UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
FACULTAD DE ECONOMÍA
Taller 6 Economía Matemática
Profesores: Andrés F. Cárdenas y Juan C. Martinez

1. Compruebe que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada:
   (a) $2y' + y = 0; \quad y = e^{-\frac{x}{2}}.$
   (b) $y'' - 6y' + 13y = 0; \quad y = e^{3x}\cos 2x.$
   (c) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0; \quad y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}.$
   (d) $p' = p(1-p); \quad p = \frac{c_1e^t}{1+c_1e^t}$
   (e) $x' = 3t^2(x^2+1); \quad x(t) = tan(t^3 + c)$

2. Dada la ecuación diferencial, su solución y las condiciones iniciales, determinar el valor de las constantes arbitrarias:

(a)	$y^2y' - 4x = 0,$	$y^3 = 6x^2 + c,$	$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0;$
(b)	$y'' + y = \cos x + 4,$	$y = c_1x\ sen(x) + c_2,$	$y(0) = 4,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
(c)	$x' + 2tx^2 = 0,$	$x(t) = \dfrac{1}{t^2 + C},$	$x(0) = 1.$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$ $\quad$ (b) $y \ln x \dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$ $\quad$ (c) $e^x y \dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

4. Resuelva en cada caso el problema de valor inicial dado:
   (a) $x^2\frac{dy}{dx} = y - xy\ ,\ y(-1) = 1$ $\quad$ (b) $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 1,\ y(0) = \dfrac{5}{2}$
   (c) $2\dfrac{dy}{dt} + 12y + 2e^t = 0\ ,\ y(0) = \dfrac{6}{7}$

5. El precio $P(t)$ de un bien al tiempo$t$ satisface $\dot{P} = 2[D(P) - S(P)]$, en donde $S(P) = P - 4$ es la oferta y $D(P) = 11 - 2P$ es la demanda del bien. Resuelve para $P(t)$, suponiendo que $P(0) = P_0$, y discute el comportamiento de esta función a largo plazo.

6. En el modelo deMalthus, la población $P(t)$ de individuos al tiempo t crece de acuerdo con $\dot{P} = aP$, con $a > 0$ la tasa de crecimiento de la población.
   (a) Encuentra $P(t)$, suponiendo que $P(0) = P_0$.
   (b) En cuánto tiempo se duplicará la población inicial?
   (c) Determina $Lim_{t\to\infty}P(t)$
   (d) si $a < 0$, Cuál sería el valor de $Lim_{t\to\infty}P(t)$

7. Sean las ecuaciones de oferta y demanda $Q_d = \alpha - \beta P - \sigma\dfrac{dP}{dt}$; $Q_s = -\gamma + \delta P$ con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$.
   (a) Suponiendo que la tasa de cambio de los precios respecto al tiempo es directamente proporcional a la demanda excedente, encuentre la trayectoria de tiempo $P(t)$.

(b) Cuál es el precio de equilibrio intertemporal ?

(c) Cuál es el precio de equilibrio de clarificación del mercado?

(d) Qué restricción sobre el parámetro σ aseguraría la estabilidad dinámica?

8. Seaan las ecuaciones de oferta y demanda $Q_d = \alpha - \beta P - \eta \dfrac{dP}{dt}$; $Q_s = \delta P$ con $(\alpha, \beta, \eta, \delta > 0)$.

   (a) Suponiendo que el mercado está clarificado para cada instante de tiempo, encuentre la trayectoria de tiempo $P(t)$

   (b) Tiene este mercado un precio de equilibrio intertemporal dinámicamente estable?

9. El consumo $C(t)$, la inversión $I(t)$ y la renta nacional $Y(t)$ en el tiempo t satisfacen las ecuaciones:

$$C(t) + I(t) = Y(t)$$
$$I(t) = k\dot{C}(t)$$
$$C(t) = aY(t) + b$$

   En donde $a, b, k \in \mathbb{R}^+$ con $a < 1$. Demuestre que $Y(t)$ satisface la ecuación:

$$\dot{Y}(t) = \frac{1-a}{ka} Y - \frac{b}{ka}$$

   Resuelva para $Y(0) = Y_0 > \dfrac{b}{1-a}$. Luego halle la función $I(t)$ y calcule $Lim_{t\to\infty} \dfrac{Y(t)}{I(t)}$

10. Resuelva cada una de las ecuaciones *homogéneas* :

    (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3y}{3x+y}$ (b) $(y^2 + xy)\, dx - x^2\, dy = 0$

    (c) $(x + ye^{\frac{y}{x}})\, dx - xe^{\frac{y}{x}}\, dy = 0$ (d) $-y\, dx + (x + \sqrt{xy})\, dy = 0$

11. Determinar si las siguientes ecuaciones son *exactas*; si lo son, encuentre la solución general.

    (a) $(5x + 4y)\, dx + (4x - 8y^3)\, dy = 0$ (b) $(x^3 + y^3)\, dx + 3xy^2)\, dy = 0$

    (c) $(3x^2y + e^y)\, dx + (x^3 + xe^y - 2y) = 0$ (d) $(x - y^3 + y^2 \sin x)\, dx = (3xy^2 + 2y \cos x)\, dy$

12. Encuentre un factor integrante adecuado para resolver las ecuaciones dadas:

    (a) $(2y^2 + 3x)\, dx + 2xy\, dy = 0$ (b) $6xy\, dx + (4y + 9x^2)\, dy = 0$

13. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales:

    (a) $x^2y' + 2xy = e^{3x}$; (b) $xy' - 3y = x^4 sen(x)$; (c) $y' - \dfrac{y}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

    (a) $y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{3}x^4y^4$;

    (b) $y' - xy = 2x\sqrt{y}$;

    (c) $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$

    (d) $x' = \dfrac{2x}{t} - 5x^2t^2 \quad x(1) = \dfrac{1}{2}$

15. En el modelo de Solow el capital per capita, k, satisface la ecuación:

$$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k$$

Donde $f(k)$ representa la producción per capita, $0 < s < 1$ la tasa de ahorro, $n > 0$ la tasa de crecimiento de la fuerza laboral y $\delta > 0$ la tasa de depreciación del capital. Resuelva para $k(t)$ suponiendo que $f(k) = k^{\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$. Luego determine el comportamiento $k(t)$ a largo palzo.

16. Determine las soluciones y_c y y_p para cada una de las siguientes ecuaciones. Además encuentre la solución definida por las condiciones iniciales dadas.
(a) $y'' + 25y = 0$, donde $y(0) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$;
(b) $2y'' + 3y' + 4y = 12$, donde $y(0) = 2,\ y'(0) = 2$;
(c) $y'' + 9y = 3$, donde $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$;
(d) $4y'' - 8y' + 5y = 40$, donde $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.
(e) $y^{IV} - y = 0$, donde $y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 4,\ y'''(0) = -2$;
(f) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$, donde $y(0) = 5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 0$;

17. Cuáles de las ecuaciones diferenciales anteriores poseen trayectorias de tiempo con:
a)Fluctuación amortiguada b) fluctuación uniforme c) fluctuación explosiva.

Determine cuáles de los equilibrios intertemporales son dinámicamente estables.

18. Sean las funciones de oferta y demanda $Q_d = \alpha - \beta P + m\dfrac{dP}{dt} + n\dfrac{d^2P}{dt^2}$; $Q_s = -\gamma + \delta P$ con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$.

(a) Si el mercado no siempre está en ceros, si no que se ajusta a $\dfrac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s)$ con $(j > 0)$.Escriba la ecuación diferencial indicada según este ajuste.

(b) Encuentre el precio de equilibrio intertemporal $\overline{P}$ y el precio para el mercado en ceros $P*$

(c) Establezca la condición para tener una trayectoria de precio fluctuante.

(d) Puede presentarse fluctuación si $n > 0$?.

19. Sean la ecuaciones de oferta y demanda $Q_d = 9 - P + P' + 3P''$ y $Q_s = -1 + 4P - P' + 5P''$ con $P(0) = 4$ $P'(0) = 4$

(a) Encuentre la trayectoria de precio, suponiendo que el mercado está en ceros para todo instante de tiempo.

(b) Es convergente la trayectoria de Tiempo? Con fluctuación?.

20. Use el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución de las siguientes ecuaciones:
a) $y''+2y'+y = t$ b) $y''+y'+2y = e^t$ c) $y''+y'+3y = sent$ d) $y''+y = 2tsen(t)$