como se discute exhaustivamente en la literatura de topología gravitacional [2], las variaciones en la estructura suave del espacio-tiempo podrían actuar como fuentes intrínsecas de curvatura geométrica, alterando las predicciones cosmológicas clásicas sin necesidad de introducir nueva materia.

Diferentes modelos en cosmología teórica sugieren que las variaciones en el cálculo diferencial dictadas por una estructura suave exótica actuarían como fuentes localizadas de curvatura en el espacio-tiempo, incluso en ausencia de masa tradicional. Esto proporciona un marco puramente topológico para explorar fenómenos no resueltos de la física contemporánea, tales como la distribución de la materia oscura o las anomalías gravitacionales, demostrando que la cohomología de De Rham y la dualidad de Poincaré conforman la arquitectura subyacente del universo físico.

#### 5.6.4. Estructuras exóticas y la ruptura topológica-suave

La matriz de intersección  $Q$  derivada de la dualidad de Poincaré condujo al descubrimiento de uno de los fenómenos más anómalos de las matemáticas modernas: la discrepancia radical entre espacios continuos y espacios diferenciables en dimensión 4.

En 1982, M. Freedman demostró que, dentro de la categoría topológica (espacios continuos), prácticamente cualquier matriz unimodular simétrica define de manera única una variedad de dimensión 4 simplemente conexa [9]. Sin embargo, en 1983, S. Donaldson aplicó la teoría

de ecuaciones diferenciales de calibre (basadas en la cohomología de formas) para estudiar la categoría suave. Donaldson probó que si una variedad de dimensión 4 admite una estructura diferenciable y su matriz de intersección es definida positiva, entonces dicha matriz debe ser diagonalizable sobre los enteros [8].

Dado que existen numerosas matrices unimodulares definidas positivas que no son diagonalizables (como la famosa matriz de la red  $E_8$ ), la intersección de los teoremas de Freedman y Donaldson demuestra la existencia de variedades topológicas en dimensión 4 que no admiten ningún atlas diferenciable [10].

Como corolario de esta interacción entre el álgebra de formas diferenciales y la topología, se probó que  $\mathbb{R}^4$  es el único espacio euclidiano en todas las matemáticas que admite una cantidad no numerable de estructuras diferenciables exóticas. Es decir, existen infinitas formas topológicamente idénticas al espacio cuatridimensional estándar en las cuales el cálculo diferencial es matemáticamente incompatible con el habitual, un fenómeno enteramente dictado por las restricciones de la dualidad de Poincaré.

# Bibliografía

- [1] Camilo Arias Abad. Introducción a la topología y geometría diferencial. Notas de clase, 2019. Universidad Nacional de Colombia disponible en <https://sites.google.com/a/unal.edu.co/camilo-arias-abad/academics>.
- [2] Torsten Asselmeyer-Maluga and Carl H. Brans. *Exotic Smoothness and Physics: Differential Topology and Spacetime Models*. World Scientific, Singapore, 2007.
- [3] David Bachman. *A Geometric Approach to Differential Forms*. Birkhäuser, New York, 2nd edition, 2012.
- [4] William M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, San Diego, California, revised second edition, 2003.
- [5] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1982.
- [6] William C. Brown. *A Second Course in Linear Algebra*. Wiley-Interscience, New York, 1988.
- [7] Manfredo P. do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
- [8] Simon K. Donaldson and Peter B. Kronheimer. *The Geometry of Four-Manifolds*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [9] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17(3), 1982.
- [10] Robert E. Gompf and András I. Stipsicz. *4-Manifolds and Kirby Calculus*, volume 20 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [11] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential Topology*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [12] Patrick Hafkenschied. De rham cohomology of smooth manifolds, 2013.
- [13] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1976.
- [14] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, New York, 2nd edition, 2012.

- [15] Ib Madsen and Jørgen Tornehave. *From Calculus to Cohomology: De Rham Cohomology and Characteristic Classes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [16] John W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [17] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes*, volume 76 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974.
- [18] Francisco Montalvo Durán. Apuntes de Análisis de Varias Variables: Capítulo 9. Universidad de Extremadura, Departamento de Matemáticas, n.d. Disponible en: [https://matematicas.unex.es/~montalvo/Analisis\\_Varias\\_Variables/apuntes/cap09.pdf](https://matematicas.unex.es/~montalvo/Analisis_Varias_Variables/apuntes/cap09.pdf).
- [19] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, second edition, 2000.
- [20] Henri Poincaré. *Papers on Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements*. 2009. Traducción al inglés (2009). El artículo original *Analysis Situs* fue publicado en 1895 en el Journal de l'École Polytechnique.
- [21] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Universitext. Springer, New York, 2nd edition, 2009.
- [22] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume One*. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, third edition, 1999.
- [23] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume Two*. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, third edition, 1999.
- [24] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer, second edition, 2011.
- [25] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [26] Edward Witten. Monopoles and four-manifolds. *Mathematical Research Letters*, 1(6):769–796, 1994.
- [27] Kentaro Yano and E. M. Patterson. Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundle. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 19(1):91–113, 1967.