

Universidad del Rosario
Econometría Básica
Taller 2 - Mínimos Cuadrados Ordinarios

Fecha de entrega: 1 de Septiembre

Ejercicios Teóricos

1. Suponga el siguiente modelo de regresión lineal con intercepto de la forma: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$. Donde y_i, x_i son variables observables; β_0, β_1 son parametros poblacionales desconocidos y u_i es una perturbación aleatoria no observable.

La ecuación de regresión de mínimos cuadrados ordinarios viene dada por:

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{u}_i \quad \text{donde} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- (a) Enumere y describa los supuestos del modelo de mínimos cuadrados ordinarios.
 - (b) Demuestre que $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$
 - (c) Demuestre que el estimador se puede expresar como una función lineal de los valores muestrales de y_i
 - (d) Pruebe que el estimador de la pendiente es un estimador insesgado
 - (e) Bajo el supuesto de normalidad de los errores, determine $var(\hat{\beta}_1)$
2. Sea x_1, \dots, x_n una muestra obtenida de una población donde x sigue una distribución normal con media μ y varianza σ^2 . Considere los siguientes estimadores de la media poblacional:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{x} \tag{1}$$

$$\hat{\mu}_2 = x_1 \tag{2}$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2 \cdot (n-1)}(x_2 + \dots + x_n) \tag{3}$$

- (a) ¿Cuál de estos estimadores es insesgado?
- (b) Encuentre la eficiencia relativa de $\hat{\mu}_1$ con relación a $\hat{\mu}_2$, de $\hat{\mu}_1$ con relación a $\hat{\mu}_3$, y de $\hat{\mu}_2$ con relación a $\hat{\mu}_3$. ¿Qué puede concluir de estas comparaciones?
- (c) ¿Cuál de estos estimadores es consistente?
- (d) ¿Es el supuesto de normalidad necesario?

3. Demuestre la siguiente ecuación $TSS = ESS + RSS$ teniendo en cuenta las propiedades de los estimadores
 - (a) ¿Qué supuesto uso para hacer la demostración? ¿Cuál es la intuición de dicho supuesto?
 - (b) Reescriba la ecuación en términos de la bondad de ajuste

Ejercicio Interpretación

4. Ejercicio 2.6 de Wooldridge (sobre precios de vivienda y distancia a un incinerador de basura).

Ejercicio Práctico

El **Capital Asset Pricing Model** valora un activo financiero mediante una relación entre rendimientos esperados y riesgo. Para el activo i , considera el valor esperado del rendimiento del activo $E(r_i)$ como función del rendimiento de un activo libre de riesgo¹ r_f y el exceso de rentabilidad del portafolio de mercado² $(E(r_m) - r_f)$. El modelo tiene en cuenta la sensibilidad del activo al riesgo de mercado, dado por el **beta** (medida del riesgo no diversificable) de la siguiente expresión

$$E(r_i) = r_f + \beta_{im}(E(r_m) - r_f) \quad (4)$$

donde se define $\beta_i = \frac{Cov(\tilde{r}_i, \tilde{r}_m)}{Var(\tilde{r}_m)}$. (Nótese que la ecuación 4 no es un modelo econométrico, sino una expresión derivada de un modelo de optimización de portafolios que no discutimos aquí).

- (a) ¿Cuál es el rendimiento del activo i si $\beta=0$?, ¿cuál es el rendimiento del activo i si $\beta=1$? (1 párrafo)
- (b) ¿Qué valores de β amortiguan la tendencia de un mercado?, ¿qué valores amplifican la tendencia? (1 párrafo)
- (c) ¿Es el **beta** calculado un efecto causal?
- (d) En la práctica, el **beta** se estima con los excesos de rentabilidad de un activo i con los excesos de rentabilidad de un portafolio de mercado m .
 - i. Escriba el modelo de regresión lineal requerido para estimar **beta**
 - ii. Descargue los archivos *XOM.csv* y *GSPC.csv*, y construya con ellos una base de datos que incluya la siguientes variables: **date**, **XOM**, **GSPC**. Presente una descripción de XOM y GSPC, incluyendo estadísticas y gráficos contra el tiempo.

¹Bonos de deuda soberana, etc. No es que no tenga riesgo, sino que es la opción menos riesgosa.

²Un índice como el S&P500.

- iii. Calcule el exceso de rentabilidad para la acción de Exxon Mobil (XOM), teniendo como activo libre de riesgo una rentabilidad de $r_f = 0.01$
- iv. Calcule el exceso de rentabilidad del portafolio de mercado dada por el índice S&P500 (GSPC)
- v. Calcule el beta para Exxon Mobil e interprételo

TIPS: Para calcular un retorno en R puede utilizar la función **shift** del paquete **data.table**. Ejemplo, para crear los retornos de la variable **XOM** que está en el *dataFrame* **mergedData**:

```
library(data.table)
XOM =mergedData$XOM
LXOM =shift(mergedData$XOM, 1)

rentXOM=(XOM-LXOM)/LXOM
```

Para correr una regresión lineal, el comando base en R es **lm**.

```
lm(rentXOMad~rentGSPCad)
```
