



Universidad del
Rosario

Escuela de Ingeniería,
Ciencia y Tecnología

Modelación de precios por medio del juego de las minorías

Presentado para obtener el título de

MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Edwin Jair López López

Sergio Gaitán Rubio

Dirección:

Edgar José Andrade Lotero

Universidad del Rosario

Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Maestría en Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Español

El movimiento geométrico browniano es un modelo tradicionalmente usado para describir el comportamiento del precio de un activo. A pesar de su popularidad, el modelo tiene limitaciones; por ejemplo, la modelación de burbujas financieras. Por ello, el presente proyecto explora la modelación del comportamiento del precio de un activo por medio de modelos basados en agentes, todo esto con el fin de proponer metodologías alternativas que permitan capturar las características de los precios durante una burbuja financiera. Así las cosas, en el proyecto se implementaron dos modelos de precios (basados en variaciones del *minority game*), para luego contrastar sus características frente al modelo tradicional y contra datos reales de burbujas financieras. Los resultados demuestran que la modelación por medio de agentes permite simular circunstancias de mercado que se asemejan más a las de una burbuja financiera que el modelo browniano.

Inglés

Geometric Brownian motion is a traditionally used model to describe the behavior of an asset's price. Despite its popularity, the model has limitations; for example, in modeling financial bubbles. Therefore, this project explores the modeling of an asset's price behavior through agent-based models, all with the aim of proposing alternative methodologies that can capture the characteristics of prices during a financial bubble. Consequently, in this project, two price models (based on variations of the *minority game*) were implemented, and their characteristics were then contrasted against the traditional model and real data from financial bubbles. The results show that agent-based modeling allows for the simulation of market circumstances that more closely resemble those of a financial bubble than the Brownian model.

TABLA DE CONTENIDO

iii

Capítulo 1 INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 2 OBJETIVOS	3
2.1 Objetivo general.....	3
2.2 Objetivos específicos	3
Capítulo 3 PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN.....	4
Capítulo 4 MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE.....	8
Capítulo 5 METODOLOGÍA	11
5.1 Simulación de modelos.....	11
5.3 Recuperación de parámetros.....	13
5.4 Recuperación de modelo.....	13
5.5 Ajuste a datos reales y comparación de modelos.....	13
Capítulo 6 RESULTADOS Y DISCUSIÓN	16
6.1 Simulación de modelos.....	16
6.2 Recuperación de parámetros.....	26
6.3 Recuperación de modelos	28
6.4 Ajuste a datos reales y comparación de modelos.....	28
Capítulo 7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	35
REFERENCIAS.....	37

LISTA DE TABLAS

iv

Tabla 1. Volatilidad diaria de las acciones contra las que se evalúan los modelos	14
Tabla 2. Resultados recuperación de parámetros para movimiento geométrico browniano (100 observaciones).....	26
Tabla 3. Resultados recuperación de parámetros para MGLambda (100 observaciones y se fija $\lambda = 1$).	27
Tabla 4. Resultados recuperación de parámetros para MGDO (100 observaciones).	27
Tabla 5. Resultados recuperación de modelos	28
Tabla 6. Modelo de mejor ajuste para precios en condición de burbuja financiera o “normales”	30

Figura 1. Distintas simulaciones de la evolución del precio de una acción utilizando el movimiento geométrico browniano. Elaboración propia con parámetros $\mu = 0, \sigma = 2\%$ 5

Figura 2. Precios históricos de la acción de Gamestop entre el 1 de enero de 2020 y el 1 de marzo de 2021. (Precios tomados de Yahoo Finance)..... 6

Figura 3. Metodología para desarrollar, evaluar y seleccionar los modelos propuestos 11

Figura 4. Evolución del precio de acciones a utilizar en la evaluación de los modelos. (Precios tomados de Yahoo Finance)..... 14

Figura 5. Simulaciones con modelo de movimiento geométrico browniano y distintos valores para μ ($\sigma = 2\%$). (Datos generados)..... 16

Figura 6. Simulaciones con modelo de movimiento geométrico browniano y distintos valores para σ ($\mu = 0$). (Datos generados)..... 17

Figura 7. Simulaciones con modelo MGLambda y distintos valores para N ($S = 2, M = 6, \lambda = 3N$). (Datos generados)..... 18

Figura 8. Simulaciones con modelo MGLambda y distintos valores de S ($M = 2, N = 101, \lambda = 3N$)...... 19

Figura 9. Simulaciones con modelo MGLambda y distintos valores de M ($S = 2, N = 101, \lambda = 3N$). (Datos generados)..... 20

Figura 10. Simulaciones con modelo MGLambda y distintos valores de λ ($N = 101, M = 6, S = 2$). (Datos generados)..... 21

Figura 11. Simulaciones con modelo MGDO y distintos valores de N ($S = 2, M = 6$). (Datos generados)..... 22

Figura 12. Simulaciones con modelo MGDO y distintos valores de S ($N = 101, M = 6$). (Datos generados)..... 23

Figura 13. Simulaciones con modelo MGDO y distintos valores de M ($N = 101, S = 2$)..... 24

Figura 14. Volatilidad promedio del modelo MGLambda. (Datos generados). 25

Figura 15. Volatilidad promedio del modelo MGDO. (Datos generados). 25

Figura 16. Partición del precio de la acción de Gamestop y divergencia KL. (Precio de la acción recuperado de Yahoo Finance). 29

Figura 17. Partición del precio de la acción de Telefónica y divergencia KL. (Precio de la acción recuperado de Yahoo Finance). 30

Figura 18. Simulaciones a partir de los parámetros de ajuste a datos reales. (Datos generados). 31

Figura 19. Precios generados con MGDO. Parámetros recuperados del ajuste a Gamestop, ventana 4 ($N = 339, M = 2, S = 2$). 32

Figura 20. Precios generados con MGLambda. Parámetros recuperados del ajuste a Gamestop, ventana 1 ($N = 447, M = 3, S = 2$). 33

Figura 21. Precios generados con el modelo browniano. Parámetros recuperados del ajuste a Telefónica, ventana 1 ($\mu = -0.01, \sigma = 0.16$). 33

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

A principios de 2021, los mercados se vieron sorprendidos por el crecimiento acelerado de la acción de *Gamestop* y, unos días más tardes, una caída igual de dramática. Un año después los mercados se volvieron a sorprender cuando el precio del trigo, a raíz de la invasión de Rusia a Ucrania, llegó a sus altos históricos. Sin embargo, al transcurrir unos meses, el precio ya había regresado a sus niveles normales. En ambos casos, el precio estuvo envuelto en una coyuntura de mercado que involucraba a varios agentes de mercado comprando o vendiendo, quizás no de manera racional, sino más bien influidos por un ciclo de refuerzo: en *Gamestop*, los agentes querían maximizar su utilidad vía un *short squeeze*; en el trigo, hubo pánico de que hubiese escases del grano a raíz del conflicto.

Considerando los ejemplos anteriores, ¿cuál es la manera adecuada de modelar el precio de un activo financiero? Tradicionalmente, el modelo predilecto es el movimiento geométrico browniano, el cual tiene bondades que han permitido que se vuelva un estándar en la industria. Sin embargo, este modelo puede no ser el más apropiado para describir precios que se encuentren en coyunturas de mercado como la de *Gamestop* a principios de 2021 y el trigo a principios de 2022.

Así las cosas, en el presente proyecto se exploran dos modelos basados en el juego de la minoría y se evalúa si son más apropiados que el movimiento geométrico browniano para modelar precios en una coyuntura de burbuja financiera. Para este fin, se debe primero hacer un ejercicio de recuperación de parámetros y de modelos. Esto es, generar simulaciones de datos utilizando algún modelo y conjunto de parámetros, y luego evaluar si es posible identificarlos únicamente a partir de los datos simulados. En segundo lugar, se evalúa el ajuste de los modelos contra observaciones reales, tanto de condiciones normales de mercado como de burbuja. Esto para definir si, en efecto, los modelos basados en agentes pueden ser más apropiados para describir el comportamiento del precio de un activo financiero, particularmente si se trata de una burbuja financiera.

Al final, se demuestra que los modelos basados en agentes son mejores que el modelo browniano representando el movimiento de un precio en una instancia de burbuja financiera. Esto se logra vía un análisis cualitativo sobre las características de los caminos

simulados y un análisis cuantitativo a nivel de la bondad de ajuste de los datos generados frente a datos reales.

Capítulo 2

OBJETIVOS

2.1 Objetivo general

Evaluar distintos modelos basados en agentes para explicar el comportamiento de un precio ante una instancia de burbuja financiera.

2.2 Objetivos específicos

1. Explorar los modelos de agentes, identificando principales características y diferencias.
2. Implementar los modelos y simular los experimentos.
3. Ajustar los modelos contra observaciones reales.
4. Seleccionar el modelo más ajustado, simular y comparar el comportamiento cualitativo con datos históricos.

Capítulo 3

PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN

En el artículo *The pricing of Options and Corporate Liabilities* (Black & Scholes, 1973), Fischer Black y Myron Scholes derivan una fórmula para valorar opción europea; un derivado financiero que otorga al tenedor el derecho, mas no el deber, a comprar o vender un activo a un precio determinado en una fecha acordada. Este artículo tuvo un alto impacto en el mundo financiero pues, no solo proporciona una fórmula que permite valorar las opciones, sino que ayudó a popularizar la modelación del comportamiento de una acción por medio del movimiento geométrico browniano. En el libro *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* (Glasserman, 2003), Glasserman asegura que es el modelo más fundamental del valor de un activo financiero.

En el movimiento geométrico browniano, el precio de una acción se describe como una variable aleatoria con distribución Lognormal. Es decir, sea P_t el precio de una acción arbitraria en el momento t . Entonces,

$$\text{Ln} \left(\frac{P_{t+1}}{P_t} \right) \sim N(\mu, \sigma).$$

Donde μ se conoce como el retorno esperado de la acción y σ como la volatilidad de la acción. Además, el modelo toma como supuestos que los cambios son independientes y son idénticamente distribuidos. En la Figura 1 se muestran simulaciones de la evolución del precio de una acción utilizando el movimiento geométrico browniano.

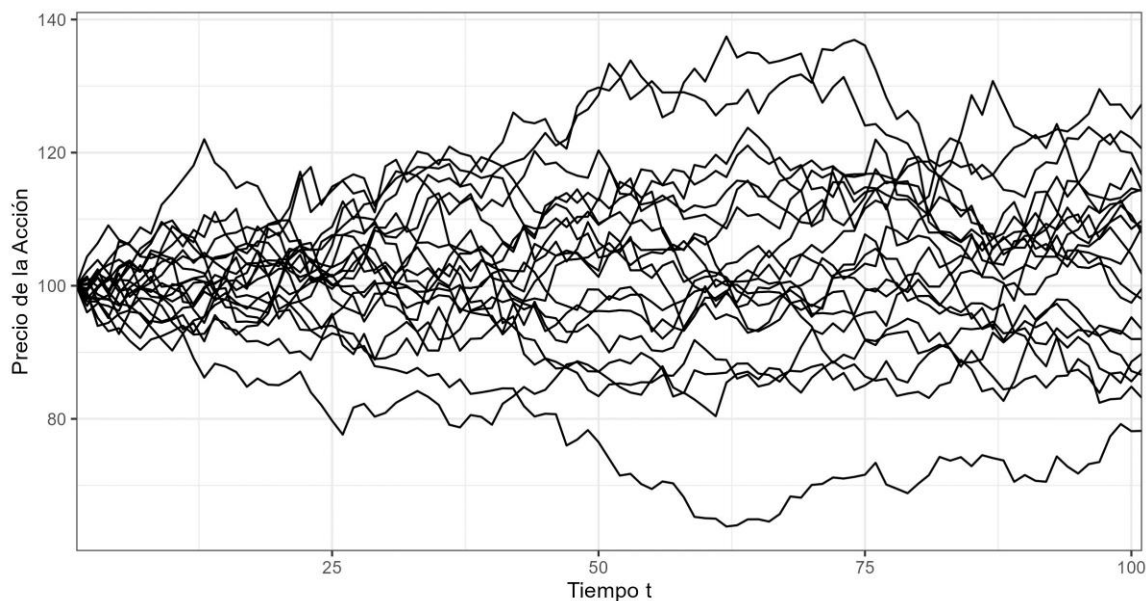


Figura 1. Distintas simulaciones de la evolución del precio de una acción utilizando el movimiento geométrico browniano. Elaboración propia con parámetros $\mu = 0$, $\sigma = 2\%$

Ahora, si bien el movimiento geométrico browniano es ampliamente utilizado en la modelación financiera, es necesario reconocer que el modelo no es el más adecuado para simular instancias de burbujas financieras. Para entender esto, es necesario primero definir qué es una burbuja financiera.

En el caso del mercado de acciones, una burbuja financiera es un término que aplica al incremento del precio de una o varias acciones de una industria o sector. Una burbuja ocurre cuando los especuladores notan el incremento sustancial en el valor de una acción y deciden comprar más, previendo que el precio seguirá subiendo. Este ciclo de refuerzo ocasiona que las acciones resulten sobrevaloradas, generando una gran diferencia entre el precio de la acción y su verdadero valor (Girdzijauskas, y otros, 2010). En la Figura 2 se muestra un ejemplo de burbuja financiera, la evolución del precio de la acción de *GameStop*, una compañía estadounidense que vende principalmente videojuegos en tiendas físicas.

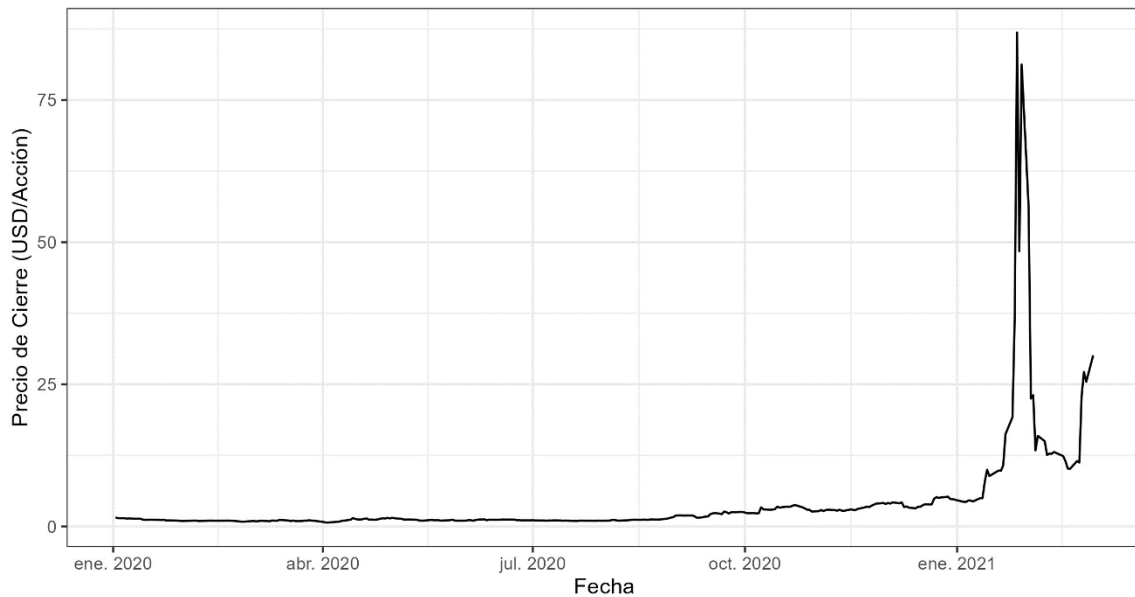


Figura 2. Precios históricos de la acción de Gamestop entre el 1 de enero de 2020 y el 1 de marzo de 2021. (Precios tomados de Yahoo Finance)

En ese orden de ideas, dado que una burbuja financiera ocurre por medio de un ciclo de refuerzo, donde los especuladores compran acciones previendo que el precio va a subir, lo cual genera que el precio suba e incentive más compras, se vuelven evidentes dos limitaciones del movimiento geométrico browniano a la hora de replicar estos escenarios. Primero, el movimiento geométrico browniano asume independencia de los cambios. En el caso de una burbuja, el supuesto no se cumple, pues el incremento en el precio motiva a los especuladores a comprar más acciones. Segundo, el modelo browniano asume volatilidad constante, mientras que en una burbuja la acción puede tener un incremento de volatilidad mientras sube y vuelve a caer el precio.

Así las cosas, entendiendo que el movimiento geométrico browniano no es el modelo más adecuado para describir el comportamiento del precio de un activo financiero durante una instancia de burbuja financiera, se vuelve necesario proponer modelos que sí capturen dichas características. En ese orden de ideas, en el presente proyecto se implementan y evalúan alternativas inspiradas en la modelación basada en agentes; más en

detalle, se exploran variaciones al *minority game* (Challet & Zhang, Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game, 1997), ya que estos modelos permiten replicar los ciclos de refuerzo discutidos anteriormente. En el libro *Minority Games: interacting agents in financial markets* (Challet, Marsili, & Zhang, 2005), se extiende el juego de la minoría a un contexto financiero, presentando varios ejemplos de cómo el comportamiento de un precio cambia en función de las minorías: subiendo si hay menor oferta que demanda, y bajando en el caso contrario.

Capítulo 4

MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

En el proyecto se explorarán y evaluarán tres modelos para caracterizar el precio de un activo y la posible aparición de burbujas financieras.

El primero de los modelos a explorar se deriva del movimiento geométrico browniano. Como se explicó anteriormente, este modelo asume que el precio del activo se comporta $dB(t) = \mu B(t)dt + \sigma B(t)dW_t$, donde μ es la tasa instantánea de retorno, σ es la volatilidad y W_t es un proceso de Wiener (Glasserman, 2003).

Los dos modelos restantes son modelos basados en agentes y se asemejan al expuesto por Challet y Zhang en el artículo *Emergence of Cooperation and Organization in an Evolutionary Game* (Challet & Zhang, 1997), el cual es extendido para ser aplicado a los mercados financieros como se explica en *Minority Games: interacting agents in financial markets* (Challet, Marsili, & Zhang, 2005). En este se tiene una población de N jugadores (agentes de mercado) impares, donde cada uno de los agentes tiene una cantidad S de estrategias. Esto es, en cada momento de tiempo (o ronda), los agentes tienen que escoger entre dos alternativas A y B , donde serán recompensados si la alternativa que escogieron fue la menos frecuente (la minoría) en esa ronda. Por lo tanto, una estrategia es una función que retorna A o B en función del resultado de los M periodos pasados. La cantidad M es otro parámetro al que se le refiere como la memoria. Este número indica el número de rondas pasadas que el agente puede recordar a la hora de tomar una decisión. Las estrategias pertenecen a un espacio cuyo tamaño es 2^M . El modelo se inicializa generando de manera aleatoria S estrategias para cada agente. Por otro lado, se generan M resultados de rondas pasadas para alimentar la memoria de los agentes y empezar el juego.

Para generar un modelo de precios con base en el Juego de la Minoría, Frederic D. R. Bonnet y Dereck Abbot en su artículo, *Can a minority game follow real market dynamics?* (Bonnet & Abbot, 2010), exploran el siguiente modelo: para cada momento t en el tiempo, se define el exceso de demanda como $A(t) = \sum_i a_i(t)$, donde $a_i(t)$ es igual a uno si el agente i decide comprar el activo en el momento t , y menos uno si decide venderlo. Luego, el cambio en el precio del activo financiero está dado por $r(t) =$

$\ln\left(\frac{p(t)}{p(t-1)}\right) = \frac{A(t)}{\lambda}$, donde λ es un parámetro que indica la profundidad (o liquidez del mercado). Por otro lado, la función de recompensa del agente i está dada por $g_i(t) = -a_i A(t)$. En esencia, la función recompensa a aquellos agentes que logran tomar una decisión contraria a la que tomó la mayoría. Este modelo será referido como MGLambda.

El segundo modelo, también explicado por Bonnet y Abbot, es una variación del anterior. La única diferencia recae en que el cambio del precio, $r(t)$, se calcula como $r(t) = \ln\left(\frac{p(t)}{p(t-1)}\right) = \ln\left(\frac{N+A(t)}{N-A(t)}\right)$. La justificación de esta variación es la siguiente: si se asume que para un agente i , $a_i(t) = 1$, significa que el agente invierte \$1 en el activo, se tiene que la demanda total por el activo es $D = \frac{N+A(t)}{2}$. Por otro lado, si $a_i(t) = -1$, se asume que el agente está dispuesto a vender $\frac{1}{p(t-1)}$ unidades del activo, y se sigue que la oferta total del activo es $O = \frac{N-A(t)}{2p(t-1)}$. Luego, el precio de equilibrio entre las unidades ofertadas y la demanda monetaria es $p(t) = \frac{D}{O} = p(t-1) \times \left(\frac{N+A(t)}{N-A(t)}\right)$. Este modelo será referido como MGDO.

Considerando lo anterior, cada ronda de los modelos basados en agentes se genera en línea al siguiente procedimiento:

- 1) Rescatar la historia de los últimos M cambios en el precio (historia de si subió o bajó el precio). Si se trata de la primera ronda, la historia se inicializa de manera aleatoria.
- 2) Cada agente tiene S estrategias. El agente utiliza la historia para determinar cuál acción debe tomar, comprar o vender, según cada una de las estrategias.
- 3) El agente ejecuta la acción de la estrategia con mayor puntaje y, por lo tanto, ignora las otras estrategias.
- 4) Se recopilan las N acciones escogidas (ejecutadas), una por cada agente, y se determina si el precio debe subir o bajar y en qué monto.
- 5) Cada agente actualiza su recompensa en función del movimiento del precio.
- 6) Cada agente actualiza el puntaje de todas las estrategias, lo cual puede acarrear que en una próxima ronda el agente seleccione una estrategia diferente.

Para poder evaluar los modelos propuestos, de naturaleza discreta por rondas, con un modelo de naturaleza continua como el movimiento geométrico browniano, se tomarán los precios de cierre y se evaluarán comparativamente contra el resultado de cada una de las rondas del MGDO y el MGLambda. Es decir, el modelo browniano se discretizará y cada ronda corresponderá a una observación de la distribución Normal, ajustando los parámetros de tal manera que se ajusten al intervalo de tiempo entre observaciones.

Capítulo 5

METODOLOGÍA

La metodología a seguir se basa en la propuesta del artículo *Ten simple rules for the computational modeling of behavioral data* (Wilson & Collins, 2019). La siguiente figura muestra esquemáticamente el proceso a seguir:

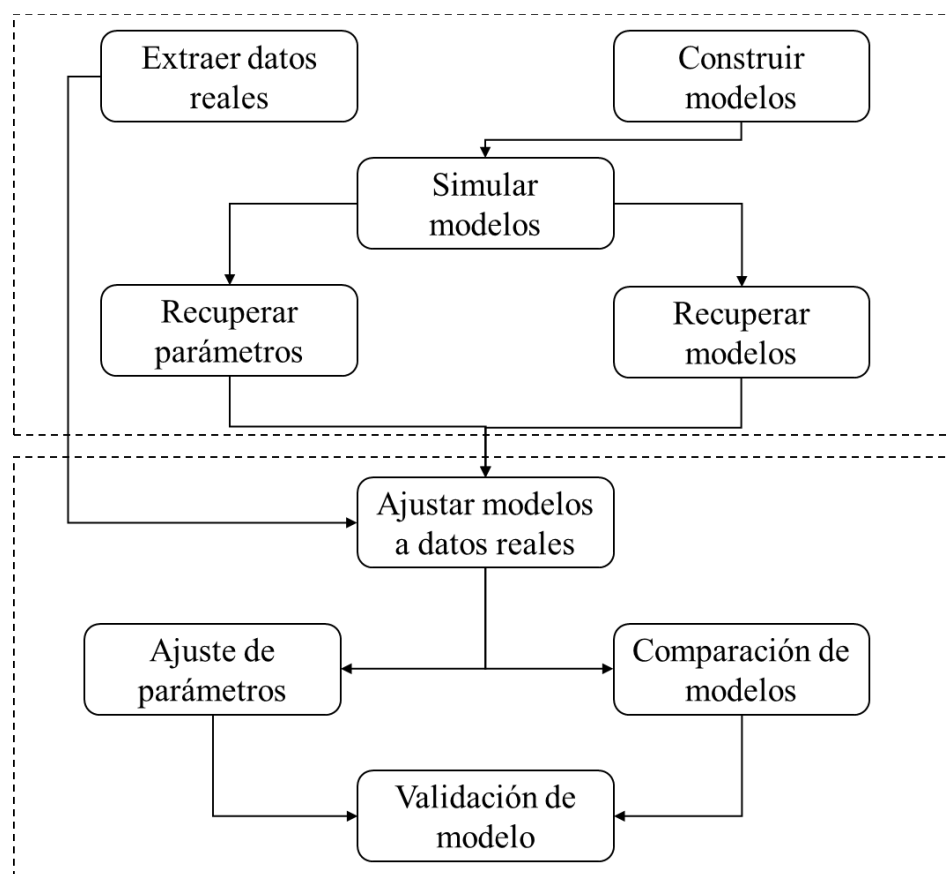


Figura 3. Metodología para desarrollar, evaluar y seleccionar los modelos propuestos

5.1 Simulación de modelos

En la primera etapa de la metodología se simularán los tres modelos probando distintos parámetros con el objetivo de entender cómo estos afectan los datos que se están generando. Adicionalmente, se observará si existen diferencias a nivel cualitativo entre las simulaciones generadas por los tres modelos.

5.2 Ajuste de parámetros

Dado un conjunto de datos históricos de precios D , por un lado, y un modelo M de precios, por el otro, se buscan los parámetros θ de M que mejor se ajustan a D . El proceso usual es maximizar una función de verosimilitud $L(D|M,\theta)$ (Wilson & Collins, 2019) pero construir tal función para los modelos que se están explorando es inviable. Por ello, se realiza un método indirecto, en el cual se minimiza la diferencia entre los datos simulados con M dado θ , D' , y D .

Para lograr esto último, se usa la divergencia de Kullback-Leiber (divergencia KL). La divergencia KL es una métrica que cuantifica la disparidad entre dos distribuciones de probabilidad (Joyce, 2011). Esta medida es esencial en el contexto de la teoría de la información, ya que permite evaluar qué tan bien una distribución de probabilidad Q aproxima a otra distribución P . La divergencia KL se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_{x \in X} P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P y Q son distribuciones de probabilidad, donde P representa la distribución de los datos, y Q es una distribución aproximada a P .

Así las cosas, el procedimiento de ajuste de parámetros, dados los parámetros θ del modelo M , es:

- 1 Obtener los datos simulados D' a partir de M dado θ .
- 2 Obtener un histograma H de los cambios logarítmicos de los precios dados D .
- 3 Obtener un histograma H' de los cambios logarítmicos de los precios simulados D' .
- 4 Calcular la divergencia KL entre H y H' .
- 5 Repetir 10 veces los pasos 1 a 4 y obtener el promedio de la divergencia KL.
- 6 Modificar θ hasta encontrar el valor mínimo del promedio de la divergencia KL.

Para buscar el θ que minimiza la divergencia KL se usó un procedimiento de optimización bayesiana (Brochu, Cora, & de Freitas, 2010). Este procedimiento balancea la exploración y explotación del espacio de parámetros para construir una distribución posterior de la

función objetivo, para así encontrar una combinación de parámetros lo más cerca posible de la combinación óptima.

5.3 Recuperación de parámetros

El objetivo de esta etapa es evaluar en qué medida se pueden recuperar los parámetros de los modelos. Esto es, dado un conjunto de datos generados con un modelo, ¿el método de ajuste de parámetros definido anteriormente permite aproximar cuáles fueron los parámetros que se emplearon para su generación?

5.4 Recuperación de modelo

El objetivo de esta etapa es evaluar en qué medida se puede recuperar el modelo. Esto es, dado un conjunto de datos generados, ¿el método de ajuste de parámetros definido anteriormente permite deducir cuál fue el modelo que se empleó para su generación?

Para este fin, se emplea una metodología que va en línea a lo descrito en la recuperación de parámetros. Dado que cada modelo tiene parámetros distintos, para hacer un ejercicio de recuperación de modelos es necesario estimar los parámetros que más se ajustan a los datos de prueba. Luego de haber encontrado los parámetros óptimos para cada modelo, se mide la divergencia KL de cada modelo contra los datos de prueba y se escoge aquel que tenga el menor valor. Se espera que el modelo con el menor valor sea, en efecto, aquel que se utilizó para generar las simulaciones.

5.5 Ajuste a datos reales y comparación de modelos

El objetivo de esta etapa es evaluar qué tanto se ajustan los datos generados por los distintos modelos a observaciones de la vida real. Dado que se espera que los modelos basados en agentes tengan un mejor desempeño en instancias en las que hubo una burbuja financiera, las observaciones reales se escogieron de tal manera que existen representantes de precios en condiciones “normales” y precios en condiciones de burbuja. A continuación, se muestra la evolución de los precios de las acciones escogidas para este propósito:

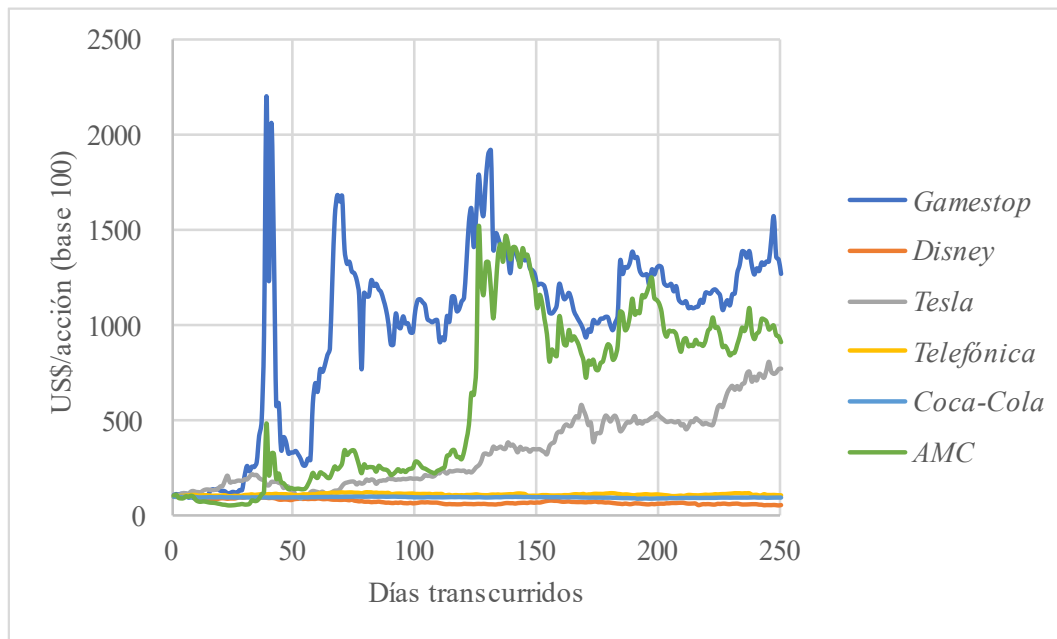


Figura 4. Evolución del precio de acciones a utilizar en la evaluación de los modelos.

(Precios tomados de Yahoo Finance)

En la gráfica se observa que las acciones de *Gamestop* y *AMC* son las más erráticas, y se entiende que dentro del rango observado se encontraron en un contexto de burbuja financiera. Las demás acciones se consideran más “normales” pues no presentan cambios del mismo orden de magnitud que las anteriores. El resumen de la ventana de tiempo escogida para cada acción y la volatilidad observada en ese periodo se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 1. Volatilidad diaria de las acciones contra las que se evalúan los modelos

<i>Acción</i>	<i>Ventana de tiempo observada</i>	<i>Volatilidad diaria</i>
<i>Gamestop</i>	dic. 2020 – nov. 2021	15%
<i>Disney</i>	ene. 2022 – dic. 2022	2%
<i>Tesla</i>	ene. 2022 – dic. 2022	6%
<i>Telefónica</i>	ene. 2023 – dic. 2023	2%

<i>Coca-cola</i>	ene. 2023 – dic. 2023	1%
<i>AMC</i>	dic. 2020 – nov. 2021	14%

Considerando lo anterior, la evaluación de los modelos se hará tomando los cambios en los precios de estas acciones y ejecutando un ejercicio de optimización, semejante al discutido en la recuperación de parámetros y la recuperación de modelo, donde se encuentren los mejores parámetros de cada modelo y la divergencia KL entre los datos reales y los datos generados. Esta última métrica se considerará para responder de manera cuantitativa cuál es el modelo que caracteriza mejor los precios reales. También, se hará una evaluación cualitativa del modelo que mejor se ajusta a los datos para determinar si los precios generados por este modelo se parecen a los precios reales.

Capítulo 6

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1 Simulación de modelos

Para la exploración de los modelos se utilizarán los siguientes parámetros:

- Movimiento geométrico browniano: $\mu \in \{0, 0.5\%, 3\%\}$, $\sigma \in \{0.5\%, 2\%, 10\%\}$
- MGLambda: $N \in \{101, 501, 901, 1501\}$, $M \in \{2, 4, 6\}$, $S \in \{2, 4, 6\}$, $\lambda \in \{N, 3N\}$.
- MGDO: $N \in \{101, 501, 901, 1501\}$, $M \in \{2, 4, 6\}$, $S \in \{2, 4, 6\}$.

A continuación, se presentan dos gráficas que contrastan los precios generados con el modelo geométrico browniano y distintos parámetros.

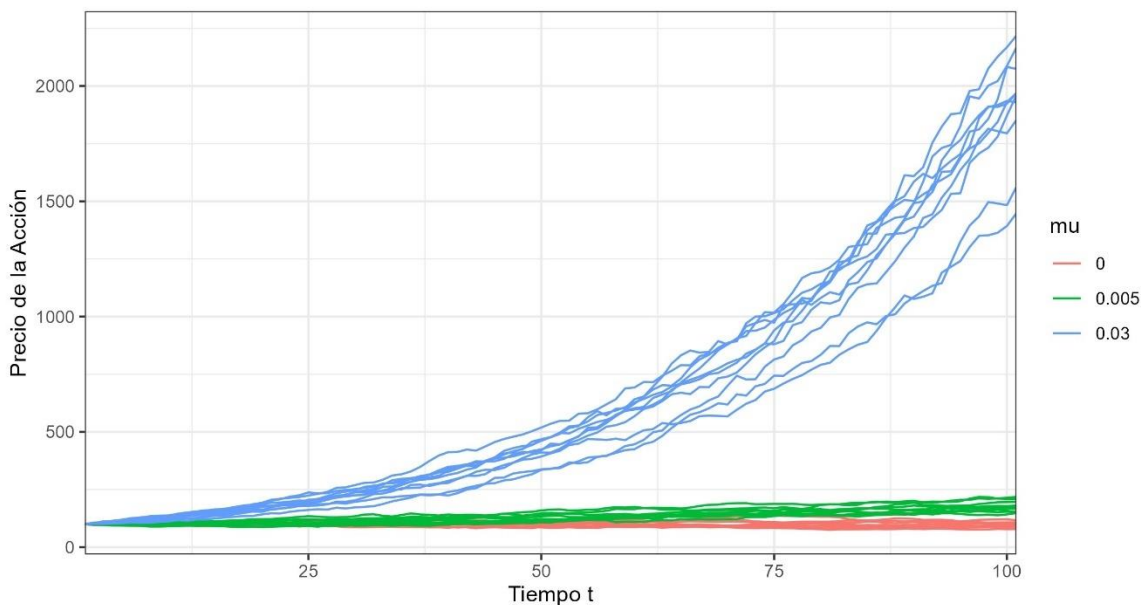


Figura 5. Simulaciones con modelo de movimiento geométrico browniano y distintos valores para μ ($\sigma = 2\%$). (Datos generados).

La Figura 5 muestra distintos caminos generados usando el movimiento geométrico browniano con un $\sigma = 2\%$ y distintos valores de μ . Es claro que el parámetro influye en la

tendencia del movimiento del precio. Un valor de $\mu = 0$ hace que los caminos se dispersen con igual probabilidad arriba o abajo del punto de partida. Por otro lado, valores mayores hacen que la tendencia de los precios generados sea al alza. En el gráfico no se observa, pero un valor negativo de μ haría que los precios tuvieran una tendencia a la baja.

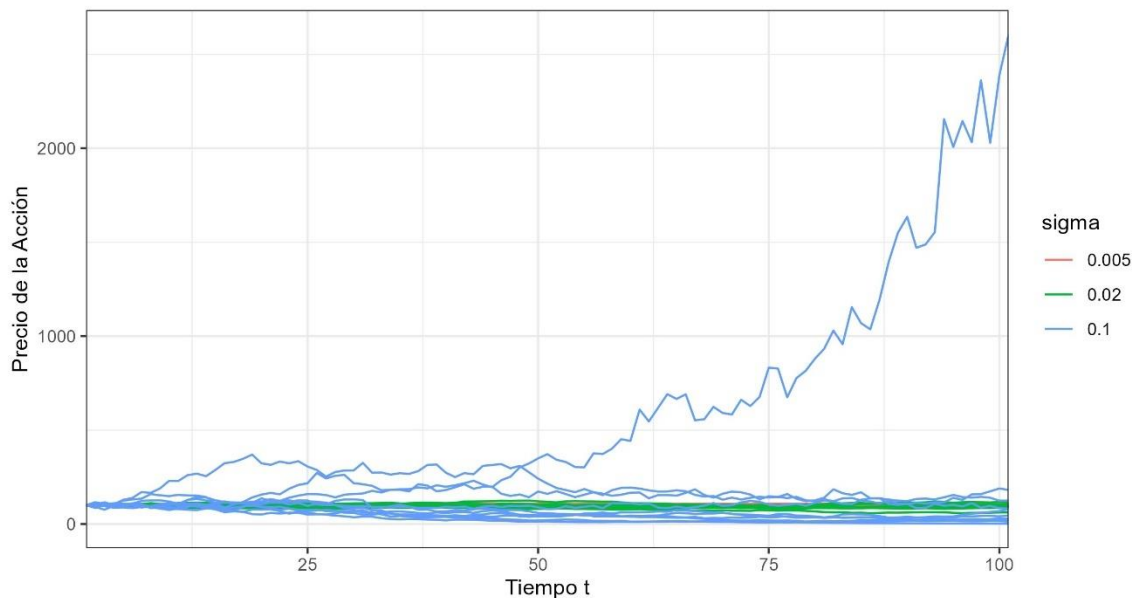


Figura 6. Simulaciones con modelo de movimiento geométrico browniano y distintos valores para σ ($\mu = 0$). (Datos generados).

La Figura 1Figura 6 muestra distintos caminos simulados con el movimiento geométrico browniano con $\mu = 0$ y distintos valores de σ . Es notorio que mayores valores de σ hacen que los precios se alejen más del punto de partida conforme transcurre más tiempo en la simulación. Sin embargo, se ha de observar que, aunque los precios se vuelvan más volátiles con un mayor σ , no hay evidencias de subidas y bajadas repentinas en los precios como las que se ven en una burbuja financiera.

A continuación, se presentan simulaciones obtenidas con el modelo MGLambda y distintas combinaciones de parámetros para entender a nivel cualitativo qué influencia tienen sobre los caminos generados.

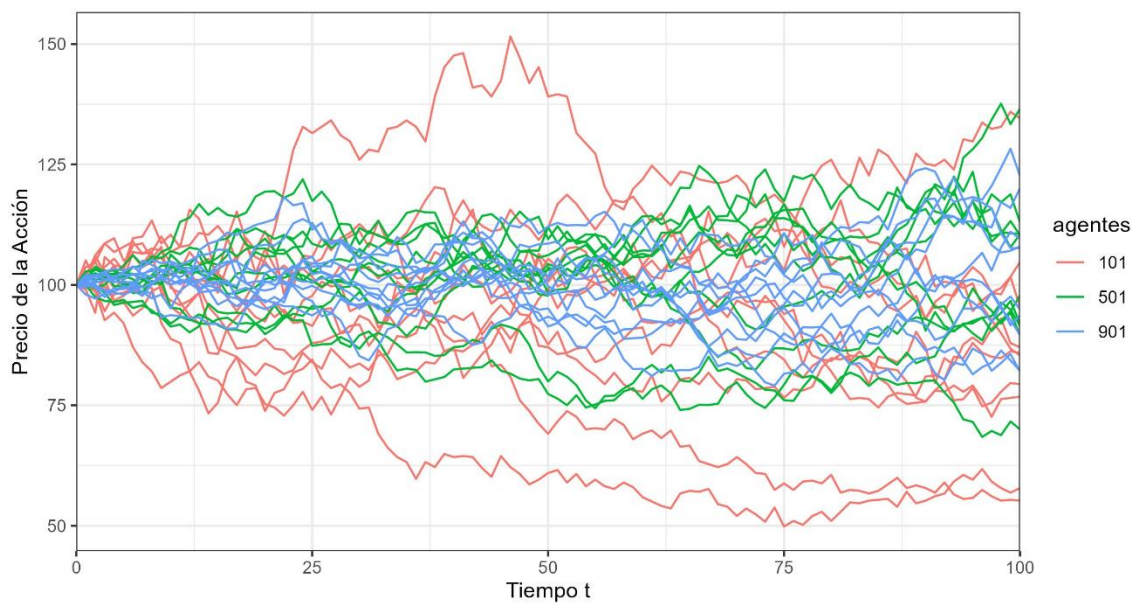


Figura 7. Simulaciones con modelo MGLambda y distintos valores para N ($S = 2$, $M = 6$, $\lambda = 3N$). (Datos generados).

La Figura 7 muestra varios caminos simulados usando el modelo MGLambda y distintos valores para N , la cantidad de agentes en el entorno. Se observa que una mayor cantidad de agentes hace que los caminos generados sean menos volátiles. Esto tiene sentido si se considera que el parámetro λ se define considerando la cantidad de agentes que hay en el mercado.

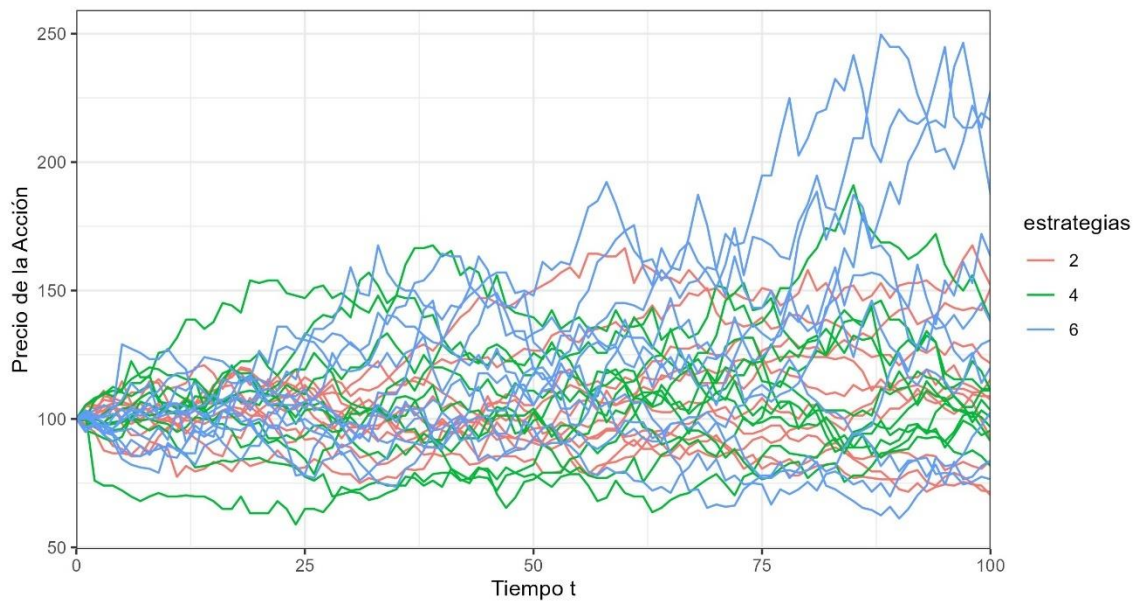


Figura 8. Simulaciones con modelo MGLambda y distintos valores de S ($M = 2, N = 101, \lambda = 3N$).

La Figura 8 muestra caminos generados con el modelo MGLambda y distintos valores para el parámetro de estrategias. Se observa que una mayor cantidad de estrategias hace que los precios se alejen más del punto de partida; es decir, que sean más volátiles los precios.

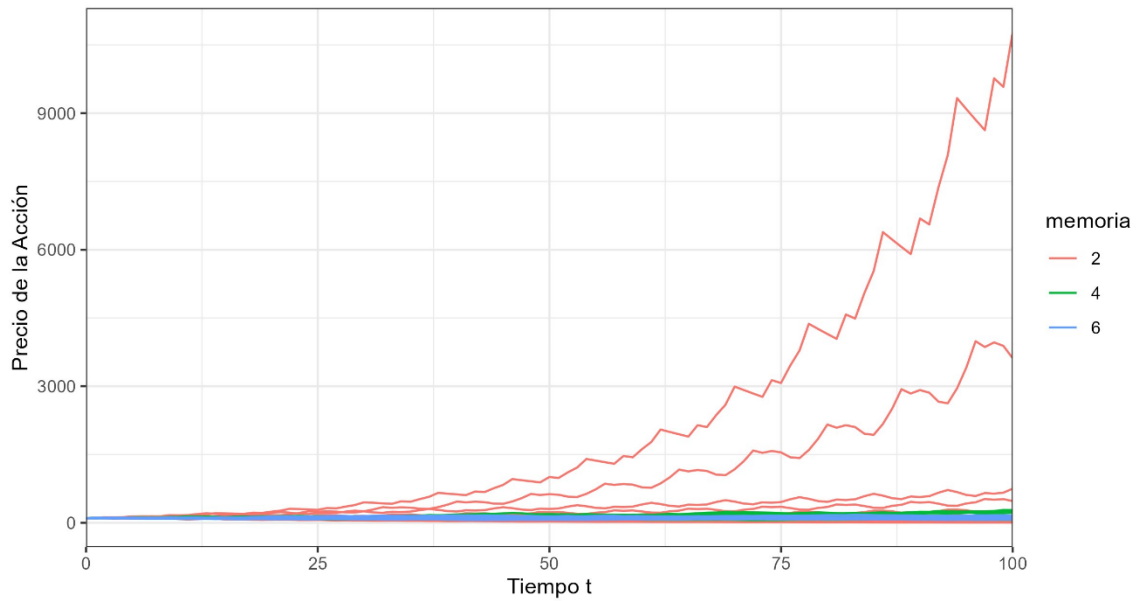


Figura 9. Simulaciones con modelo MGLambda y distintos valores de M ($S = 2, N = 101, \lambda = 3N$). (Datos generados).

La Figura 9 muestra distintos caminos generados usando el modelo MGLambda y distintos valores para el parámetro de memoria. Se evidencia que una menor memoria hace que los precios sean más volátiles.

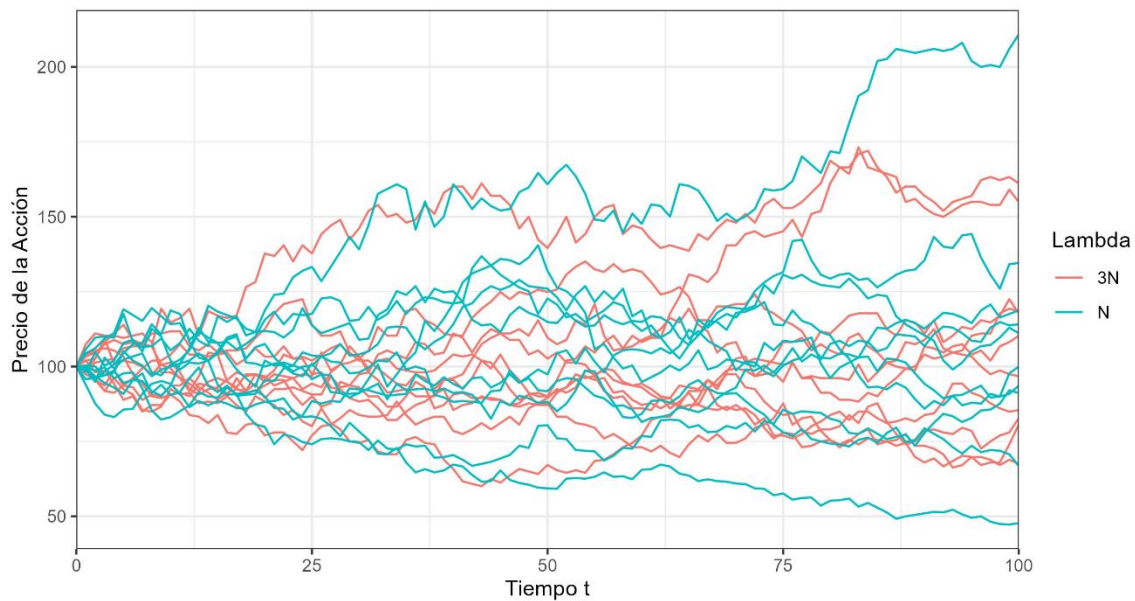
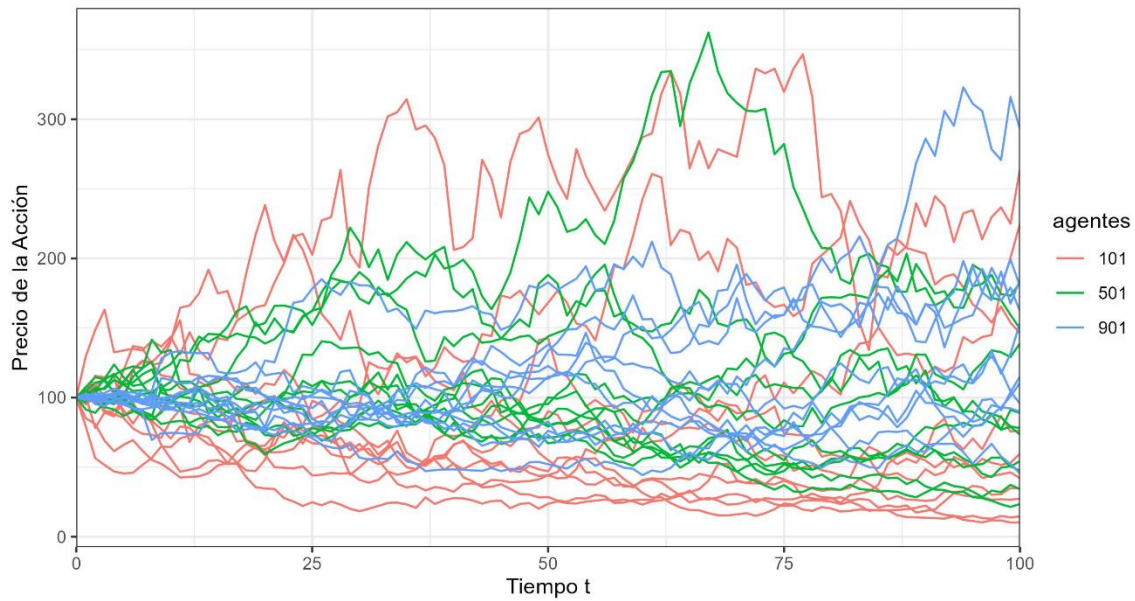


Figura 10. Simulaciones con modelo MGLambda y distintos valores de λ ($N = 101, M = 6, S = 2$). (Datos generados).

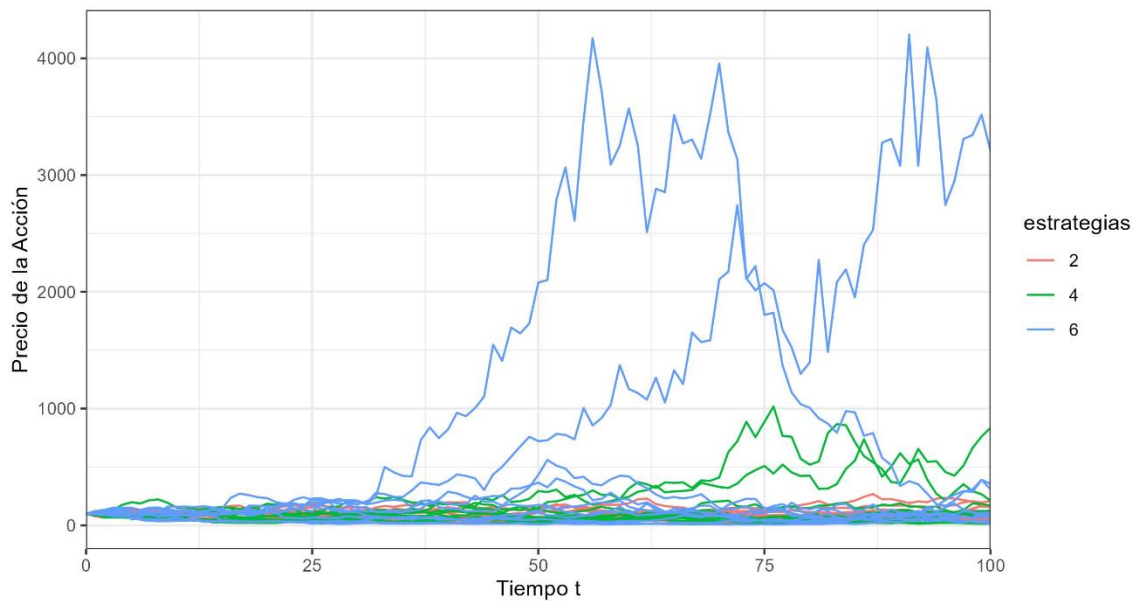
La Figura 10 muestra caminos generados con el modelo MGLambda y distintos valores para el parámetro λ . Se evidencia que un mayor valor en este parámetro hace que haya menor volatilidad, lo cual tiene sentido porque el cambio en el precio en este modelo se calcula como $\frac{A(t)}{\lambda}$.

A continuación, se presentan simulaciones obtenidas con el modelo MGDO y distintas combinaciones de parámetros para entender a nivel cualitativo qué influencia tienen sobre los caminos generados.



**Figura 11. Simulaciones con modelo MGDO y distintos valores de N ($S = 2, M = 6$).
(Datos generados).**

La Figura 11 muestra caminos generados con el modelo MGDO y distintos valores para el parámetro de cantidad de agentes. En este caso, no es claro que la cantidad de agentes tenga repercusión en las características de los precios generados a nivel de volatilidad.



**Figura 12. Simulaciones con modelo MGDO y distintos valores de S ($N = 101, M = 6$).
(Datos generados).**

La Figura 12 muestra caminos generados con distintos valores para el parámetro de cantidad de estrategias por agente. Igual que con el modelo MGLambda, se observa que una mayor cantidad de estrategias hace que los caminos sean más volátiles.

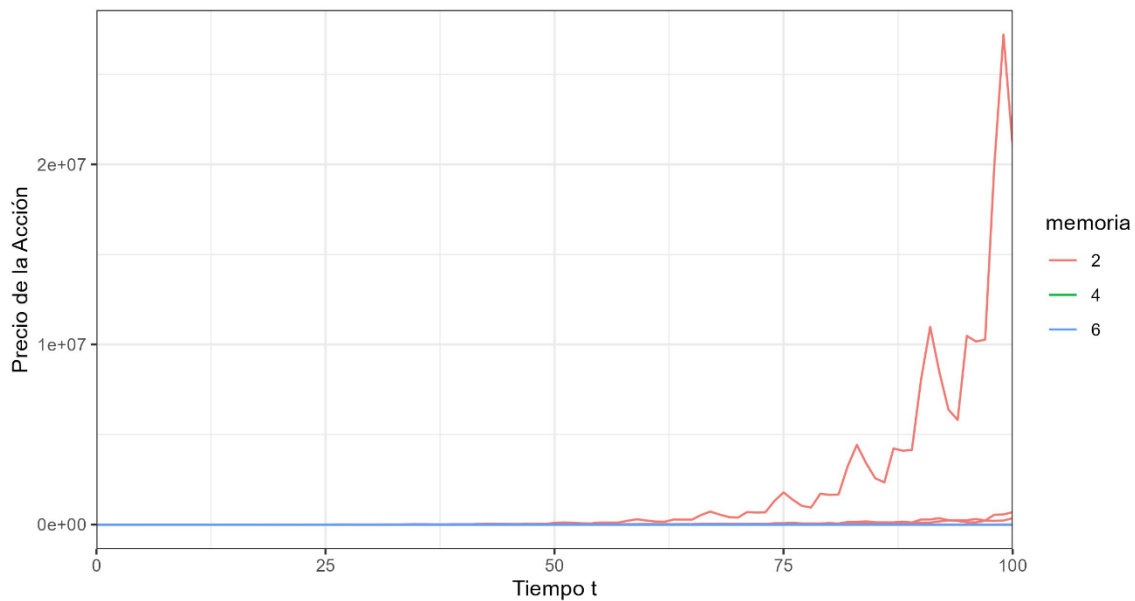


Figura 13. Simulaciones con modelo MGDO y distintos valores de M ($N = 101, S = 2$).

La Figura 13 muestra caminos generados con el modelo MGDO y distintos valores para el parámetro de memoria. Al igual que con el modelo MGLambda, la volatilidad incrementa cuando hay una menor memoria.

Por último, se hace un barrido de las distintas combinaciones de parámetros de cada modelo para determinar la volatilidad promedio observada en 10 simulaciones, tomando la volatilidad como la desviación estándar de los cambios logarítmicos del precio. Los resultados de este ejercicio se muestran en las dos siguientes gráficas.

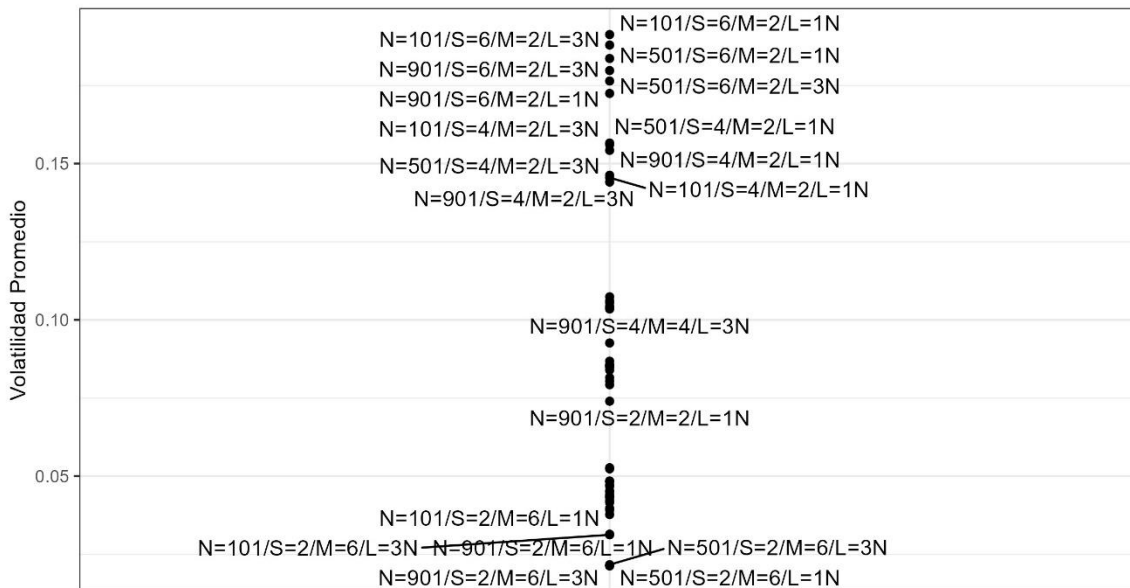


Figura 14. Volatilidad promedio del modelo MGLambda. (Datos generados).

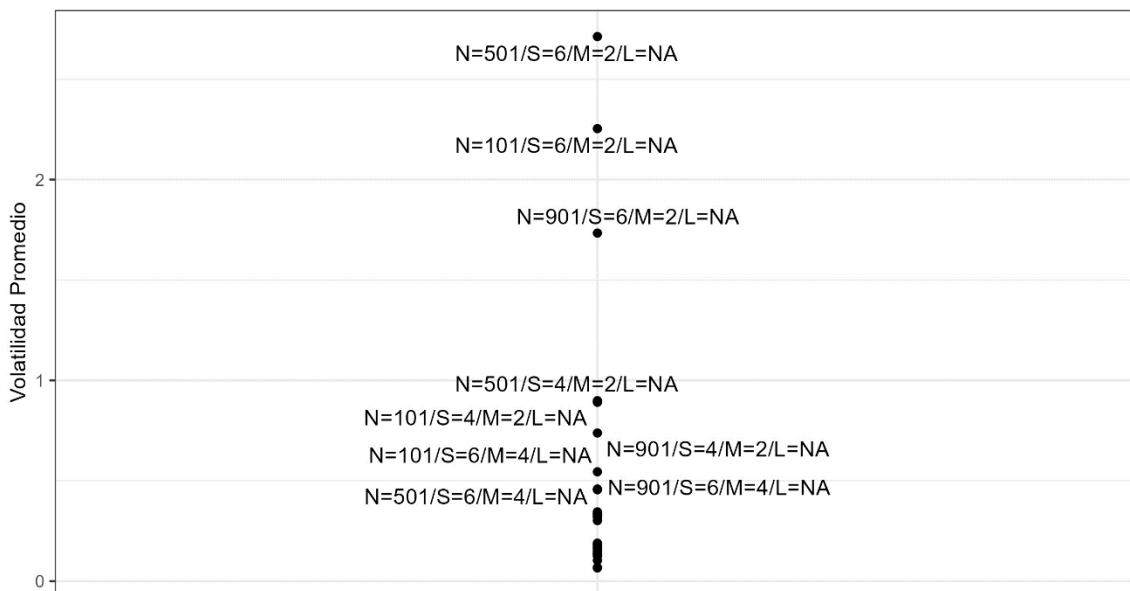


Figura 15. Volatilidad promedio del modelo MGDO. (Datos generados).

La Figura 14 y la Figura 15 muestran la volatilidad promedio que se obtuvo al probar las distintas combinaciones de parámetros, $N, S, M, \lambda(L)$. Confirmando lo discutido en el análisis cualitativo, los precios son más volátiles cuando el parámetro de estrategias

es alto o cuando el parámetro de memoria es bajo. Los parámetros λ y N no tienen un impacto significativo en la volatilidad. Es importante resaltar que la diferencia de escala en las gráficas señala que el modelo MGDO genera precios más volátiles que el modelo MGLambda.

Para entender la magnitud de la volatilidad de estos modelos se puede comparar los resultados anteriores con la información presentada anteriormente en la Tabla 1, pues ahí se muestra la volatilidad observada en el precio de las acciones reales. En particular, las acciones normales tienen una volatilidad diaria entre el 1% y 6%, mientras que las acciones que estuvieron en un contexto de burbuja financiera tienen una volatilidad diaria del orden del 15%.

6.2 Recuperación de parámetros

A continuación, se presenta una tabla con el resultado del ejercicio de recuperación de parámetros para el movimiento geométrico browniano:

Tabla 2. Resultados recuperación de parámetros para movimiento geométrico browniano (100 observaciones)

<i>Parámetros originales</i>	<i>Parámetros recuperados</i>	<i>Divergencia KL</i>
$[\mu, \sigma]$	$[\mu, \sigma]$	
[0, 0.2]	[-0.04, 0.21]	0.06
[0.01, 0.01]	[0.01, 0.01]	0.24
[-0.3, 0.1]	[-0.28, 0.1]	0.19

Se observa que la recuperación de parámetros en el movimiento browniano es efectiva, pues con 100 observaciones se logra una cercanía considerable a los parámetros originales. Teóricamente, se sabe que tanto el promedio como la desviación estándar convergerán a los valores de originales del modelo puesto que son estimadores insesgados.

Por otro lado, para el modelo MGLambda se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 3. Resultados recuperación de parámetros para MGLambda (100 observaciones y se fija $\lambda = N$).

<i>Parámetros originales</i>	<i>Parámetros recuperados</i>	<i>Divergencia KL</i>
$[N, M, S]$	$[N, M, S]$	
[101, 2, 4]	[185, 2, 3]	0.73
[101, 4, 4]	[227, 3, 2]	0.66
[501, 2, 4]	[185, 2, 3]	0.65

Se observa que la recuperación de parámetros en el MGLambda no es del todo precisa, pues no se alcanzan los valores originales. El parámetro que es más difícil de recuperar es el número de agentes, esto se debe a que, como se demostró en el análisis cualitativo, este valor no tiene mayor incidencia en el comportamiento de los precios generados. Otro elemento que agrega dificultad a la recuperación de parámetros es la interacción entre memoria, estrategia y volatilidad. Menor memoria acarrea una mayor volatilidad, y mayor número de estrategias acarrea una mayor volatilidad. De esta manera, una mayor o menor volatilidad, una de las principales características de un precio, se puede lograr de dos maneras, posiblemente incrementando la probabilidad de que el optimizador encuentre un mínimo local.

Por último, se realiza el ejercicio de recuperación de parámetros para el modelo MGDO:

Tabla 4. Resultados recuperación de parámetros para MGDO (100 observaciones).

<i>Parámetros originales</i>	<i>Parámetros recuperados</i>	<i>Divergencia KL</i>
$[N, M, S]$	$[N, M, S]$	
[101, 2, 4]	[447, 2, 2]	0.88
[101, 4, 4]	[229, 6, 4]	0.53
[501, 2, 4]	[557, 3, 3]	0.64

Para MGDO, la recuperación de parámetros presenta las mismas dificultades que las mencionadas en el caso de MGLambda.

6.3 Recuperación de modelos

A continuación, se presenta una matriz de confusión con los resultados del ejercicio de recuperación de modelos:

Tabla 5. Resultados recuperación de modelos

<i>Modelo Original</i>	<i>Identificado Browniano</i>	<i>Identificado MGLambda</i>	<i>Identificado MGDO</i>
Browniano	10	0	0
MGLambda	0	4	6
MGDO	0	3	7

Se observa que la optimización sobre la divergencia KL permite identificar, en todos los casos, qué simulaciones fueron generadas con el movimiento browniano. Por otro lado, el ejercicio no permite distinguir las diferencias entre los dos modelos basados en agentes; algunas simulaciones generadas con el modelo MGLambda, se le atribuyen a MGDO, y viceversa. Sin embargo, dado que el objetivo del proyecto es explorar alternativas para modelar instancias de burbujas financieras, los resultados son satisfactorios, pues los modelos basados en agentes son distinguibles al movimiento browniano, solo que los dos propuestos no son distinguibles entre sí.

6.4 Ajuste a datos reales y comparación de modelos

El ajuste de los modelos frente a los datos reales se hizo particionando las 250 observaciones de cada acción en 5 ventanas de tiempo. En general, al observar cada una de las ventanas de los precios en coyuntura de burbuja, alguno de los modelos basados en agentes fue el que más se ajustaba a los datos reales. Esto se evidencia en la siguiente gráfica:

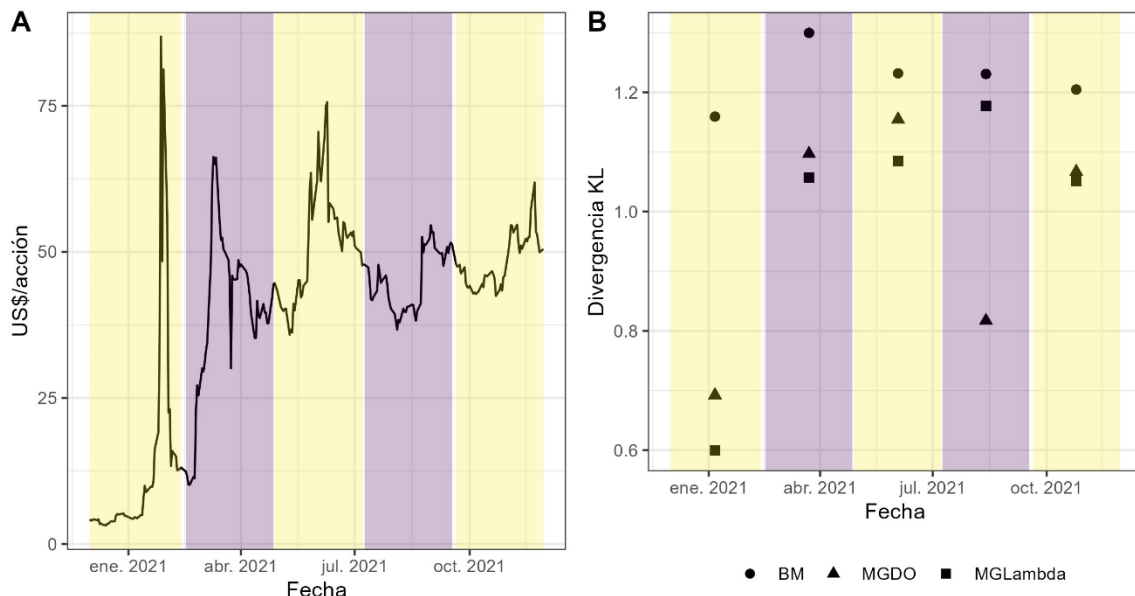


Figura 16. Partición del precio de la acción de Gamestop y divergencia KL. (Precio de la acción recuperado de Yahoo Finance).

A la izquierda, la Figura 16 muestra la evolución del precio de la acción de *Gamestop*, particionada en cinco intervalos de tiempo disyuntos. La gráfica de la derecha muestra la divergencia KL de cada modelo para cada una de las particiones. En todas las ventanas, alguno de los dos modelos basados en agentes presenta una menor divergencia KL y, por lo tanto, se ajusta más a los datos reales que el movimiento geométrico browniano.

Contrariamente, cuando se toma alguno de los datos “normales”, el movimiento geométrico browniano es seleccionado con mayor frecuencia. A continuación, se presenta un ejemplo de un precio en una situación de mercado “normal”:

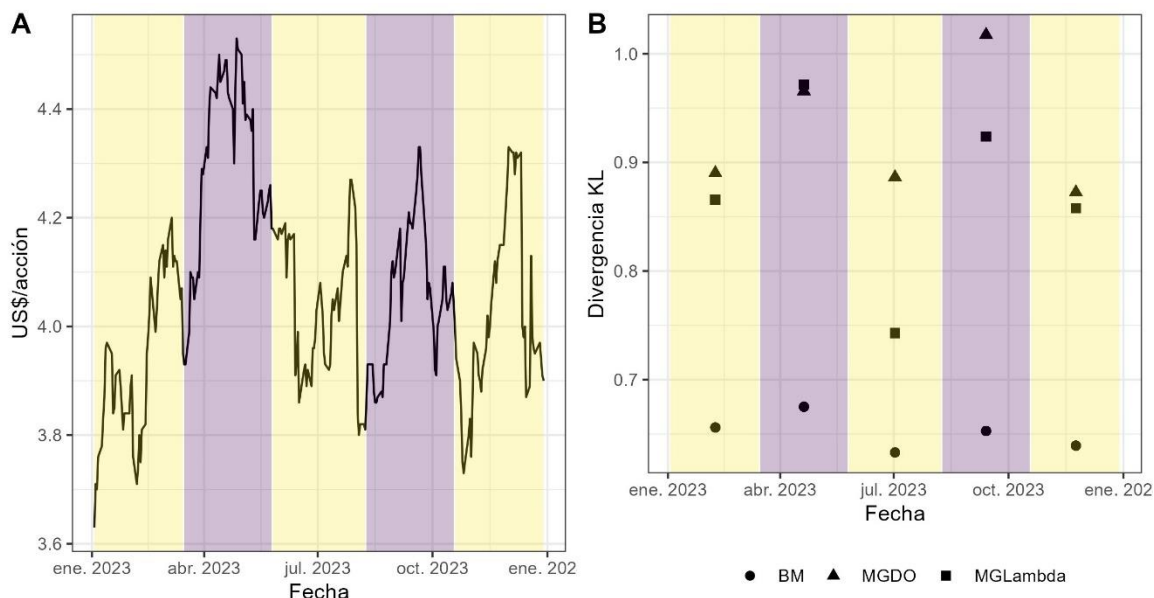


Figura 17. Partición del precio de la acción de Telefónica y divergencia KL. (Precio de la acción recuperado de Yahoo Finance).

La Figura 17 es análoga a la Figura 16, salvo que la acción a la cual se le realiza el ajuste es distinta. Se observa que la acción de *Telefónica*, que es significativamente menos volátil que la de *Gamestop*, es mejor descrita por el movimiento geométrico browniano usando como criterio la divergencia KL.

La siguiente tabla muestra la clasificación de las 25 ventanas de tiempo estudiadas:

Tabla 6. Modelo de mejor ajuste para precios en condición de burbuja financiera o “normales”

<i>Modelo</i>	<i>Escenario de burbuja</i>	<i>Escenario “normal”</i>
Browniano	0	17
MGLambda	6	2
MGDO	4	1

En la Tabla 6 se observa que todas las ventanas correspondientes a un precio en condiciones de burbuja fueron mejor ajustadas por un modelo basado en agentes. Contrariamente, los precios en condiciones “normales” predominantemente son mejor ajustados por el movimiento geométrico browniano.

Por último, se rescatan los parámetros de una de las ventanas con mejor ajuste para los modelos con agentes, la primera ventana de *Gamestop* en la Figura 16, y se realizan simulaciones para evaluar cualitativamente cómo se comparan los modelos.

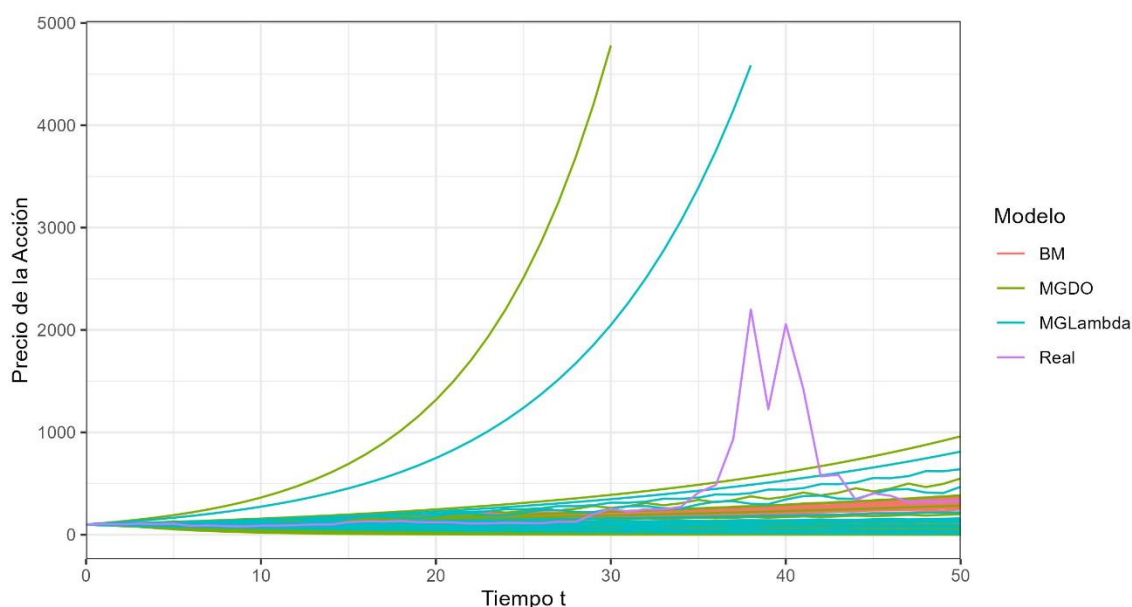


Figura 18. Simulaciones a partir de los parámetros de ajuste a datos reales. (Datos generados).

La Figura 18 fue generada con $\mu = 2.3\%$, $\sigma = 33\%$ para el movimiento geométrico browniano; $N = 447, M = 3, S = 1, \lambda = N$ para MGLambda; y, $N = 339, M = 2, S = 1$ para MGDO. Se observa que los modelos basados en agente generan una tendencia al alza semejante a la vista en la acción de *Gamestop*, e incluso en algunos casos se evidencia que los agentes generan un ciclo de refuerzo; pues se forman patrones de fuertes subidas, lo cual no se ve en el caso del movimiento browniano.

A continuación, se presentan datos generados con los distintos modelos seleccionando los parámetros recuperados en las ventanas de mejor ajuste.

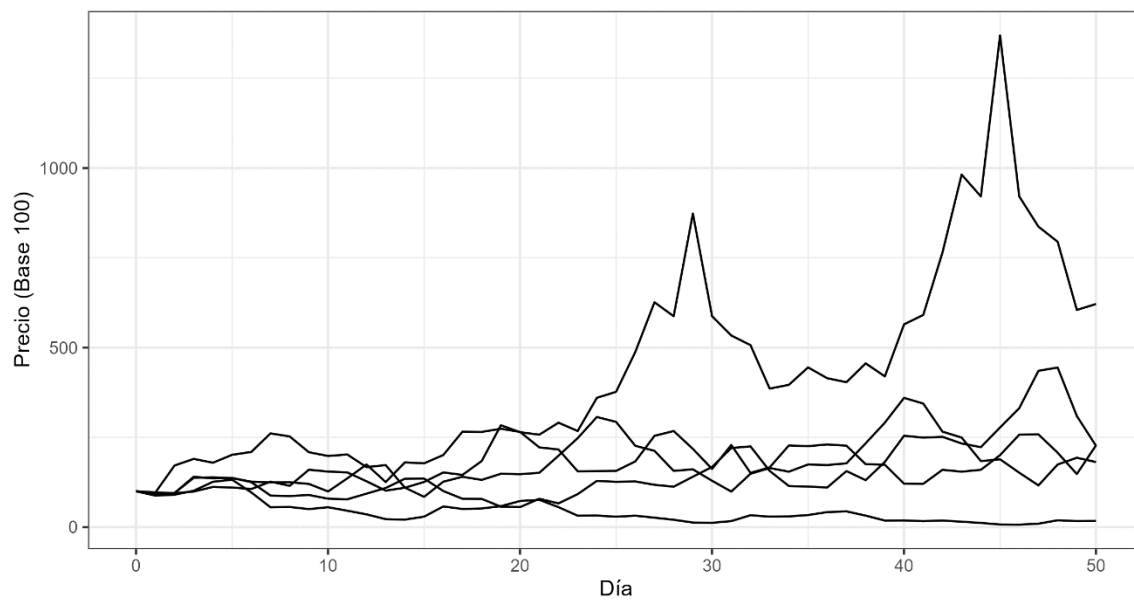


Figura 19. Precios generados con MGDO. Parámetros recuperados del ajuste a Gamestop, ventana 4 ($N = 339$, $M = 2$, $S = 2$).

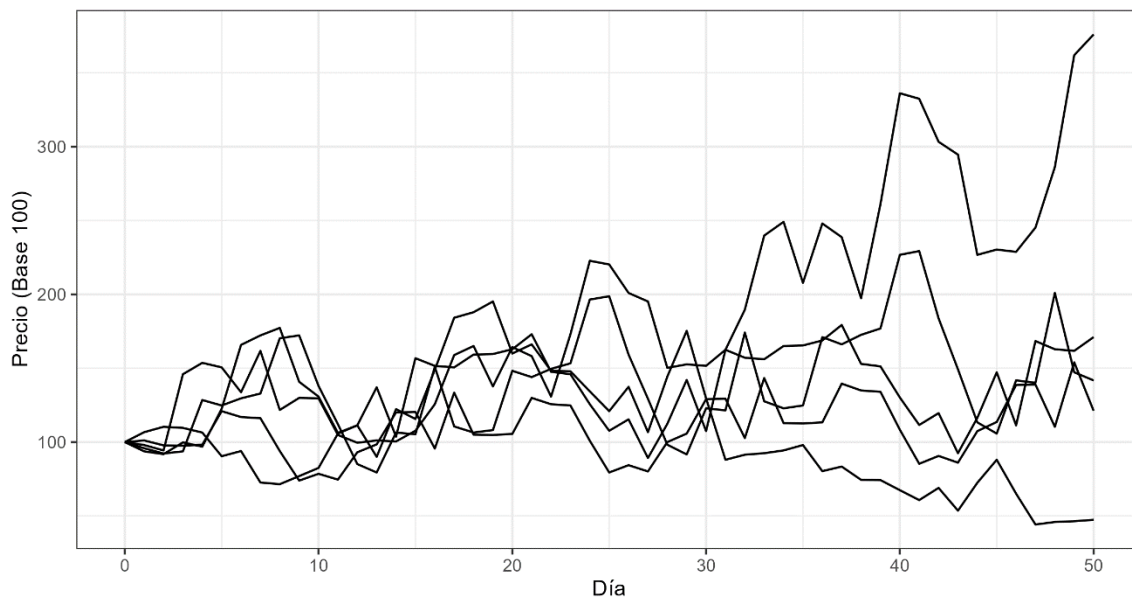


Figura 20. Precios generados con MGLambda. Parámetros recuperados del ajuste a Gamestop, ventana 1 ($N = 447$, $M = 3$, $S = 2$).

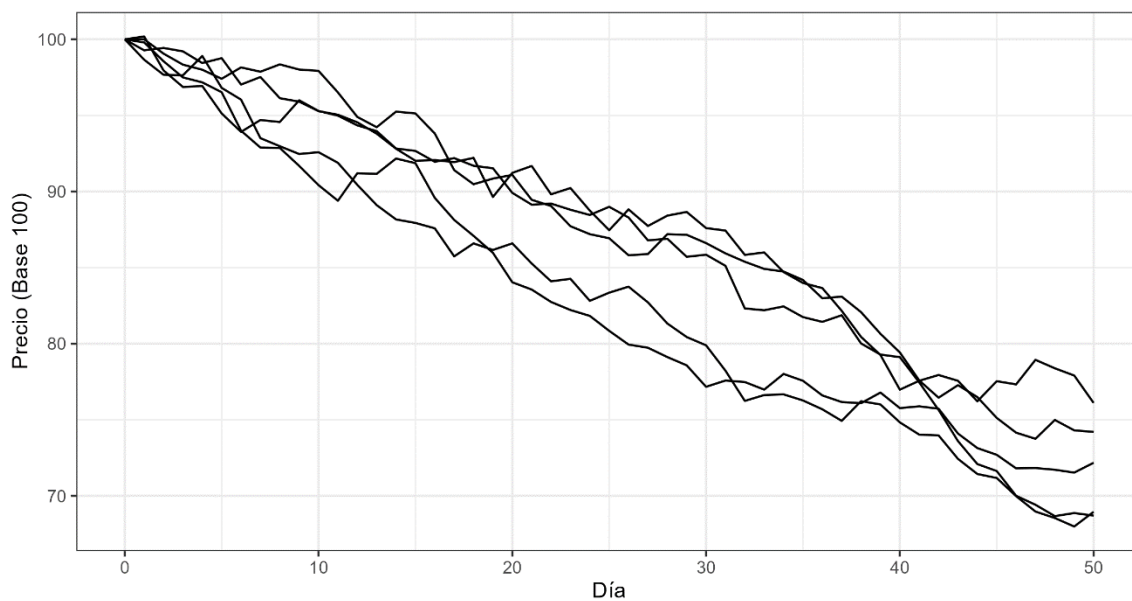


Figura 21. Precios generados con el modelo browniano. Parámetros recuperados del ajuste a Telefónica, ventana 1 ($\mu = -0.01$, $\sigma = 0.16$).

Se observa que los modelos de agentes son cualitativamente distintos al modelo browniano. Los modelos de minorías generan picos de precios y rápidas correcciones, comportamientos esperados en burbujas financieras. Por otro lado, el modelo browniano recupera la tendencia del precio de telefónica en esa ventana particular, pero los precios son más parecidos al comportamiento de una acción en condiciones normales; no hay picos de precios y correcciones rápidas.

Capítulo 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el proyecto se comparó la modelación del precio de un activo financiero vía el modelo tradicional, el movimiento geométrico browniano, y dos modelos basados en el juego de la minoría. Si bien la recuperación de parámetros y de modelo demostró que no existía una distinción clara entre los dos modelos basados en agentes, se logró demostrar que este paradigma alternativo de modelación genera simulaciones distintas y distinguibles a aquellas generadas por el movimiento browniano. Más aún, al ajustar los modelos a los datos reales, se observó que los modelos basados en el juego de la minoría tienen un mayor ajuste al comportamiento de los precios en una instancia de burbuja financiera que el modelo browniano. Es decir, las simulaciones generadas a partir del juego de las minorías se asemejaban más al precio de un activo en una coyuntura de burbuja.

Los resultados de este proyecto invitan a reflexionar sobre la célebre frase atribuida a George E. P. Box: *“Todos los modelos están mal, pero algunos son útiles”*. El movimiento geométrico browniano tiene ventajas; por ejemplo, se apalanca de la distribución Normal lo cual lo ampara de una amplia teoría estadística para su análisis. Se pueden inferir intervalos de confianza para precios futuros sin tener que realizar simulaciones, algo que no es posible con otros modelos. Todo esto ha contribuido a que el browniano haga parte del estándar de la industria, siendo particularmente relevante para la valoración de instrumentos derivados. Sin embargo, en este proyecto se demostró que hay contextos en los que hay modelos más adecuados. En ese sentido, se recomienda a aquellos que trabajen en modelación financiera que se prueben modelos alternativos, como lo son basados en agentes, para mitigar el riesgo de modelo. Al utilizar únicamente el modelo browniano, se están dejando de contemplar dentro de los escenarios movimientos extremos de precios que se han evidenciado en numerosas ocasiones en los mercados.

Para finalizar, una de las aplicaciones del trabajo realizado se presenta en el manejo del riesgo financiero de precios. Una compañía está expuesta a riesgo financiero de precios si el cambio en el precio de alguna materia prima, tasa de cambio o tasa de interés, genera fluctuaciones impredecibles en su flujo de caja. Por ejemplo, si una compañía compra trigo

y produce pan, sus costos cambian en función del precio del trigo, mientras que su precio de venta no necesariamente se mueve de la misma manera. En ese caso, entender cómo puede cambiar el precio del trigo para estimar intervalos de confianza para sus costos y utilidad bruta del próximo año, actividades cruciales para salvaguardar el bienestar financiero de la compañía, son tareas que se abordan a partir de la modelación de precios. Entendiendo el ejemplo anterior, tener simulaciones robustas de los precios futuros apoya a la toma de decisiones bajo incertidumbre y proporcionar un adecuado manejo a este riesgo financiero.

REFERENCIAS

- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Bonnet, F. D., & Abbot, D. (2010). Can a minority game follow real market dynamics? *Fluctuation and Noise Letters*, 107-128.
- Brochu, E., Cora, V. M., & de Freitas, N. (2010). A Tutorial on Bayesian Optimization of Expensive Cost Functions with Application to Active User Modeling and Hierarchical Reinforcement Learning. *CoRR*.
- Challet, D., & Zhang, Y.-C. (1997). Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 407-418.
- Challet, D., Marsili, M., & Zhang, Y.-C. (2005). *Minority Games: interacting agents in financial markets*. Nueva York: Oxford University Press.
- Girdzijauskas, S., Streimikiene, D., Cepinskis, J., Moskaliova, V., Jurkonyte, E., & Mackevicius, R. (2010). Formation of economic bubbles: Causes and possible preventions. *Technological and Economic Development of Economy*, 15(2), 267-280.
- Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Nueva York: Springer.
- Joyce, J. (2011). *Kullback-Leibler Divergence*. In: Lovric, M. (eds) *International Encyclopedia of Statistical Science*. Berlin: Springer.
- Wilson, R. C., & Collins, A. G. (2019). Ten simple rules for the computational modeling of behavioral data. *eLife*, 1-33.
- Yahoo! Finance. (2024, 5 24). *AMC Entertainment Holding, Inc. (AMC)*. Retrieved from <https://finance.yahoo.com/quote/AMC/history/>
- Yahoo! Finance. (2024, 5 24). *GameStop Corp. (GME)*. Retrieved Octubre 22, 2023, from Yahoo Finance: <https://finance.yahoo.com/quote/GME/history/>
- Yahoo! Finance. (2024, 5 24). *Telefónica, S.A. (TEF)*. Retrieved from <https://finance.yahoo.com/quote/TEF/history/>
- Yahoo! Finance. (2024, 5 24). *The Coca-Cola Company (KO)*. Retrieved from <https://finance.yahoo.com/quote/KO/history/>
- Yahoo! Finance. (2024, 5 4). *The Walt Disney Company (DIS)*. Retrieved from <https://finance.yahoo.com/quote/DIS/history/>