El *Analysis situs* y la Geometría proyectiva: Un estudio sobre los parecidos y vínculos entre La geometría de Leibniz y la geometría de Russell

Trabajo presentado para optar al título de:
Mágister en Filosofía

Escuela de Ciencias Humanas
Programa Maestría en Filosofía
Universidad del Rosario

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

Presentado por:
David Fernando Bautista Alarcón

Director:
Carlos Alberto Cardona Suárez

Semestre II 2020

A la memoria de mi padre,
David Alfonso Bautista Zambrano

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a la fiel y siempre conmovedora compañía de mi madre, la Señora Maria Cecilia Alarcón Aroca. Gracias a ella, a la temperancia que resguarda en su corazón y a su apoyo infalible, pude contemplar, por lo menos desde el horizonte, las altas cumbres de la geometría leibniziana. En segundo lugar, agradezco de corazón al Maestro Carlos Alberto Cardona Suárez. Sin su paciencia, sin su humildad, sin su vocación pedagógica, sin su curiosidad y sin su guía (siempre precisa y acertada), no hubiera sido posible contemplar con claridad aquellos caminos ocultos e intrincados que conducen el espíritu hacia la geometría de Leibniz. También quiero expresar mis agradecimientos más profundos a Lorraine Ángel, pues su compañía constante durante la maestría fue un abrigo incondicional, un abrigo que me reveló un punto de vista, de los muchos que puede tener una mónada, el de la infinitud.

Por otro lado, a cada uno de los maestros que tuve la fortuna de conocer en la Maestría en filosofía de la Escuela de Ciencias Humanas de la Universidad del Rosario. Cada uno de ellos, sin lugar a dudas, da una potente vitalidad al pensamiento que se funda en la universidad y, en lo personal, fue un honor escuchar cada una de sus cátedras y conferencias, fue una experiencia muy gratificante. De la misma forma, las charlas que compartí sobre la vocación docente en el área de filosofía con Nubia me permitieron aterrizar todo lo aprendido. Nubia, sin lugar a dudas, es un pilar que representa un ejemplo a seguir. Por último quiero agradecer a Jhonnatan Torres por todo su apoyo en los momentos de crisis que me agobiaron varias veces, en esos momentos en los que necesitaba de una ayuda proveniente de un amigo, de alguna manera, en sentido aristotélico. Afortunadamente nunca hizo falta una buena botella de vino.

Contenido

Introducción

La filosofía y la geometría son dos disciplinas que históricamente han tenido vínculos muy estrechos. Desde el nacimiento mismo de la filosofía, la geometría era una ciencia que acompañaba de forma muy cercana todas las reflexiones nacidas en ese campo. Tales de Mileto, Pitágoras, Platón, Aristóteles, entre otros, son filósofos que tienen una participación destacada e importante en la geometría. A manera de ejemplo, podemos recordar un célebre pasaje de Platón en el diálogo *Menón*. Allí relata cómo un esclavo analfabeta es interpelado por Sócrates y el filósofo, por medio de hábiles preguntas, le pide que por intuición determine longitudes, áreas y diagonales sobre la construcción de una figura dibujada en la arena (Platón, trad. 1987, 82b-85c). De este modo, Sócrates demuestra a Menón que el conocimiento ya está en nosotros y que el alma es inmortal. La geometría sirve, en este caso, como un medio para estos fines metafísicos de Platón, y aparece, de la misma forma, como un conocimiento que no proviene de los datos que ofrece la experiencia, sino que se encuentra en el alma inmortal. Al respecto, Leibiniz diría, más bien, que tenemos en el entendimiento ideas innatas, y esas verdades, son verdades indemostrables, y en el conjunto de esas ideas se hallan los juicios de la geometría, es decir: "[…] hay que afirmar que toda la Aritmética y la Geometría son innatas y están en nosotros de manera virtual de suerte que resulta posible encontrarlas si se las considera con atención y dejando de lado lo demás que tenemos en el espíritu" (Leibniz G. W., 1765/1992, p. 74; Libro I, I § 5).

La geometría elemental que conocemos hoy por hoy es la que se encuentra sistematizada en Euclides, principalmente en los *Elementos* y fue, sin duda alguna, una de las obras más conocidas por los pensadores modernos. La particularidad fundamental de los *Elementos*, "[…] consistía precisamente en demostrar, con el ejemplo, cómo podía la inteligencia del hombre, guiada por el razonamiento riguroso, llegar a esas pocas premisas simples a las verdades que el secular conocimiento empírico podía haber señalado" (Levi, 1947/2006, p. 84). Siendo, de esa manera, el ejemplo por excelencia de la demostración rigurosa, se convirtió en una obra obligatoria de estudio y de análisis. Por esa razón, uno de los problemas más destacados de la modernidad consistía en averiguar si los juicios de la geometría, o el corpus teórico que constituye Euclides en los *Elementos*, ya se encontraba en nosotros, y no requería de fundamentos empíricos que determinaran la verdad de esos enunciados esenciales, por ello, cabe la pregunta que tanto preocupó a un pensador como

Kant, ¿cuál es el origen de la naturaleza apodíctica de la geometría? Este sostuvo al respecto que:

> La geometría es una ciencia que determina sintéticamente, y sin embargo *a priori*, las propiedades del espacio. ¿Qué debe ser la representación del espacio, para que sea posible tal conocimiento de él? Él debe ser originariamente intuición; pues de un mero concepto no se pueden extraer proposiciones que vayan más allá del concepto, lo cual, empero, ocurre en la geometría. Pero esta intuición debe encontrarse en nosotros *a priori*, es decir, antes de toda percepción de un objeto; y por tanto debe ser una intuición pura, no empírica. Pues las proposiciones geométrias son todas apodícticas, es decir, están enlazadas con la conciencia de su necesidad, por ejemplo, el espacio tiene sólo tres dimensiones; pero tales proposiciones no pueden ser juicios empíricos o juicios de experiencia, ni pueden ser deducidas de éstos (Kant, 1787/2011, [B41], p. 76; Estética Trascendental § 3)

Kant expone que solo puede ser posible una explicación apodíctica de los juicios de la geometría si aceptamos que el espacio es una forma *a priori* de la sensibilidad. Por tanto, la dificultad misma de la geometría como conocimiento apodíctico radica en la concepción que se tenga del espacio. Tiempo después, las geometrías no euclidianas, representadas por cuatro autores importantes de los siglos XVIII y XIX, Gauss, Lobatchewsky, Riemann y Helmholtz, a diferencia de Kant, convendrían en que los orígenes de la naturaleza apodíctica de la geometría se sustentan en fundamentos empíricos, poniendo en suspenso la postura kantiana acerca del espacio como intuición *a priori*, pues, por ejemplo: "uno de los objetivos de Riemann fue demostrar que los axiomas particulares de Euclides eran empíricos, en lugar de, como se había creído, verdades autoevidentes" (Kline, 1972/1992, Vol III, p. 1175).

En el marco de este contexto, Bertrand Russell tomó partido en esta discusión desde un punto de vista idealista. En 1897 publica su segundo libro titulado *An essay on the foundations of geometry*, año en el que guarda un aprecio por el idealismo de Bradley y Mc Taggart pero que abandonará en 1900. El idealismo en cuestión sostiene que: "en realidad solo hay una cosa, que lo es todo y que es la conciencia. Y los únicos enunciados realmente verdaderos son los que refieren al todo (o absoluto, o conciencia absoluta)" (Mosterin, en Russell, 1944/2008, p. 13). A bordo de esta doctrina, Russell postula en *Foundations of geometry* una tesis que da un nuevo giro hacia las posturas kantianas del espacio, esto es: "[la geometría proyectiva es] la verdad necesaria de cualquier forma de externalidad y es, completamente *a priori*, ya que tal forma es necesaria para la experiencia" (Russell, 1897, p. 6; §9). Por tanto, para el Russell de 1897, las condiciones *a priori* para toda experiencia del espacio consiste concebir que un sujeto posee internamente cierta forma de externalidad. Esto significa que dada una multiplididad de objetos en el espacio, este sujeto los presupone como múltiples y diferenciados, siempre y cuando dicha forma de externalidad sea *a priori*. Esta condición *a priori* Russell la ubica en el marco de la geometría proyectiva. En este trabajo, por tanto, enfocaré mis intereses en esa etapa idealista de Russell, que es en la que postula sus respectivos axiomas de la geometría proyectiva.

Russell confiesa que: “no es especialista de ninguno de los temas históricos que trata, con una sola excepción: Leibniz” (Mosterín, en Russell, 1944/2008, p. 25). Evidentemente, uno de los filósofos que Russell conoce con detalle es Leibniz, y, aunque en su *Exposición crítica de la filosofía de Leibniz* sus críticas al pensador alemán suelen ser muy contundentes, las ideas básicas que constituyen sus *Foundations of geometry* tienen sus orígenes en el pensamiento leibniziano, y más específicamente, en el proyecto geométrico inacabado que presentó a pensadores de su época como Huyggens y L’Hopytal, el *Analysis situs*. Efectivamente, Leibniz no logró sistematizar, de manera axiomática, este proyecto. Solo hay cartas y fragmentos que contienen la estructura de un proyecto ambicioso con el que se pretendería justificar la idea de que tanto la geometría euclidiana como la cartesiana eran geometrías incompletas.

Leibniz empieza a concebir esta geometría en el periodo que va de 1677 a 1680, aproximadamente, periodo posterior a su estancia en París, que fue de 1672 a 1678 (Cfr. Russell, 1944/2008, p. 630). El periodo de París fue fundamental para su formación matemática, pues allí interactuó con personajes como L’Hopytal, Bernoulli y Huyggens. De esa época, los intereses por Euclides y la geometría aumentaron en él considerablemente y lo llevaron a pensar una geometría que tuviera: “grandes ventajas sobre el Álgebra, que requiere grandes rodeos para llegar a las demostraciones y construcciones geométricas, mientras que este método sigue las figuras con la vista, alivia la imaginación y se podría hacer así una descripción de una máquina” (Leibniz G. W., 1679-1680/2015d, p. 418). Esta geometría establecería una serie de condiciones formales que determinarían a la noción de *situs* o lugar como fundamento para todo tipo de relaciones de magnitud. Por tanto, esta geometría del *situs* sería anterior y más general que la geometría elemental y la cartesiana, las cuales recurren a figuras y magnitudes para el desarrollo de sus procesos demostrativos. A dicha geometría la denominará *Analysis situs*.

Con esto en mente, Leibniz puede afirmar que todas las geometrías métricas tienen un fundamento muy diferente a la intuición y a la indemostrabilidad evidente de los axiomas, y así: "cuando los Elementos hayan sido demostrados de una vez por todas mediante nuestros caracteres, podremos hallar fácilmente soluciones para los problemas, que muestren inmediatamente sin más esfuerzo las construcciones y demostraciones con líneas" (Leibniz G., 1679/2015b, p. 442). Esto significa que el *Anlysis situs* de Leibniz constituye la posibilidad de identificar la naturaleza apodíctica de la geometría en un espacio en el que no se requiere de dibujos o formas geométricas, sino de relaciones entre objetos representadas por medio de símbolos.

De acuerdo con lo anterior, tanto la *geometría proyectiva* como el *Analysis situs* son geometrías que pueden prescindir de la construcción de figuras y de magnitudes y, por ende, no son geometrías métricas o cuantitativas, sino cualitativas. Las geometrías métricas, o cuantitativas, son aquellas cuyos espacios incorporan nociones como distancia, ángulos, congruencia y transposición; a estas geometrías pertenecen la euclidiana, la cartesiana y las no euclidianas. Las geometrías cuyos espacios tienen características cualitativas, o también denominadas proyectivas, son aquellas en las que solo se tiene en consideración relaciones de posición, y prescinden de las nociones métricas que mencioné antes. La geometría proyectiva y el *Analysis situs*, son, por tanto, geometrías cualitativas, y ambas anteceden a las geometrías métricas, teniendo en cuenta que para Russell la geometría proyectiva conforma la forma de toda externalidad y es una condición *a priori* para toda geometría métrica.

De la misma manera, para Leibniz, el *Analysis situs* es una geometría que puede servir como condición de posibilidad para cualquier enunciado geométrico métrico. Sin embargo, aunque haya años que distancien a Russell y a Leibniz, la influencia del pensador alemán sobre el pensador inglés, en este punto, debe ser considerable, pues ambas geometrías comparten elementos que pueden establecer parecidos de familia. Sin embargo, ¿en qué consisten las similitudes entre la geometría proyectiva y el *Analysis situs*? ¿cómo se desarrolla el *Analysis situs* y en qué se diferencia de otras geometrías? ¿Qué significa la palabra 'análisis' en el *Analysis situs*? Para responder a estas preguntas, y mientras exista este paralelo sobre la influencia de Leibniz en Russell, pretenderé formular en el siguiente trabajo, como hipótesis a defender, que las características cualitativas del espacio proyectivo de Russell evidencian profundos rasgos de parentesco con las características del espacio cualitativo del *Analysis situs* de Leibniz.

Para sustentar esta hipótesis, el presente trabajo expondrá el desarrollo y aplicación del *Analysis situs*, y se dividirá en tres partes. La primera pretenderá exponer el papel del método del análisis en el pensamiento leibniziano así como sus orígenes y variaciones a través del pensamiento moderno. En la segunda parte expondré un paralelo entre la geometría de Euclides y el *Analysis situs*. Elucidaré, así, los aspectos que definen a la geometría euclidiana como ciencia demostrativa y el modo en el que Leibniz aplica el *Analysis situs*. De la misma forma se mostrarán las dificultades inherentes que Leibniz halló en Euclides y, por tanto, los motivos que lo incitaron a formular una geometría cualitativa. Igualmente presentaré las primeras nociones que Leibniz formula para constituir el *Analysis situs* y que Russell retomará para consolidar los axiomas de un espacio cualitativo proyectivo. En la tercera y última parte expondré en qué sentido, tanto la geometría proyectiva como el *Analysis situs* son condiciones de posibilidad para las geometrías métricas. Expondré en qué sentido los axiomas de las gometrías métricas guardan rasgos de parentesco con la noción de extensión leibniziana y los conceptos que permiten revelar los rasgos de parecido entre la geometría proyectiva y el *Analysis situs*.

Capítulo I

El método del análisis y el análisis en la obra de Leibniz

El método del análisis recubre todo el pensamiento leibniziano. El filósofo de Leipzig lo concebió, según los términos de su propio lenguaje filosófico, como un proceso de resolución de elementos complejos en elementos simples (Cfr. Pasini, 1997, p. 35). Este va acompañado, además, de su respectiva cara opuesta, aunque complementaria, la síntesis. Leibniz (1646-1716) afirma que en la pareja *análisis-síntesis,* el análisis es un proceso de descomposición que revela, progresivamente, principios o *elementos* simples, que constituyen una configuración compleja. Admite, por otro lado, que la *síntesis* se desarrolla como un ejercicio de composición en el que se toman los elementos simples que surgieron tras la descomposición y los combina para construir un conocimiento nuevo; por ello, esta *síntesis* es *combinatoria*: “combinación o síntesis, es una conjunción de pensamientos, incluso, tal vez arbitraria, concebida para permitir que surja algún nuevo conocimiento” (Pasini, 1997, p. 38). Sin ampliar la diversidad de usos que Leibniz identifica en éste método analítico, me enfocaré en la aplicación que le da en la geometría que tenía en mente: el *Analysis situs*.

El método del análisis aparece en la antigüedad, con los trabajos que los geómetras griegos elaboraron y aplicaron en el desarrollo de demostraciones tanto de teoremas, como de problemas geométricos. En la tradición de la geometría alejandrina, con los estudios de Pappus (290-350), el método del análisis era definido como aquel en el que se asumía como conocido lo desconocido. Asumíamos como conocido lo que se iba a buscar, o lo desconocido, y determinábamos las consecuencias que lo conectaban con algo conocido. Posteriormente se realizaba un proceso de regresión desde lo conocido. Se organizaban los pasos ascendentes que habían aparecido, pero regresivamente, hasta volver a aquello que habíamos admitido como conocido; este proceso tiene el nombre de síntesis. Éste era el método que los griegos desarrollaron y que, según Descartes (1596-1650): “lo guardaban para ellos solos, como un gran secreto” (AT. VII. 1908, p. 156. Trad. Vidal Peña). Si fue un secreto bien guardado o no, es innegable la influencia tan significativa que tuvo en todo el pensamiento moderno. Sobre este célebre método se generaron diferentes modos de aplicación, sobre todo en el campo de la lógica; esto causó que fuera comprendido de dos formas diferentes y que condujeron a que su aplicabilidad fuera por variantes, aparentemente, diferentes: en una se entiendía el análisis como un método que revela relaciones entre objetos geométricos, esta variante corresponde al análisis de los geómetras griegos. La segunda vía se basa en una interpretación proposicional que expone relaciones de implicación o relaciones de causas y consecuencias lógicas entre proposiciones.

El análisis, como herramienta, ofreció aportes destacados para el desarrollo de la ciencia y para el desarrollo de la filosofía moderna, esto significa que: "sirvió como modelo para algunas de las más importantes ideas en la historia de la flosofía, incluyendo la historia de la metodología y la filosofía de la ciencia" (Hintikka & Remes, 1974, p. 1), lo que lo convirtió en uno de los instrumentos más destacados que sirviera de medio para el incremento de las investigaciones que interesaban al pensamiento filosófico y científico de los siglos XVI y XVII. Un ejemplo destacable sobre lo anterior recae sobre la figura de Descartes, considerado por la tradición filosófica como el fundador de lo que conocemos hoy como *geometría analítica*. Como segundo ejemplo, dentro del conjunto de pensadores modernos, resulta inevitable mencionar a Isaac Newton (1642-1727). Al igual que Descartes, Newton aceptó que el progreso de la ciencia sería posible si el método experimental se fortaleciera a través del método del análisis-síntesis, pues para el físico inglés este era el modelo por excelencia de la demostración, y su procedencia estaba en la antigua geometría griega. Esto llevó a que Newton equiparara el método del análisis con el razonamiento *inductivo* y a la sintesis con el razonamiento *deductivo*. Con esa pareja metódica, Newton resaltaría, por un lado, su constante admiración por la geometría griega y, por otro, le entregaría su confianza para elaborar modelos de explicación de fenómenos naturales.

No es menos significativo el valor del método del análisis para Leibniz en lo que refiere a la estructura de toda su filosofía y, por supuesto, en lo que refiere al uso que le dio en todas sus investigaciones científicas. Para el caso de la geometría euclidiana, Leibniz resalta constantemente que dicha ciencia: "no lleva el análisis hasta el final, como lo hace ésta nueva característica mediante la cual yo demuestro por ejemplo que la intersección de dos superficies esféricas es un círculo, y cosas semejantes, sin emplear la imaginación" (Leibniz G. W., Leibniz a Huygens, 1679-1680/2015d, p. 418). Como vemos, Leibniz refiere a que tanto la geometría euclidiana, como la cartesiana, no hacen uso de un análisis más completo, sino que configuran construcciones geométricas basando sus principios en relaciones de magnitud, partiendo, de ese modo, desde las propiedades intrínsecas de los elementos geométricos más simples de la geometría, es decir, desde lo que son y cómo cada uno de ellos se define. Determinan, así, relaciones de magnitud entre rectas, ángulos y circunferencias; cálculos y ecuaciones que derivan, sintéticamente, en la representación gráfica de una construcción sobre un plano coordenado. A las geometrías que se fundamentan en relaciones de magnitud se les denominan métricas. En este punto, el comentario que Leibniz expresaba a Huygens, a propósito de la geometría, podría traducirse en lo siguiente: las geometrías métricas no han aprovechado las ventajas que el análisis puede ofrecer para fundamentar una geometría mucho más clara. Con esta idea en mente, Leibniz pretende forjar una geometría en donde el análisis le permita prescindir de magnitudes y de representaciones geométricas. Pretende desarrollar, más bien, una geometría que solo se determine a partir de carácterísticas cualitativas; a éste tipo de geometrías se les denomina no-métricas o proyectivas.

Ahora bien, si Leibniz define al método del análisis como resolución de complejos en términos simples (definición que difiere ampliamente en lo que refiere al análisis geométrico de los griegos), ¿qué significa, entonces, llevar éste método hasta el final? ¿esto tiene algún vínculo con el análisis antiguo? ¿pudo este análisis influir en el propio Leibniz? ¿cómo veía Leibniz éste método a la luz de su proyecto geométrico, el *Analysis situs*? Más en concreto ¿qué significa la palabra *análisis* en la expresión *Analysis situs*? Teniendo en cuenta lo anterior, en este capítulo sustentaré la idea de que el método del análisis de Leibniz se diferencia del método de los géometras griegos por criterios profundamente lógicos. En este sentido, Leibniz aplicará su interpretación lógica del método analítico en el campo de la geometría para, de ese modo, trascender las características métricas de las geometrías en general. Con este punto en consideración, Leibniz estructurará una geometría de relaciones cualitativas entre objetos indefinibles, pero necesarios para toda clase de geometría. Por ende, en la primera parte de éste capítulo pretenderé exponer lo que significa el método del *análisis-síntesis* en la geometría griega y su relevancia para las geometrías métricas. En la segunda parte presentaré el giro lógico que este método tuvo en la modernidad, gracias a Giacomo Zabarella, Newton y Leibniz, para comprender la interpretación lógica del análisis como resolución de elementos complejos en simples. En el tercer apartado, pretenderé identificar los aspectos que Leibniz toma del anáisis para identificar las propiedades cualitativas en objetos geométricos y evidenciar, de ese modo, los primeros fundamentos del *Analysis situs*.

El método del análisis y la geometría griega

El metodo del análisis ha tenido diversas interpretaciones. Para el caso del presente apartado, me enfocaré en sus aspectos exclusivamente geométricos. ¿Qué es el método del *análisis*? Definirlo de una manera concreta no ha sido un asunto sencillo y los datos que hay al respecto en la historia del pensamiento científico y filosófico son amplios, tanto en el ámbito de la lógica como en el de la geometría. Por el contrario, dicha pretensión tiende a convertirse en un trabajo arduo y complejo, pues por la amplitud y diversidad de interpretaciones que ha tenido, los usos que se le han atribuído derivaron en diferentes enfoques. Iniciaron, por un lado, en la geometría como tal, mediante los problemas heredados por la tradición griega; posteriormente pasaron al campo de la lógica por las reflexiones que se llevaron a cabo en la Edad media y que pensadores de esa época denominaron *resolutio*, en referencia al análisis, y *compositio* en referecnia a la síntesis (Hintikka & Remes, 1974, p.1). Incluso llegaron a tocar los problemas mismos del método en filosofía. En lo que sigue expondré la influencia y las aplicaciones de este método en la tradición geométrica griega.

Las primeras referencias al método del análisis provienen de Aristóteles y, curiosamente, se hallan en la *Ética Nicómaco*:

> Pues el que delibera parece que investiga y analiza de la manera que hemos dicho, como si se tratara de una figura geométrica (sin embargo, es evidente que no toda investigación es deliberación, por ejemplo, las matemáticas; pero toda deliberación es investigación), y lo último en el análisis es lo primero en la génesis (Aristóteles, trad, 1993, p. 1112b-20)

La cita de Aristóteles presenta una noción muy oscura sobre el método, pero expone uno de sus rasgos más esenciales: el hecho de que lo último en el análisis es lo primero en la génesis. Es decir, que puede admitirse una secuencia de pasos que parte desde algo desconocido y se dirigue hacia algo conocido, lo que puede ofrecerse ahora como origen de algún elemento en tanto principio. Sin embargo, en esta referencia, Aristóteles aún no presenta una estructura formal o sólida sobre este método geométrico. Lo que el filósofo estagirita presenta como un importante principio del análisis se presenta como el punto de llegada en el proceso, que es, en verdad, el punto de partida para el desarrollo de una síntesis.

Una referencia ineludible sobre el método del análisis se halla en los *Elementos* de Euclides. En una adición al libro XIII se explica cómo se llevan a cabo las demostraciones de las proposiciones 1 a 5 según el procedimiento del análisis y la síntesis; este anexo se titula "¿Qué es análisis y qué es síntesis?"[1] y expone lo siguiente:

> *Análisis* es la asunción de lo buscado como si ya fuera admitido ‹y el acceso› por medio de sus implicaciones a algo que se reconoce verdadero. *Síntesis* es una asunción de lo que es reconocido ‹y el acceso› por medio de sus implicaciones a algo que se admite como verdadero [a la consecución de lo buscado] (Euclides, trad, 1982/2007. Vol. II. Lbr. XIII. Prop. I. Ver nota. De igual forma ver: Heath; I, 1956, p. 137-142).

Euclides expone que el procedimiento del método geométrico se desenvuelve de dos maneras: una analítica y otra sintética. A diferencia de la presentación de Aristóteles, la euclidiana es un poco más estructurada. El procedimiento analítico es un ascenso desde lo buscado al asumirlo como admitido o conocido y, mediante las consecuencias generadas se pretende arribar a algo ya conocido. De la misma forma, el procedimiento sintético es, de nuevo, una asunción de lo que se conoce como verdadero para regresar a aquello que se supone como admitido o conocido siguiendo el camino inverso al análisis, siempre y cuando dicho tránsito sea reversibe. Así, tanto el procedimiento analítico como el procedimiento sintético requieren uno del otro. En este punto, tanto Aristóteles como Euclides muestran que en el ámbito de la geometría, el método *analítico-sintético* tiene una estructura de ascenso y descenso que implica la existencia de ciertas relaciones entre los componentes o los elementos que constituyen la solución, bien sea la de un problema o la de un teorema, de los cuales hablaré más adelante en este apartado.

En seguida aparece uno de los problemas más interesantes en el interior de este método, y que conforma una de las primeras interpretaciones sobre él. Consiste en entender cómo proceden las relaciones entre aquellos enunciados que se van encadenando a lo largo del análisis. En otros términos, el problema consiste en saber si tales proposiciones o enunciados se encadenan de manera lógica (por implicación) o mediante relaciones de construcción. Con la formulación de este dilema, el método abrirá la posibilidad de ser

---

[1] La naturaleza y origen de este anexo al libro XIII de los *Elementos* de Euclides es problemático. Algunos sostienen que es una cita al margen que Pappus tuvo en cuenta para llevar a cabo sus estudios en geometría, al estudiar con profundidad ciertos estudios de Theeteto o Eudoxo. Hay quienes afirman que este es un fragmento redactado por Heron, al realizar sus estudios sobre el libro II de los *Elementos* (Cfr. Heath; III. The thirteen books of Euclid's elements, 1956, p. 442).

modificado. Sin embargo, coviene mirar, en primer lugar, lo que Pappus entiende por análisis y síntesis.

Pappus de Alejandría es una de las referencias más importantes a la hora de hablar sobre el método del análisis, pues dejó en la mesa de debate, a partir de sus comentarios a los *Elementos* de Euclides, las más interesantes discusiones gométricas. Pappus es considerado como uno de los últimos matemáticos y geómetras de la antigüedad, precisamente porque la amplitud de los comentarios que hizo a los problemas geométricos de su tiempo fue considerable. Su legado, para la época alejandrina, fue extenso y por ello, también fue uno de los autores que más influyó en filósofos como el mismo Descartes. Pappus define el método del análisis de la siguiente manera:

> Ahora bien, el analisis es el camino que parte de aquello que es buscado —como si estuviera admitido— a través de sus concomitantes, en su orden, hasta algo admitido en la síntesis. Pues en el análisis suponemos que aquello que se busca ya está hecho y preguntamos a partir de lo que resulta y, nuevamente, lo que es el antecedente de lo último, hasta que en nuestro retroceso tropezamos con algo ya conocido y primero en cuanto al orden. Y llamamos a aquel método análisis, como si fuera una solución hacia atrás. En la síntesis, por otro lado, suponemos que aquello que se alcanzó en último lugar en el análisis ya está hecho y, mediante la disposición de los que antes eran antecedentes como consecuentes en su orden natural y al vincularlos entre sí, llegamos finalmente a la construcción de la cosa buscada. Y a esto lo llamamos síntesis (Pappus, en, Hintikka, 1978/1998, p. 96).

En la cita antes mencionada hay una presentación del método mucho más estructurada que la de Aristóteles y la de Euclides, y expone como característica esencial el ascenso y el retroceso. Puede conjeturarse que para el mundo alejandrino el método del análisis se mantuvo intacto durante mucho tiempo, puesto que los parecidos que hay entre el análisis presentado por Aristóteles y Euclides respecto a lo expuesto por Pappus son evidentes. Ellos tres, por tanto, refieren a un mismo método, y Pappus atribuye su desarrollo a los trabajos de Euclides, Apolonio y Aristeo (Pappus, en Hintikka & Remes, 1974, p. 10).

Pappus estructura todos los comentarios que hizo a los anexos de los *Elementos*, complementando y aclarando todos los datos necesarios sobre el análisis. Lo más importante consiste en entender que definió el método en cuestión como una solución hacia atrás, pero, con una pequeña salvedad, siempre que acojamos la lectura que sugiere Hintikka y que comentaremos en breve: Pappus entiende los movimientos como el reconocomiento de ciertos *concomitantes* y no como las *consecuencias* que se infieren en una cadena de silogismos. La expresión que Pappus formula en concreto es la siguiente:

ἀνάλυσις τοίνον ἐστίν ὁδός
ἀπο του ζητουμένου ώ̔ς
ὀμολογουμένου δια τών ἑξής
ἀκολουθων[2] ἐπί τι
ὁμολογούμενον συνθέσει
(1974, p. 8)

La traducción de Hintikka y Remmes es como sigue:

> Ahora el análisis es el camino desde
> lo que es buscado –como si fuera de suyo admitido–
> que lleva por medio de sus concomitantes[3]
> [la traducción usual reza: consecuencias] [4]
> hasta algo admitido en la síntesis.
> (1974, p. 8)

Jakko Hintikka y Umto Remes explican que a la hora de interpretar la expresión griega τό άκόλουθον (*tó akolouthón*) (que se encuentra subrayada en la cita que está en griego), debe ser entendida más bien como *concomitante*, en lugar de la palabra *implicación* o la palabra *consecuencia*, por ello:

> Lo que queremos sugerir es que τό άκόλουθον en la descripción del análisis y la síntesis de Pappus no significa una consecuencia lógica, sino un término mucho más vago, como "*corresponde a*", o mejor, "*va junto con*" la conclusión deseada en las premisas a partir de las cuales esta puede ser deducida, tal vez en el sentido de permitirle a alguien deducir la conclusión a partir de ellas. Por ello nuestra traducción 'concomitante' en lugar de la usual "consecuencia" (1974, p. 14)

El análisis, por tanto, no es un método en el que las relaciones entre enunciados geométricos se entiendan a la manera de implicaciones lógicas, sino en relaciones de interdependencia entre objetos geométricos, con el fin de desarrollar, así, una construcción determinada. La importancia de traducir τό άκόλουθον por *concomitante*, involucra la idea de que el método del análisis refiere a un conjunto de pasos que se acompañan unos con otros de tal forma que hacen posible una construcción geométrica. En consecuencia, esta idea difiere de la concepción lógica del método, que identifica una serie de premisas lógicas dentro de las cuales unas se deducen de otras, como si fueran encadenamientos lógicos entre

---

[2] Subrayado propio.
[3] Subrayado propio.
[4] Aclaración de los autores.

proposiciones. Con esta distinción surge la necesidad de aclarar que el análisis no se puede entender sin más a la manera de la *interpretación direccional* o *proposicional*. La interpretación proposicional propone que el encadenamiento de las proposiciones que van apareciendo unas tras otras a lo largo del ascenso, poseen un sentido de implicaciones lógicas; así lo explican Hintikka y Remmes:

> […] tiende a sugerir que lo que está siendo analizado es el salto deductivo desde los axiomas hasta el teorema por probar y que es analizado por una secuencia de pasos deductivos (y análogamente por construcciones en el caso del análisis problemático). La llamaremos interpretación proposicional o la visión del análisis de pruebas (1974, p. 31)

Esta variante sugiere que el análisis puede ser entendido como el encadenamiento de una serie de premisas relacionadas lógicamente en donde unas se siguen a partir de otras en el interior de un conjunto de problemas o teoremas que se quieren probar. Sin embargo, al poner en juego el retroceso en este contexto, la interpretación proposicional presenta el siguiente problema: si lógicamente en el análisis una premisa *P* implica una premisa *Q*, tras el retroceso, con el desarrollo de la síntesis, *Q* no siempre implicará a *P*, y esto es lo que la interpretación proposicional parece exponer (Cfr. 1974, p. 12). Este problema de la interpretación proposicional exige que se estime, por tanto, cierta prudencia o cuidado en la elaboración de una demostración, puesto que: "hay, por tanto una posibilidad de error, a menos que se tome cierta precaución. Mientas que, por ejemplo, B puede ser una consecuencia necesaria de A, puede suceder que A no sea una consecuencia necesaria de B" (Heath, I; 1956, p. 139). He ahí una razón por la que resulta más adecuado pensar que Pappus llegase a considerar que una premisa surja no como una consecuencia necesaria de la anterior. Esto legitima, con mayor propiedad, la aclaración que hacen Hintikka y Remmes sobre la traducción de la expresión τό άκόλουθον por *concomitante,* pues ratifica que se haga una distinción técnica con la palabra *consecuencia*, porque la interpretación proposicional puede llevarnos a pensar que los pasos establecidos en el análisis, desde un enunciado a otro, poseen cierta naturaleza de relaciones lógicas en términos de *implicación*.

La palabra *concomitante* no refiere a que una proposición se derive de otra a la manera de una conclusión. Tiene la intención de señalar que una cosa acompaña a otra en la construcción de una figura determinada. Expone, más bien, que en el interior de esas construcciones existen ciertas relaciones de interdependencia entre objetos geométricos, los cuales trabajan en conjunto para consolidar la construcción de una figura a partir de la formulación de un teorema o un problema determinados. Por esa razón la lectura de Hintikka y de Remes propone que el método del análisis-síntesis, al desarrollarse en el ámbito de la geometría, deba pensarse en términos de una construcción de figuras basada en un esquema determinado de definiciones, postulados y axiomas indemostrables, y que, por tanto, se tengan en mente sus representaciones gráficas y sus propiedades métricas. Hintikka y Remes siguen la idea de que los griegos trabajaban sobre, y con, construcciones, y no con el encadenamiento de proposiciones:

> Como antes he ayudado a mostrar, en el método griego se analizaba ante todo una configuración geométrica ejemplificada por una figura. Las diversas etapas del análisis iban desde un objeto geométrico hasta otro o quizás desde un número de objetos hasta un número de otros objetos. Así mismo, el comienzo y fin de un análisis […] era de manera típica *objetos* geométricos, no verdades geométricas (Hintikka, 1978/1998, p. 101)

El método del análisis debe ser entendido como una herramienta con la que se configuran construcciones de figuras a través de un proceso ordenado de interdependencia entre objetos geométricos. En el análisis se dan construcciones geométricas mediante relaciones entre los objetos elementales. Es posible percibir, por el momento, que en el método del análisis, visto desde su perspectiva geométrica, genera el siguiente problema: que si se interpreta de otras maneras, es posible entenderlo de una manera proposicional, como si fueran relaciones entre proposciones lógicas y no como relaciones de interdependencia entre objetos.

Pappus incluye dos aspectos importantes en la naturaleza misma del análisis:

> El análisis puede ser de dos tipos: uno busca la verdad, llamado así *teorético*. El otro sirve para llevar a cabo lo que se desea hacer, y este es llamado *problemático*. En el análisis teorético suponemos la cosa buscada como si fuera ella verdadera y pasamos mediante los concomitantes en orden como si ellas fueran verdaderas y existentes por hipótesis, hacia algo admitido; así, si lo que es admitido es verdadero, también la cosa buscada es verdadera, y la prueba será ir al contrario del análisis. Pero si hallamos algo falso en lo admitido la cosa buscada será, también, falsa. En el análisis problemático suponemos la cosa deseada como conocida y pasamos mediante los concomitantes en orden como si fueran verdaderos hasta aquello que es admitido. Si la cosa admitida es posible o se puede hacer, esto es, si es lo que los matemáticos llaman lo dado, también lo posible será dado. La prueba será, de nuevo, el inverso del análisis. Pero si encontramos algo imposible como admitido, el problema será imposible (Hintikka & Remes, 1974, p. 9-10)

Hay, por tanto, dos direcciones en donde el análisis es aplicable: por un lado se pretende demostrar la verdad de algo mediante su respectiva construcción, esto es, mediante un análisis *teorético*; por otro lado, aparece un análisis que busca establecer si una construcción puede llevarse a cabo o no, es decir, si ella es posible o imposible, esto es lo que Pappus señala como como un analisis *problemático*. Para el caso del análisis teorético, Heath explica que un enunciado puede seguir a otro y la construcción será viable si en el retroceso ella aparece allí contenida:

> Se requiere, digamos, probar que cierta proposición A es verdadera. Asumimos como hipótesis que A es verdadera y, a partir de esto, encontramos que, si A es verdadera, otra proposición B es verdadera; si B es verdadera, entonces C; y así sucesivamente hasta llegar a la proposición K que es admitida como verdadera. El objetivo de este método es permitirnos inferir, en orden inverso, que, puesto que K es verdadera, la proposición A admitida originariamente es verdadera (I. 1956, p. 139)

Podría parecer que Heath presenta el ejemplo del análisis teorético a la manera de la interpretación proposicional que Hintikka y Remes sugieren. La diferencia estriba en que en el análisis teorético, al geómetra le interesa elucidar en qué sentido un enunciado, mediante construcciones, es verdadero (deducible de los axiomas), según sus respectivas *concomitantes*. Para comprender mejor lo que quiero exponer en relación al análisis teorético, señalaré un comentario de Proclo respecto a sus aclaraciones sobre enunciados teoréticos y problemáticos:

> Pero cuando alguien enuncia que en *los triángulos isóseles, los ángulos en la base son iguales*, debemos decir que el enunciado es un *teorema*; porque tampoco es posible que los ángulos en la base de los triángulos isóseles deben ser desiguales. De ello se deduce que si alguien utilizara la forma de un problema y dijera *describir en un semicírculo un ángulo recto* sería considerado un no-geómetra. Todo ángulo en un semicírculo es recto (Proclo, en Heath, I; 1956, p. 126)

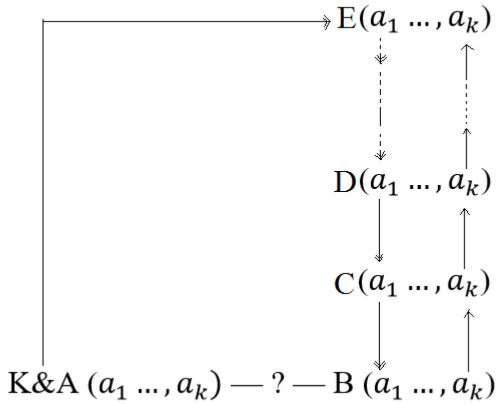
Si se quisiera demostrar la veracidad del enunciado "los ángulos en la base de los triángulos isóseles son iguales", que sería un enunciado A, se debe asumir que dicha proposición es verdadera, pues en un triángulo isóceles los ángulos de su base siempre serán iguales, de lo contrario no sería isóseles. Pero para demostrar esto debe hacerse la respectiva construcción a través de objetos geométricos, como puntos, rectas y círculos; así, en un análisis teorético deben estructurarse una serie de pasos que consoliden la construcción hasta arribar a un enunciado K que se tiene por verdadero, para mostrar a la realización de dicho enunciado, tal que K sea verdadero, y, posteriormente, mediante síntesis, elucidar que A es verdadero gracias a K.

La cita de Proclo, tomada de la edición crítica de Heath, muestra la diferencia que hay entre el análisis teorético y el problemático. Así, el análisis problemático debe postular un ejercicio de construcción que admita su posibilidad o imposibilidad, tal y como lo decía Proclo:

> Cuando, entonces, alguien enuncia de este modo, *incribir un triángulo equilátero en un círculo*, plantea un *problema*; pues también es posible inscribir un triángulo que no sea equilátero. De nuevo, si tomamos el enunciado *apartir de una recta finita contruir un triángulo equilátero*, esto es un problema, porque también es posible contruir un triángulo que no sea equilátero a partir de una recta finita dada (En: Heath I, 1956, p. 126)

El análisis problemático asume como conocido lo que se desea, y con ello, busca construir, paso a paso, las concomitantes que permiten llegar a un enunciado tal que legitime, en la reversabilidiad, la posibilidad de la construcción inicial. Sin embargo, tal construcción problemática siempre dependerá de lo que la proposición pida en concreto. Por ejemplo, en la Proposición I del Libro I de los *Elementos* (la cual trabajaré en el segundo capítulo), Euclides solicita de manera imperativa *construir a partir de una recta finita dada un triángulo equilátero* (Euclides, prop. I). A partir de dicha recta se podrían construir otros triángulos, pero lo que pide Euclides, imperativamente, es que se determinen los medios con los cuales sea posible construir un triángulo equilátero. Dejaré esto en este punto, para ocuparme de ello en el siguiente capítulo.

A continuación mostraré el ejemplo de un enunciado problemático que Heath propone para demostrar la aplicabilidad del método del análisis-síntesis en una construcción geométrica. Heath presenta un esquema que puede ser cotejado con estructura formal que presentan Hintikka y Remes. Se logrará demostrar, así, que un enunciado geométrico, en términos de interdependecia entre objetos geométricos, puede ser posible de construir. En primer lugar, el esquema lógico que Hintikka y Remes presentan para el método del análisis es el siguiente:



(Fig. 1)[5]

Vemos que en la figura se dan, en principio unos elementos iniciales, esto es, un conjunto de teoremas y axiomas representados por K y A (Cfr. Hintikka & Remes, 1974, p. 33). A partir de ello se pregunta si es posible derivar o llegar al enunciado B. Al proceder por análisis se asume como dado el enunciado B y a partir de él se construyen los concomitantes hasta llegar, de manera ascendente a E, que se tiene como un eniciado derivable de K y A. Luego, las flechas dobles indican que desde E puede hacerse un retroceso pasando por D hasta B, llegando a los axiomas y teoremas requeridos para la contrucción, con ello:

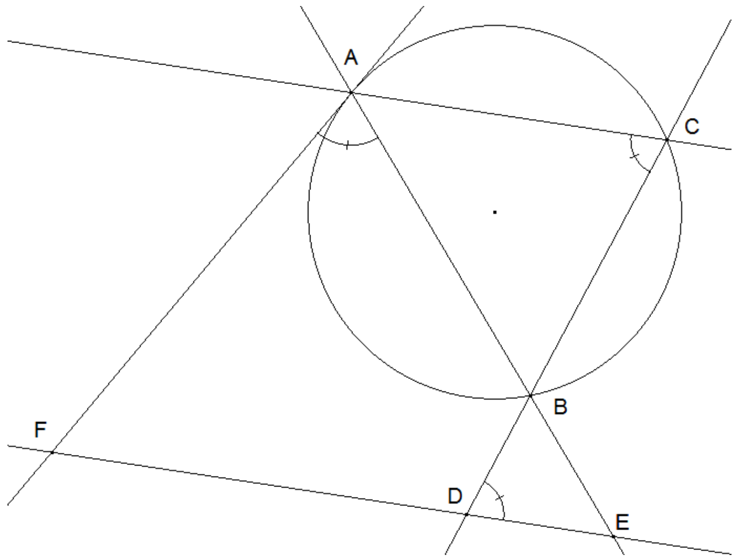
> El punto crucial aquí es que un importante aspecto de la utilidad heurística del método del análisis se debe a la posibilidad de traer a colación tanto lo que B dice de cierta configuración geométrica y lo que K y A dicen de él al mismo tiempo (Hintikka & Remes, 1974, p. 36)

Heath presenta un interesante ejemplo de un problema y su solución por vía de análisis-síntesis (1956, I, p. 141-142). El problema reza así: Dada una circunferencia y dos puntos externos D y E, se pide hallar un punto B, en la circunferencia, tal que, después de trazar las rectas DB, EB y hallar los cortes de estas con la circunferencia, A y B, se consiga que la recta AC sea paralela a la recta DE (Figura 2).

El análisis procede así:

---

[5] Figura tomada de: Hintikka & Remes, *The Method of Analisis. Its Geometrical Origin and Its General Significance*, 1974, p. 36.



(Figura 2)

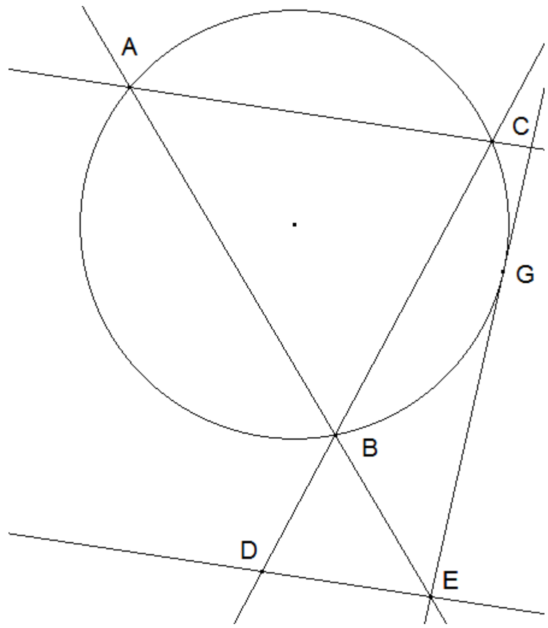
(i) Se asume que ya contamos con el punto *B* que satisface la condición impuesta. (Esto coincide con el punto de partida B en el diagrama de Hintikka). Por lo tanto se asume que *AC* es paralela a *DE*. Se procede a construir los concomitantes siguientes (lo que corresponde a las transiciones *C*, *D*… en el diagrama de Hintikka).

(ii) Se traza la tangente a la circunferencia que pasa por *A* y se obtiene el punto de corte *F*, de esta con la recta *DE*.

(iii) Es posible inferir que, en esas condiciones, los ángulos *FAE* y *CDE* son congruentes, de donde se sigue que hay una circunferencia que contiene los puntos *A*, *B*, *D* y *F*. Tales puntos se dicen, entonces, cocíclicos.

(iv) Dado lo anterior, se deduce también que el rectángulo construido con los segmento *AE* y *EB* coincide en área con el rectángulo construido a partir de *FE* y *ED*.

Este último resultado es la cima de la resolución del análisis (posición E en el diagrama de Hintikka). Veamos por qué (Figura 3):



(Figura 3)

Se puede mostrar, por un camino independiente, que el rectángulo construido a partir de los segmentos *AB* y *BE* coincide en el área con el cuadrado construido a partir de *EG*, tangente a la circunferencia.

La síntesis procede, entonces, en estos términos:

(i) Dada la circunferencia y los puntos externos *D* y *E*. Se traza la tangente a la circunferencia que pasa por *E*. Sea esta *EG*.

(ii) Se ubica el punto *F* sobre la recta *DE* tal que el área del rectángulo formado por *ED* y *EF* coincida en área con el cuadrado de lado *EG*.

(iii) Se traza la tangente a la circunferencia que pasa por *F* y se ubica así el punto *A*.

(iv) Se traza la recta *AE* y se obtiene el punto *B* en el corte con la circunferencia.

(v) Se traza la recta *DB* y se obtiene el corte con la circunferencia, *C*.

Es fácil probar, siguiendo la argumentación del análisis pero en sentido inverso, que *AC* es paralela a *DE*. Por lo tanto, el punto *B* así establecido es el punto buscado.

Con la posibilidad de sustentar los pasos en el retroceso, la construcción se hace más detallada. Como vimos, si el método del análisis no es un análisis proposicional, sino un método que elucida relaciones de interdependencia, entonces, es un método que exige la concepción de los objetos geométricos necesarios, como la congruencia, los ángulos, las distancias y las magnitudes. Siendo un método de construcciones, las demostraciones implican la necesidad de pensar las formas de las figuras geométricas que se requieren para la demostración del enunciado. Esto implica que es un método que al pertenecer al campo de la geometría euclidiana, exige la presuposición de que las nociones métricas sean el fundamento mismo de las construcciones.

Descartes concibió que "todos los problemas de la geometría pueden ser reducidos fácilmente a términos tales que no sea necesario posteriormente para construirlos, sino conocer la longitud de algunas líneas" (AT, VI, 1908, p. 369, trad, Guillermo Quintás Alonso). Para ello, recurrió al análisis de Pappus, reconociendo que tales construcciones podrían reducirse a longitudes o líneas, es decir a características métricas de la extensión, así:

> Inicialmente debe suponerse efectuada la resolución, dando nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, tanto a las que son desconocidas como a las que son conocidas. A continuación, sin establecer distinción entre líneas conocidas y las desconocidas debemos descifrar el problema siguiendo el orden que muestre de modo más natural las relaciones entre estas líneas, hasta que se identifique un medio de expresar una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por ecuación pues los términos de una de estas expresiones son iguales a los de la otra. Deben hallarse tantas ecuaciones como líneas desconocidas se han supuesto (AT; VI, p. 372. Traducción por Guillermo Quintás Alonso)

Vemos en esta cita que hay un parecido con el análisis de Pappus. Consiste en que Descartes supone conocidas rectas desconocidas asignándole letras o nombres. Partiendo de esto, los problemas que aborda los estudia según un método elemental, basado en letras que representan longitudes. Puede estructurar, así, una suma o una sustracción, el producto o la división entre rectas. Las letras son herramientas, por tanto, que sirven de apoyo para trabajar con magnitudes y pueden, aunque se tienen por desconocidas, trabajar con ellas como si ya fueran conocidas. Se puede entrever, por tanto, que tales procedimientos matemáticos están estrictamente vinculados a las magnitudes de las figuras. Descartes sotiene que se pueden reducir a nociones como la longitud, lo que permite pensar, que por medio de aquellas letras es posible llevar a cabo operaciones de adición, sustracción, productos y razones, y tras la resolución de las respectivas ecuaciones, es posible llegar a la construcción de una figura determinada.

La geometría cartesiana, por tanto, toma como fundamento la concepción del análisis de Pappus, pero lo ensambla con el álgebra, para solucionar problemas geométricos por medio de ecuaciones y variables, construyendo, de ese modo, relaciones de interdependencia entre objetos geométricos. En su geometría, Descartes supone el problema como algo resuelto. Para hallar las longitudes de una recta debe suponer que dicha magnitud, aunque desconocida, es conocida. Para ello se puede denominar *x* y deben hallar las relaciones entre esta cantidad desconocida con las cantidades conocidas de tal forma que pueda identificar el valor de *x*. Esta es la parte analítica del proceso. Ahora bien, el proceso sintético consistirá en determinar dichas relaciones de tal forma que se opere con la incógnita ya descubierta, para así encontrar la solución de la ecuación y con ello la figura como tal, lo cual quiere decir que en el fondo de una operación algebraica se encuentra la estructura del método del análisis-síntesis de Pappus.

En conclusión, la geometría analítica y la geometría euclidiana conciben el método del análisis-síntesis como un medio en el que las demostraciones se fundamentan en construcciones de figuras, de ahí que la crítica de Leibniz pretendiera sustentarse en lo que mencioné al inicio del capítulo: estas geometrías no llevaron el análisis hasta el final, pues admitieron que los problemas de la geometría, parten de nociones métricas. También limitaron toda investigación geométrica a relaciones de magnitud entre figuras geométricas. Llegado a este apartado, ¿cómo logra Leibniz ir más allá de la métrica, y por tanto, cómo logra llevar el análisis más allá de las figuras y las medidas? Esta será la pregunta que pretenderé responder el tercer apartado. Sin embargo, conviene revisar cúal fue el análisis del que Leibniz se valió para consolidar todas las investigaciones que tendrá en sus proyectos filosóficos.

El análisis-síntesis y la deducción-inducción

En el apartado anterior expuse el desarrollo del método del análisis en el campo de las geometrías métricas como la euclidiana y cómo influyó en la geometría analítica de Descartes. El comentario de Leibniz a Huyggens deja abierta la alternativa de pensar que estas geometrías métricas no aprovecharon las ventajas del análisis. Evidentemente, el método del análisis de la tradición de Pappus exige que los objetos geométricos sean pensados intuitivamente para demostrar un problema o un teorema determinado. Ahora bien, ¿cómo puede Leibniz llevar el análisis más allá de donde lo llevaron los geómetras griegos o el mismo Descartes? ¿cómo puede ser el análisis una herramienta que deja de lado construcciones y diagramas geométricos? ¿cómo puede el análisis dejar de lado nociones como longitud o distancia? Esto puede responderse si se tiene en cuenta que el método del análisis-síntesis tuvo ciertas variaciones que salieron del campo geométrico para pasar al campo de la lógica. Tales variaciones nacieron y se desarrollaron en el marco del pensamiento moderno y marcaron la pauta para que Leibniz asumiera la empresa de concebir un *Analysis situs*. Hintikka y Remes recuerdan que: "se ha sugerido repetidamente, entre Ernst Cassirer, J. H. Randall y Oscar Becker que el método del análisis-síntesis constituye el secreto metodológico del importante periodo heroico desde Galileo hasta Newton" (Hintikka & Remes, 1974, p. 105). A continuación expondré los desarrollos y los cambios que tal método tuvo en el pensamiento moderno.

El método del análisis ha estado sujeto a interpretaciones de diferente orden, y ha sido usado de múltiples maneras tanto en el ámbito de la lógica como en el ámbito de las ciencias modernas. Una interpretación sostiene que la pereja análisis-síntesis es cercana a la también pareja inducción-deducción. Entre los tipos de razonamiento aristotélico, que son dos, puede mencionarse aquellos que exponen las relaciones que van de los efectos a las causas, denominados razonamientos *quia*, y que establecen que de un conjunto de eventos particulares es posible identificar algún comportamiento general o común entre ellos; estos razonamientos tienen un aire de familia con las inducciones. El segundo admite que es posible ir de las causas a los efectos. Se le denomina *propoter quid*, y sostiene que dada una proposición universal es posible identificar efectos particulares, también se le denomina *deducción*. Estos tipos de razonamiento difieren entre sí, por los puntos de partida y llegada: el *propter quid* asume como punto de llegada efectos particulares que fueron deducidos por medio de un enunciado o una premisa general. Los razonamientos *quia* establecen como punto de llegada juicios universales a partir de una serie de eventos particulares, lo que evidencia que ambos son razonamientos opuestos entre sí.

Los razonamientos aristotélicos fueron interpretados y ajustados a las necesidades del pensamiento medieval, lo que revela, en principio, una separación entre el método analítico de la esfera geométrica y el método analítico que deriva en el campo de la lógica. En el mundo moderno, hubo una tradición de pensadores preocupados por entender el método del análisis y la síntesis, (también entendido como *resolutio* y *compositio*, heredado por los medievales). En el conjunto de este grupo pensadores estaba Giacomo Zabarella (1533-1589). El pensador italiano tenía en sus estudios sobre lógica, la intención de formalizar una exposición sobre los criterios de necesidad presentes en las relaciones causales que hay en los diferentes aspectos del saber humano por medio los dos caminos que he mencionado con anterioridad. Ernst Cassirer explica este punto de vista de la siguiente manera:

> La significación de estas reflexiones de Zabarella salta inmediatamente a la vista si las traducimos al lenguaje moderno. La distinción entre le método compositivo y el resolutivo no es otra cosa, en realidad, que la que media entre la *deducción* y la *inducción*. El mérito de la lógica de Zabarella consiste precisamente en haber sabido deslindar claramente estos dos métodos fundamentales, al mismo tiempo que los concibe y expone en su necesaria interdependencia. No basta con pensar la inducción como una acumulación fortuita y desordenada de una serie de casos concretos reunidos al azar: es necesario que, además, sepamos asirgnarles el lugar que les corresponde *dentro de la lógica misma* y encontrar su justificación. Pues bien, estos fundamentos se descubren y establecen mediante el método conceptual del análisis, que hay que colocar al lado de la inducción como correlativo a ella y como su expresión lógica (1906/1965, I, p. 164)

Zabarella es uno de los primeros autores que expuso la posibilidad de hallar criterios lógicos que develen cierto orden en las relaciones de los estados de cosas. De acuerdo con Cassirer, recurre a la distinción entre *resolutio* y *compositio* y, por tanto, a la misma pareja análisis y síntesis, pero, ¿cómo se entiende dicho método en términos lógicos? ¿cómo introduce la relación entre la inducción y con el método del análisis? La novedad que establece Zabarella consiste en haber logrado diferenciar, metodológicamente, el análisis de la síntesis en términos de deducción e inducción. Sostiene que en la inducción los hechos deben ajustarse a una lógica explicativa. En consecuencia, la inducción es la expresión lógica del análisis. Zabarella presenta el análisis como un método que lleva acabo la descomposición de una serie de hechos de tal forma que se puede llegar a sus primeros principios, los cuales son simples e indemostrables, pero dichos principios no surgen sin más, pues su importancia reside en que debe sacar a la luz cosas ocultas, es decir, su meta no es conocer, sino descubrir, inventar (Cfr. Cassirer, I, 1906/1965, p. 165). Una investigación que dirige los pasos que van de los efectos a las causas conduce los razonamientos hacia el descubrimiento de los primeros principios que constituyen un fenómeno determinado. Pareciera, entonces, que en el método del analisis, desde el punto de vista de Zabarella, existe cierta circularidad, que en términos lógicos, tiene su respectivo correlato con el análisis geométrico. Cassirer sostiene lo siguiente:

> La peculiaridad característica del círculo lógico consiste en que coniciden en el punto de partida y el punto de llegada, en que empezamos partiendo de A para probar B y terminamos probando B con base en A […] no nos detenemos en el conjunto abstracto de condiciones que obtenemos mediante el análisis de un determinado fenómeno natural, sino que procuramos reconstruir y estructurar el fenómeno mismo con base en él. Por consiguiente, el hecho de que partimos lo consideramos a la vez como *conocido* y *desconocido*: como conocido, en cuanto es el centro del que se retrotrae todo el movimiento discursivo; como desconocido, por cuanto que lo que en verdad nos proponemos, el verdadero problema, consiste en iluminarlo y esclarecerlo (1906/1965, I, p. 167).

Pueden identificarse en las ideas de Zabarella puntos de consonancia y de diferencia entre su versión lógica del análisis y el método geométrico heredado por Pappus. Un parecido importante es que lo propuesto por Zabarella como punto de partida y punto de llegada, en el campo del análisis geométrico, consiste en aceptar como conocido algo desconocido. Para Zabarella el análisis revela las razones lógicas que hay en el interior de la estructura de una contrucción. Por tanto, para el pensador italiano la inducción y la deducción, en tanto razonamientos aristotélicos, tienen su respectivo correlato con el análisis y la síntesis. Para el caso de Zabarella, exponen una serie de consecuencias que van apareciendo en el marco de un conjunto de hechos determinados, de tal forma que puede ser posible: “analizar el hecho concreto para reducirlo a sus diversos elementos y partes integrantes, comprobando cuáles son las circunstancias concomitantes especiales en que ese hecho se manifiesta” (1906/1965, I, p. 168). Pero, a diferencia del método griego, que se preocupa por demostrar, el método de Zabarella, mediante la logica, pretende descubrir. El análisis que expone Zabarella, por tanto, tiene la pretensión de descubrir los principios primeros que son desconocidos en el marco de un problema, pero se admiten como conocidos, en tanto pueden ser descubiertos.

Zabarella expuso una propuesta que modifica la concepción sobre el análisis de Pappus, que consiste, principalmente, en llevar la investigación hacia la búsqueda de las relaciones causales entre lo conocido y lo desconocido. Tales relaciones causales se revelan mediante la estructuración del orden lógico y secuencial, que sirve de medio para mantener unida la pareja análisis-síntesis. Esto lleva a que se piense un problema como una totalidad constituída de partes, unas más complejas que otras, de modo que tras la descomposición sea posible llegar a un principio universal y necesario que lo condiciona. En consecuencia, si se mira esta variación del *análisis-síntesis*, a la manera del correlato de la pareja *deducción-inducción*, la síntesis correspondería a la deducción, mientras que el análisis correspondería a la inducción, así: "la síntesis va de los primeros principios y de los elementos más simples al compuesto que se genera de ellos; el análisis, en cambio, va del compuesto a los elementos simplíscimos y primeros" (Angelis, 1968, p. 35).

El método del *análisis-síntesis* no solo influyó en la visión metodológica experimental de los modernos, como Zabarella. Es de observar que él piensa que hay una correlación con los razonamientos *propter quid* y *quia*, que refieren, respectivamente, a la inducción y la deducción. En consecuencia, como Zabarella, el pensamiento moderno aplicó el método de Pappus no tanto en problemas geométricos, sino en el estudio de fenómenos naturales, para elucidar sus componentes constitutivos. El análisis, o la inducción, revela, entonces, las relaciones de interdependencia de los componentes dados en un fenómeno.

En este punto presentaré el papel que jugó el método del análisis para el caso de Descartes. El filósofo francés considera que el análisis tiene un nivel de importancia más alto que la síntesis, por cuanto permite llegar a las causas concretas de un problema determinado. Asume que para las reflexiones de carácter metafísico, el método analítico permite descubrir las respectivas causas de algo. Descartes recibe una recomendación interesante por parte de Mersenne al respecto, tras las objeciones que formula a las *Meditaciones metafísicas* de 1641. Dicha recomendación consiste en invitarlo a organizar las ideas de su tratado mediante definiciones, axiomas y postulados en un esquema de explicación. Con esto completaría la investigación, y daría, así, cierta claridad y facilidad en la lectura. Es decir, Merssenne pide a Descartes que realice la síntesis de lo que había analizado.

Las *Meditaciones metafísicas* son el resultado de un proceso de análisis detallado, en donde Descartes llega al *yo*, analíticamente (esto es, mediante las dudas que le causan todas las aparentes verdades). Posteriormente supone como dado algo desconocido y, a partir de él, asume que existe, dado que piensa. Éste enunciado surge por análisis, y al ser descubierto, suponemos que podemos ascender sintéticamente para estructurar otras verdades. En las *Meditaciones* pueden establecerse relaciones de interdependencia entre los elementos constitutivos dentro de todo el aparato sistemático del pensamiento cartesiano, tal y como sostiene Jaakko Hintikka:

> No percibimos el modo de pensamiento propio de Descartes hasta que no nos damos cuenta de que también su sistema filosófico estudia algunas dependencias funcionales. Por ejemplo en sus Meditaciones metafísicas Descartes estudia así (según sus propias luces) algunas interdependencias entre elementos diferentes de nuestra ontología. Mediante el empleo de conexiones intuitivamente claras entre estos factores esperaba razonar de manera regresiva hasta la estructura metafísica del mundo y hasta sus determinantes, incluyendo la existencia de Dios (1978/1998, p. 110)

El análisis sirve a Descartes para partir del presupuesto de que existe y, a partir de allí, llegar a nuevos resultados alrededor de un sujeto que piensa. Logra establecer, de una manera más simple, algunas certezas que no causan indubitabilidad. Así, Descartes postula que los sentidos no son fuente de certidumbre, pues engañan. Busca, mediante descomposición, algo que no siga causando dudas, y ve que es su propia mente, su yo, o su alma, aquel elemento simple indubitable, precisamente porque piensa, y es lo que le asegura la certeza o el punto de partida de sus investigaciones. Todo lo que este sujeto puso en duda está relacionado entre sí, es decir, posee ciertas conexiones de interdependencia que deben volverse a construir. Por tanto, al fundarse el paso del análisis, pueden exhibirse las conexiones de interdependencia que son halladas en la naturaleza del espacio, en la del tiempo, en la del cuerpo humano, en la de las pasiones del alma, en la de los astros y, en la de la geometría, etc. El análisis, como método para una metafísica del mundo, exige una síntesis determinada, que construya desde las causas descubiertas, la síntesis de ese mundo del cual se dudó al principio. Por esa razón Mersenne dice a Descartes que:

> Sería muy útil, por ello, que, al final de nuestras soluciones, después de haber establecido algunas definiciones, postulados y axiomas, dispusiérais todo según el método de los geómetras, en el que tan versado os halláis, a fin de que, ordenadamente y como de una

> ojeada, vuestros lectores encontrasen satisfacción y vos infundiérais en su espíritu el conocimiento de la divinidad. (AT; 1908, VII, p. 128. Traducción por Vidal Peña).

Con esta observación, Descartes accede a organizar las ideas desarrolladas en sus *Meditaciones* de manera sintética, de forma tal que establece unas definiciones básicas sobre sus conceptos, además de una serie de axiomas y con ello unos postulados elementales para realizar una construcción sintética (Cfr. AT; 1908, VII, p. 160-170). La síntesis desarrollada por Descartes tiene la finalidad de responder a las objeciones de Mersenne, pero, en esencia, sus intereses estaban en el uso y aplicación del método analítico, por ello confiesa al sacerdote, tras la respuesta de sus objeciones del siguiente modo:

> En mis meditaciones he seguido el método analítico, pues me parecía el más verdadero, y el más apto para enseñar; en cambio, la síntesis (que es sin duda lo que me solicitáis), aunque sea útil añadirla al análisis en las cuestiones de geometría, no se acomoda tan bien a las materias de la metafísica (AT; 1908, VI, p. 156. Traducción por Vidal Peña).

El método del análisis tiene como finalidad disponer los medios que permiten descubrir los principios metafísicos del mundo. Por tanto puede asumirse que hay una serie de eventos sobre los cuales debe dudarse para descomponer toda esa complejidad de hechos en un principio incuestionable e indivisible. Vale, por tanto, como el método más adecuado para las reflexiones metafísicas y es el más propicio para construir, sintéticamente, un sistema filosófico desde la propia capacidad que tiene el yo para pensar. El proceso sintético no fue consolidado, no porque lo omitera o lo ignorara, sino porque Descartes consideró que por medio del análisis era más viable poner en actividad total la invención, de la misma forma que pretendió Zabarella en sus interpretaciones sobre el análisis lógico, esto es, la capacidad de llevar a cabo todo un proceso inductivo.

Cuando Descartes responde a Mersenne, afirma que el método de los geómetras va por dos vías, por el análisis y el orden. El orden refiere a que las primeras cosas que se deben conocer no deben depender de las que le siguen, y las cosas siguientes se deben seguir por las anteriores, a la manera de series o progresiones. El orden, por tanto, supone que las primeras cosas que no dependen de nada deben ser completamente simples o, como las llama Descartes, absolutas; al respecto, en las *Reglas* Descartes habla sobre el método, más exactamente en la regla VI, y sostiene lo siguiente:

> Llamo absoluto a lo que contiene en sí la naturaleza pura y simple de que aquí es cuestión; por ejemplo, todo aquello que es considerado como independiente, causa, simple,

> universal, uno, igual, semejante, recto u otras cosas de esta índole; y a esto primero llamo lo más simple y lo más fácil, a fin de poderlo utilizar al resolver las cuestiones […] Y en esto consiste el secreto de todo el método, en advertir con diligencia en todas las cosas lo más absoluto. Pues algunas cosas, desde un punto de vista, son más absolutas que otras, pero consideradas de otro modo son más relativas; así, lo universal es más absoluto que lo particular, porque tiene una naturaleza más simple, pero también puede llamarse más relativo, porque depende de los individuos para existir, etc. (AT; X, p. 381. Traducción por Luis Villoro)

La exposición de Descartes a Merssene elucida las dos respectivas interpretaciones del análisis que presenté en el apartado anterior, la geométrica y la proposicional. La que se acaba de presentar expone un análisis como una descomposición en donde se halla un orden consecutivo de implicación en cada paso, que descubre un elemento mucho más independiente o absoluto. Esta noción de orden, en Descartes busca algo que no dependa de otra cosa, por ello es absoluto, y en ese sentido, ha de ser simple. En consecuencia, en este tipo de método analítico resulta esencial el orden a seguir en las relaciones de las partes que forman parte de los objetos que se quiere descomponer. Por ello resulta evidente descubrir en esas relaciones implicaciones lógicas.

La segunda distinción que hace Descartes sobre el método de los geómetras también es doble, una por resolución, o análisis, y la otra por composición, o síntesis. Esta distinción refiere a un análisis muy parecido al de Pappus, pero tiene su correlato con la pareja *inducción-deducción*. Descartes sostiene que el análisis o la resolución es el camino más apropiado para realizar una construcción metódica y, con ello, la esencia de este campo será la necesidad del orden, pues: "si escapa a la atención el más mínimo detalle de ella, sus conclusiones no parecerán necesarias, y no hay costumbre de expresar con cierta amplitud las cosas que son por sí mismas claras" (AT; X, p. 156. Traducción de Vidal Peña). La síntesis aparece como si pretendiera examinar un evento desde sus causas a los efectos, y muestra con exactitud las conclusiones por medio de definiciones, axiomas y postulados, sin embargo "la síntesis no satisface por entero, como sí lo hace el análisis, a quienes desean aprender: pues no enseña el camino seguido para construir la cosa" (AT; VII, p. 156. Traducción por Vidal Peña). El análisis, para Descartes, establece las condiciones para la construcción sintética de un objeto al descubrir aquellos principios universales, como si fueran relaciones de interdependencia. Jakko Hintikka, por ello, ya explicaba que en el método de Descartes aparecen relaciones concretas de interdependencia entre elementos determinados:

> El empleo que Descartes hace de su método analítico (en el sentido de un procedimiento que se centra en el estudio de dependencias funcionales) en su filosofía torna a su pensamiento tan novedoso y tan moderno. Al mismo tiempo hace que la filosofía de Descartes sea tan difícil de entender y de reconstruir si uno solo se vale de métodos proposicionales, por ejemplo, de métodos que dependen de las relaciones de consecuencia lógica que se dan entre proposiciones (Hintikka, 1978/1998, p. 108)

Vemos, por ende, que los intereses del pensamiento moderno estaban enfocados en la búsqueda de un método que saliera del campo de las demostraciones geométricas para pasar al campo de la explicación de fenómenos naturales. El análisis sería, de ese modo, el modelo de un método que fundamenta la pareja inducción-deducción; el modelo con el que se que se podría resaltar que estos dos esquemas son el ancla que lleva adelante las investigaciones científicas, a diferencia de Zabarella y Descartes, quienes se enfocaron en la lógica y en la metafísica, respectivamente. Lo anterior puede visualizarse en Isaac Newton, quien en su *Óptica* refirió al método del análisis-síntesis de la siguiente manera:

> Como en las matemáticas, en filosofía natural la investigación de las cosas difíciles por el método del análisis ha de proceder siempre al método de la composición. Este análisis consiste en hacer experimentos y observaciones, en sacar de ellos conclusiones generales por inducción y en no admitir otras objeciones en contra de esas conclusiones que aquellas salidas de los experimentos y otras verdades ciertas, pues las hipótesis no han de ser tenidas en cuenta en la filosofía experimental […] Con este método del análisis podemos pasar de los compuestos a sus ingredientes y de los movimientos a las fuerzas que los producen; en general de los efectos a las causas […] este es el método del análisis. El de la síntesis, por su parte, consiste en suponer las causas descubiertas y establecidas como principios y en explicar con ellos los fenómenos, procediendo a partir de ellos y demostrando las explicaciones (Newton, 1704/ 1977; Cuestión 31)

La interpretación de Newton direcciona el método del análisis hacia una concepción aplicada en el método experimental y procura, en su forma, mantener el orden estricto que hay en los pasos que saltan de concomitante en concomitante en el análisis geométrico, tal y como lo exponía Pappus. Agrega, además, que en la investigación sobre las cosas de la naturaleza *se va de los efectos a las causas* y, según el pensador inglés, esa es la aplicabilidad del método analítico. Siguiendo estas ideas, en el orden mismo de lo que se ha expuesto en la *Óptica*, necesariamente, el salto consecutivo de las causas a los efectos corresponde con lo que se denominaría síntesis. Esta exposición sobre el análisis sigue, por tanto, la vía de la inducción-deducción, de tal forma que serían métodos que se opondrían entre sí, pero que para el mismo Newton trabajarían en conjunto para demostrar la necesidad de un principio o una teoría. Por ejemplo, por análisis o inducción se deben aplicar experimentos sobre determinados eventos hasta llegar a algo simple y general que se aplique a dichos eventos analizados; luego, al descubrir las causas que determinan esos experimentos, se pretenderá ascender paso a paso, hacia los efectos que fueron analizados, así, dichos principios serán demostrados.

El punto de vista que tiene Newton sobre el método geométrico de Pappus parte de la consideración de que hay unos eventos o fenómenos dados y controlables (Hintikka & Remes, 1974, p. 106), sobre los cuales se hacen observaciones y se construyen experimentos para descomponerlos analíticamente. Luego se recogen las consecuencias o concomitantes que dichos experimentos van dejando, a la manera de un estudio riguroso de interdependencias de objetos geométricos en una configuración dada (Cfr. 1974, p. 106), para luego volver a construir, de manera deductiva, enunciados de necesidad universal. Por ende, puede determinarse que los asuntos de los fenómenos físicos se pueden estudiar de acuerdo con relaciones de interdependencia en los eventos de la naturaleza, pues:

> La concepción del método experimental de Newton es un tipo de análisis a la manera de un análisis de figuras o más generalmente, de configuraciones geométricas. Newton está tratando de analizar una situación experimental de la misma manera como el geómetra Pappus está intentando analizar una figura en el sentido de intentar establecer las interrelaciones entre sus partes varias (1974, p. 106).

La inducción de Newton posee, en consecuencia, ciertas relaciones con el análisis de Pappus en tanto que los fenómenos pueden entenderse según relaciones de interdependencia entre diferentes fenómenos físicos. Posee, en este sentido, un parecido con el método de Pappus, en tanto dicho método experimental debe ir acompañado de un sistema de construcciones sintéticas. En consecuencia, el método experimental de Newton ve en el análisis de Pappus un modelo que permite llevar a cabo un estudio riguroso acerca de fenómenos naturales. Sin embargo ambos métodos no se equiparan del todo, por cuanto una demostración geométrica trabaja con los objetos simples que fueron definidos al inicio, con sus respectivas características métricas. Por otro lado, la inducción de Newton trabaja con hechos físicos de la naturaleza. En ese orden de ideas, tal y como lo plantea Hintikka, la inducción de Newton es posible llevarla a cabo si hay un factor que permita la exposición de las relaciones de interdependencia entre factores naturales o llevando a cabo el siguiente orden:

> (i) un análisis de ciertas sitaciones al interior de ciertos ingredientes y factores→
> (ii) un examen de interdependencias entre esos factores→
> (iii) una generalización de relaciones descubiertas a situaciones similares→
> (vi) aplicaciones deductivas de estas leyes generales para explicar y predecir otras situaciones. (1974, p. 110)

Como tal, el paso de la inducción se lleva acabo en el paso (iii), y el proceso del análisis, en el sentido como lo entiende Pappus, se halla en el paso (ii). Esto permite concebir que para Newton el método del análisis es un modelo para el desarrollo de las explicaciones teóricas, en consecuencia, el modelo de un razonamiento *demostratio quia*. Esto se asume como análisis a partir de un proceso de relaciones de interdependencia que va de los efectos a las causas. De la misma manera puede generarse una síntesis en esas relaciones de interdependencia cuando el descubrimiento de una serie de causas se estructuran de tal forma que, regresivamente, ascienden hacia los efectos, es decir, se lleva a cabo un razonamiento *demostratio propter quid*. La síntesis, por tanto, se estructura cuando la respectiva experimentación o prueba de la hipótesis es desarrollada. En el fondo de todo, pareciera que, metodológicamente, la actividad más elemental del análisis experimental es la explicación de relaciones de interdependencia entre las partes constituyentes de algún fenómeno natural, y bien podría concebirse lo mismo en geometría, pues en ella se estructuran relaciones de interdependencia entre objetos geométricos para la construcción de una figura. Así, en el campo de la lógica, la relación inductiva es entre premisas o proposiciones; en el caso de la ciencia, la relación es entre los elementos que componen un fenómeno dado.

Reuniendo todo lo anterior, el método del análisis geométrico, en su forma, fue retomado y aplicado en el campo de la lógica con Zabarella, en el campo de la metafísica con Descartes y en el campo de la física con Newton. En lo que refiere al descubrimiento y a la demostración de este tipo de saberes tuvo una utilidad muy reconocida. Sin embargo, la diferencia de esta interpretación sobre el método utilizado por los geómetras antiguos radica en que un problema en el método moderno, se comprende como una totalidad que puede descomponerse en sus partes constitutivas hasta llegar a sus elementos causales simples y universales. En el análisis geométrico los intereses que prevalecen son los de hallar la certeza de un enunciado, su posibilidad o imposibilidad mediante construcciones geométricas. Aún así, y a pesar de las diferencias de aplicación, los modernos no dejaban de tener en mente el método heredado por Pappus, y consideraban que era ese método el que aplicaban en sus respectivas investigaciones de esa misma manera, por ejemplo: "Newton intentó analizar una situación experiemental de la misma manera como un geómetra griego como Pappus, intentó analizar una figura en el sentido de intentar establecer interelaciones entre todas sus partes" (1974, p. 106). En términos formales, puedo decir que se habla de un mismo método, pero sus aplicaciones y desarrollos varían, según lo que se investigue o analice. Esto permite visualizar que el análisis-síntesis por descomposición y construcción muestra las relaciones que existen entre las partes que componen una totalidad. Las relaciones entre las partes más simples de esa totalidad deben describir la estructura lógica más sólida para dar posibilidad y fundamento a la posterior reconstrucción de esa totalidad, esto es, cómo las podemos entrelazar de la manera más armónica posible, de ahí que en éste análisis:

> El problema no consiste en saber cómo se combinan y ordenan los objetos en el universo, sino cómo se entrelazan y construyen los conceptos de nuestro espíritu en una constante gradación que va desde lo más fácil a lo más difícil (Cassirer, I. 1906/1965, p. 168)

Ahora bien, el método del análisis, en el sentido geométrico, fue recogido y aplicado por Descartes, pero añadió características algebraicas. Esto llevó al pensador francés a concebir que los problemas geométricos pueden ser reducidos a cantidades cuantitativas y, por ende, a las condiciones métricas que una figura posee. En cambio la segunda variante del método del análisis, la proposicional, Descartes la desarrolló como correlato de la inducción en el campo de la metafísica. ¿Qué pasaría si, entonces, el análisis por descomposición o por relaciones de orden se aplicara al campo de la geometría? ¿qué pasaría si en geometría el análisis fuera aplicado desde la interpretación proposicional? Éstas preguntas tienen su respuesta al considerar que por medio del análisis proposicional no habría necesidad de pensar en las nociones intuitivas que compongan una figura, sino que sólo determinaría las relaciones lógicas que existen entre los enunciados geométricos y, con ello, sería una reducción de enunciados complejos en enunciados simples. Por tanto, esta variante del análisis no exigiría de datos o condiciones necesarias para desarrollar construcciones métricas, y mucho menos de condiciones para establecer relaciones de magnitud. Es decir, un análisis de resolución de complejos en simples daría como resultado a una geometría cualitativa.

Este será el propósito del análisis en Leibniz. Se valdrá del análisis por descomposición, que permeó a toda la modernidad, como remedio para los problemas geométricos que él identificó como inherentes a la geometría cartesiana y a la euclidiana. Leibniz podrá llevar, por tanto, el análisis más allá de lo métrico, pues: “después de todos los trabajos que hice en álgebra, pienso que necesitamos algo diferente y más poderoso en el tratamiento con entidades geométricas. Esto es un análisis propiamente geométrico o lineal, que explique directamente el s*itum*” (Leibniz, en Pasini, 1997, p. 44). Ese será el propósito que, por ejemplo, expone Leibniz a L’Hopytal de la siguiente manera:

> Tengo incluso en proyecto un análisis geométrico completamente nuevo, diferente del álgebra enteramente, que servirá *pro situ exprimendo* (para expresar el sitio) como el álgebra es *pro magnitudine expriemenda* (para expresar magnitud). En mi proyecto los cálculos son verdaderas representaciones de la figura y dan directamente las construcciones, mientras que la traducción de los problemas de la geométría al álgebra convirtiendo el sitio en magnitud resulta a menudo un acto de fuerza, talmente que hace falta maña para meter el problema en cálculo, y más maña aún para obtener una construcción una vez acabado el cálculo finito. Mas, en este nuevo cálculo, el simple enunciado del problema sería la expresión de la construcción. Esto es factible y serviría para aliviar maravillosamente a la imaginación que este cálculo seguiría paso a paso, y sería una cosa muy útil para la mecánica e incluso para la física a fin de razonar en ésta mecánicamente (Leibniz, trad, 2015r, II, p. 114)

Por ende, el método en cuestión servirá a Leibniz para expresar la naturaleza del *situs*, y con ello, las características cualitativas de toda geometría. Sin embargo, ¿cómo aplica Leibniz esta idea en el campo geométrico? Este será el propósito del siguiente apartado.

El análisis de Leibniz, hacia el *Analysis situs*

En apartados anteriores presenté cómo el análisis de los geómetras griegos requiere de la representación intuitiva o diagramática de las figuras geométricas y de nociones basadas en la magnitud para consolidar una demostración, esto significa que el método de Pappus está sujeto, entonces, a determinaciones métricas. De la misma forma, mostré cómo en la modernidad surgió una variante del análisis que, inspirada en el método griego, se enfocó en determinar las relaciones establecidas entre las partes de un todo específico en diferentes campos del saber. Esto lleva a que el análisis se piense por descomposición. Para el caso de la geometría, el análisis antiguo y el cartesiano son métodos que dependen de las condiciones métricas que las figuras determinan. Desde la perspectiva del mismo Leibniz, Descartes y Euclides no llevaron el análisis hasta el final. A partir de esto, podemos recordar que el pensador alemán define el método analítico como resolución de complejos en simples, y, por tanto, tiene en mente la aplicación de este método en el campo de las investigaciones experimentales, heredadas por Zabarella y Descartes. Este será, por supuesto, el método que caracterizará a todo su pensamiento filosófico, y que le permitirá configurar todos sus proyectos investigativos en todas las áreas del saber y, por supuesto, en el campo de la geometría. Por ese motivo, y teniendo en cuenta la crítica del pensador alemán a la geometría métrica, ¿cómo pudo, entonces, llevar el método del análisis hasta el final en geometría? en el presente apartado mostraré, a manera de respuesta a la pregunta formulada al inicio del capítulo, que Leibniz se vale del análisis para elucidar mediante símbolos los aspectos cualitativos de la geometría, dando, con ello, un paso que va más allá de las características métricas.

Leibniz se caracterizó por ser un filósofo cuyo espíritu trascendió a todas las áreas del saber. Por ese motivo uno de los intereses que más le generó horas de ardua investigación era el de fundamentar a la ciencia como una herramienta para el crecimiento de la felicidad del género humano. Le impacientaba ver que los progresos en el lenguaje científico no llegaban a criterios definitivos y que no había un acuerdo universal que permitiera ver el orden de las leyes que establecen la estructura del universo para contemplar la belleza misma de la obra de Dios, pues: "Dios no hace nada fuera del orden […] pues en cuanto al orden universal lo es en cuanto a él" (Leibniz G. W., 1650/1995, p. 62). Cuando en ciencia se hacían descubrimientos que ponían en duda la gloria y el amor de Dios, Leibniz era uno de los primeros en manifestar su inconformidad. Así fue como surgió aquella memorable controversia con Newton, y con su seguidor Clarke, quienes defendieron la noción de un universo que representaba la estructura de un reloj sobre el cual Dios podía echar mano en el momento adecuado para mejorarlo (Leibniz, 1716/1980: carta III). Leibniz no podía aceptar esto, puesto que Dios se manifestaría como un ser imperfecto e incapaz de llevar su obra a buen término. Por esa razón, su afán, al igual que en Descartes, consistía en reducir ampliamente las controversias que se llevaran a cabo entre los grandes pensadores de la época, por medio de un método o un sistema más preciso que resolviera las controversias nacidas en el campo de la ciencia y que le permitiera entrar a solucionar las que surgían en campos como la ética, la política y la filosofía, pues:

> […] cuando considero que la práctica no se aprovecha de las luces de la teoría, que no se trabaja en hacer que disminuya el número de disputas sino en aumentarlas, que se contentan con discursos especiosos en lugar de un método serio y decisivo, me pregunto si no vamos a quedarnos por mucho tiempo en la confusión y en la indigencia por culpa nuestra (Leibniz G. W, 1686/2015o, I, p. 6)

El proyecto de Leibniz consistiría, así, en hallar un método que solucionara el desorden interno que permeaba todas las investigaciones científicas y filosóficas de su época, las cuales impedían el desarrollo de la felicidad humana. La consolidación de un método que no sólo descubriera verdades universales, sino que también participara en la investigación científica que cultivara las capacidades constructivas o creativas de la razón. Según la interpretación de Louis Couturat, este proyecto no sólo debía ser capaz de desarrollar la capacidad de recordar los conocimientos innatos y simples que posee el entendimiento, sino que era importante estructurar con todos ellos, posibles combinaciones que fundamentaran nuevos saberes, y así una parte:

> […] servirá para demostrar las verdades ya descubiertas y para verificar los descubrimientos dudosos o controversiales. La segunda servirá para descubrir las nuevas verdades por medio de un método seguro y casi infalible y en un orden progresivo y sistemático. (Couturat, 1901, p. 177)

La parte del método de Leibniz que refiere a la demostración de verdades ya descubiertas, corresponde a una etapa analítica; la segunda parte, que refiere al descubimiento de nuevas verdades por medio de un orden progresivo corresponde a un procedimiento sintético: "ésta sigue una marcha progresiva y sintética, aquella una marcha regresiva y analítica. De suerte que se les puede asimilar a la síntesis y al análisis en el sentido como los geómetras entendieron estas dos palabras" (Couturat, 1901, p. 178). El interés de Leibniz consistía en entender la pareja análisis-síntesis como una herramienta capaz de conformar un método seguro y eficaz que respondiera a las necesidades de una humanidad que requiere de la ciencia para su bienestar y su felicidad.

Si el método del análisis en Leibniz aparece, entonces, como un método que pasa al plano de lo útil o se convierte en una herramienta al servicio de la humanidad, entonces el rol que debe llegar a cumplir en el pensamiento del autor alemán se sujeta a un principio mucho más esencial y concreto. Este método no sólo apoya al progreso de las investigaciones en ciencia o filosofía, sino que puede llegar a apoyar todo tipo de investigaciones en cualquier área de saber. Para Leibniz, en ese orden de ideas, el método que proviene de los geómetras va más allá de las simples demostraciones geométricas, pues sirve de medio para: "buscar siempre en las palabras y demás signos del ánimo la claridad, y, en las cosas, la utilidad; aquélla será luego la base de todo *juicio*, y ésta la base de toda *invención*" (Leibniz G. W., 1671/2015f, III, p. 4). Este proceso exige el descubrimiento, mediante un análisis, de ciertos elementos indivisibles y universales con los cuales pueda ser posible adelantar *operaciones*. Dichos términos causales o principios simples aparecen como elementos constitutivos de un problema susceptible de descomposición, de tal forma que va de los eventos particulares, asumidos como conocidos, hacia las causas desconocidas. Así, el análisis en Leibniz consiste en buscar principios simples, como posibles causas desconocidas, a partir de eventos o enunciados complejos.

Todo lo anterior resume el papel que este método tiene para Leibniz en el marco del pensamiento científico. Lo que debo presentar a continuación es cómo aplica esto, principalmente, en el campo de la geometría. Es importante tener en mente que en el caso de Leibniz el análisis se define como la resolución de lo complejo en lo simple, o mejor decir, la resolución de proposiciones complejas en términos simples, pues: "que toda filosofía cabal deba comenzar con un análisis de las proposiciones es una verdad tal vez demasiado evidente como para exigir prueba. Que la filosofía de Leibniz haya comenzado con tal análisis es menos evidente, pero no parece ser menos verdadero" (Russell, 1900/1977, p. 26). Si asumimos que Leibnz comienza su pensamiento filosófico por el análisis de proposiciones, entonces también debemos asumir que él parte de la consideración de que una propoposición puede ser verdadea o falsa. Pero clasifica las proposiciones como *verdades de razón* y *verdades de hecho*: "las verdades de razón son necesarias y las de hecho contingentes" (Leibniz G. W., 1992, Libro IV, parte II, §1, p. 430). Las verdades necesarias o de razón son aquellas que, mediante reducción al absurdo, su opuesto es contradictorio. Las verdades de hecho o contingentes son aquellas en las que su contraria puede ser posible, así por ejemplo, Leibniz formula una proposición por este estilo: "Alejandro Magno es rey". Bien pudo ocurrir que Alejandro no fuera rey, pero ésta otra proposición, "Alejandro no es rey" es incomposible con nuestro mundo, pero puede ocurrir que ese enunciado sea composible en otro mundo, diferente al nuestro. Para el caso de los dos tipos de proposiciones, ellas pueden ser reducibles mediante análisis a verdades o juicios que Leibniz llama idénticos, es decir:

> Hay, por último, ideas simples cuya definición no puede darse, hay también axiomas y preguntas o, en una palabra, principios primitivos, que no pueden ser probados y que no necesitan de ello; y son la Enunciaciones idénticas, cuyo opuesto contiene una contradicción expresa (Leibniz G., 1720/1983, §35)

Sin embargo, hay un inconveniente con las verdades de hecho o contigentes, y consiste en que si se hace un análisis para reducirlos a términos simples o primitivos, caeríamos en un análisis al infinito. A manera de ejemplo, retomaré el enunciado de ‘Alejandro’ para exponer este inconveniente, y que Leibniz presenta en un pasaje del *Discurso de metafísica*:

> Así, la cualidad de rey que pertenece a Alejandro Magno, haciendo abstracción del sujeto, no está determinada a un individuo y no encierra las demás cualidades del mismo sujeto ni todo lo que la noción individual o heceidad de Alejandro, ve en ella al mismo tiempo el fundamento y la razón de todos los predicados que se pueden decir de él verdaderamente, como, por ejemplo, que vencería a Darío y a Poro, hasta conocer en ella *a priori* (y no por experiencia) si murió de muerte natural o envenenado, lo que nosotros solo podemos saber por la historia. Y cuando se considera bien la conexión de las cosa se puede decir que hay en todo tiempo en el alma de Alejandro restos de todo lo que le ha acontecido y las señales de todo lo que le acontecerá, e incluso huellas de todo lo que pasa en el universo, aunque sólo parezca a Dios el reconocerlas todas (1686/1995, p. 65-66; §8)

En este apartado vemos que una proposición contingente al ser reducida mediante análisis cada predicado que está contenido en el sujeto de ‘Alejandro’ esta íntimamente vinculado con él, en tanto sujeto de la proposición. Pero este proceso analítico recae en un proceso infinito de tal forma que la noción de ‘Alejandro’ comprende todos los predicados que se hallan el universo entero. Esto da origen a uno de los principios más célebres de la filosofía leibniziana, el principio de *razón suficiente*, pues cada predicado que le corresponde a ‘Alejandro’ tiene alguna razón específica por la cual le pertenece. En lo que refiere a nosotros, no podemos llegar a la resolución total de la noción de ‘Alejandro’. Solo Dios podría reducir tal proposición en sus términos más simples y, por ende, a proposiciones de *identidad*.

Por otro lado, las proposiciones necesarias sí las podemos reducir a sus términos más simples mediante análisis, esto es: “cuando una verdad es necesaria, se puede hallar su razón por medio de análisis, resolviéndola en ideas y verdades más simples, hasta que se llega a las primitivas” (Leibniz G., 1720/1983, p. 31; §33). Tal reducción puede representarse mediante la proposición “A es A”. Esto es, que el análisis nos lleva hasta un punto en el que ciertos objetos son indistinguibles de otros, y, por ende, sólo nos queda una sola verdad: que el predicado que está contenido en el sujeto es idéntico a él. Y en esto radicará la principal idea de *verdad* en Leibniz, verdadera es aquella proposición en donde la noción de sujeto contiene la noción del predicado. Es por ello que en el ejemplo de la proposición de 'Alejandro es rey' Leibniz pide que se demuestren *a priori* las razones que determinan que ese predicado está contenido en el sujeto y que, por ende, se expresen todas las relaciones que los predicados infinitos tienen con el sujeto. En este mismo sentido, la proposición 'A es A', aunque parezca una proposición carente de contenido, es la primera que sirve de medio para derivar ciertos axiomas, así: "aunque éstos enunciados parezcan contener inútiles perogrulladas, sin embargo, de ahí, con una leve mutación no más, nacen útiles axiomas" (Leibniz G. W., 1680-84/2015n, II, p. 123). Un ejemplo de Leibniz refiere al silogismo de la forma *varita 1*[6], es decir, un silogismo conformado por una premisa universal afirmativa (A), una premisa particular afirmativa (I) y una conclusión universal afirmativa (A), en donde su término medio se encuentra en el sujeto de la primera proposición y en el predicado de la segunda proposición; y establece la siguiente deducción:

Todo A es B (por hipótesis)
Alguna A es A (proposición idéntica)
Por tanto, A es B
(Leibniz G. W., 1680-84/2015n, II, p. 124)

De acuerdo con el silogismo de Leibniz, el análisis de una verdad de razón puede reducirse a verdades idénticas y, por medio de ellas, pueden deducirse verdades. En este caso, una conclusión derivada de la primera proposición, ordenando cada uno de los términos y determinando cada una de las relaciones establecidas entre el sujeto y el predicado sin que

[6] Todo silogismo se compone de tres proposiciones: dos premisas y una conclusión. Tiene un modo y una figura. La figura refiere a la posición en la cual se encuentra el término medio en cada una de las premisas, que es un término que se repite en las dos premisas y es su factor común, lo que determina cuatro posibles figuras: 1.) que el término medio esté en el sujeto de la primera premisa y en el sujeto de la segunda premisa; 2.) que esté en los predicados de cada premisa; 3.) que esté en los sujetos de cada premisa; 4.) que esté en el predicado de la primera premisa y en el sujeto de la segunda premisa. El modo refiere al tipo de proposiciones categóricas que constituyen el silogismo, bien sean universales afirmativas (A) o negativas (E), o particulares afirmativas (I) o negativas (O). El modo y figura de un silogismo suele representarse por palabras de tres sílabas que contengan la letra de cada proposición categórica. Así, *Bárbara* 3 es un silogismo de tres proposiciones universales afirmativas de figura 3, es decir su término medio se encuentra en los sujetos de las dos premisas.

importe, en términos formales, el contenido mismo de los enunciados. Para Leibniz, entonces, las verdades indénticas sirven para el descubrimiento de otras verdades. El proceso consiste en descomponer una proposición en sus términos simples, y así, constituir una nueva proposición verdadera, a través de un retroceso sintético, tal y como evidenciamos en el silogismo anterior.

Si seguimos la idea de que "A es B", esto es lo mismo que decir que "A es A", pues A coincide con B, esto hace que:

> Si cada uno se substituye por una definición, y cualquier ingrediente también por una definición, hasta que se llegue a los primitivos simples resultará en uno lo que está en el otro, o sea, algo formalmente idéntico. Luego A y B serán coincidentes, o idénticos virtualmente. Por lo tanto se puede definir así:
>
> A coincide con B, si uno puede substituirse en lugar del otro salvaguardando la verdad, o si resolviendo ambos mediante la substitución de los términos por los valores «(o por las definiciones)», ambos dan como resultado lo mismo, y digo lo mismo formalmente (Leibniz G. W., 1686/1986, p. 27)

Para que sea posible establecer por medio de la síntesis un nuevo enunciado de razón, debe considerarse que hay, formalmente, una relación entre sujeto y predicado. Esto hace que A sea algo posible, pues puede adjuntársele un predicado; y con el hecho de pensar que A es un posible, esto asegura que si a A se le predica algo, puede construirse una proposición sin que varíe la verdad del enunciado. En este punto, todas las ideas simples, esto es "expresiones que están en nuestra alma, se las conciba o no" (Leibniz G. W., 1686/1995, p. 91; §27), son indistinguibles entre sí, y son, por ende idénticas. Sin embargo, puede establecerse que un predicado pueda sustituir a un sujeto sin que se modifique la verdad (es decir, la relación entre sujeto y predicado), mediante otro principio fundamental en la filosofía de Leibniz, el principio de la *identidad de los indiscernibles*. Con él si dos cosas dos cosas exactamente idénticas entonces son una y la misma cosa. Así, A y B son ideas indiscernibles, pero difieren, por lo menos, por la asignación que se les da por medio de letras diferentes, lo que revela una relación de verdad; y es aquí en donde aparece la importancia de los símbolos o la *characteristica*, como medio de distinción para resaltar relaciones entre cosas. Es decir: "Los Caracteres son cosas con las cuales se expresan relaciones de otras cosas entre sí, y que son más fáciles de tratar que éstas" (Leibniz G., 1679/2015b, p. 439-440). En consecuencia, los símbolos expresan relaciones entre cosas, esto es, entre ciertos elementos que mediante el análisis podemos hallar pero no definir, precisamente porque carecen de esa propiedad. Sin embargo, y sin depender de definiciones, podemos recurrir a los caracteres como variables para hallar relaciones entre esos objetos. Por tanto, podemos identificar, más bien, en ellos propiedades de relación, de ese modo:

> Un caracter es cualquier cosa que represente cualquier otra, para una persona pensante. Si pudiéramos mantener las cosas por sí mismas delante de nosotros, tendríamos menos necesidad de tales caracteres. La representación está basada sobre alguna relación o regla de correspondencia entre ellos: así la elipse representa un círculo por ser esta su proyección. Los modelos y figuras de las cosas pueden ser consideradas como caracteres: ellos también están hechos para expresar la esencia de la cosa. Los caracteres no necesitan ser similares a los objetos que ellos representan: los símbolos numéricos expresan correctamente las propiedades de los números, pero no se parecen a ellos. […] Para Leibniz un método "es" un instrumento, y un instrumento, en el método del análisis, es un algoritmo basado en caracteres. Por lo tanto, el análisis es en principio, para Leibniz, una operación simbólica que también aplica en campos no matemáticos. Además es un sistema de operaciones simbólicas, es decir, los algoritmos, pueden ser legítimamente usados tanto para la comprensión y organización de la existencia del conocimiento y para la creación del conocimiento, también fuera de sus campos tradicionales (Pasini, 1997, p. 39)

El análisis en Leibniz es un instrumento que trabaja con símbolos que representan un objeto indefinible, al reducir términos complejos en simples. Posteriormente, con esos símbolos o letras logra distinguirlos entre sí, según sus propiedades relacionales. Los símbolos no denotan las propiedades internas de los objetos y, por ende, para determinar sus relaciones debemos prescindir de sus definiciones. Solamente deben tenerse en consideración todas las relaciones posibles que haya entre todos esos objetos, pues son las relaciones entre todos esos objetos, diferenciados mediante letras, lo que determina lo que cada uno de ellos es. Así, de manera sintética, podemos establecer como posibilidad la estructuración de un sistema de símbolos que puedan combinarse de diferentes maneras, para crear ciertas reglas puramente formales, a la manera de un sistema axiomático, que, por tanto, requiere de:

> Una lista de símbolos elementales, unas «reglas de formación», en las cuales se excluyen determinadas maneras de combinarse los símbolos y se admiten en principio otras (sin que ello signifique todavía que estas últimas sean expresiones generadas por el sistema), y unas «reglas de transformación», las cuales establecen que apartir de cierta expresión (o de ciertas expresiones) se genera cierta otra, incluyendo el caso de que la expresión (expresiones) de partida sea cero (las reglas de transformación en las que esto ocurre se llaman axiomas, las otras se llaman reglas de inferencia). Todo esto se establece sin atribuir a los símbolos significado alguno (Marzoa, 1991, p. 63-64)

Si mediante los enunciados idénticos podemos derivar un sistema formal con ciertas reglas de juego, sin que haya dependencia alguna de las definiciones de los objetos que representan los símbolos de dichos sistema, entonces en los juicios de la geometría, que son idénticos, también puede establecerse un sistema formal que posea estos mismos criterios. Este sistema puede dejar a un lado el significado de los objetos geométricos que requiere, a diferencia de una geometría métrica que requiere de definiciones para exponer todas las relaciones métricas posibles que pueda haber entre dichos objetos geométricos. En consecuencia, las proposiciones de la geometría son reducibles, mediante análisis, a términos simples, es decir, a términos que carecen de definición alguna, pero que, a su vez, son necesarios y condicionales para toda geometría como tal: esto es que toda métrica, posea ciertas condiciones formales, que para Leibniz pueden estructurarse en el *situs*: "la naturaleza del sitio (*situs*) es de condición tal que todas las cosas que tienen sitio lo tienen también entre sí. De suerte que suponiendo que A tiene sitio, y B tienen sitio, se sigue que A y B tiene sitio entre sí" (Leibniz G. W., Trad. 2015q, I, p. 147). Por ende el *sitio*, es aquello a lo que todas las proposiciones geométricas pueden reducirse aplicando el método del análisis, pues es el lugar en donde todas las relaciones posibles entre los lugares pueden determinarse. Sin embargo, todos ellos son indiscernibles entre sí, de esto se deduce que para diferenciar un lugar de otro deba recurrirse a la situación que cada punto ocupa, y de la misma manera, que se deba estructurar un simbolismo, una *characteristica*, y a partir de ella, de manera sintética o combinatoria, establecer construcciones geométricas nuevas:

> […] Por lo demás, el arte combinatoria en particular es para mí la ciencia (que puede llamarse también característica general o especiosa), que trata de las formas o fórmulas de las cosas en general, esto es: de la *cualidad* en general o de lo semejante y desemejante y desemejante, en cuanto de unas mismas letras *a*, *b*, *c*, etc., (ora representen cantidades, ora representen cualquier cosa), por combinación entre ellas, se originan diversas fórmulas. Y se dintingue del álgebra que trata de fórmulas aplicadas a la cantidad, es decir, de lo igual y desigual. Así pues, el álgebra se subordina a la combinatoria y emplea continuamente sus reglas, las cuales son mucho más generales y tienen lugar no solamente en el álgebra sino también en el arte descifratoria, en varios tipos de juegos, en la misma geometría tratada linealmente según lo hacían los antiguos y, por último, en todas aquellas materias en donde se da la razón de semejanza (Leibniz G. W., trad, 2015m, III, p. 64)

Con la cita anterior, la idea que pretendí exponer a lo largo de este capítulo puede sustentarse de la siguiente manera: efectivamente cuando Leibniz afirma que las geometrías métricas de su época no habían llevado el análisis hasta el final estaba haciendo una especial referencia a que carecían de un importante criterio lógico, y que era necesario para fundamentar una geometría de cualidades expresada por la idea del *situs*. Así, para completar el análisis, todos los juicios de la geometría, o juicios de razón, debían reducirse a juicios de identidad. Para Leibniz, el análisis geométrico de su tiempo no había logrado concebir que los juicios de la geometría pudieran ser la fuente precisa para la consolidación de una geometría que demostrara los *Elementos* de Euclides. La reducción de los juicios geométricos a términos de identidad, será el aporte que Leibniz podrá formalizar para consolidar una nueva geometría de relaciones cualitativas, pero que solo impactará en los siglos posteriores. Por ejemplo, Huygens responde a los anexos que le envió Leibniz de la siguiente manera: "Os lo digo ingenuamente, en mi opinión esos no son más que hermosos deseos, y me harían falta otras pruebas para creer que haya realidad en lo que avanzáis" (Leibniz G. W., 1679/2015d, p. 419). Lo extraño para ese entonces es que fuera posible concebir, para la geometría en general, un sistema formal que prescindiera de las definiciones de los objetos geométricos y de las construcciones geométricas requeridas para la demostración de teoremas o problemas. Con ello, Leibniz logra algo que siglos después Russell pensaría para determinar las condiciones *a priori* para las geometrías métricas: determinar condiciones cualitativas para espacios métricos de la geometría. Efectivamente, como veremos en el siguiente capítulo, lo que hace Leibniz es estructurar un sistema de relaciones entre objetos geométricos indiscernibles entre sí, y su razón de ser parte de todas las relaciones posibles que pueda haber en los lugares que componen el espacio. Se persigue una geometría que mediante símbolos exprese todas las relaciones posibles entre puntos determinados y que prescinda de nociones como distancia, paralelismo, circunferencia, etc. Es una geometría que trabaja con cantidades estrictamente cualitativas, las cuales determinan y fundamentan toda geometría métrica, en éste caso la euclidiana y la cartesiana.

Ahora bien ¿cómo logra Leibniz desprenderse de las definiciones que en la geometría euclidiana son tan importantes? ¿cuáles fueron los problemas que Leibniz halló para formular una geometría estrictamente cualitativa y más general que la métrica? ¿cómo derivará todo esto en las ideas de Russell sobre la formulación que hace sobre los axiomas de la Geometría proyectiva? Éstas serán preguntas que se desarrollarán en los siguientes apartados.

Capítulo II

El *Analysis Situs* de Leibniz: geometría cualitativa

En el capítulo anterior me ocupé de los orígenes del método del análisis en el campo de la geometría y sus aplicaciones. Presenté que el método de los antiguos griegos debía presuponer algunos criterios métricos para la resolución de un problema específico. De igual forma, expuse cómo fue pensado en el mundo moderno y cómo derivó en un método de diferente aplicación, por su repercusión en el campo de la lógica. Esto llevó a que fuera comprendido como un método de descomposición que parte de un problema general, en tanto totalidad, hacia sus respectivas partes o componentes simples, hecho que los pensadores modernos, como Newton, equipararon con la pareja *inducción-deducción*. Por último elucidé cómo Descartes estableció las bases de su pensamiento filosófico a través de método analítico y cómo se sirvió de él para la consolidación de su geometría.

Presenté, a su vez, que Leibniz concibe el método del análisis como resolución de complejos en simples, al asumir que un problema, como totalidad, puede ser reducido hasta sus componentes más simples o causales. La síntesis sería, de manera opuesta, la reconstrucción de un problema, siguendo el camino trazado, desde los componentes simples hacia su reconstrucción, esto es, va de las causas descubiertas hacia los efectos que se tenían en un principio. En esto aparece la novedad leibniziana sobre el papel del análisis geométrico, y consiste en mostrar que el método analítico en el campo de la geometría puede servir de medio para desprenderse de sus características métricas. Esta idea da paso a un esquema formal que determina las construcciones geométricas mediante relaciones, símbolos y ciertas reglas en el sistema. Esto revelaría que puede concebirse una geometría sustentada en relaciones y cualidades, y no en magnitudes. Ahora bien ¿qués es una geometría métrica? ¿qué significa que el *Analysis situs* es una geometría de relaciones? ¿qué diferencia hay entre una geometría cualitativa y una cuantitativa?

Los *Elementos* de Euclides son el sistema de geometría métrica por excelencia y forman parte del conjunto de obras capitales que fundan y componen el pensamiento occidental y "constituyen la composición científica más antigua y extensa que nos haya llegado en una integridad casi perfecta" (Levi, 1947/2006, p. 20). Son los *Elementos* la piedra de toque sobre la cual gran parte del pensamiento matemático tiene su solidez, puesto que aparece como la "composición de una ciencia que no ha cambiado desde entonces sus fundamentos" (1947/2006, p. 20); y, a pesar de esa invariabilidad, ha ofrecido los espacios más interesantes al interior de las comunidades matemáticas para llevar adelante todas las discusiones posibles acerca de sus fundamentos y, en consecuencia, sobre la posibilidad y naturaleza misma de la geometría. Para el siglo XVII, la obra de Euclides se había convertido en una de las principales fuentes de referencia para entender los procedimientos deductivos que permitieran desarrollar demostraciones y construcciones geométricas. Por esa razón se había transformado en una ineludible fuente de estudio para comprender cómo era posible desarrollar un procedimiento demostrativo. Tras el impacto que tuvieron los *Elementos* para el mundo moderno, ya era posible encontrar en la basta cultura intelectual de la época los comentarios de los geómetras alejandrinos a la obra euclidiana (tales como Apolonio, Zenón de Sidón, Pappus, Proclo, entre otros). Ya ellos habían abierto la posiblidad de pensar los *Elementos* de Euclides con rigurosidad crítica, hecho del que los modernos se valieron para evaluar con absoluta seriedad los fundamentos mismos de aquella geometría.

Descartes fue uno de los pensadores que se puso en la tarea de consolidar una geometría que revolucionara los desarrollos del álgebra y revolucionara el progreso de las construcciones geométricas tomando problemas formulados por Pappus, Apolonio y el mismo Euclides. Otros pensadores modernos ya tenían en mente la tarea de desarrollar diferentes traducciones sobre la obra del geómetra alejandrino, y dentro de aquellos trabajos estaban las traducciones de Clavius (1538-1612) en el año de 1591, las interpretaciones de Erhard Wiegel (1625-1699), quien hizo una serie de demostraciones geométricas a partir de principios lógicos o silogísicos de algunas proposiciones euclidianas, (y quien fuera profesor de matemáticas de Leibniz) (Cfr. Echeverría & Mora, 2016, p. 104). Desde la descripción de este contexto y, tal vez por la influencia de su propio maestro, e incluso por el interés mismo que permeaba en la época, Leibniz tenía en mente el inquietante interés por revisar, detalladamente, los fundamentos de la geometría euclidiana. Se preocupó por consolidar su proyecto geométrico, para evaluar detenidamente aquellas definiciones que la geometría euclidiana suponía como dadas.

Los acercamientos del pensador alemán sobre la geometría de Euclides se remontan a su juventud, para ser más exactos al periodo de París (1672-1676), en el cual pudo dedicar una parte considerable de su tiempo al estudio de las matemáticas y, particularmente, al estudio de los *Elementos*. Allí tuvo la oportunidad de sumergirse en el campo de las ciencias para poder compartir intereses de investigación filosófica con personajes destacados de la talla de Bernoulli, L'Hôpital y, especialmente, con el físico holandés Christian Huygens. Con este pensador holandés tuvo una correspondencia interesante a través de la cual Leibniz ya trazaba los indicios primigenios de su proyecto geométrico (Cfr. Couturat, 1901 , p. 390-391). El proyecto que el filósofo alemán tenía en mente consistía en concebir una geometría diferente a la cartesiana y a la euclidiana. Tras haber realizado una revisión detenida de las definiciones, los axiomas y los postulados de los *Elementos*, sostuvo que debía hacerse un:

> Análisis crítico de las definiciones, axiomas y postulados del Libro I de Euclides [que] parecía ser un trabajo preparatorio de la *Characteristica geometrica*: en efecto veremos (ya lo dijimos), que el análisis de los axiomas y de las definiciones es la elaboración preliminar indispensable de una *characteristica* (Couturat, 1901, p. 397)

Leibniz podía asumir una premisa importante y esencial para controvertir las vigas principales de la arquitectura geométrica de Euclides, que consistiría en asumir que las definiciones y los axiomas de la geometría euclidiana aún eran susceptibles de análisis, pues por sí mismos carecían de claridad. Ante esa misma situación, era posible admitir que todas las nociones elementales de los *Elementos* podían presentarse de una de manera más natural y clara, por medio del método analítico que mostré a lo largo de la primera parte del presente trabajo: "esta es la idea fuerza del proyecto leibniciano de revisión de los *Elementos* de Euclides: intentar demostrar muchas cosas que Euclides da por supuestas, y para ello recurrir a nuevas definiciones y axiomas geométricos, basados en la noción de *situs*" (Echeverría & Mora, 2016, p. 108). Leibniz intenta elaborar los cimientos de una geometría que pueda resolver construcciones geométricas sin que exista una dependencia de los significados geométricos, una geometría simbólica y cualitativa: el *Analysis Situs*. Ahora bien, ¿Cómo se desarrolla este proyecto? ¿En qué consiste esta nueva geometría? ¿cómo se desenvuelve? ¿qué significa que sea una geometría cualitativa? Para dar respuesta a estas preguntas el siguiente capítulo hace una exposición de la geometría de Leibniz y elucida las respectivas diferencias que hay entre esta geometría y la euclidiana. Para tal fin, el capítulo se divide en las siguientes partes: la primera hace una exposición sobre qué significa que la geometría euclidiana sea una geometría métrica y muestra, a su vez, el papel que juegan las definiciones, las nociones comunes y los postulados en este sistema geométrico. Esto para elucidar los respectivos aspectos que Leibniz halla como problemáticos en cada uno de esos conceptos euclidianos. En la segunda parte se ofrece una breve exposición sobre las características cualitativas del *Analysis situs* y, de la misma manera, cómo se desenvuelve a la hora de tratar con construcciones geométricas mediante símbolos. Por último se presentan los aspectos que separan al *Analysis situs* de Leibniz de la geometría euclidiana y los aspectos que llevan a concebir la geometría leibniziana como una geometría con aires de familia y de parentesco con la geometría proyectiva de Bertrand Russell.

Euclides y su geometría

Los *Elementos* de Euclides se componen de trece libros y dos apócrifos; cada uno de ellos posee un conjunto de definiciones y de proposiciones que piden al lector configurar una construcción geométrica determinada. Dentro del amplio conjunto de proposiciones pueden rastrearse dos tipos: *teoremas* y *problemas*, para el caso de los teoremas: "la demostración es digna de estudio por su propio bien ya que es capaz de poner ante nosotros la naturaleza de la cosa que se busca" (Proclo, en Heath; I, 1956, p. 126), es decir, que la verificación de un enunciado específico solamente se pretende hacer mediante una construcción geométrica. Para el caso de los problemas: "la demostración tiene el propósito de confirmar la construcción: porque traemos la demostración para mostrar que se ha hecho lo que se ordenó" (Proclo, en Heath; I, 1956, p. 126), es decir, se realiza la construcción para determinar si es posible o no lo que solicitó un enunciado geométrico de manera imperativa. Al final de los *Elementos*, en la edición crítica de Sr. Thomas Heath, aparecen en forma de apéndice dos libros apócrifos, el XIV, el cual fue escrito por Hipsicles, y el XV, en el que se presentan construcciones de sólidos regulares, sin embargo ambos libros, por referencias históricas, podrían ser posteriores al propio Euclides, de esa manera, existen amplias dificultades para atribuírlos al geómetra de Alejandría (Cfr. Heath; III, 1956, p. 512-520).

El primer libro euclidiano se diferencia de los demás porque, a parte de las respectivas definiciones, presenta cinco postulados y se enuncian ocho axiomas o nociones comunes, hecho de amplia consideración, porque cada uno de estos elementos aparecen reunidos de tal forma que constituyen la estructura de todo el andamiaje euclidiano que posibilita todas las construcciones geométricas de los *Elementos*. Por ello, en principio, una parte esencial y original de la geometría euclidiana radica en admitir, a través de la *intuición*, todas aquellas definiciones iniciales y en admitir la veracidad de los postulados y las nociones comunes o axiomas. A continuación se señalarán algunas de estas definiciones, pero las enumeraré en correspondencia con el orden que aparece en el libro I (Euclides, Elementos, trad. 1982/2007: I, Definiciones):

- (1) Un punto es lo que no tiene partes.
- (2) Una línea es la longitud sin anchura.
- (3) Los extremos de una línea son puntos.
- (4) Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
- (5) Una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura.
- (6) Los extremos de una superficie son líneas.
- (7) Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
- (15) Un círculo es una figura plana comprendida por una línea, que se llama circunferencia, tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.
- (16) Este punto se llama centro.

Antes de hablar sobre algunas de ellas, resulta importante mencionar el significado que tiene la palabra *definición* para Euclides y las problemáticas que estas mismas definiciones suscitan, teniendo en mente que Leibniz encuentra en ellas varias dificultades. La palabra *definición* viene del griego όρος (*oros*), y "el verdadero significado de esta palabra parece haber sido «*límite*» «*punto de referencia*»" (Heath, I. 1956, p. 144). Siguiendo a Heath, si se tomara el significado literal de esta palabra griega y se aplicara al campo de la geometría euclidiana, podría considerarse como aceptable y aplicable a las definiciones de los *Elementos* que se acabaron de presentar, pues son el respectivo punto de partida de toda la estructura de la obra. Esto implica un mayor énfasis en la explicación. El uso técnico de dicha palabra aparece con más detalle en los "Segundos analíticos" de Aristóteles, al referir al término "*oros*" como aquello que permite responder a la pregunta *¿qué es?*, de ahí que desde ese momento aparezcan las diferencias más esenciales entre las definiciones y las demostraciones, por el hecho de que las demostraciones son viables si ellas mismas ya suponen de antemano los elementos necesarios para desarrollarlas, así : "la definición lo es del *qué es* y de la entidad. Las demostraciones en cambio parecen presuponer y dar por sentado todas el *qué es*, *v. gr.*: las matemáticas presuponen qué es la entidad y qué es lo impar, y las demás ciencias, de manera semejante" (Aristóteles. Trad, 1988, p. 90b 30-35). Las definiciones, por tanto, son enunciados iniciales, un punto de partida que no tiene un origen que las anteceda, pero al suponerlas, ellas mismas dan lugar a alguna forma de conocimiento.

De acuerdo con lo anterior, y señalando la cita de Aristóteles a la que recurre Heath, "una definición no afirma nada en cuanto a la existencia o no existencia de lo definido" (1956, I, p. 143) y en consecuencia aquellos objetos geométricos que aparecen definidos al inicio de los *Elementos* simplemente deben ser aceptados "como los primeros principios de cada ciencia, por ejemplo, la existencia de puntos y líneas en geometría debe ser asumida, pero la existencia de todo lo demás debe ser probada" (Heath, I, 1956, p. 143). Las definiciones de los *Elementos*, son, entonces, enunciados iniciales con los cuales se brinda una información determinada sobre una serie de conceptos previos e intuitivos, por lo que *no* pueden entenderse como si fueran enunciados deducidos a partir de algún otro tipo de justificación, pues lo único que requieren estas definiciones "es ser entendidas" (Heath; I, 1956, p. 119). Pareciera, en esa medida, que tales definiciones no alcanzarían a poseer algún grado de importancia para la estructura misma del libro, sin embargo, estas nociones (como punto, línea, plano o círculo) al ser entidades que no requieren de algo que las justifique, deben constituir un vínculo directo con la intuición, por lo cual:

> Estas definiciones preliminares vienen cargadas de conceptos no definidos […] algunos comentaristas afirman que, aun siendo consciente de que las definiciones no eran lógicamente útiles, [Euclides] quiso explicar lo que sus términos representaban intuitivamente, de manera que sus lectores quedaran convencidos de que los axiomas y postulados eran aplicables a esos conceptos (Kline, 1972/1992, I, p. 91-92)

Las definiciones de los *Elementos* aparecen formuladas "como un pequeño vocabulario, para entenderse con el lector sobre el uso de ciertos términos no pertenecientes a la lengua común; guía para la lectura, pero no parte integrante del texto" (Levi, 1957/2006, p. 92), por ese motivo, al admitirlas como un vocabulario inicial, exigen a la intuición toda la capacidad de hacerse una representación determinada de dichos términos. Por ello, respecto a la primera definición, decir que *el punto es aquello que no tiene partes,* implica conceder que dicho concepto aparece como una noción elemental e indivisible, de tal forma que se puede representar a la manera de una idea intuitiva que no se puede dividir en partes menores; esta idea funciona, entonces, como un presupuesto inicial que permite elaborar demostraciones de teoremas o problemas.

Sobre las definiciones, conviene revisar la definición de punto. Euclides usa el término Σημειόν (*semeión*), que significa signo o señal. Este fue el término griego que se usó de manera técnica tanto en el periodo de los geómetras alejandrinos como en el renacimiento (Euclides, trad. 1982/2007, p. 3, ver nota), sin embargo esta definición de punto tuvo diversas formas de representación. Antes de Euclides, el concepto de punto era denotado por los pitagóricos por medio de la palabra griega μόνας (*mónas*) para hacer una referencia concreta al concepto de unidad. Otra referencia antigua y de alcances importantes era la propuesta por Aristóteles, quien definía el punto a partir de lo anterior y lo posterior, es decir, el punto como el límite de la línea, y así continuaba con las otras dimensiones de tal forma que la línea era el límite de la superficie y la superficie el límite del cuerpo (Cfr. Aristóteles, Trad. 2014, p. 1060b 10-20). Heath expone que la noción de punto ha logrado tener otro tipo de connotaciones formuladas mucho tiempo después a la definción del propio Euclides, sobre todo en los tiempos contemporáneos, en donde ya no se define a partir de la intuición sino que: "[…] en lugar de esto, las cosas materiales en la naturaleza son identificadas como ilustraciones con las que al observarlas podemos obtener esa idea abstracta" (Cfr. Heath. I, 1956, p. 157)[7], es decir, que la noción de punto puede concebirse *a posteriori* como una pura abstracción de relaciones entre los objetos de la naturaleza. No es un fin del presente trabajo discutir esta cuestión, pero esta referencia puede ofrecernos una idea de cómo estas múltiples interpretaciones se le han acuñado a las definiciones de la geometría euclidiana, por su falta de claridad, lo que nos conduce a que puede ser evaluda y reformulada de otras maneras.

[7] La edición crítica de Sir Thoma Heat no solo explica la definición de punto presentada por Euclides, además expone otras definiciones tales como la noción aristotélica, la de los cometaristas Alejandrinos a la obra de Euclides y las referencias contemporáneas. Para complementar en esto ver: Heath; III volúmenes. Euclides, The thirteen books of Euclid's elements, 1956).

Por tanto, vemos que el punto de partida sobre el cual se fundan los *Elementos*, ya posee un aspecto problemático, y es que no existe una claridad específica sobre la cual fuera posible comprender lo que una definición en concreto refiere, por ejemplo la definición de punto como aquello que no tiene partes. Este problema ya lo menciona Heath cuando recurre a Leibniz para exponer lo siguiente:

> El mismo pensamiento es expresado por Leibniz, "si", dice, "damos una definición cualquiera, y no está claro, que la idea que atribuimos a la cosa, sea posible; no podemos confiar en las demostraciones que hemos derivado de aquella definición, porque si la idea por la cual involucra contradicción es posible, puede que incluso los contradictorios sean verdaderos al mismo tiempo, así nuestras demostraciones serán inútiles. Por tanto, es claro que las definiciones no son arbitrarias y esto es un secreto que apenas se conoce suficientemente" (Leibniz, en Heath, I, Euclides, 1956, p. 145)

En sus *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano*, Leibniz señala esta misma dificultad, que es implícita a las definiciones, pero en relación a la línea recta:

> Euclides, al no poseer una idea que pudiese ser expresada distintamente, es decir una definición de línea recta (pues la que da entre tanto es oscura, y no le sirve para las demostraciones), se ha visto obligado a recurrir a dos axiomas que le han desempeñado el papel de definición y que por eso las utiliza en las demostraciones (Leibniz G. W., 1765/1992, IV, XIII § 6).

Así como el concepto de punto es problemático, la noción de recta como "aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella" (Euclides, trad. 1982/2007: definición 4), también tiene sus respectivas dificutades. Heath presenta que esta definición se remonta hasta Platón como: "aquello cuyo medio es cubierto por los extremos" (Heath, I; 1956, p. 165), y al igual que ocurrió con la noción de *punto*, el autor inglés presenta otras definiciones, clásicas y contemporáneas, hasta llegar a la definición que propone Leibniz: "Por último, la definición de Leibniz debe ser mencionada: una línea recta es aquella que divide un plano al interior de dos mitades idénticas en cualquier posición" (Heath, I. 1956, p. 169).

Uno de los aspectos que más dificultades genera sobre la geometría analítica y sobre geometría euclidiana, ha sido la de ligar esos objetos iniciales de la intuición y su respectiva representación "gráfica". En este punto, resulta significativo considerar la importancia que Leibniz da a la búsqueda de la claridad en las definiciones euclidianas. Así pues, "en geometría, como en todas partes, Leibniz ve (y cree poder) brindar claridad y distinción a las ideas primitivas y simples, y desmostrar todos los axiomas sugeridos a la intuición trayéndolos a sus verdaderas definiciones” (Couturat, 1901, p. 423). Esto es, en considerar tales objetos como figuras construíbles por medio de un análisis más riguroso. Pero antes de analizar las consecuencias que surgen desde los intereses de Leibniz frente a las definiciones de Euclides, conviene revisar un poco lo relacionado con los postulados de los *Elementos*.

A pesar de la falta de claridad que pueda haber en las definiciones, con ellas empieza la geometría euclidiana, pues se consideran, por sí mismas, como enunciados indemostrables. Dan paso, por lo tanto, a la construcción de ciertos enunciados indemostrables, y le dan un nivel de existencia a los objetos definidos en el principio. A estas proposiciones se les llama *postulados*, “esta es la diferencia entre una hipótesis y un postulado; un postulado es lo contrario a una opinión distinta de quien aprende, o lo que es asumido y usado sin ser probado, aunque funcione para la demostración” (Aristóteles, en Heath, 1956, I, p. 118-119). Por ende, los postulados sirven para llevar acabo demostraciones, pero ellos mismos no necesitan ser probados, y sirven de ayuda para mostrar que las definiciones, aunque oscuras, sirven, efectivamente, para llevar a cabo una construcción geométrica, tal y como señala Kline: “los tres primeros postulados, que declaran la posibilidad de construir rectas y círculos, son asertos de existencia para esas entidades” (1972/1992, I, p. 93). Es decir, los postulados no demuestran la existencia de los objetos geométricos que se definieron al inicio, pero sí permiten reafirmar, mediante diagramas, la existencia de aquellos elementos definidos para dar lugar a enunciados verdaderos sin que haya necesidad de demostrarlos. Así: “se recordará, de acuerdo con Aristóteles, que el geómetra debe asumir, en general, lo que una cosa es, o su definición […] solo para el caso de las cosas más primarias, puntos y líneas, debe asumir sin prueba la definición de ambas y la existencia de la cosa definida” (Heath, 1956, I, p. 195). Acto seguido se sugiere que: “a partir de las únicas líneas tratadas en los *Elementos*, líneas rectas y círculos, su existencia se afirma en los postulados (I) y (III), respectivamente. El Postulado (I), sin embargo, hace mucho más que postular la existencia de líneas rectas” (1956, I, p. 195). Euclides redacta cinco postulados, los cuales son:

- (1) “Siempre es posible trazar una recta desde un punto cualquiera a otro dado”.
- (2) “Siempre es posible extender continuamente una línea recta finita [segmento de recta] a lo largo de la misma recta”.

- (3) “Siempre es posible construir un círculo a partir de un punto dado como centro y una distancia previa”.
- (4) “Todos los ángulos rectos iguales entre sí”.
- (5) “Si una línea recta que atraviesa otras dos logra que los ángulos interiores del mismo lado sean menores que dos ángulos rectos, es porque las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortan del lado en el que los dos ángulos ineteriores se encuentran” (Heath, 1956, I, p. 195-202; Elementos, trad. 1982/2007: I, postulados).

Tras la exposición de los postulados en los *Elementos* se muestra lo que corresponde a las nociones comunes o axiomas, los que, de entrada, ya presentan un problema que se desarrolla de manera muy clara en la edición crítica de Heath, y es la originalidad euclidiana de dichos términos. Al respecto Tannery expone una serie de argumentos en los que defiende una tesis que afirma que las *nociones comunes* no estaban en los trabajos de Euclides y que fueron agregados posteriormente (Tannery, en Heath, 1956, I, p. 221). Sin embargo, Heath en su estudio introductorio sobre los axiomas, sí considera que estos axiomas provienen de la propia mano de Euclides, principalmente porque fueron discutidos y reformulados bajo el abrigo de los comentarios críticos de otros geómetras anteriores a Apolonio. Ellos adoptaron la idea de que tales nociones comunes ya estaban inscritas en la obra del propio Euclides, y esta es la tesis que defiende Heath al discutir los argumentos que sostenía Tannery (Heath, 1956, I, p. 221-222).

Sobre las nociones comunes o axiomas es innegable que ya había una tradición amplia que los conocía y admitía como pertenecientes a *Elementos* y que es imposible evadir su lectura, puesto que surgen allí como piezas inscritas y esenciales para elaborar las construcciones geométricas que aparecen en cada una de las proposiciones señaladas en la obra euclidiana. De esa manera, los axiomas o nociones comunes son enunciados que se consideran verdaderos por sí mismos, ya que: “[…] se distinguen, como es bien sabido, por su calidad de principios no solo verdaderos y palmarios, sino indemostrables” (Euclides, trad. 1982/2007, p. 14, ver nota 18). Afirmación que ya había explicado Aristóteles sobre este término, cuando afirmaba que:

> Es uno de los principios establecidos más firmes. Sólo la ignorancia puede llevar a cualquiera a probar los axiomas; la supuesta prueba podría ser una *petitio principi*. Si se admite

> que no todo puede ser probado ninguno puede señalar un principio más demostrable (En: Heath, I, 1956: 121)

A partir de la cita de Aristóteles y a la que recurre Heath, podemos mencionar como hecho anecdótico que Apolonio, uno de los más destacados comentaristas de la obra de Euclides, trató de demostrarlos. También existen comentarios que pretenden justificar estos intentos de Apolonio, como en el caso de K. von Fritz[8]. Y, por supuesto, el propio Leibniz también se dedicó a consolidar esta tarea:

> Cuenta Proclo que una vez Apolonio se propuso demostrar los axiomas de Euclides; y tengo entendido que Roberval intentó hacer lo mismo. Me parece que hicieron bien, pues solo alcanzaremos comprensiones perfectísimas cuando, sin fiarnos nada de la sensasión o de la imaginación, lo dispongamos todo en forma de nociones (Leibniz G. W., 1679/2015l, II, p. 125)

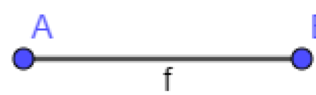
Teniendo en cuenta lo anterior, y a pesar de su “ignorancia”, Leibniz tenía en mente la necesidad de fundamentar la geometría euclidiana al separarla de la intuición y la diagramación. Para continuar con la exposición, los axiomas o nociones comunes de los *Elementos* son los siguientes:

- (1) Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
- (2) Si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
- (3) Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
- (4) Las cosas que conciden entre sí son iguales entre sí.
- (5) El todo es mayos que la parte (Euclides, trad. 1982/2007: I, Nociones comunes).

Después de los axiomas se da paso a las *proposiciones*, enunciados que constituyen la mayoría del corpus de la geometría euclidiana y que están consignadas en los *Elementos*. Para el presente trabajo solamente expondré las dos primeras proposiciones del libro primero de los *Elementos*. La primera proposición es considerada como: “el paradigma de la demostración euclídea” (Euclides, trad. 1982/2007, p. 16, ver nota 22), porque lo que

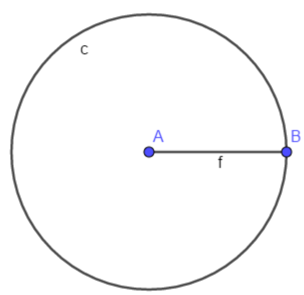
[8] “Quien ha sugerido que la intención de Apolonio era era más bien la de probar la transitividad de la congruencia en el caso de las líneas precisamente a partir de la noción común I” Ver nota 18 en Elementos, trad. 1982/2007, p. 14.

discurre se da através de una serie de pasos orientados y fundamentados por los axiomas, los postulados y las definiciones. La primera proposición de los *Elementos* pide lo siguiente: "construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada" (Euclides, trad. 1982/2007: I. Prop. I). Para ello (Figura 4), debe recurrirse a la noción intuitiva de línea, punto y circunferencia. Sin embargo, esto no resulta tan evidente como parece. Pero antes de revisar esto, resulta importante ver el procedimiento que usa Euclides para consolidar la demostración de esta primera proposición. En primer lugar piénsese una recta finita AB o *f*:



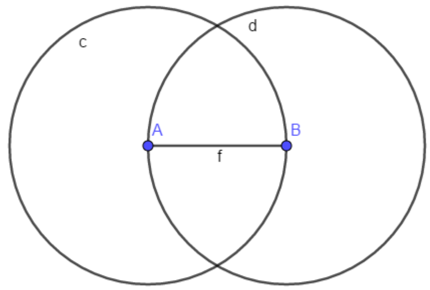
(Figura 4)

Por el tercer postulado es posible trazar el círculo cuyo centro es el punto A y por lo tanto el segmento de recta *f* que va de A a B será el radio del círculo *c*; la figura 5 quedaría construída de la siguiente manera:



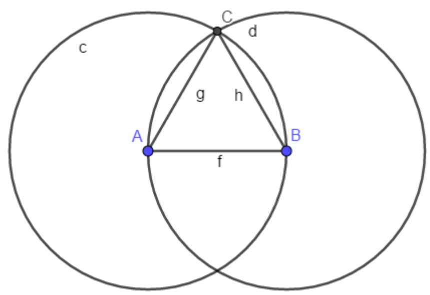
(Figura 5)

Ahora bien, la siguiente parte consiste en trazar, de igual forma, la circunferencia cuyo centro es el punto B y su radio será el mismo segmento de recta *f* que va de B a A, dando como resultado la circunerencia *d*; la figura 6 quedaría construída de la siguiente manera:



(Figura 6)

De acuerdo con lo anterior, por el postulado 1 dibujar los segmentos de recta que surgen al unir el punto A con la intersección de las dos circuferencias *c* y *d*, y de igual forma unir el punto B con esa misma intersección, llámese a dicha intersección punto C, para que de esa manera aparezcan los segmentos *g* y *h*, lo que dejaría como resultado la figura 7:



(Figura 7)

De esa manera, el segmento AB o *f* es igual al segmento AC o *g*. De igual forma al segmento *h* es igual al segmento *g*, de lo cual se puede concluir que los tres segmentos de recta son iguales y, por lo tanto, la construcción que aparece es un triángulo equilátero cuya base es la recta finita *f*.

El desarrollo de la primera proposición del libro primero de los *Elementos* es aceptado como una prueba evidente de lo que ella solicita. No obstante, la claridad de la construcción solo toma fuerza gracias a la estructura del dibujo o la figura, por lo cual Euclides pudo asumirla como una prueba incuestionable. Implica, por tanto, que se tengan en cuenta las longitudes entre dos puntos dados y la construcción de la circunferencia a partir de la recta, considerada como radio de la circunferencia.

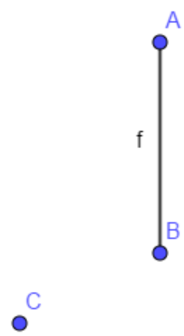
A pesar de la aparente exactitud de la construcción diagramática de la figura, que muestra que es posible construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada, ésta proposición no presenta un postulado que permita intuir que dicho triángulo sea posible construírlo, pues se asume, sin ningún antecedente, la existencia de un punto en la interseción de dos círculos cuyos centros respectivos son los extremos de un segmento de recta. Por ese motivo, esta proposición, como paradigma de la demostración euclídea, no resulta tan sencilla de aceptar en tanto clara y exacta. Uno de los primeros geómetras que observó este asunto fue Zenón de Sidón. Él afirmó que la proposición euclídea quedaría resuelta si se asumiera que "dos líneas rectas no pueden tener un segmento común" (Euclides, trad. 1982/2007, p. 17, ver nota 22), pero las observaciones que han tenido una mayor repercusión sobre ella han sido, principalmente, de épocas contemporáneas. Tales observaciones fueron formuladas por Killing y Dedekind. Ellos propusieron un postulado que podría solucionar el vacío, asegurando que la continuidad existe si se afirma que si los puntos de una recta se dividen en dos clases, tales que cada punto de la primera clase yace a la izquierda de cada punto de la segunda clase, habrá un solo punto que divida a dicha recta en tales dos partes. Lo mismo ocurre con un círculo, pues habrán dos puntos que intersecten a dos círculos en un plano. A dicha formulación la denominaron *principio de continuidad*, y fue expuesto como postulado por Dedekind como sigue:

> Prevé que si todos los puntos de una recta se distribuyen en dos clases tales que cada uno de la primera clase está a la izquierda de todo punto de la segunda clase, existe un solo punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, la división de la recta en dos partes […] De este postulado se desprende que si, en un plano dado, un círculo C tiene un punto dado P dentro, y otro punto Q fuera, de otro círculo C', ambos círculos tendrán dos puntos de intersección (Euclides, trad. 1982/2007: Prop. I, ver nota 22; Cfr. Heath, I, p. 236, 238)

El principio de continuidad trata de exponer una posible solución al vacío interno que aparece en la primera proposición de los *Elementos* de Euclides, formulando que la intersección de dichos círculos en dos puntos expone una idea intuituva de la siguiente manera:

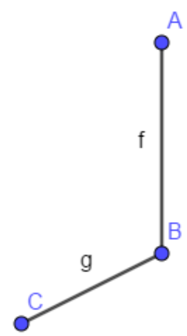
> Si en un segmento de recta dos puntos comienzan desde los puntos desde los extremos y recorren describen el segmento en sentidos opuestos, ellos se encuentran en un punto. El punto de reunión puede considerarse como perteneciente a ambas partes (Heath, I, 1956, p. 236).

Pasemos a la segunda proposición de los *Elementos*. En ella aparece la principal característica de que la geometría de Euclides es una geometría métrica, pues habilita el uso del compás como recurso para la transferencia de medidas. La proposición pide mostrar y establecer el protocolo para, construir, a partir de un punto dado, una recta finita (segmento) igual a otra recta finita dada. Esto permite concebir, por lo tanto, mecanismos para transferir medidas (Heath, 1956, I, p. 245). La proposición presentada por Euclides pretende identificar las posibilidades de construir un segmento de recta a partir de un punto dado que sea igual a otro segmento de recta dado, para ello se requiere de la construción de segmentos de recta y circunferencias mediante compás. La proposición se formula de la siguiente manera: "construir en un punto dado (como extremo) una recta igual a una recta dada" (Euclides, trad. 1982/2007. Libro I. Prop. II). Es decir, en un punto C construir un segmento de recta igual a una recta AB o *f*, (Figura 8):



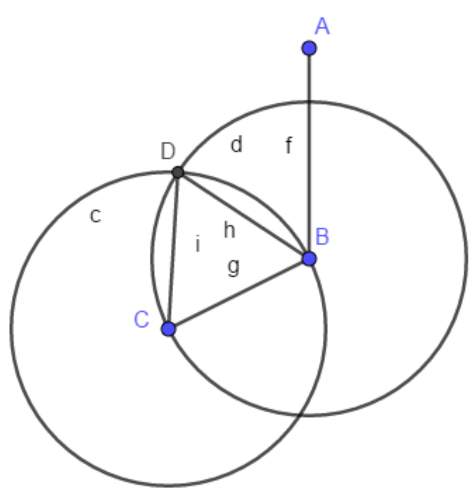
(Figura 8)

Para solucionar este problema, Euclides procede de la siguiente manera: trazar el segmento de recta que va del punto B al punto C, teniendo en cuenta el postulado 1 (Figura 9):



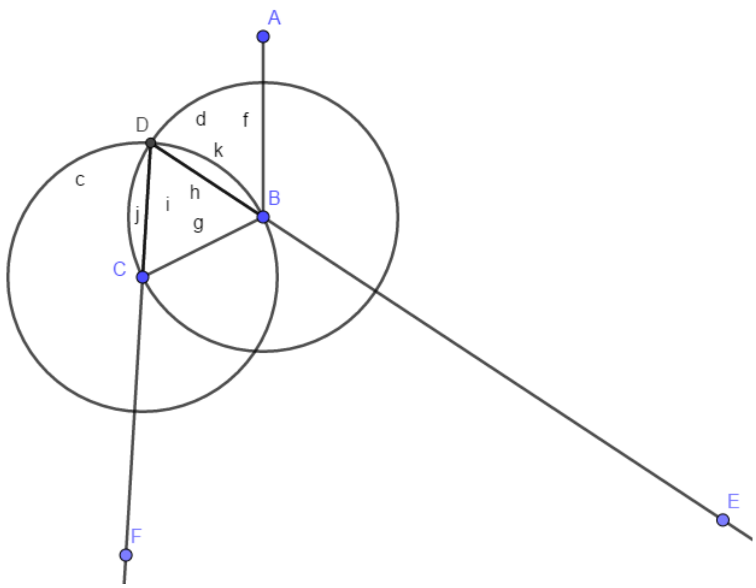
(Figura 9)

Posteriormente, pide construir un triángulo equilátero CBD a partir de la recta que apareció al unir los puntos C y B, es decir, el segmento *g*. Esta construcción es posible gracias a la proposición 1. Así, la construcción queda estructurada de la siguiente manera (Figura 10):



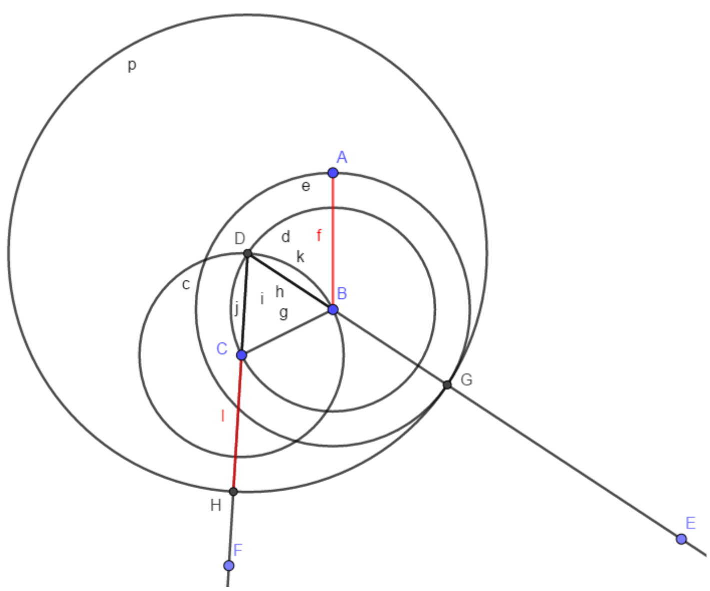
(Figura 10)

Al generar el triángulo equilátero CDB, Euclides continúa la construcción al pedir que se prolonguen los segmentos de rectas DC o *i* y DB o *h* hasta los puntos F y E estableciendo las rectas DF y DE. La construcción quedará estructurada de la siguiente manera (Figura 11):



(Figura 11)

Hecho esto pide trazar el círculo cuyo centro es el punto B y su radio es el segmento de recta *f*, lo que configurará el círculo *e*. De igual manera pide construir el círculo cuyo centro es el punto D junto con el punto G, y que servirá de medio para realizar el radio DG o *k* de este otro círculo, *p*; en ese orden de ideas, el diagrama queda estructurado de la siguiente manera (Figura 12):



(Figura 12)

Con la construcción anterior, la argumentación es como sigue: por la circunferencia descrita en el segmento de recta *f*, se puede concluir que *f* es igual a BG. Por otro lado, tras la circunferencia descrita en el segmento DG se concluye que DH es igual a DG y, así, en donde sus partes son cortadas por los punto C y B son iguales, es decir DC es igual a DB. En consecuencia, las partes restantes son iguales, por el axioma 3 ("y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales"), es decir que CH es igual a BG. Ahora bien, por el mismo procedimiento ya se expresó que BG es igual a BA, y así las cosas se puede demostrar que BA es igual a CH y por lo tanto, se construyó un segmento de recta en el punto C igual al segmento de recta AB.

Las dos proposiciones del libro primero de los *Elementos* de Euclides reflejan la necesidad de concebir, intuitivamente, los componentes básicos de cada construcción. Reflejan que ellos contienen las nociones que fueron definidas y aceptadas como evidentes, y sirven de parámetro para probar deductivamente cada etapa de las construcciones. Esto expresa, de manera puntual y clara, el carácter métrico de la geometría euclidiana, y son éstas las proposiciones que autorizan a la geometría euclidiana llevar acabo variaciones de posición mediante el uso de regla y compás, "estas dos proposiciones [I. 2, 3] hubieran extendido el poder de la construcción si se hubieran asumido el poder usual del compás;" (De Morgan, en Heath; I, 1956, p. 246). Con lo anterior, encontramos que el papel de la intuición y la representación en las construcciones geométricas son parte esencial de las demostraciones en la geometría euclidiana. Así entonces, y a pesar de la falta de claridad en las definiciones, Euclides elucida la plausibidad misma de las demostraciones mediante las construcciones gráficas.

Diferentes autores hallaron serias dificultades en la la geometría euclidiana, precisamente, por su falta de claridad. Heath en su estudio crítico ya presentaba un importante panorama sobre el asunto. No sobra resaltar, de nuevo, que los axiomas, los postulados y las definiciones constituyen el andamiaje sobre el cual Euclides desarrolló su geometría métrica, pero en la modernidad serían problematizados para poner en desequilibrio todos esos fundamentos, aparentemente sólidos. En esta tarea, Leibniz pretendió partir desde lo más elemental del asunto, esto era, considerar que la geometría en general puede prescindir de la métrica y, por tanto, puede prescindir de los diagramas que Euclides presenta. Por tanto, para Leibniz puede configurarse una geometría formal y cualitativa. Pensada, de ese modo, que podrían dejarse de lado las definiciones de sus objetos fundamentales y pensar únicamente en las correspondientes relaciones que los símbolos podrían reflejar. Éste es el proyecto del *Analysis situs*.

El *Analysis situs* de Leibniz

En el apartado anterior mostré en qué sentido la geometría euclidiana desarrolla sus demostraciones mediante cierta intuición representativa de nociones tales como punto, línea y círculo. También mostré cómo se autoriza la transferencia de medidas y, con ello, el uso del compás como instrumento. En el siguiente apartado, mostraré la propuesta geométrica de Leibniz. De ese modo, elucidaré que sus críticas a la geometría euclidiana están enfocadas en sus fundamentos métricos. Con el fin de lograr esto, el método del análisis será el referente guía del que el pensador alemán se valdrá para desarrollar el desenvolvimiento de su geometría con relaciones entre símbolos. Por tanto, postulará una geometría basada en nociones estrictamente cualitativas, como contraposición a la geometría métrica euclidiana y cartesiana.

Los estudios que Leibniz realiza sobre los *Elementos* de Euclides y sobre la geometría analítica de Descartes lo llevaron a rastrear los límites y los problemas de cada una de ellas. Por un lado afirma que la geometría se cimenta sobre una serie de supuestos que traen implícitas serias dificultades de interpretación, por dos razones principales: en primer lugar, los axiomas y las definiciones de los *Elementos* no son enunciados claros, pues no sabemos si, por ejemplo, las definiciones refieren a los objetos que pretenden definir; esto nos puede llevar a pensar en que si no refieren a esos objetos, esta geometría estaría cimentándose sobre principios, posiblemente, contradictorios. En segundo lugar, los *Elementos* dependen de las representaciones intuitivas que nos hacemos de las figuras geométricas, lo que complica los razonamientos geométricos. Estos problemas Leibniz ya los había presentado al pensador holandés Christian Huygens en una carta de octubre de 1679:

> […] mientras que este método sigue las figuras con la vista, alivia la imaginación, y se podría hacer así una descripción exacta de una máquina o de cualquier cosa imaginable, por muy complicada que pudiera ser, sin emplear figuras ni palabras, y no obstante sería fácil, para quien entendiese esos caracteres, trazar la figura a partir de ellos (Leibniz G. W., 1679/2015d, p. 418).

De la misma manera, en un anexo a esta misma carta, Leibniz trata de exponer su proyecto geométrico al pensador holandés; allí afirma que el análisis no había sido llevado hasta el final tanto en la geometría euclidiana como en la cartesiana, por ello sostuvo que: “el álgebra está obligada a suponer los *Elementos de Geometría*, mientras que esta característica empuja el análisis hasta el final (Leibniz G. W., 1679/2015a, p. 488).

Cuando Leibniz dice que el análisis no había sido llevado hasta el final, refiere al *método del análisis*, que tradicionalmente está vinculado a Pappus. Aunque problemático en su definición y problemático respecto a las interpretaciones lógicas que se le fueron agregando a lo largo de la época por diferentes autores, sostiene que puede llevar a la geometría un paso más allá del lugar en donde Euclides y Descartes estaban. Esta pretensión intenta llevar a la geometría hasta sus componentes constitutivos más simples y esenciales. El análisis del que Leibniz se sirve para establecer los fundamentos y la orientación de su propuesta geométrica inicia con la idea de una *resolución de elementos complejos en simples*. En otras palabras, se sirve del análisis como un camino trazado que va de los efectos a las causas. Procura trazar una vía que va avanzando analíticamente hasta identificar aquellos elementos o enunciados idénticos que comprenden el entramado y la complejidad de lo que ya es conocido. Como veíamos en el primer capítulo, Leibniz recurre al *principio de razón suficiente*, para hallar en los enunciados geométricos, que son de razón, todo el encadenamiento de proposiciones necesarias que lo componen, es decir:

> El principio de razón suficiente, en virtud del cual consideramos que no podría hallarse ningún hecho verdadero o existente, ni ninguna Enunciación verdadera, sin que haya una razón suficiente para que sea así y no de otro modo. Aunque estas razones en la mayor parte de los casos no pueden ser conocidas por nosotros (Leibniz, 1720/1983, p. 32; §31)

El análisis permite, por tanto, que se pueda llegar a las causas o a las razones más simples y universales de aquellos enunciados que pueden ser descompuestos hasta lo que Leibniz llama sus ideas o verdades simples. Más adelante dice: “así es como los matemáticos reducen los teoremas de especulación y los cánones de práctica por medio del Análisis a las definiciones, Axiomas y Preguntas” (1720/1983, p. 32: §34). Al aplicar el método analítico como resolución de compuestos en simples en la geometría, el autor alemán procura hallar las verdades primigenias que generan todo el *corpus* de esta ciencia, con el propósito de revelar con claridad el origen de lo que el álgebra cartesiana y los *Elementos* de Euclides ya suponían como dado. La intención es llegar a un término tan simple que sea razón suficiente y necesaria de los objetos geométricos. Por tanto, busca llegar a un cierto punto en el que ya no haya posibilidad de definir algún objeto, pero que a la vez su presencia sea admitida como necesaria en el campo geométrio; en términos lógicos, esto es reducir todo a juicios idénticos, como verdades indemostrables. Para Leibniz, el análisis en geometría puede ir más allá de las relaciones métricas, a diferencia de Descartes o Euclides, pues parte del hecho natural de pensar los elementos constitutivos de aquello que constituye la posibilidad misma de las relaciones métricas, esto es lo que llama *situs*:

> La causa de que no se descubriese todavía el análisis mediante líneas se encuentra sin ninguna duda en que aún no se han hallado los caracteres mediante los cuales se represente directamente el *situs* mismo de los puntos, pues en la gran multitud y confusión de las cosas es muy difícil manejarse sin los caracteres (Leibniz G. 1679/ 2015b, p. 442)

Lo que el filósofo alemán intenta desarrollar a través de su proyecto es una nueva geometría con la que es posible identificar las posibles relaciones entre lugares, entre un *situs* con otro *situs*, de manera clara y natural. Entonces, al carecer de definiciones, los lugares sólo pueden ser diferenciados mediante símbolos. Con todo lo anterior, Leibniz puede aceptar que las definiciones de la geometría euclidiana pueden ser demostradas, o mejor, construídas, a través de relaciones concretas entre lugares y situaciones. En esto radicará el valor de los *characteres*. Así, al recurrir al análisis como método para la invención en el *Analysis situs*, surge la posibilidad de pensar componentes más precisos y de orden formal que sirven de medio para operar con relaciones entre puntos o lugares simples. Por esa razón el: "análisis, de cualquier forma, sirve para ayudar al razonamiento geométrico" (Pasini, 1997, p. 44), pues permite hacer construcciones geométricas sin que entre en juego la intuición y, por tanto, algún tipo de figura geométrica, a diferencia de Euclides. En conclusión, ir más allá de lo que los *Elementos* suponen es una tarea que consiste en llevar el análisis más allá de la intuición o de la imaginación. Con ello, se busca estructurar una geometría basada en un lenguaje más preciso que ofrezca una mayor claridad en sus componentes, pues resulta ser: "como un ejemplo de tecnología cognitiva inmaterial, este nuevo *analysis situs* es, por supuesto, un arte de caracteres, y un arte de la invención" (1997, p. 44). Por ello, para Leibniz los símbolos fungen como herramientas con las que puede conducirse toda la geometría hacia una independencia de cualquier tipo de diagramación. Postula, así, una geometría que deja de lado cantidades métricas y pasa a operar con unidades cualitativas.

Para continuar con la exposición, en primer lugar debe aclararse la idea del *Analysis situs* en tanto arte de caracteres. El método del análisis permite la manipulación de ciertos elementos indefinibles, simples e idénticos y para diferenciarlos, se les adscribe un nombre particular a través de algún tipo de símbolo. En ese mismo orden, estos símblos sirven como medio de representación para identificar relaciones entre esos objetos. Como son indefinibles e idénticos, no es posible hallar alguna diferencia más que en su simple simbolización, de ahí que dichos objetos posean una propiedad que tiempo después Russell identificará para los puntos en geometría proyectiva, esto es una *propiedad extrínseca*. Russell considera que en una agrupación discreta de puntos puede ser posible distinguir unos de otros nada más que por su posición (en términos leibnizianos, por su *situs*). Sólo es posible, por tanto, establecer relaciones mediante sus propiedades extrínsecas. A diferencia de Euclides, quien nos ofrecía al inicio de su geometría una descripción de la palabra punto (su propiedad interna), en geometría proyectiva prescindimos de ella para solo hallar relaciones entre un punto y otro y así es como pueden se definidos, mediante relaciones o propiedades externas. Las propiedades internas son aquellas que definen a un punto determinado desde sí mismo, mientras que las propiedades externas son aquellas que definen al punto de acuerdo a su posición y su relación respecto a otros puntos, en consecuencia:

> Cualesquiera sean las propiedades internas de una figura, se sigue que todas las partes del espacio son cualitativamente similares, ya que un cambio de las relaciones externas es un cambio en una parte del espacio ocupado. Se sigue que toda posición es relativa y extrínseca, es decir, que la posición de un punto, o la parte del espacio ocupada por una figura, no es, y no tiene efecto sobre cualquier propiedad intrínseca del punto o figura, pero es una relación exclusiva con otros puntos o figuras en el espacio, y permanece sin efecto excepto donde aquellas relaciones son consideradas (Russell, 1897, p. 133-134, §124)

Por tanto, Leibniz también esta pensando, por ende, en las propiedades externas que poseen diferentes situaciones, puesto que el *Analysis situs* deja de lado los aspectos intrínsecos de los objetos geométricos, y busca encontrar las consecuencias derivadas de las relaciones externas entre dos puntos según las letras o símbolos que se les adscriba. En este punto se da lugar a lo que Leibniz requiere para estructurar el *Analysis situs*, esto es, un espacio. Mediante análisis, los juicios de la geometría se pueden reducir a términos idénticos. En geometría, lo más simple e indefinible es el *situs*. Los lugares son indistinguibles entre sí, pues no poseen propiedades intrínsecas, de esa manera, lo único que permite diferenciarlos es su posición y, por ende, ellos son distinguibles mediante sus propiedades externas. El espacio será, en consecuencia, el lugar de todas las situaciones y el lugar de todas las relaciones posibles entre las infinitas posiciones que pueda haber. El principio que entrará a jugar en este punto será el de la *identidad de los indescirnibles*. Por ende, el *situs* que algo ocupa respecto al *situs* de otra cosa, implica que haya una relación esencial entre ellos; por ende, que todas las cosas que ocupan un *situs* determinado también ocupan un lugar común determinado. Con estas formulaciones, Leibniz llega a problematizar la naturaleza misma del espacio. Pues si todas las cosas ocupan un lugar, también ocupan el mismo lugar entre sí y, en consecuencia, nunca sería posible discernir un lugar de otro en el espacio, y si no hay posibilidad de hallar una diferencia entre lugares, entonces no podría haber relación alguna. Así fue como Leibniz presentó esta idea a Clarke tras la discusión que tuvieron sobre la naturaleza del espacio, en donde concluyó que el espacio es una cosa enteramente relativa (Leibniz, 1716/1980, III §4, p. 68), y en consecuencia:

> Si el espacio no es otra cosa que ese orden o producto, y no es nada sin los cuerpos más que la posibilidad de colocar en él esos dos estados, uno tal como es, el otro supuesto al revés, esos no diferirían entre sí: su diferencia no se encuentra más que en nuestra suposición quimérica de la realidad del espacio en sí mismo. Pero, en la realidad el uno sería justamente la misma cosa que el otro, ya que son absolutamente indiscernibles y, por consecuencia, no hay lugar para preguntar la razón de la preferencia del uno sobre el otro (Leibniz, 1716/1980, III §5, p. 68)

El principio de los indiscernibles se puede formular de tal forma que si dos cosas son iguales en absolutamente todas las propiedades que se les pueda adscribir, entonces se trata de la misma cosa y no de dos. Por lo tanto si todos los lugares en el espacio son idiscernibles entre sí, entonces todos ellos son una sola cosa, y en consecuencia el espacio sería una sola unidad. Para poder estructurar esta distinción entre lugares, Leibniz se vale de nociones como *posición* y *situación*. Couturat en la *Logique du Leibniz* presenta una diferencia sobre estas dos nociones: “la posición es lo que distingue los objetos que no ofrecen ninguna distinción intrínseca: y la situación es la posición en el espacio (en decir, en el orden de la coexistencia) como los instantes en el tiempo” (Couturat, 1901, p. 407). Un punto en el espacio, por tanto, debería tener una *posición* que pueda hacerlo distinguible de otro punto, pues no hay propiedades intrínsecas que permitan distinguir uno de otro. Solo queda, por ende, recurrir a las propiedades extrínsecas que eluciden con claridad las relaciones de un punto respecto a otros lugares o situaciones en el espacio. Couturat trata de particularizar con más detalle la definición de *situación* de la siguiente manera: “Leibniz observa que la situación es una relación tal, que todas las cosas que tienen una situación en relación con una misma cosa tienen una misma situación entre ellas” (1901, p. 407), sobre lo anterior, existe un pequeño texto redactado por Leibniz que se suele titular “Definiciones Geométricas” en el cual trata de ser más específico sobre la situación en el *Analysis situs*:

> Punto es un lugar simple, o en el que no hay otro lugar. Así, si B está en A, será A ∞[9] B. El lugar se constituye por puntos o lugares simples. Así podemos llamar X al lugar, el cual está constituido por puntos cada uno de los cuales puede llamarse X. Y así, el lugar está allí donde está cualquiera de sus puntos. Si *todo* es Y, X será en Y. El espacio es el lugar de todos los puntos. Sea cualquier punto P, el espacio será P. Y así, como el punto es el lugar mínimo, así el espacio es el lugar plenísimo máximo o donde está todo otro lugar, y, así, si todo punto es P, el espacio será P. Pues dado que todo punto de cualquier sitio está en el espacio, todo lugar estará en él. (Leibniz G. ,trad, 2015i, II, p. 129)

Por lo tanto, un lugar simple ocupado por un punto es la parte más elemental de la totalidad del espacio y el espacio es el lugar plenísimo que lo ocupa, y mediante la simbolización de estos puntos es posible distinguir uno de otro en ese lugar plenísimo. Leibniz define los *characteres* como:

> […] cosas con las cuales se expresan las relaciones de otras cosas entre sí, y que son más fáciles de tratar que éstas. A todas las operaciones que se hagan con los caracteres corresponden enunciados referentes a las cosas; y podemos con frecuencia definir las consideraciones sobre las cosas mismas hasta el final de la operación. (Leibniz G. 1679/2015b, p. 439-440)

Los caracteres designan objetos que no poseen propiedades internas, no son definibles y resulta más fácil tratar con dichos símbolos que con las cosas mismas que designan. Estas letras se asigan partiendo de los siguientes referentes: *A*, *B* y *C*, expresan puntos o posiciones

[9] Éste símbolo refiere a la noción de coincidencia. Es uno de los primeros intentos por medio de los cuales Leibniz intentó desarrollar la idea de congruencia, al respecto sostiene: “primero puede suceder que dos o varios de los nombres, distintos en especie, no sean en realidad más que una sola cosa o lugar, esto es puntos o líneas u otros trazos, de los cuales diremos que son IDÉNTICOS o que COINCIDEN. Así, tenemos dos líneas AB y CD, tales que sean los puntos A y C uno y el mismo, esto lo designaremos: A ∞ C, es decir A y C conciden” (Leibniz G., 1679/2015b, p. 452).

fijas, mientras que *X*, *Y* y *Z* expresan puntos o posiciones variables. Desde aquí, Leibniz ya da un primer paso para identificar las situaciones de lugares con los nombres *A*, *B* o *C* y de la misma manera pretende establecer relaciones entre puntos fijos y puntos variables expresados mediante las letras *X*, *Y* o *Z*. De esa forma, cada correlación entre letras revelaría, por tanto, las posibles relaciones de lugar entre aquellos puntos.

Una de las diferencias profundas que sale a relucir entre el *Analysis situs* y la geometría euclidiana, radica en su independencia de la métrica. Por ello, se constituye como una geometría cualitativa o una geometría basada en las relaciones entre puntos o lugares. Como vimos en el apartado anterior, la geometría de Euclides presupone la noción de magnitud, omitiendo relaciones de lugar o de posición, de ahí que el *Analysis situs*: "no da definiciones intrínsecas de las figuras, como debería ser para que prevaleciera frente a la Geometría analítica en simplicidad y en claridad intuitiva" (Couturat, 1901, p. 27). En el marco del *Analysis situs* sí es posible configurar una geometría de relaciones entre objetos si se tiene en mente nociones como igualdades, semejanzas y, principalmente, *congruencia*. En este punto resalta el papel que Leibniz da al concepto de *congruencia*, pues es la relación con la que puede desarrollar construcciones con relaciones. Antes de admitir el concepto de punto debe explicar con profundidad la noción de sitio, posición o situación, de la siguiente manera:

> […] la naturaleza del *sitio* (*situs*) es de condición tal que todas las cosas que tienen sitio, lo tienen también entre sí. De suerte que, suponiendo que A tiene sitio, (v.g. con relación a L) y B tiene sitio (v.g. con relación a M), se sigue que A y B tienen sitio entre sí (Leibniz G. W., trad, 2015q, I, p. 147)

La relación más simple y elemental que Leibniz concibe entre dos situaciones distintas es la congruencia, puesto que surge como el medio, que además de permitir la distinción entre dos puntos en el espacio, revela las relaciones de situación que esos dos puntos poseen. En geometría, dos figuras son congruentes cuando ellas coinciden en absoluto respecto a su forma. Lo que Leibniz afirma es que si dos puntos son exactamente iguales son uno y el mismo. Pero, al dejar a un lado las propiedades internas que estos puntos poseen, es posible distinguirlos mediante las propiedas extrínsecas que hay entre ellos, es decir, mediante su relación de lugar. Dos puntos son congruentes en tanto que sus propiedades internas coincidan en absoluto. Pero son distinguibles, mediante sus propiedades externas, y en ese orden de ideas, como lo señala Couturat:

> La congruencia (o la igualdad geométrica, es decir la posibilidad de coincidencia) es, como decíamos, la unión de relaciones de similitud, y de igualdad (equivalencia cuantitativa). Si dos puntos son esencialmente iguales y similares, entonces son congruentes" (Couturat, 1901, p. 417)

Para la idea de un espacio como orden de coexistencia, la congruencia aparece como una herramienta que discierne esas relaciones de igualdad entre dos puntos determinados por su situación. Es por ello que con este concepto pueden darse operaciones que logran exponer aquellas relaciones posibles entre dos puntos dado en el espacio, representando el lugar que cada uno de ellos ocupa, tal y como dicía Leibniz:

> Si realmente dos cosas no son sólo semejantes sino también iguales, esto es si son congruentes, no puedo distinguirlas si las percibo simultáneamente, a no ser por el lugar, es decir, a no ser respecto a otro que se tome fuera de los mismos y observando que tienen un situs diferente con respecto al que hemos tomado (Leibniz G. 1679/2015b, p. 459)

Siguiendo lo anterior, dos puntos son congruentes si uno puede sustituir a otro sin que varíe el espacio mismo. Leibniz halla aquí una propiedad cualitativa entre dos puntos, y es que uno puede sustituir a otro. Hasta aquó, y gracias al análisis, hemos estructurado, de alguna manera, las bases de un sistema geométrico de relaciones cualitativas. Ahora bien, mediante la relación de congruencia, que es la inicial, Leibniz modela una forma de operación, tal que con ella puedan identificarse relaciones entre cosas indiscernibles; tal concepto lo simbolizó a través de la letra griega *gamma* (γ). Si se quieren tomar dos puntos en el espacio, sean A y B, la primera relación que debe tenerse en cuenta es que ambos ocupan un *situs* en el espacio y serán, por lo demás, congruentes entre sí, es decir $A \gamma B$ (que se lee A es congruente con B) lo que significa que un punto, en este caso A, puede ser sustituído por otro punto B, sin que ocurra alguna modificación en el espacio, puesto que son exactamente iguales en sus propiedades internas. La distinción entre estos dos puntos siempre será posible al "percibir" que ambos ocupan lugares distintos en el espacio, y en eso radicaría su diferencia esencial. A partir de este momento, entonces, ya estaría dado el camino para que Leibniz pueda formular una de las tesis más importantes del *Analysis situs*, que sostiene lo siguiente:

> El lugar más sencillo pero también el más ilimitado es el lugar de todos los puntos congruentes con un punto dado, pues es el lugar de todos los puntos del universo, o sea el espacio infinito, puesto que cualquier punto de todo el universo es congruente con un punto dado (Leibniz G. W, 1679/2015e, p. 484)

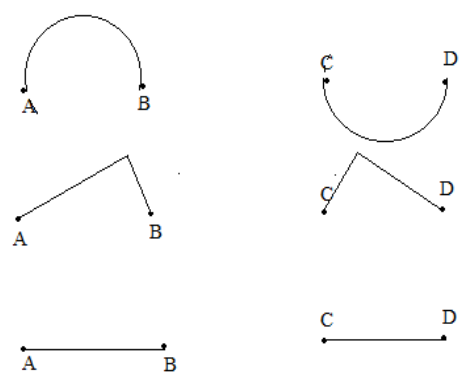
Con la noción de *congruencia* un punto cualquiera puede ser sustituido por cualquier otro punto del universo sin que en el espacio se den cambios considerables, precisamente porque uno y otro coinciden exactamente en sus propiedades internas: “la congruencia: $A \gamma Y$, el lugar de todos los *Y* será el Espacio infinito” (1679/2015e, p. 484). Así, A es un punto cualquiera del espacio, individuado por medio de una letra. Éste posee una de las relaciones más simples con otros puntos cualesquiera que sean posibles en el universo, estos serán representados por la letra *Y*, que indica una variable indeterminada de puntos, y todos ellos pueden sustituir al punto *A* sin que en el espacio haya algún tipo de cambio. La fórmula para representar que un punto es congruente con todos los puntos del espacio infinito se expresa $A \gamma Y$. Sin duda alguna, esta es una de las ideas más fuertes y destacadas del *Analysis situs*, pues implica, en el fondo, que al pensar un solo punto debe pensarse en su relación de congruencia con todos los otros puntos que existen en el espacio infinito, es decir, pensar un solo punto implicaría, pensar el espacio en su totalidad.

Leibniz explica que la relación entre la posición de dos puntos se particulariza mediante sus propiedades extrínsecas y entre dos puntos pueden tener un mismo *situs*, sin importar el extenso que los conecte, pues pueden darse de manera rectilínea o curvilínea. Así, *A*, designa un punto determinado, y *B* designa un punto determinado diferente de *A* pero por su posición. Cada uno de ellos representan una posición cualquiera y son particularizados por medio de alguna letra determinada. Esto permite a Leibniz representar el lugar o *situs* de estos dos puntos de la siguiente manera (Figura 13):

(Figura 13)

La primera relación que Leibniz identifica entre estos dos puntos es una congruencia, y en ese orden de ideas, sin importar si la conexión entre ellos es curvilínea o rectilínea, el punto *A* puede ser sustituido por el punto *B* sin que el *situs* varíe, así: “*AB* significa el *situs* de los puntos *A* y *B* entre sí, es decir, cualquier extenso que los conecte (no importa si es curvilíneo o rectilíneo); el cual no cambia mientras el *situs* entre los dos puntos permanezca idéntico” (1679/2015e, p. 481). *A* y *B*, sin más, son indiscernibles, salvo por el hecho de que difieren en el *situs*. Por su primera relación y la más básica, es posible afirmar que *A* puede ser sustituido por *B* sin que se evidencie ninguna diferencia y, por ende, son congruentes por cuanto el *situs* que los conecta es el mismo. Leibniz formula esta relación de la siguiente manera: $A \gamma B$.

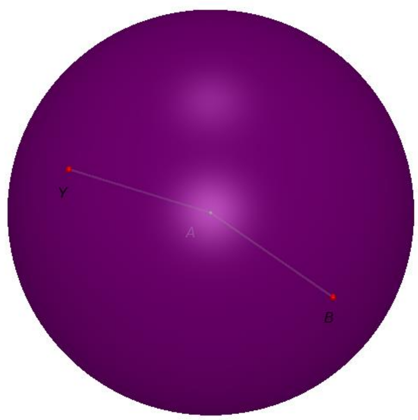
Al inferir que entre dos puntos uno puede ser sustituido por el otro mediante la fórmula "$A \gamma B$", pueden darse otras formas de congruencia entre lugares diferenciados por letras. La primera costrucción que Leibniz presenta es la de dos extensos, ya distinguidos entre sí, y cada uno de ellos conformado por sus dos puntos respectivos: dichos extensos serán *AB* y *CD*. Leibniz intenta elucidar que el extenso *AB* puede ser sustituido por el extenso *CD* siempre y cuando sean congruentes en absoluto, lo que se simboliza mediante la expresión: $AB \gamma CD$, es decir, que el todo cuyos extremos son los puntos *A* y *B* es congruente con el todo cuyos extremos son los puntos *C* y *D*, y son congruentes sí y solo sí uno de estos todos puede ser sustituido por el otro poniendo en contacto los extremos *A* y *C*, por un lado, y *B* y *D* por el otro, sin que ello afecte en nada el espacio, esto lo representaría Leibniz (Figura 14) de la siguiente manera:



(Figura 14)

"Dicho de otro modo, los puntos *A* y *B* conservano el *situs* o extenso rígido que los conecta, pueden transferirse al lugar de los puntos *C* y *D*" (1679/2015e, p. 482). Los extensos que conectan a los puntos *A* y *B* pueden ser los mismos absolutamente en los extensos que conectan a los puntos *C* y *D*, siempre y cuando coincidan los extremos de *A* y *B* con *C* y *D*. Con esto surge la idea de que se pueden establecer relaciones entre estos dos puntos, *A* y *B*, tales que puedan transferirse al extenso que conecta a los puntos *C* y *D*.

Tras haber identificado la congruencia dada entre dos extensos, y después de haber identificado todos los puntos congruentes con uno dado, Leibniz propone hallar el lugar de las superficies esféricas, es decir "[…] el lugar de todos los puntos que tienen el mismo *situs* respecto a un punto dado. Y así, si tenemos la congruencia $AY \gamma A(Y)$ el lugar de todos los Y será una esfera. Y supuesto un punto constante *B* en la misma superficie de la esfera, el mismo lugar se puede expresar $AB \gamma AY$" (1679/2015e, p. 485). Siguiendo estas ideas, dado el *situs* entre *AB*, y dado un punto cualquiera *Y* (en donde *Y* es una variable indeterminada, pues no es un punto fijo o específico), éste estará sobre la superficie de la esfera si, y sólo si, *AB* es congruente con *AY*. Es decir, todos los puntos *Y* estarán en la superficie de una esfera. Ahora bien, una esfera así representada no implica que se piense que el *situs AB* corresponde a su radio, sino que el *situs* de los dos puntos *A* y *B* es congruente con todo *situs AY*. Si se pudiera llevar acabo la representación gráfica de esta formulación (Figura 15), podría realizarse de la siguiente manera:



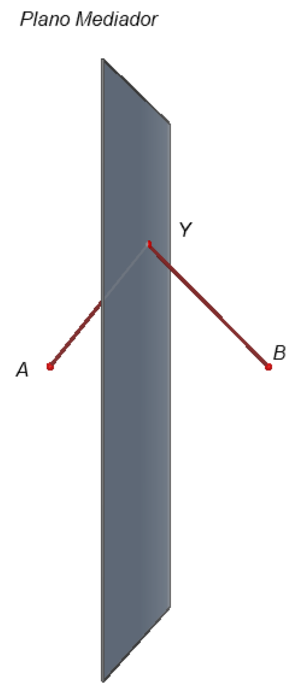
(Figura 15)

La esfera dibujada representa que dado el *situs* entre *A* y *B*, éste será congruente con todos los *AY* que puedan ser posibles. Es decir, que todo *AY* puede sustituir al *situs* entre *A* y *B* si sus extremos coinciden exactamente. Todos los puntos *Y* estarán en la superficie de una esfera, o como bien dice a Huygens: "el lugar de todos los *Y* será la superficie de la esfera cuyo centro es *A* y el radio *AY*, siempre igual en magnitud, o igual al dato *AB*, o bien *CB*" (Leibniz G. 1679/2015a, p. 491). Pero el hecho de representar una esfera, no significa que estemos recurriendo a la métrica para comprender la expresión leibniziana de esfera. Esto es más un medio al que se recurre para representar la expresión $AB \gamma AY$. Tampoco significa que se piense, necesariamente en una esfera, pues el extenso que une a los puntos no necesariamente es rectilíneo o curvo, puede ser de cualquier forma. Vemos, de esa manera, que en el *Analysis situs* apelamos a cierta libertad de pensar la forma de la figura, pues lo que en el fondo nos preocupa son las cualidades y no la magnitudes. Por ello el *Analysis situs* mantiene cierto vínculo con la *topología moderna*, disciplina que se encarga de ver las figuras geométricas como elementos que pueden deformarse de muchas maneras. Esta disciplina:

> Se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invarientes cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas de cualquier manera tal que no aparezcan nuevos puntos o se hagan coincidir puntos ya existentes" (Kline, III; 1972/1992, p. 1529)

Una esfera, no necesariamente debe concebirse con la forma de un globo, pues es posible estructurarla de otras maneras sin que pierda su cualidad en tanto que esfera. Es decir, que todas las formas que tome serán equivalentes entre sí, pues podría suceder el caso de que una figura esférica pueda deformarse de una manera tal que quede con la forma de un vaso; así, ambas formas serán equivalentes. Ya Morris Kline afirmaba que: "en la medida en que las cosas estaban medianamente claras, lo que Leibniz preveía era lo que llamamos hoy topología combinatoria" (III; 1972/1992, p. 1536).

Determinadas las regiones esféricas, Leibniz establece la región del plano, que define de las siguiente manera "[…] es el lugar de todos los puntos cada uno de los cuales tiene el mismo *situs* respecto a dos puntos dados" (1679/2015e, p. 485). La expresión que establece para esta definición es como sigue: $AX \gamma BX$. Con esto quiere decir que el *situs* entre dos puntos A y X es congruente con el *situs* de los puntos B y X. Es decir, si AX coincide exactamente con BX, entonces el lugar de los X es un plano. Dicho plano puede ser denominado, también, plano mediador, pues todos sus puntos X se encuentran entre dos puntos A y B. De esa manera, su posible representación geométrica (Figura 16) podría ser de la siguiente manera:

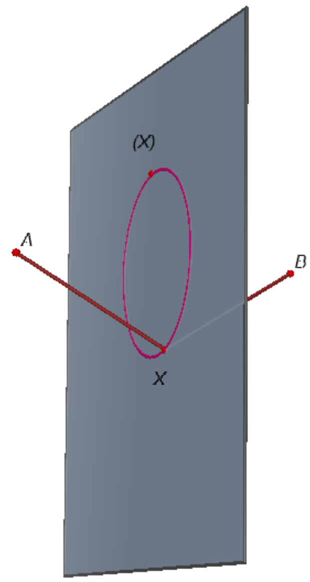


(Figura 16)

El plano mediador de todos los *X*, se definen por la relación entre todo el conjunto de puntos que configuran la construcción. De tal forma que todos los puntos *X* que a él pertenecen, se comportan de la misma manera con los puntos *A* y *B*. Vemos que una noción como la de plano, que Euclides define intrínsecamente, como “aquello que tiene longitud y anchura” (Heath, 1956, I, p. 153; def: 7), Leibniz la configura solo con relaciones de cualidad y por medio de símbolos. No hay medidas, no hay circunferencias, es decir, no hay métrica alguna, solamente, relaciones entre objetos que se determinan solo por relaciones de congruencia.

Recopilando un poco todo lo que Leibniz ha determinado hasta el momento tenemos, en primer lugar, el espacio como lugar de todos los puntos congruentes con un punto individualizado; por otro lado, tenemos la construcción de la esfera y, en tercer lugar, la construcción del plano. A continuación Leibniz configura los caracteres de la circunferencia, que define de la siguiente manera: “$ABX \ \gamma \ AB(X)$ es una línea circular, pues sus puntos cualesquiera se comportan del mismo modo con respecto a dos de ellos fijos” (1679/2015e, p. 485). Es decir, que dado el *situs* de los puntos *ABX* estos son congruentes con los puntos

AB(X), de tal forma que los puntos *(X)* se encuentran sobre la circunferencia de un círculo. De ese modo, la representación gráfica (Figura 17) sería:

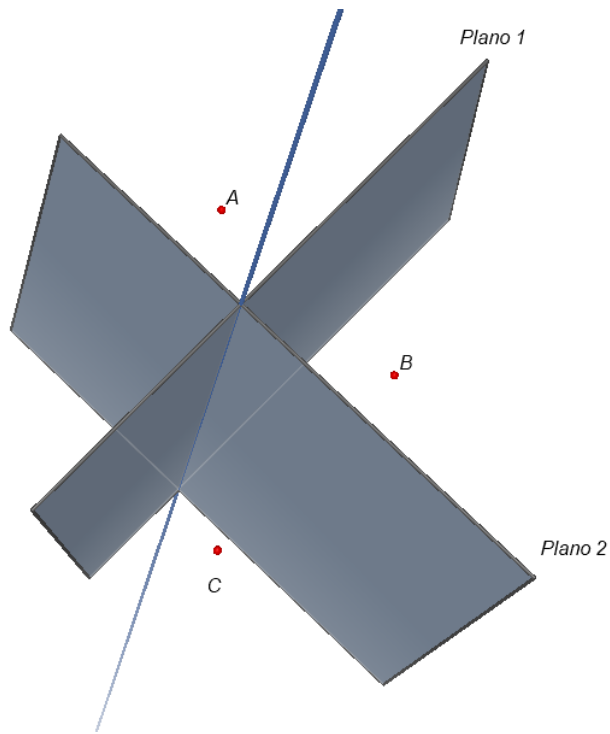


(Figura 17. La figura presenta dos puntos *A* y *B* y la circunferencia *ABX γ AB(X)*. En donde *(X)* es una variable pero que en el plano corresponde a cualquier punto que está en la circunferencia, tal que *ABX* coincida exactamente con *AB(X)*)

La circunferencia surge, por tanto, por el hecho de delimitar los puntos en el plano que se definen por la expresión *AX γ BX* de tal forma que para el caso de la circunferencia, ya no toma cualquier punto en dicho plano, sino que se toman aquellos que satisfacen la expresión *ABX γ AB(X)*, y que tienen el mismo *situs* con *A* y con *B*, esto es, como escribió a Huygens: “hay tres puntos dados *A*, *B*, *C*, se repite un cuarto punto *Y* que tenga la misma situación que *C* respecto *AB*. Yo digo que hay una infinidad de puntos que pueden satisfacerlo, y el lugar de todos esos puntos es la circunferencia” (Leibniz G. , 1679/2015a, p. 492-493). A diferencia de Euclides, que define circunferencia métricamente como la: “[…] línea tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí” (Heath, 1956, I, p. 155; def. 15), Leibniz la define mediante relaciones de congruencia entre tres puntos individuados.

Leibniz, a continuación, identifica los lugares que determinan una recta. El filósofo alemán la define de la siguiente manera: “el lugar de todos los puntos *Y* con respecto a los cuales tres puntos dados *A*, *B*, *C* se comportan del mismo modo, es la RECTA, de modo que

AY γ BY γ CY" (Leibniz G. W., 1679/2015e, p. 486). Es decir que una línea recta corresponde con la intersección de dos planos, pues si se toma en consideración lo que expresa la primera parte de la expresión es, por un lado, la construcción de un plano mediador entre dos puntos *A* y *B* cuyos puntos *Y* conservan el mismo *situs* respecto a *A* y a *B*. De esa forma tenemos el plano mediador *AY γ BY*, denominado plano 1. La segunda parte de la expresión constituye un plano mediador entre los puntos *B* y *C* tales que todos los puntos *Y* conservan el mismo *situs* tanto como en *B* como en *C*. Por tanto, *BY γ CY*, denominado plano 2. De esa manera, la totalidad de la expresión determina la configuración de una recta, o como lo expresa Couturat, "la intersección de dos planos es una recta [...] y está contenida en su totalidad en un plano" (1901, p. 424); la recta se representaría de la siguiente manera (Figura 18):

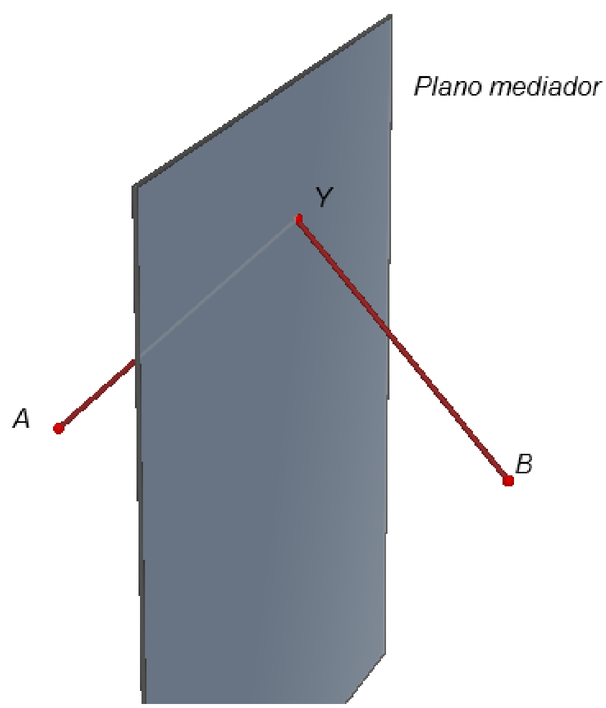


(Figura 18. Vemos el plano 1, correspondiente al plano *AY γ BY* y el plano 2 correspondiente a la expresión *BY γ CY*. Los dos planos intersectan y constituyen una recta de la forma *AY γ BY γ CY*)

Por último, Leibniz define el concepto de punto, que, aunque representado e individuado por medio de letras desde el principio, ve que es necesario exponer los caracteres que lo definen como el único lugar en el cual varias rectas intersectan. Pretende, por medio de las propiedades externas que hay entre planos, rectas y puntos, establecer la definición de un punto individuado según su situación respecto a otros puntos. Sobre lo anterior afirma que:

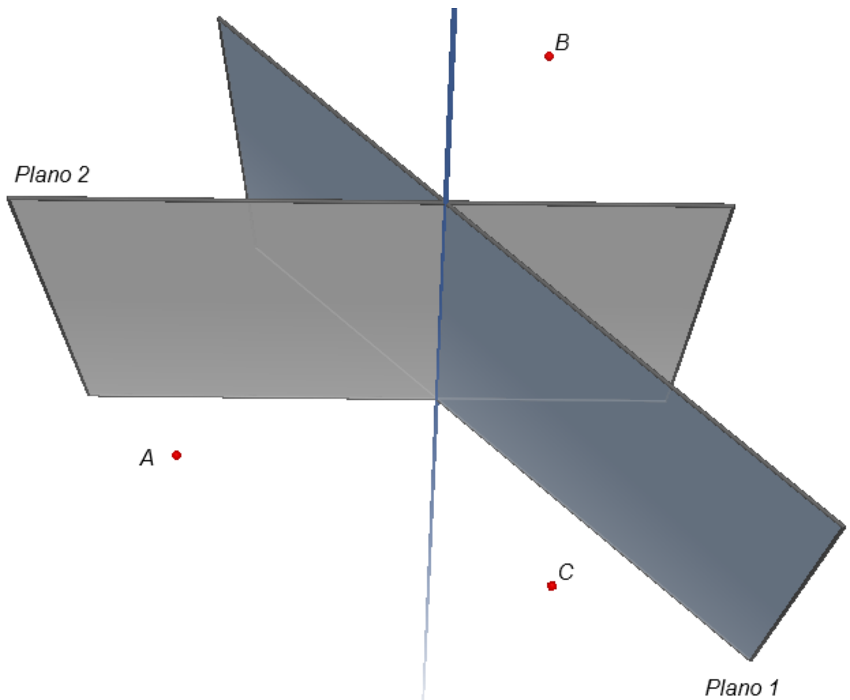
> *AY* γ *BY* γ *CY* γ *DY*.
> El lugar será un PUNTO. Pues se pide un punto *Y*, que tenga la misma situación respecto a los cuatro puntos dados *A*, *B*, *C*, *D* (es decir, que las rectas *AY*, *BY*, *CY*, *DY* sean iguales entre sí) y no hay más que un solo punto que pueda satisfacerlo (Leibniz G, 1679/2015a, p. 493-494)

Un punto es la intersección dada entre dos rectas. Una recta, como se vió en el ejercicio anterior, es la intersección entre dos planos. Dos rectas que intersecten requieren de tres planos que intersecten entre sí. Si un plano se representa mediante la expresión *AY* γ *BY* (plano 1) y una recta se representa mediante la expresión *AY* γ *BY* γ *CY*, entonces debe haber un punto *C*, tal que *BY* γ *CY* (plano 2), y tras la intersección de los planos 1 y 2 se conforma la recta ya mencionada. De ese modo, la expresión *CY* γ *DY* (plano 3), que constituye un plano diferente generará otra recta que intersectaría con la inicial en un punto determinado, tal que se satisfaga *AY* γ *BY* γ *CY* γ *DY*. Por tanto hay un solo punto Z sobre el cual intersectan dos o más rectas dadas, la construcción gráfica será la figura 19c, la cual construiré paso a paso. En primer lugar, de la expresión *AY* γ *BY* γ *CY* γ *DY* se tomará la expresión que constituye el plano *AY* γ *BY* (Figura 19a) de la siguiente manera:



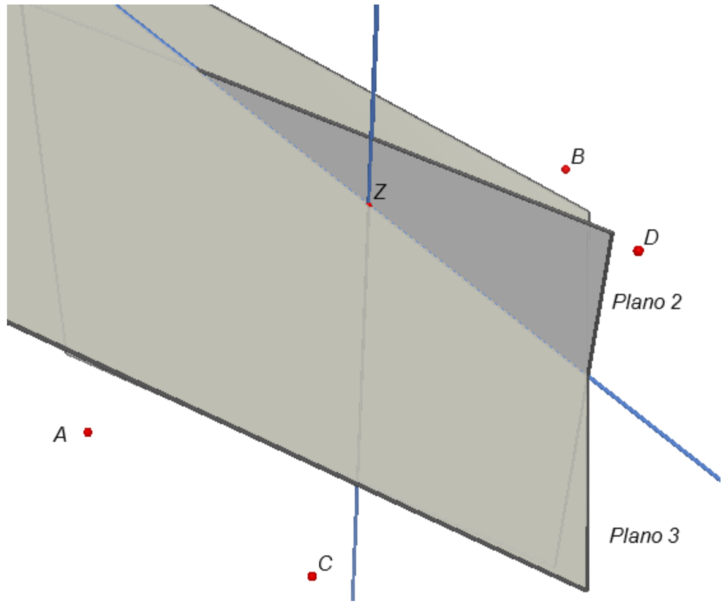
(Figura 19a. La figura muestra dos puntos *A* y *B* y el plano mediador *AY* γ *BY*)

Dado el plano anterior, se debe agregar un punto C, tal que configure un plano de la forma $BY \gamma CY$ respecto al punto B. Tales planos intersectarán y configurarán la recta $AY \gamma BY \gamma CY$ (Figura 19b). Cada plano será numerado, tal y como lo numeré en el parágrafo anterior:



(Figura 19b. La Figura muestra los puntos *A*, *B* y *C*, el plano mediador $AY\gamma BY$ (*Plano 1*) y el plano mediador $BY\gamma CY$ (*Plano 2*). La recta que muestra la figura resulta de la intersección de los dos planos. De ahí que la recta se pueda presentar como $AY\gamma BY\gamma CY$)

En tercer lugar, y dada la figura anterior, debemos agregar un punto D, tal que constituya un tercer plano expresado en la fórmula $CY \gamma DY$ (plano 3) y que genere una nueva recta al intersectar con el plano $BY \gamma CY$, de tal forma que las dos rectas intersecten en un punto Z, punto definido mediante la expresión $AY \gamma BY \gamma CY \gamma DY$.



(Figura 19c. La figura muestra los puntos *A*, *B*, *C* y *D* (con *D* en un plano diferente al que reúne los otros tres puntos). También muestra la recta *AYγBYγCY* que resulta de la intersección de los planos *AYγBY* (*Plano 1*) y *BYγCY* (*Plano 2*), aunque oculta, por comodidad, al *Plano 1*. El *Plano 3* es el plano mediador de los puntos *C* y *D*, es decir *CYγDY*. Así las cosas, la segunda recta es la intersección de los planos 2 y 3: *BYγCYγDY*. Finalmente, la intersección entre las dos rectas, el punto *Z*, se puede individualizar así: *AYγBYγCYγDY.*)

Euclides define al punto como “aquello que no tiene partes” (Heath, 1956, I, p. 155; def. 1). En cambio, Leibniz lo define como el *situs* en cual dos o más rectas intersectan, pues es ese único punto el que tiene una misma situación respecto a cuatro puntos dados, es decir, las rectas son iguales entre sí. Así, Euclides supone como clara y evidente la definición, Leibniz la construye teniendo en cuenta puras relaciones de situación.

Vemos que el *Analysis situs* de Leibniz construye de manera naturalizada o formal todos los conceptos iniciales que Euclides consideraba como evidentes e indemostrables. De esa forma, Leibniz puede configurar dichas figuras prescindiendo de criterios métricos y con independencia de las representaciones gráficas. Así pues, las gráficas que hice en el transcurso del apartado no son parte esencial de las construcciones, sino medios que permiten aclarar con más detalle las expresiones que Leibniz formula. En ese orden de ideas, el *Analysis situs* es una geometría que demuestra la posibilidad de que en dicha ciencia deban tomarse en consideración todas las relaciones cualitativas que sean un fundamento para la consolidación de las geometrías métricas. Establecimos que con el afianzamiento de nociones como punto o línea, es posible prescindir de definiciones descriptivas como de punto o recta.

Esto da lugar a la consideración del lugar o la posición que los diferentes puntos ocupan en el espacio. Es evidente ver que Leibniz identificó aquellos factores que tenían cierta inconsistencia en el sistema euclidiano. A partir de esas inconsistencias evidenció que era posible fundamentar una geometría cualitativa. Partiendo de lo anterior ¿cuáles son las diferencias entre éstas dos geometrías? ¿en qué sentido las geometrías métricas y las cualitativas se relacionan?

Diferencias entre la geometría de Euclides y el *Analysis situs* de Leibniz

Las dos primeras partes de este capítulo se enfocaron en mostrar cómo procede tanto la geometría euclidiana, como la geometría leibniziana. Para el caso de la geometría euclidiana mostré que para desarrollar sus construcciones requiere de la transposición de distancias mediante el uso de regla y compás. En ese orden de ideas, es una geometría métrica. Para el caso del *Analysis situs*, pude mostrar que todas las nociones que Euclides supone como evidentes Leibniz las puede construir a partir de relaciones básicas. Esto hace que la geometría leibniziana sea, por ende, cualitativa. Ahora bien, ¿qué significa que la geometría euclidiana sea métrica y la leibniziana cualitativa? en este apartado puntualizaré en este aspecto, y formularé una respuesta a esta pregunta, para abrir el camino hacia el contenido del tercer capítulo.

Vimos que la geometría euclidiana debe acompañar la argumentación de la demostración de teoremas o problemas a través de un conjunto de esquemas o figuras que ayudan a su respectiva clarificación. Esto significa que: "en las proposiciones I, II y III, las construcciones que lleva acabo sólo requieren el dibujo de rectas y circunferencias, con el único empleo de regla y compás" (Kline, 1972/1992, I, p. 125). Por ello, al depender de esas herramientas iniciales deben intuirse en la mente distancias, ángulos e intersecciones para consolidar las demostraciones. Es así que la geometría euclidiana es una geometría métrica, pues requiere de la transferencia de distancias invariantes. El desarrollo de estas construcciones suponen, en principio, que se deban admitir ciertas propiedades inherentes a las figuras como evidentes de manera absoluta. Pero esto genera un conjunto de complejidades que ponen en suspenso el sistema euclidiano, tales como la continuidad. Como vimos en el primer apartado, ¿qué nos asegura que al trazar los círculos de una recta finita haya entre las dos circunferencias una intersección determinada? Ésta será una dificultad que se tratará de solucionar mediante el *principio de continuidad*. Sostiene este principio que así como una recta finita puede dividirse en dos clases de puntos, de tal forma que haya uno que permita la división, éste será común a las dos clases de puntos; en el caso de la proposición I, dos circuenferencias, necesariamente, intersectan en dos puntos comunes.

Otra de las dificultades que aparece en en interior de la geometría euclidiana se fundamenta en la falta de claridad de sus definiciones, y, por tanto, en el peligro de que lo que es un punto de partida que fundamenta todo un sistema riguroso, no defina, en realidad, nada. Esta dificultad llega hasta el punto en el que se puede llegar a pensar si en realidad los cinco postulados o las definiciones de Euclides refieren a aquello que se intuye como necesario para las construcciones geométricas. Es decir, el problema es si lo que los postulados indican corresponden con lo que se pretende definir, pero en matemáticas esto ya pasa a un segundo plano, pues:

> Las definiciones iniciales de punto línea y superficie no tienen sentido, matemático preciso y, como ahora sabemos, no se les puede dar ninguno, porque cualquier desarrollo matemático independiente debe incluir términos no definidos" (Kline, 1972/1992, I, p. 126)

En este sentido, Leibniz dará el paso para consolidar un geometría que, en primer lugar, prescinda de definiciones afianzadas en la intuición, por ello acude al método del análisis y a los símbolos; en segundo lugar, que prescinda de la construcción de figuras y, por ende, que prescinda de toda clase de magnitudes, esto será una geometría cualitativa. Como vimos, ésta geometría inicia estableciendo un conjunto de criterios a la manera de un sistema formal, que expone todas las relaciones posibles entre una serie de elementos simples e indiscernibles que emergen a través del método del análisis. Al ser indistinguibles, pues no poseen propiedades intrínsecas, sólo podemos diferenciarlos por la posición que cada uno de ellos ocupa. Recurrimos, así, a los *characteres* o símbolos, con lo que podemos diferenciar la posición de cada punto con diferentes letras. La única relación que podemos identificar es que un punto puede sustituir a otro sin que haya variación alguna en el espacio. Con estos elementos Leibniz muestra que las definiciones de Euclides pueden ser construídas, y, en consecuencia que puede existir un sistema geométrico formal que no requiera de palabras que definan algo, sino, simplemente, de un conjunto de elementos o reglas que permitan la construcción de figuras solamente con relaciones estrictamente cualitativas. Así Leibniz, como dijera a Huygens, llevó el análisis más allá de los *Elementos,* y, por ende, llevó la geometría hacia la consideración de las relaciones cualitativas, a un campo más general que el de la geometría métrica, pero ¿qué significa esto?

Leibniz evidencia que el acompañamiento de las figuras en el proceso demostrativo es problemático, en el sentido de que esto nos lleva a suponer una serie de elementos que no han sido definidos o aclarados. Con este presupuesto en mente, procede a determinar que su geometría puede prescindir de esa intuición y dejar de lado los esquemas diagramáticos. Por ello, los símbolos, como medios que permiten diferenciar objetos indiscernibles, pueden dar cuenta de todas aquellas relaciones posibles entre esos objetos indefinibles. Los caracteres del *Analysis situs*, por tanto, nos ayudan a que esto sea posible;

> La descripción de una máquina [en caracteres sin figuras y], aunque fuera algo complicada, lo que daría medios al espíritu para conocerla distinta y fácilmente, sin servirse de figuras ni de modelos y sin molestar a la imaginación" (Leibniz G, 1679/2015a, p. 488)

Leibniz, por ende, ya prefiguraba cierta independencia de la geometría de la representación mental y, con ello, estaba dando paso a que los objetos elementales de la geometría no fueran definibles con descripciones que expresan su naturaleza, sino definibles por las relaciones que éstos poseen entre sí, tal y como sostiene Hilbert: "no hay necesidad de establecer definición alguna acerca de lo que es cada uno de éstos objetos, esta definición está dada implícitamente por los axiomas" (Ver introducción, Hilbert, 1895/1993, p. 10). En un sistema formal como el que estructuró Leibniz con la *characteristica*, los objetos geométricos se definen por las relaciones que hay entre ellos de acuerdo con las reglas del *Analysis situs*, no tanto con axiomas, porque Leibniz no formuló los axiomas de esta geometría. Un punto, por tanto, solo es definible si podemos diferenciarlo por la posición que ocupa respecto de otros puntos en el espacio. Por medio del análisis, entonces, Leibniz logra establecer que las principales dificultades de la geometría euclidiana podían superarse al reducir los juicios de razón a juicios de identidad y, por tanto, a las relaciones lógicas entre los juicios de identidad.

Leibniz determina que todos los objetos simples de la geometría, carecen de propiedades intrínsecas. Pues de ser definibles podrían ser descompuestas analíticamente, y no habría fin, por ello, debemos recurrir a sus propiedades externas, esto es a sus relaciones con otros objetos simples e indivisibles. Con todo esto, encontramos un campo común con la futura geometría proyectiva. Pues, como vimos en el apartado anterior, Russell recurre a estas nociones (propiedades intrínsecas y extrínsecas) para establecer que en la geometría proyectiva también se prescinde de las definiciones descriptivas de los objetos, y de la misma manera éstos solamente se definen por sus relaciones mutuas, precisamente porque la geometría proyectiva: "trata con la cualidad, y no puede distinguir entre dos figuras que son cualitativamente iguales […] Dos pares de puntos cualesquiera sobre una misma línea, son, por tanto, cualitativamente iguales" (Russell, 1897, p. 33-34; §37). La geometría proyectiva, al igual que el *Analysis situs*, considera que dos puntos son cualitativamente similares, pero distinguibles por la posición que cada uno de ellos ocupa. Esta será la geometría que, después de las no-euclidianas, aparecerá para demostrar que las geometrías métricas son casos particulares de la proyectiva, esto es: "en realidad, la geometría proyectiva es más general que cualquiera de las geometrías métricas ya que se ocupa de las estructuras de relaciones que son comunes a los tres sistemas métricos" (Nagel, 1961/2006, p. 329). Las geometrías a las que refiere Nagel son la geometría euclidiana y las dos geometrías no-euclidianas más representativas, la hiperbólica y la esférica. Las tres geometrías, son casos particulares de una más general, que es la proyectiva. Lo que Russell formulará en este punto, será que todas las geometrías métricas son posibles si tienen un fundamento *a priori* que asegure la posibilidad de comparar magnitudes: "pero aquella comparación supone un conocimiento simple de identidad cualitativa, la determinación de que es precisamente el problema de la geometría proyectiva" (Russell, 1897, p. 148; §141). Toda geometría métrica, por tanto, debe presuponer cierta relación de identidad para poder llevar adelante comparaciones entre magnitudes.

Con esto, se puede aceptar que el *Analysis situs* cumple esta misma función, es decir, cumple la función de determinar que las magnitudes deben presuponer ciertas relaciones de identidad que son anteriores a ellas. Es posible, en consecuencia, considerar que lo que las geometrías no-euclidianas y la euclidiana son a la geometría proyectiva, la geometría euclidiana y la cartesiana son al *Analysis situs*. Con esto quiero decir, en conclusión, que la geometría de Leibniz es una geometría que por sus características, es más general que las geometría caresiana y la euclidiana. Este es el punto que me permite aceptar la hipótesis de que ambas geometrías posean un parentesco de familia considerable, pues ambas son geometrías estrictamente relacionales. Sin embargo, ¿en qué consiste este parecido? ¿Cómo pueden vincularse estas dos geometrías que las separan siglos de distancia? Éstas serán preguntas que en el siguiente capítulo pretenderé responder.

Capítulo III

El *Analysis situs* de Leibniz y la geometría proyectiva de Russell

En el campo de la geometría encontramos diferentes modelos o tipos de sistemas geométricos, clasificados de dos maneras: geometrías puras y geometrías aplicadas. Para el caso del primer grupo, éstas se preocupan únicamente por las relaciones lógicas que existen entre sus propios objetos, sin que haya una especial importancia en la interpretación de los enunciados (Cfr. Nagel, 1961/2006, p. 297). Para la segunda clase, las aplicadas, sus objetos deben estructurarse según algunas características del mundo físico o del entorno de aplicación, por ello, resulta importante que sus términos y significados estén claramente definidos y estructurados, "pues deben estar asociados a elementos definidos de un ámbito determinado, de modo que sea posible investigar adecuadamente la verdad o falsedad de los diversos enunciados pertenecientes al sistema" (1961/2006, p. 297). Para el desarrollo de este capítulo, dejaré a un lado las geometrías aplicadas, también llamadas físicas, y me enfocaré en lo que refiere a las geometrías puras, asumiendo que el *Analysis situs* y la *Geometría proyectiva*[10], forman parte de este conjunto.

En el campo de las geometrías puras encontramos dos tipos: geometrías métricas y no-métricas. Las geometrías métricas son aquellas en las que las construcciones dependen de las nociones de congruencia, ángulo, magnitud y distancia (Cfr. Kline, 1972/1992, III, p. 1193; Nagel, 1961/2006, p. 328). Para el caso de las no-métricas, o también denominadas proyectivas, estas solo tratan con cualidades, con relaciones entre puntos y con la diferenciación de su respectiva posición, de ahí que prescinda de toda noción métrica; por ejemplo: "Cualesquiera dos pares de puntos sobre una misma línea son, por tanto,

[10] Quien desarrolló los primeros trabajos entorno a una geometría no-métrica, fue Mongue (1746-1818). Trabajó nociones en geometría descriptiva, que es el equivalente a la geometría proyectiva; desarrolló métodos geométricos para contextos de carácter práctico, los cuales eran útiles "[…] en arquitectura, diseño de fortificaciones, perspectiva, carpintería y talla de piedras, y fue el primero en tratar la proyección de una figura tridimensional en dos dimensiones. Las ideas y métodos de la geometría descriptiva no demostraron ser una fuente de esarrollos posteriores en geometría o, en ese aspecto, en cualquier otra parte de las matemáticas" (Kline, 1972/1992, III, p. 1105). Sólo con Poncelet (1788-1867), discípulo de Monge, los estudios sobre la geometría proyectiva derivaron en lo que es "una nueva rama de las matemáticas, con métodos y metas propios" (Kline, 1972/1992, III, p.1105), y por ende en una geometría desligada del mundo físico.

cualitativamente iguales; la única relación cualitativa común al par de puntos, es la línea recta" (Russell, 1897, p. 34; § 37).

Aunque la distinción entre geometrías puras y métricas aparezca en este punto de la exposición, esto no implica que sean sistemas aislados uno del otro. Toda la discusión que presentaré a continuación abarca, precisamente, los vínculos posibles que hay entre ellas dos, asumiento que los axiomas postulados por Russell para la geometría proyectiva son requisitos *a priori* de los espacios métricos. Al respecto, el pensador inglés afirma que:

> La geometría proyectiva, en tanto trata solo con las propiedades comunes a todos los espacios, se encontrará, si no me equivoco, como totalmente *a priori*, pues no toma nada de la experiencia, y como la aritmética, tiene una criatura del intelecto puro como su objeto (1897, p. 118; §103)

Russell sostiene que la geometría proyectiva es una geometría más general que las métricas, por cuanto sus axiomas determinan que en todo razonamiento métrico se presuponen relaciones de cualidad o de identidad. Dichos axiomas Russell los formula para desarrollar sus ideas sobre los fundamentos de la geometría proyectiva como condiciones *a priori* de toda geometría métrica, estos son:

> I. Podemos distinguir diferentes partes del espacio, pero todas ellas son cualitativamente similares, y son distinguibles solo por el hecho inmediato de que unas se encuentran fuera de otras.
>
> II. El espacio es continuo e infinitamente divisible; el resultado de la división infinita, es la extensión cero, llamada punto.
>
> III. Cualesquiera dos puntos determinan una única figura, llamada línea recta, cuaesquiera tres puntos en general determinan una figura llamada plano (1897, p. 132; § 122)

Si aceptamos que estos axiomas derivan de la consideración que tenemos del espacio proyectivo, entonces todas las geometrías métricas son, en principio, el desarrollo de una modalidad que se desprende de la geometría proyectiva, ciertamente porque la noción de línea surge como una relación entre dos puntos, y: "aunque la geometría métrica, históricamente, sea primera, es lógicamente subsecuente a la geometría proyectiva" (1897, p. 51; § 48). Como vimos en el capítulo anterior, en el conjunto de las geometrías métricas puras, encontramos a la geometría euclidiana y a las no-euclidianas, pues todas ellas incorporan la noción de distancia.

Para finales del siglo XIX importantes discusiones sobre los fundamentos de la geometría se dieron entre empiristas y kantianos. Estas discusiones oscilaban entre aquellos que afirmaban que los axiomas de la geometría tenían su sustento en criterios empíricos o, de manera más radical, en criterios fisiológicos; y por quienes aceptaban tal experiencia, pero basada en una serie de requisitos *a priori* sobre los cuales se derivaba todo tipo de espacio empírico. Los primeros se encontraban en el campo de las geometrías no-euclidianas, y hallamos, principalmente, a Riemann y a Helmholtz. Para el caso de las posturas opuestas a las empiristas, encontramos a Russell, quien para 1897 presentaría su *An essay on the foundations of Geometry*, de corte idealista influenciado, principalmente, por Bradley. Sin embargo, es importante resaltar que esta discusión tampoco fue ajena para el mundo moderno de los siglos XVII y XVIII. En principio la hallamos latente entre Leibniz y Newton y, posteriormente, la hallamos en Kant. Sobre Newton y Leibniz, Bertrand Russell expresa lo siguiente:

> Hay dos grandes tipos de teoría espacial, a saber, el representado por Newton y el que representa Leibniz. Estos dos se enfrentan en la polémica con Clarke. Ambos provienen de la alternativa de subrayar una u otra de las dos ideas siguientes. Si tomamos dos puntos A y B, éstos guardan entre sí 1) una distancia, que es simplemente una relación entre los dos, y 2) una longitud actual, que consta de cierta porción del espacio, o sea, la que se extiende entre A y B. Si adoptamos la primera como esencia del espacio, obtenemos una teoría relacional; los términos A y B, cuya distancia es espacial, deben ser a su vez, ellos mismos, no espaciales, pues no son relaciones. Si adoptamos la segunda, es decir, la distancia actual que media entre los dos puntos, comprobamos que ésta es divisible en un número infinito de puntos, cada uno de ellos igual a los puntos terminales A y B. Esta alternativa da lugar a la teoría newtoniana del espacio absoluto, compuesto, no de un conjunto de relaciones posibles, sino de una colección infinita de puntos actuales (Russell, 1900/1977, p. 136).

Ambas teorías espaciales, la newtoniana y la leibniziana, constituyen el contenido mismo de las discusiones en el siglo XIX, y todas ellas en el interior de las geometrías no-euclidianas. Por ello, Leibniz no fue ajeno a un problema que posteriormente Kant trataría de resolver, me refiero al de determinar la naturaleza apodíctica de los axiomas geométricos. La distinción entre geometrías métricas y no-métricas ya provenía desde los tiempos en los que Leibniz y Newton discutían los problemas sobre la naturaleza del espacio. Podemos suponer, entonces, que en el interior de tal discusión emergen ciertos conceptos que fueron formulados por Leibniz tras la consolidación del *Analysis situs*, y que sirven de puente a

Russell para fundamentar, conceptualmente, los axiomas que formuló para la geometría proyectiva.

Así las cosas, el objetivo del presente capítulo será el de elucidar la tesis principal de este trabajo, a saber, identificar aquellos aspectos que Leibniz había formulado en el *Analysis situs* y que lo familiarizan con los aspectos que Russell planteó cuando presentó sus fundamentos de la geometría proyectiva. Aunque Leibniz no haya hecho un sistema riguroso y sintético del *Analysis situs*, sí formuló algunos conceptos esenciales que sirven para pensar geometrías independientes de la métrica. Tales conceptos pueden ser identificados, con total claridad, en las características que Russell presentó cuando concibió el espacio proyectivo en sus *Foundations of Geometry* (1897).

Para llevar a cabo tal finalidad dividiré el presente capítulo en tres partes: en la primera presentaré la noción de espacio en Leibniz, sobre todo en el marco de su controversia con Newton. Esto lo haré con el fin de dejar en la mesa de discusión, las nociones leibnizianas que influyen en Russell cuando desarrolla su trabajo sobre la geometría proyectiva. En la segunda parte presentaré las características métricas de las geometrías no-euclidianas y la formulación de sus respectivos axiomas, con el fin de rastrear aquellos rasgos de parentesco entre estos elementos y la noción de extensión que Leibniz tenía en mente. Con ello también dejaré la discusión enfocada en que tales parecidos de familia son posibles por cuanto toda cantidad cuantitativa (extensión o magnitud), tiene su fundamento conceptual en ciertos criterios cualitativos que la preceden. Por último, en la tercera parte expondré los conceptos leibnizianos, provenientes del *Analysis situs*, que están en cada uno de los axiomas formulados por Russell para la geometría proyectiva. La finalidad de este apartado será la de sustentar que Leibniz ya había estructurado algunas ideas esenciales que servirían de suelo para la consolidación de un espacio proyectivo o cualitativo. Por tanto, las ideas del *Analysis situs* sirven de base para las características que configuran el espacio de la geometría proyectiva en tanto requisito para todas las geometrías métricas.

El espacio leibniziano como forma o requisito cualitativo

En las discusiones dadas entre los pensadores modernos el problema del espacio oscilaba entre dos posturas destacadas: la primera, sostenía que el espacio era un extenso divisible de manera infinita, como una longitud actual o una porción en el espacio que se extiende entre dos puntos (Cfr. Russell, 1900/1977, p. 136), tal es la concepción newtoniana del espacio. La segunda postura refería a una teoría espacial en la que dos puntos no ocupan porciones espaciales. En esta segunda teoría, el espacio es el conjunto infinito de relaciones posibles entre puntos. Tal posición considera que entre dos puntos situados A y B, hay una relación basada en la posición que cada punto ocupa. Ésta es la correspondiente teoría leibnizana del espacio. Podemos ver, por tanto, que hay dos posturas en controversia: una postura métrica, que corresponde a la teoría newtoniana y una postura no-métrica del espacio, de carácter leibniziana.

En el marco de esta distinción, ambas posturas fueron presentadas por Leibniz y Clarke en su famosa polémica. Esta esgrimía argumentos sobre la naturaleza del espacio, la obra de Dios y su manera de obrar en el mundo. Leibniz la resume en una respuesta que envía a Clarke de la siguiente manera:

> La cuestión es: ¿Dios obra lo más regularmente y lo más perfectamente? ¿Su máquina es capaz de caer en tales desórdenes que esté obligado a repararla por vías extraordinarias? Y la voluntad de Dios ¿es capaz de actuar sin razón? Y el espacio ¿es un ser absoluto? ¿En qué consiste la naturaleza del milagro? Y multitud de preguntas parecidas, que producen un gran distanciamiento (Leibniz, 1716/1980, III, p. 91, § 16).

Aunque todas las cuestiones que Leibniz enumera están íntimamente ligadas (pues dependiendo del tipo de acciones que Dios genere se puede concebir algún tipo de mundo, y junto con él, un tipo de espacio), solo me orientaré con los argumentos que Leibniz formulará para defender un espacio relacional o no-métrico, frente a un espacio absoluto y métrico. Para llevar adelante esta parte de la argumentación, tendré en cuenta la exposición de los siguientes puntos: en primer lugar, presentaré, de manera general, la idea leibniziana del espacio como relaciones de coexistencia, en segundo lugar, presentaré la distinción que hace Leibniz entre extensión y espacio; y, en tercer y último lugar, identificaré la relación que establece Leibniz entre continuidad y espacio.

Para Leibniz, el espacio no es una cosa, una entidad o una sustancia sobre la cual los objetos o los puntos pueden estar situados, esto es, el espacio no es una cantidad con la cual pueda ser posible identificar la distancia entre un cuerpo y otro. Leibniz debe negar la realidad sustancial del espacio para confrontar la tesis de Newton sobre un espacio absoluto y uniforme, como un atributo sin substancia; esta tesis es la que Clarke presenta de la siguiente manera:

> El espacio no es una sustancia, sino una propiedad, y si es una propiedad de lo que es necesario, en consecuencia, deberá existir (como todas las otras propiedades de aquello que es necesario que sea) más necesariamente que aquellas sustancias mismas que no son necesarias (aunque ella misma no es una sustancia). El espacio es inmenso, inmutable y eterno, y lo mismo es la duración. Sin embargo, no se sigue de aquí en modo alguno que algo sea eterno *hors de Dieu*. Pues espacio y duración no están *hors de Dieu*, sino que son causados por, y son consecuencias inmediatas y necesarias de, su existencia. Y sin ellas, su eternidad y ubicuidad (u omnipresencia) desaparecerían (1716/1980, p. 91-92; IV respuesta de Clarke §10)

En esta respuesta Leibniz sostiene que para Newton el espacio es el atributo de una sustancia que existe plenamente. Por ende, para Newton el espacio existe en sí mismo. Se sigue que todas las cosas que se encuentran en el espacio se relacionan simultáneamente. Estos enunciados dirigen el argumento hacia una premisa que para Leibniz es problemática, y es la que afirma que el espacio es un atributo de la omnipresencia de Dios, y que, por tanto, resulte ser una especie de sensorio divino. De ahí que Leibniz cuestione como sigue:

> He preguntado, además: si el espacio es una propiedad, ¿de qué cosa sería entonces la propiedad un espacio vacío limitado tal como se lo imagina en el recipiente vacío de aire? No parece razonable decir que este espacio vacío redondo o cuadrado sea una propiedad de Dios. ¿Será quizás la propiedad de alguna sustancia inmaterial, extensa, imaginaria, que nos figuramos (es lo que parece) en los espacios imaginarios? (1716/1980, V respuesta de Leibniz, p. 110, § 38)

Ésta será una de las afirmaciones que Leibniz atacará con fuerza, precisamente porque es contradictorio colocar en Dios atributos que pertenecen a la imperfección humana. Con más detalle, y llevando estas consecuencias al campo del espacio mismo, es contradictorio colocar en cuerpos o puntos que se hallan en el espacio, propiedades que no permitan la posibilidad de diferenciarlos entre sí. De ser así, esos objetos serían en el espacio las mismas cosas en términos de identidad, y todas ellas ocuparían el mismo espacio al mismo tiempo, sin diferenciación alguna del lugar. Es por ello que Leibniz prefiere suponer que el espacio se forma porque los seres humanos:

> Consideran que varias cosas existen a la vez y encuentran cierto orden de coexistencia, según el cual la relación de unos con otros es más o menos simple. Este orden es su situación o distancia. Cuando acontece que uno de esos coexistentes cambia en esa

> relación con respecto a multitud de otros, sin que éstos cambien entre ellos, y que un nuevo cuerpo que llega adquiere la misma relación que el primero había tenido con los otros, se dice que ha venido a ocupar el lugar del primero y se llama a ese cambio un *movimiento* que está en aquel en el que está la causa inmediata del cambio. Y cuando varios, o incluso todos, cambiasen según ciertas reglas conocidas de dirección y de velocidad, se puede siempre determinar la relación de situación que cada uno adquiere con respecto a los demás, e incluso aquel que cada otro tendría o que tendría con respecto a cada otro si no hubiera cambiado o si hubiera cambiado de otra manera. Y suponiendo o imaginando que entre dichos coexistentes hubiera un número suficiente de ellos que no hubiesen sufrido cambio en sí mismos, se dirá entonces que aquellos que tienen una relación con estos existentes fijos igual a la que otros habían tenido antes con ellos, ocuparán el mismo lugar que dichos otros habían ocupado. Y aquello que comprende a todos esos sitios es llamado *espacio* (1716/1980, Carta V, respuesta de Leibniz, p. 112, § 47)

Para Leibniz, el espacio no es el lugar pleno y absoluto en el que se encuentran las cosas, sino una relación de coexistencia. Es el lugar en el que todas las cosas o todos los puntos se relacionan entre sí. Pero ese lugar es una consecuencia de la percepción simultánea que se tiene de los objetos que se hallan en algún lugar determinado. Lo que hay entre todos ellos, en términos espaciales, son relaciones asociadas con la ubicación, que no es una cantidad o una porción de espacio que determina alguna longitud, sino relaciones asociadas con la ubicación. Siguiendo pues, la lectura de Russell, es posible entender ese espacio como: "el conjunto de relaciones posibles. Las distancias pueden ser mayores o menores, pero no pueden dividirse en partes, por ser relaciones" (Russell, 1900/1977, p. 136). La distancia es, por tanto, una relación entre dos objetos percibidos simultáneamente, y tal distancia no es divisible en partes porque no es una cantidad, sino una relación.

Leibniz sostiene que el espacio, en tanto relaciones de posición, se fundamenta en dos de los principios que abarcan toda su filosofía y de los que ya he hablado en los capítulos anteriores: el de *razón suficiente* y el de la *identidad de los idiscernibles*. Por medio del principio de la identidad de los indiscernibles, Leibniz formula que si no hay objetos en el espacio, entendido como noción puramente ideal, solo quedan puntos indistingubles entre sí, y, en otros términos, todos ellos serían exactamente iguales, salvo por el hecho de que guardan diferentes relaciones espaciales. Por medio del principio de razón suficiente asevera que dos objetos colocados en lugares diferentes están en esa situación, precisamente porque hay razones suficientes y necesarias para fijar que son diferenciables según su posición. Por ello:

> Si el espacio no es otra cosa que ese orden o producto, y no es nada sin los cuerpos más que la posibilidad de colocar en él esos dos estados, uno tal como es, el otro supuesto al revés [es decir que Dios haya trastocado armónicamente los objetos que yacen al oriente por similares objetos ahora al occidente], éstos no diferirían entre sí: su diferencia no se encuentra más que en nuestra suposición quimérica de la realidad del espacio en sí mismo (Leibniz, 1980, p. 68; Carta III de Leibniz §5)

Por cuanto estos principios fundamentan la noción del espacio como orden de coexistencia y no como sustancia, entonces ¿cómo se relaciona con las geometrías métricas y no-métricas? Sobre este punto, en el interior del sistema del pensamiento leibniziano, lo métrico se vincula directamente con la noción de *extensión*. Éste concepto se diferencia del concepto de espacio postulado por Leibniz, pues la extensión, es, para Leibniz, una propiedad de los cuerpos físicos, y les corresponde, efectivamente, magnitud. La magnitud puede ser divisible, pero no es una propiedad específica del espacio, pues: "Las cosas conservan su extensión, pero no conservan siempre su espacio. Cada cosa tiene su propia extensión, su propia duración, pero no tiene su propio tiempo y no conserva su propio espacio" (1980, Carta V, p. 111 §46). La extensión es, por tanto, una abstracción de los cuerpos que son, particularmente, extensos. Si los cuerpos son extensos, por tanto, son divisibles hasta un punto en el que, en términos lógicos, no hay posibilidad de continuar su divisibilidad.

La extensión, como bien dice Leibniz: "no significa una pluralidad, continuidad y coexistencia de partes. Y, en consecuencia, no basta ella sola para explicar la naturaleza misma de la sustancia extendida o repetida, cuya noción es anterior al de su repetición" (Leibniz G. W., 1691/2015p, I, p. 139). Toda extensión no es, por tanto, una propiedad de las sustancias, sino una propiedad de los cuerpos, pero su sustrato de realidad son las sustancias indivisibles, es decir: "allí donde no hay partes, por consecuencia, ni extensión, ni figura, ni divisibilidad posibles. Y estas Mónadas son los verdaderos átomos de la naturaleza y, en una palabra, los Elementos de las cosas" (Leibniz. 1720/1983, §3). En consecuencia, lo extenso, que no es sustancial, es divisible, mediante análisis, infinitesimalmente en términos lógicos, y, por ende, es definido como una cualidad que se repite infinitamente en todos los cuerpos. Cada parte extensa se halla en una relación continua e indefinida con las demás; esto es lo que Leibniz llama el *laberinto de continuum*, término que acuña al conjunto infinito de objetos relacionados entre sí, y que se encuentran entre dos dados,

> […] porque cada porción de la materia no es solamente divisible hasta el infinito, como reconocieron lo antiguos, sino que incluso cada una de las partes tiene su propio

> movimiento; de otra manera sería imposible que cada porción de la materia pudiera expresar todo el universo (Leibniz. 1720/1983, p. 42; §65)

El *laberinto del continuum* es el problema que Leibniz enfrenta cuando procura justificar la noción de extensión como cualidad de los cuerpos y de las figuras, pero no de las sustancias y su concordancia con su teoría del monadismo. Para lograr esto tiene que aceptar la idea de un infinito actual, es decir, un infinito cuyas partes relacionadas entre sí constituyen una totalidad. Debe sostener, también, que todos los cuepos extensos se relacionan entre sí y que la condición de realidad para ese conjunto infinito de partes son las sustancias simples e individuales, que son infinitas, indivisibles y actuales. El principal problema del continuo es: si las sustancias indivisibles son el sustento de la extensión, pero la extensión no es una propiedad de la sustancia (de manera opuesta a como pensara Descartes), ¿cómo se puede pasar de lo sustancial e indivisible a una extensión compleja y divisible? Russell expone este argumento formulado por Leibniz así:

> Podemos exponer brevemente todo el argumento en la siguiente forma: 1) Nada es absolutamente real, salvo las sustancias indivisibles y sus diversos estados. Este es el resultado de la doctrina lógica abstracta con la cual inicié mi exposición de la obra de Leibniz; el mismo se da por supuesto en el argumento que a partir de la extensión llega a las mónadas, y no debe considerarse como resultado de éste. 2) Lo que se nos presenta como materia es real, si bien en tanto que materia es fenomenal. La realidad de lo que se presenta como materia es, según vimos, mero prejuicio. 3) La materia, en cuanto fenómeno, es un agregado, y en rigor un agregado de un número infinito de partes. 4) Un agregado no puede poseer otra realidad que la derivada de sus constituyentes, pues sólo las sustancias son reales, y son indivisibles. 5) Por tanto, si ha de salvarse la realidad de lo que se presenta como materia, ella deberá constar de una pluralidad infinita de sustancias indivisibles (Russell, 1900/1977, p. 138).

Desde la modelación russeliana del argumento de Leibniz, podemos entender que el sustento de la extensión, en tanto fenómeno, son las sustancias indivisibles. Por tanto, se asegura la continuidad de la extensión como un infinito actual y se asegura la realidad de las infinitas sustancias indivisibles, al aceptar que todo agregado se compone de partes indivisibles, las unidades verdaderamente reales que soportan todo el conjunto de partes divisibles. En el marco de este problema, Leibniz afirma que el espacio es un concepto ideal que sirve de criterio para expresar relaciones de orden entre diferentes objetos extensos o puntos indivisibles, y que su teoría relacional, por tanto, acepta que una distancia, en sí misma, no es divisible, puesto que no es una longitud, sino una relación entre todos los componenentes infinitos que la constituyen.

El espacio, entonces, emerge como una noción con la que identificamos un orden continuo de relaciones en el conjunto infinito de partes divisibles, esto es, de la extensión. Se sigue de estas premisas, que el espacio leibniziano no sirve para identificar relaciones de magnitud (métricas) entre objetos o cuerpos, sino para determinar el conjunto de relaciones cualitativas posibles que puedan llegar a poseer, puesto que: "las partes de una distancia son meramente otras relaciones menores de la distancia y no están en modo alguno presupuestas por la distancia mayor, que es lógicamente independiente de ellas" (Russell, 1900/1977, p. 137). Russell presenta aquí que en el marco de las discusiones sobre el espacio se pueden establecer dos variantes: cantidades extensivas e intensivas (Cfr, 1900/1977, p. 137).

Cada una de estas variantes define al espacio de la siguiente manera: las intensivas "suponen de antemano todos los constituyentes de los cuales son sumas"; las extensivas "por el contrario, nunca dan por supuesta la existencia de cantidades menores de la misma especie" (Cfr, 1900/1977, p. 137). Si seguimos estas dos ideas, la extensión en Leibniz sería una cantidad extensiva, pues supone que una magnitud pueda ser divisible infinitesimalmente. Por otro lado, su concepción del espacio, en tanto orden de coexistencia, será de carácter intensivo. Esto supone que todos los componentes que están en el espacio, lo están porque se relacionan entre sí de manera actual. Por ejemplo, si admitimos que entre dos puntos dados todos los puntos infinitos que contituyen la línea son actuales, entonces ellos forman parte de esa totalidad denominada línea. En resumidas cuentas, el *Analysis situs* es una geometría intensiva, puesto que supone que todos los elementos que están en el espacio, es decir, puntos simples e indivisibles, están íntimamente relacionados entre sí simultánea y actualmente.

Al definir el espacio en el marco de su filosofía, podemos identificar, a continuación, que esa misma noción es la que necesita Leibniz para una geometría como el *Analysis situs*, es decir, una geometría relacional. Vemos, entonces, que Leibniz define la extensión como: "el continuo cuyas partes existen simultáneamente" (Leibniz G., 1679/2015b, p. 447). Sin embargo, con tal extensión sólo pueden establecerse todas las relaciones posibles que haya en el grupo de objetos o puntos individuados en el espacio para diferenciarlos unos de otros. Ahora bien, si la extensión es el continuo cuyas partes que existen simultáneamente, entonces dicha noción es una totalidad cuyas partes pueden ser numeradas y relacionadas con el todo del que son partes (Cfr.1679/2015b: 455). Si las partes son numerables, puede concluirse que una parte, ya numerada, sirve de marco de referencia para que otras partes numeradas puedan ser comparadas entre sí, y, con ello, que pueda determinarse una magnitud específica. En consecuencia, una magnitud, es: "el número (o el compuesto de números) de las partes de la cosa que son congruentes con cierto objeto preciso que se toma como medida" (1679/2015b, p. 455-456). La magnitud surgue, por tanto, a partir de una serie de criterios necesarios que la preceden y, con ello, la extensión también es posterior a esos elementos señalados. Más en concreto, la extensión es posterior a todas las posibles relaciones de orden de coexistencia que entre esas partes extensas pueda haber. Con ello, Leibniz puede decir lo siguiente:

> La figura en general, además de la cantidad, contiene cualidad o forma. Y así como son iguales las cosas que tienen la misma magnitud, así son semejantes aquellas cuya forma es la misma. Y la consideración de las semejanzas o formas es más amplia que la matemática, y se deriva de la metafísica, pero en matemática tiene sin embargo una aplicación múltiple y el mismo cálculo algebraico aprovecha; pero en la semejanza mayor de todas se contempla los sitios o figuras geométricas. Y así, el analisis verdaderamente geométrico no considera solamente las igualdades y proporciones que en realidad se reducen a igualdades, sino también la semejanzas y debe aplicar las congruencias que nacen de la conjunción de igualdades y de semejanzas.
>
> […] así que no basta con decir que son semejantes aquellas cosas que tienen la misma forma, sino que tiene una noción general de forma. Pues averigüé que, una vez establecida la explicación de la cualidad o forma, la cuestión viene a ser que son semejantes las cosas que, observadas una a una, no pueden ser distinguidas. Pues la cantidad sólo puede ser establecida por la copresencia o aplicación actual, pero la cualidad le presenta a la mente algo que puedas reconocer en la cosa por separado y emplear en la comparación de dos cosas, aunque no intervenga una aplicación actual, conque la cosa se coteja con la cosa inmediata, o mediatamente por referencia aun tercero como medida (Leibniz G. Trad. 2015h, II p. 71)

En consecuencia, para Leibniz, toda extensión, toda parte, toda magnitud, requiere de una serie de presupuestos que son de naturaleza cualitativa, y ése será el supuesto clave del *Analysis situs* y el fundamento para una geometría más general que las métricas. Russell tendrá en mente este mismo propósito cuando piensa en la geometría proyectiva al determinar los requisitos necesarios para que en las geometrías métricas pueda ser posible realizar comparaciones de magnitud. Por ello, evidenciaré en este punto los parecidos que salen a relucir entre la geometría de Leibniz y los estudios de Russell a propósito de la geometría proyectiva. Antes de ello, sin embargo, resulta importante elucidar los parecidos que pueden existir entre la noción leibniziana de la extensión y el espacio de las geometrías métricas que mencioné al inicio del presente capítulo.

Antes de pasar al siguiente apartado, reuniré algunos conceptos que ya fueron mencionados, y que deben tenerse en cuenta para los capítulos precedentes. En primer lugar, Leibniz asume que el espacio es una condición que identifica relaciones de ubicación entre objetos que se perciben simultáneamente, de ahí que esta noción sea anterior a la extensión, pues uno supone que los objetos extensos están en el espacio mismo. La noción de extensión es un término derivado de la agregación de las sustancias simples, y divisible en término infinito; y es una propiedad que sólo pertenece a los cuerpos y a las figuras. En consecuencia, al ser divisible, las relaciones que hay entre las partes de la extensión ellas pueden ser numerables, de tal forma que las relaciones de comparación son posibles a través de un marco de referencia numérico o cuantitativo. Así, si seguimos la distición que Russell determina entre geometrías intensivas y extensivas, en Leibniz, el espacio, en tanto orden de coexistencia, es un término intensivo; el segundo, en tanto que dividibilidad y relaciones entre partes, es extensivo. Puedo sostener, en consecuencia, que el espacio leibniziano es una forma de condición necesaria para todas las relaciones cuantitativas que pueden derivarse de cualquier forma de extensión.

La noción leibniziana de extensión y las geometrías métricas

Teniendo en cuenta que para Leibniz el espacio es el conjunto de relaciones posibles entre los lugares que un conjunto de objetos ocupa respecto a otros, podemos comprender que esos objetos mantienen ciertos vínculos que sólo pueden identificarse mediante un criterio de ordenación. Sin embargo, que se hallen en el espacio, no significa que el espacio sea una noción sustancial o independiente de las cosas. Es, por el contrario, una noción que condiciona las cualidades que hay entre dichos objetos, de ahí que sea un orden de coexistencias, y, por tanto, una noción relativa.

Veíamos, hacia el final del apartado anterior, que para Leibniz una figura no sólo es magnitud, sino que también es cualidad o forma, y que las comparaciones cualitativas derivan en comparaciones métricas. En consecuencia, el *Analysis situs* elucida aquellas relaciones cualitativas que pertenecen a las cantidades extensivas. Veíamos, por otro lado, que la extensión es un modo que pertenece a los cuerpos, puesto que no es una sustancia, a la manera cartesiana. Efectivamente Descartes equipara el concepto de espacio con el de extensión, y sostiene que la cualidad última de una figura es su longitud o medida, y por ello, al ser una magnitud extensiva, es una propiedad del espacio, esto es:

> Y reconoceremos fácilmente que la extensión que constituye la naturaleza del cuerpo es la misma que constituye que constituye la naturaleza del espacio […] quitemos el frío y el calor, y todas las otras cualidades, porque o bien no se consideran en la piedra, o bien entendemos que, aunque cambien, la piedra no pierde por ello su naturaleza del cuerpo. Advertimos así que en su idea sólo queda que es algo extenso en longitud, achura y profundidad. Ahora bien eso mismo se comprende tanto en la idea del espacio lleno de cuerpos, como en la que se llama vacío (AT, 1908, VIII, p. 45-46. Trad, E. López y M. Graña)

Por el contrario, para Leibniz la extensión difiere considerablemente del espacio, lo que no significa que no tenga esa noción en mente. Sin embargo ¿en qué sentido la extensión presupone el espacio? ¿cómo aparece ésta noción en el *Analysis situs*? ¿este concepto se relaciona con las geometrías métricas? estas serán las preguntas que pretenderé responder en este apartado del capítulo. Para ello, mostraré, en primer lugar, algunas características generales de la noción de extensión en Leibniz; en segundo lugar evidenciaré el papel que desempeña este concepto en el *Analysis situs* y, por último, mostraré su relación con las geometrías métricas. Al final, se abrirá el camino para determinar que los espacios métricos y la extensión leibniziana, demandan ciertos criterios cualitativos *a priori* que determien su posibilidad.

En el pensamiento de Leibniz, las sustancias simples son las únicas que poseen realidad. Ellas son infinitas, y el agregado de ellas:

> Producen accidentes mediante los cambios de sus límites […] Y concibo las cualidades o las fuerzas derivativas, o lo que se denomina 'formas accidentales', como modificaciones de la entelequia primitiva, igual que las fuerzas son modificaciones de la materia. He aquí por qué estas modificaciones están en perpetuo cambio, mientras que la sustancia simple permanece (Leibniz G. W., 1710/2015s: III, §395-396, p. 701)

Leibniz hace, en ese orden de ideas, de la materia una forma de extensión y está sujeta a las diferentes modificaciones que la fuerza activa de las sustancias o entelequias producen. Por ende, en lo que refiere a los cuerpos, es decir a lo extenso, podemos definirlos como:

> Un todo continuo en el que existan muchas cosas simultáneamente. Además, la extensión, cuya noción es relativa, exige algo que se extienda o se continúe, como en la leche la blancura, y el en cuerpo lo que forma su esencia; la repetición de ese algo (sea lo que sea) es la extensión (Leibniz, en Descartes & Leibniz, Trad 1989, p. 142)

La repetición de la extensión trae consigo la repetición de las fuerzas activas en el marco de un conjunto considerable de sustancias simples, o mónadas. Ahora bien, en el marco de la aglomeración de las sustancias simples, podemos aceptar que: “una colección de mónadas sólo es extensa cuando dejamos de lado todo menos la *materia prima* de cada mónada y la propiedad general de la actividad, y consideramos meramente la repetición de estas cualidades” (Russell, 1900/1977, p, 126). En consecuencia, un objeto extenso posee una pluralidad de elementos que se modifican y cambian, pero que se constituyen según una única realidad, a saber las mónadas y sus respectivas fuerzas activas. Esta pluralidad que se extiende por todo, como la blancura en la leche, deviene en una forma de apariencia, un fenómeno bien fundado, es decir, una apariencia que:

> Aunque no sea más que por suposición y abstracción, constituye la base de las verdades eternas y de las ciencias necesarias […] se puede concluir que una masa de materia no es verdaderamente una sustancia, que su unidad es ideal y que no es más que un *aggregatum*, un agregado, una multiplicidad de infinitas sustancias verdaderas, un fenómeno bien fundado que nunca contradice las reglas de las matemáticas puras, pero que siempre contiene algo más allá de ellas (Leibniz G. W., Trad. 1989, Carta 9, de Leibniz a la Reina Sofía, p. 88)

La extensión, como abstracción de lo extenso, aunque fenoménica, provee datos esenciales para las ciencias y los datos necesarios para el contenido mismo de la geometría, particularmente datos de la geometría métrica. Efectivamente, la geometría métrica es aquella que, como decíamos al inicio, analiza las propiedades cuantitativas de una figura al identificar relaciones de magnitud y medida. Entonces, en el marco de lo que he expuesto, la principal característica que Leibniz acuña a la extensión es la magnitud, de la siguiente manera: al hacer abstracción de lo que un sujeto percibe, éste observa una variedad de objetos. Al observar dicha variedad, puede reducirla a cuerpos y figuras que pueden ser comparadas como mayores o menores, según una longitud determinada. Para lograr ello, se debe pensar que tales cuerpos son divisibles, de tal forma que unos sean mayores o menores que otros. Cada parte extensa y divisible puede ser numerada, puesto que: “el número no es más que la repetición de las unidades” (Leibniz G. W., trad, 1989, carta 8, de Leibniz a la electora Sofía, p. 83). Al ser numerados, tanto cuerpos como figuras, son estudiados a través de sus respectivas relaciones de magnitud, y, por tanto, de aquella continuidad emerge la posibilidad de que una parte actual se relacione con otra, es decir:

> Si se pueden determinar en una cosa las partes dadas congruentes con cualquier otra cosa, entonces se podrían determinar en ella algunos puntos y también el número de partes congruentes con ciertas otras cosas, determinando de este modo todos los puntos de la cosa, aunque nada se refiera al *situs* de los puntos entre sí, y eso será la magnitud (Leibniz G., 1679/2015b, p. 454)

En consecuencia la extensión es una continuidad métrica, que posee divisibilidad y sus respectivas partes son susceptibles de ser numeradas. Esto deriva en que es posible hallar relaciones de congruencia entre dos distancias, y los puntos de la parte de una pueden ser congruentes con la parte de otra. Métricamente, Leibniz llama a esta característica de la extensión, *homogeneidad*, es decir: "aquellas cosas que tienen algo en común, como un punto, una línea, un cuerpo y sus partes" (Leibniz G.,1679/2015b, p. 454). A manera de ejemplo, si dos extensos tienen algo en común, se dicen homogéneos, y su magnitud será el hecho mismo de que las partes de una figura pueden ser congruentes en relación con otras. Se puede concluir, entonces, que para Leibniz la extensión, esto es el continuo de partes actuales relacionadas en el espacio, es homogénea, y dichas partes son comparables según criterios de magnitud y es esta posición metafísica de Leibniz sobre la extensión lo que nos conduce a un problema geométrico por abordar, y es ¿en qué sentido la extensión es una cantidad extensiva?

Al concebir la extensión, como un concepto homogéneo y de carácter cuantitavo, Leibniz comprendió que el método del análisis geométrico no había ido más allá de estas características cuantitativas (tal y como evidencié en el primer capítulo), como en el caso concreto de Euclides y Descartes. Al respecto, Leibniz expone en qué sentido la noción de círculo en la geometría analítica, implica que se tengan en mente las figuras extensas que dichas variables representan. Tal como que y es una recta perpendicular a la recta x, o que la construcción del círculo exige del uso de compás, o que el radio de ella es una hipotenusa. Por tanto, piensa que una geometría métrica, como la analítica de Descartes, solo llegó hasta la comprensión cuantitativa de la extensión, pues:

> $x^2 + y^2$ es igual a a^2, es la ecuación del círculo, hay que explicar mediante la figura qué son esos x e y, es decir que son líneas rectas, una de las cuales es perpendicular a la otra, y una comienza en el centro, la otra en la circunferencia de la figura" (Leibniz G. W, 1779/2015d, p. 419)

Hablando en términos de extensión, la ecuación del círculo en la cita de Leibniz sólo representa las relaciones magnitud en un plano de coordenadas. Esta ecuación exige que su representación gráfica sea efectuada. Para Leibniz, el análisis sólo llega hasta un análisis de magnitudes, no de cualidades, puesto que aún se siguen suponiendo elementos que no han sido demostrados y las gráficas aún siguen siendo elementos de los que los razonamientos geométricos dependen. De ahí que uno de los intereses del pensador alemán sea el de ir más allá de la magnitud, para identificar todos los requisitos que le dan posibilidad a toda forma de extensión. Éste será el mismo problema que Russell afrontará a la hora de analizar los axiomas del espacio métrico cuando identifica que ellos suponen ciertas relaciones de identidad, y que no son totalmente independientes de criterios cualitativos. Esto lo expondré en lo que sigue y, de la misma forma, expondré el vínculo de las geometrías métricas con la noción leibniziana de extensión.

Las geometrías métricas dependen de la noción de magnitud para determinar la estructura de una construcción geométrica. Su principal característica la expone Euclides en la proposición II del primer libro de los Elementos. Veíamos en el primer capítulo, que la principal herramienta a la que un geómetra puede recurrir para demostrar que es posible construir un segmento de recta en algún otro lugar del plano es mediante circunferencias. Recurre, así, al uso del compás para configurar construcciones geométricas, pues: "la geometría de los primeros seis libros de los *Elementos* de Euclides puede ser descrita como una geometría de líneas y círculos: las herramientas son la línea recta (o la regla sin marca) y el compás" (Coxeter, 1987, p. 1). En ese orden de ideas, tal y como mostré en el capítulo anterior, la geometría euclidiana es métrica, por cuanto las nociones distancia y transposición de segmentos son fundamentales para la elaboración de construcciones geométricas.

En ese mismo sentido, las geometrías que surgen en el siglo XIX también suponen y dependen de esa noción de distancia y, por ende, son métricas. Las geometrías a las que hago referencia son las geometrías no-euclidianas, que nacen con Lobatchewsky (1792-1856), Bolyai (1802-1860) y Riemman (1826-1866). Russell las clasifica en dos periodos, en el primero surgen las geometrías cuyo espacio es hiperbólico. En el segundo, se encuentra el esférico. Ellas aparecieron, por una de aquellas inconsistencias que, por ejemplo, Leibniz ya había denunciado, y que estaban aún latentes en los *Elementos* de Euclides, particularmente, en la ambigüed que se presentaba en el conocido y controvertido quinto postulado de Euclides.

Cuando los geómetras mencionados lo problematizaron, concordaron en que podía ser negado, pero cada uno lo negó de formas diferentes: 1.) *que por un punto externo a una recta pasa más de una paralela*, o que 2.) *por un punto externo a una recta no pasa ninguna paralela*. Para el primer caso, surge un espacio hiperbólico y para el segundo aparece un espacio esférico. En esta misma dirección Russell expone que las geometrías del segundo periodo aceptan que los axiomas de la geometría dependen de la experiencia sensible: "el objetivo de Riemman y Helmholtz era mostrar, por la exibición de posibles alternativas lógicas, la naturaleza empírica de los axiomas de la geometría" (Russell, 1897, p. 13; §16). Así, surge un debate entre aquellos que formulaban una tesis empírica para los axiomas de la geometría y entre Russell, quien pretendió establecer que tales geometrías requieren de ciertos requisitos *a priori* para que sean posibles.

Al igual que la geometría euclidiana, las geometrías no-euclidianas dependen de la noción de distancia. Por esa razón, para explicar la estructura de sus espacios, apelan conceptos como magnitud, coordenada y ángulos, pues: "utilizan esencialmente la noción de congruencia, es decir, la igualdad de segmentos, ángulos, áreas y volúmenes" (Nagel, 1961/2006, p. 328). Nociones que Russell reúne cuando expone los tres axiomas de las geometrías métricas. Estos axiomas son:

- Si encontramos la expresión analítica de las condiciones de existencia en un espacio constante, o una medida constante de curvatura, entonces es equivalente a la homogeneidad del espacio. (Denominado axioma de libre movilidad o congruencia)
- El espacio tiene un número finito e integral de dimensiones, es decir, en términos métricos, que la posición de un punto, relativo a cualquier figura del espacio, es únicamente determinado por un núnero finito de magnitudes espaciales, llamadas coordenadas. (Denominado axioma de las dimensiones)
- Existe una relación entre dos puntos cualesquiera, que pueden preservarse inalterados en un movimiento combinado de ambos puntos, y que, en cualquier movimiento de un sistema de cuerpos rígidos, siempre es inalterable. A esta relación la llamamos distancia (denominado axioma de la distancia) (1897, p. 50-51; §47)

El axioma de libre movilidad sostiene que un punto puede pasar libremente de una posición a otra sin que haya alguna variabilidad en una magnitud (1897, p. 23; §25). Para el caso de Riemman, como tiene en mente una variedad amplia de superficies, cambios de superficie y movilidad, éstos solo son posibles si se asegura la medida constante de la curvatura, pero esto solo es dable si se acepta el axioma de libre movilidad o congruencia. Con este primer axioma, consideramos al espacio como homogéneo siempre y cuando puedan establecerse relaciones entre magnitudes constantes. Es decir, si se toma una de dos magnitudes y se desplaza para colocarla sobre la otra y coinciden exactamente, de tal forma que ocupen el mismo lugar, serán congruentes. Así es como se concibe la séptima noción común que Euclides enuncia en los *Elementos*: "y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí" (Heath, 1956, I, axioma 7; Euclides, trad. 1982/2007; noción común 7).

De esto se deduce que: "las magnitudes espaciales pueden ser movidas de un lugar a otro sin distorción; o como se puede suponer, las formas no dependen de ninguna manera de una posición absoluta" (Russell, 1897, p. 150; §144). En consecuencia, con la congruencia o la libre movilidad, puede determinarse que una figura se superpone sobre otra. Por ejemplo, si se tienen dos segmentos de recta, AB y CD, entonces, por el axioma de libre movilidad o de congruencia, puedo trasladar la recta AB y colocarla sobre CD y si coinciden exactamente, entonces se dirá que son homogéneas, pues comparten las mismas propiedades y en consecuencia, son congruentes. Como veímos anteriormente, Leibniz trata la noción de extensión de la misma manera. Considera que si puedo establecer que los puntos de un objeto coinciden con los puntos de otro objeto, entonces son congruentes, y serán, objetos homogéneos: a esto es lo que Leibniz llama magnitud extensa, es decir: "iguales son las cosas que tienen la misma magnitud es decir aquellas que se pueden considerar congruentes sin añadirles ni quitarles nada" (Leibniz G., 1679/2015b: 457).

El primer axioma de las geometrías métricas, por tanto, corresponde con lo que Leibniz denomina congruencia. De la misma forma, la idea de magnitud que él presenta junto con la noción de extensión, como criterio para las comparaciones dadas entre diferentes partes numeradas, se corresponde con la idea de un espacio homogéneo, necesaria para asegurar la libre movilidad que se da entre magnitudes congruentes. Al respecto es importante aclarar que para Leibniz, si dos cosas son iguales entonces solamente son discernibles por la posición que ocupan, mediante el principio de la identidad de los indiscernibles. En ese mismo sentido Russell también recurre a este principio leibniziano para establecer diferencias entre dos figuras cualitativamente iguales. Sobre ello dice que:

> Exceptuando lo que respecta a la posición, [ellos] son geométricamente indiscernibles, y podemos llamar a nuestra ayuda la *Identidad de los Indiscernibles* para,

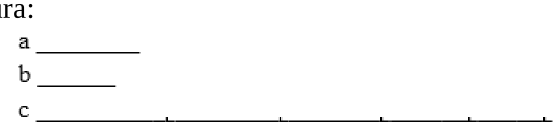
> establecer en la restante propiedad geométrica, su coincidencia en volumen. Esto puede parecer, más bien, un principio extraño usado en matemáticas, y para la geometría es, quizás, la mejor definición de igualdad; pero demanda un fundamento filosófico para esta definición, esto es, creo, que puede ser encontrada en la *Identidad de los Indiscernibles*. Podemos, sin error, hacer que nuestra definición de igualdad tridimensional descanse en una congruencia de dos dimensiones (Russell, 1897, p. 155; §150)

En este punto es evidente la influencia de Leibniz sobre Russell. Al igual que el filósofo alemán, Russell considera que en un espacio homogéneo deben tenerse en cuenta las igualdades entre dos objetos, pero antes de ello, debe estipularse la posición de los mismos mediante el principio de la *identidad de los indiscernibles,* y esto, como veremos en el siguiente apartado, forma parte de un aspecto esencial para la geometría proyectiva. Por tanto, el espacio homogéneo de las geometrías métricas y la noción leibniziana de extensión guardan un parecido considerable en lo siguiente: en primer lugar, ambos se valen del axioma de libre movilidad o de congruencia (Cfr. 1897, p. 150, nota 3). Con el fin de establecer igualdades entre magnitudes, se valen del principio de la identidad de los indiscernibles para diferenciar dos cosas exactamente iguales mediante la posición y en tercer lugar, ambos son espacios continuos y divisibles.

El segundo axioma de los espacios métricos sostiene, de acuerdo con Russell, que un punto relacionado con otras figuras sólo está determinado por un número finito de magnitudes espaciales, llamadas *coordenadas*. Esto significa que la posición de un punto está condicionado por un conjunto de magnitudes espaciales en el marco de un sistema de coordenadas, en el sentido cartesiano, en el que prevaleven relaciones de distancia métrica que pueden ser numerables según ciertas relaciones de magnitud espacial. Ya en el marco de las geometrías métricas, como en el caso de Riemman, el álgebra es un medio que devela relaciones de magnitud entre cantidades espaciales, es decir:

> Asumiendo que es posible aplicar esto a la magnitud del espacio, es decir, determinar sus elementos y figuras mediante cantidades algebraicas, se deduce que el espacio pueda ser llevado, bajo la concepción de variedad, a un sistema cualitativamente determianble de elementos. Sin embargo, debido a la particular naturaleza de las medidas espaciales, la determinación cuantitativa del epacio exige que las magnitudes deban ser independientes del lugar (Russell, 1897, p. 22; §23)

Con esto, el segundo axioma postula que el espacio homogéneo y métrico posee magnitudes espaciales que determinan otras magnitudes. La noción de extensión en Leibniz también se dirige hacia esta misma consideración. Leibniz distingue entre extension *discreta* y *continua*. La discreta refiere a la suma finita o concreta de cantidades numeradas de un extenso determinado y la continua refiere a la repetición infinita y plural de esa extensión, o como bien lo expone Russell: “La repetición es *discreta*, dice, cuando se disciernen partes agregadas, como en el número: es *continua* cuando las partes son indeterminadas, y pueden suponerse en un número infinito de modos” (Russell, 1900/1977, p. 134). En el caso de la repetición discreta, esta puede concebirse como un conjunto de partes actuales pero discernibles por medio de su numeración. Dichas partes pueden ser, de igual modo, divisibles infinitamente. De ahí que la actualidad de las partes en el espacio implique que la extensión sea plural e infinita, pero, que del mismo modo, responda a los términos que esas relaciones presentan, puesto que: “un espacio abstracto no es plural, pero en cambio debe serlo un cuerpo que ocupa ese espacio. Pues en lugar de una mera posibilidad, tenemos ahora algo actual en las posiciones que, de lo contrario, son «meras modalidades»” (1900/1977, p. 138). En consecuencia, un cuerpo o una figura geométrica extensa, divisible en partes infinitas y numerables, se constituye como marco de referencia para que otras partes menores o mayores en magnitud puedan ser determinadas y diferenciadas por otras. Al respecto Leibniz sostiene que:

> En realidad la magnitud es el número de partes congruentes de una cierta cosa, o bien la medida, como en la figura:
>
> 
>
>
> si tenemos dos magnitudes *a* y *b*, y una tercera cosa *c*, que sea igual a dos veces *a* + tres veces *b*. La magnitud de ese orden total expresa evidentemente el número de partes congruentes con *a* y con *b*, puesto que aquellas que se puedan hacer congruentes sin añadir ni restar nada, necesariamente tendrán que ser iguales (Leibniz G. , 1679/2015b, p. 454)

Al tomar el ejemplo que Leibniz presenta, podemos resaltar que la magnitud *c* (entendiendo por magnitud un número de partes congruentes de un objeto respecto a otro), es una cantidad extensa que determina las relaciones congruentes con la suma de las magnitudes de los extensos *a* y *b*. De acuerdo con lo anterior, el axioma dos de las geometrías métricas aplicaría para las relaciones métricas en el extenso leibniziano. Siguiendo lo anterior, la figura en la cita de Leibniz, por cuanto presenta cantidades fijadas por puntos en sus extremos, exige que haya: “[…] elementos de referencia para figuras y relaciones tanto auxiliares como exteriores, en resumen un sistema de coordenadas" (Couturat, 1901, p. 428). Respecto a Leibniz, aquí es importante aclarar que no se está hablando del espacio como tal, sino de la extensión que se encuentra vinculada con ese espacio y de sus relaciones de magnitud, relaciones que concuerdan, por otro lado, con la noción de homogeneidad que Russell identifica para los espacios no-euclidianos y el espacio euclidiano.

En el tercer axioma, o axioma de la distancia, identificamos que en geometría métrica, entre dos puntos, hay, una única relación de magnitud. A esa relación de magnitud se le llama distancia. Russell sustenta que esta idea requiere de los axiomas anteriores, es decir, del axioma de libre movilidad y el de la determinación de un punto por magnitudes espaciales o coordenadas. Dados dos puntos, por ejemplo, puedo concebir que esa relación constituye una figura, es decir, una línea recta. Así, dado un segmento de recta, AB que coincide con otra línea recta CD, ambos serán congruentes. Dichas magnitudes, por tanto, coinciden en tanto relaciones de magnitud, y poseen la misma relación cuantitativa. En ese orden de ideas, la movilidad de dicha distancia en el espacio puede darse mediante una combinación de movimientos, sin que se altere la relación cuantitativa. Esto lo hace Euclides, como vimos en el capítulo anterior, mediante la transferencia de medidas en la segunda proposición de sus *Elementos*. De esa manera: "la relación entre los dos puntos, siendo inalterada, debe ser una relación intrínseca, una relación que no involucra otro punto en el espacio, y esta relación intríseca la llamamos distancia" (Russell, 1897, p. 165; §157). Teniendo en cuenta que una relación intrínseca refiere a que un punto tiene un único vínculo con otro punto, definido como distancia, la distancia es inalterable, a pesar de que ésta sea transferida de un lugar a otro.

Russell sostiene que Leibniz concibe dos tipos de distancia. La primera refiere a que en el espacio, como orden de coexistencia, una relación entre dos puntos individuados es la relación de distancia. Esta distancia no es divisible en partes mayores o menores, porque es una relación. El segundo tipo de distancia refiere a la relación que hay entre las partes divisibles de una magnitud en referencia a las partes de un todo, es decir, relaciones de orden de coexistencia: "cuando se perciben dos puntos de un extenso simultáneamente, es la magnitud la que permite diferenciar su *situs*, por ello mismo es un extenso lo que se percibe" (Leibniz G., 1679/2015b, p. 479). Entre dos puntos, por tanto, debe haber una relación extensa, y Leibniz la define como magnitud. Ahora bien, el filósofo alemán determina la noción de distancia constituída por un compuesto de números o partes numeradas entendidas como extensas. Así, por ejemplo, al descomponer una línea de unidad 1, puede dividirse en *n* fracciones, es decir, 1/2, 1/3, 1/4,… 1/*n*. De ese modo, el total de las fracciones que constituyen ese todo "contienen ya el mismo número, que se revela con la descomposición […] de este modo se conoce la noción de distancia de magnitud" (1679/2015b, p. 479). Así, la extensión representada por el número 1, se halla limitada por dos puntos extremos, y por ser un extenso, es divisible en 1/*n* términos. De ahí que la noción de distancia en Leibniz aplicada a la extensión refleje una correspondencia con una cantidad extensiva, o en términos más precisos:

> En realidad, la distinción se establece entre cantidades intensivas y extensivas. Las primeras suponen de antemano, todos los constituyentes de los cuales son sumas; las segundas, por el contrario, nunca dan por supuesta la existencia de cantidades menores de la misma especie. La posición de Leibniz, pues, es que las cantidades espaciales y temporales son relaciones, y por lo tanto intensivas, mientras que la extensión es una cantidad extensiva, y supone de antemano partes actuales en lo extenso (Russell, 1900/1977, p. 137)

Si admitimos la noción de extensión que Leibniz defiende, debemos aceptar que ésta se vincula directamente con los problemas de la geometría métrica. Luego entonces, debe encontrarse en el marco de las geometrías extensivas, en el marco de aquellas geometrías que suponen cantidades actuales en un extenso determinado. Su divisibilidad no implica que sus relaciones cuantitativas establezcan si son mayores o menores, sino que son partes de una totalidad, como en el caso de la distancia de magnitud 1, cuyas partes no son mayores y menores, sino partes actuales de esa longitud mencionada. Leibniz puede concebir, de ese modo, que entre dos puntos hay una única relación cuantitativa, que es la distancia, y que con la congruencia entre sus partes puede determinarse su magnitud. Se sigue que el axioma tres de las geometrías métricas se corresponde con la cantidad extensiva que Russell aplica a las geometrías métricas y con la noción leibniziana de extensión, como actualidad de partes extensas. Cuando entre dos puntos hay una única relación cuantitativa, llamada distancia, su magnitud espacial establece un espacio homogéneo, que depende, necesariamente, del axioma de libre movilidad o congruencia. En Leibniz podemos hallar que en un extenso hay una relación cuantitativa llamada distancia, cuyas partes son actuales, y esas partes son comparables entre sí para hallar la congruencia que ellas comparten y con el todo del cual forman parte, según relaciones de magnitud.

La noción de extensión en Leibniz, a modo de conclusión, guarda amplios aspectos de parentesco con los espacios de la geometría métrica. Vimos que los axiomas de dicha geometría están estrechamente relacionados con los argumentos que Leibniz esgrime para justificar la noción de extensión, en tanto que diferenciada del espacio. Sin embargo, los pensadores que lo antecedieron fundaron en sus geometrías nociones estrictamente métricas, y llevaron el análisis solamente hasta la noción de magnitud, pues la vincularon con el espacio como tal. A diferencia de ellos, Leibniz puede decir que debe haber una geometría del espacio en tanto orden de coexistencia, que fundamenta la métrica de la extensión en cuanto tal. Pero para que ésta pueda ser posible, se requiere de algunas intuiciones o conceptos previos de orden cualitativo que sirvan de fundamento para identificar su propia naturaleza. Por otro lado, como mostré anteriormente, Russell se pone en la misma tarea, a saber, en la de ubicar algunos fundamentos *a priori* para toda geometría métrica, fundamentos comunes a los espacios euclidianos y no-euclidianos, por lo que, al igual que Leibniz, concibe un espacio más general que los métricos, pretendiendo determinar que esos espacios forman parte de dicha geometría, que es más general. Pero ¿cuáles son los vínculos de parentesco entre el espacio del *Analysis situs* de Leibniz y el espacio de la geometría proyectiva de Russell? Ésta será la pregunta que el siguiente apartado pretenderá responder.

La geometría proyectiva y los conceptos geométricos del *Analysis situs*

En el apartado anterior mostré que la noción de extensión leibniziana estaba relacionada con la noción de magnitud y asociada con los axiomas de la geometría métrica. Pude sostener, por tanto, que este concepto se relaciona con la idea de un *espacio homogéneo*. Tal y como Russell lo muestra en el primer axioma de la geometría métrica, pues mientras la extensión permita visualizar relaciones de magnitud y cambios de posición en magnitudes es una cantidad homogénea y, por ende, extensiva. Sin embargo, la geometría no termina en este punto, precisamente porque aún no se ha considerado el espacio propiamente dicho. Hasta el momento, solo se han tenido en cuenta las relaciones cuantitativas entre objetos geométricos. Por esa razón, como vimos en capítulos anteriores, uno de los objetivos de Leibniz es el de llevar el análisis más allá de las cantidades métricas, es decir, en ir más allá de las características cuantitativas de la geometría, para llegar, por medio del método del análisis, a la consideración del espacio como el lugar de todas las relaciones posibles en diferentes posiciones.

Para la época de Leibniz, el álgebra era una disciplina que explicaba relaciones de magnitud, de ahí que la geometría analítica, denominada así desde Descartes, fuera la disciplina más acertada para tratar dichas relaciones, respecto a esto Leibniz afirma que:

> Los Algebristas, por el contrario, hallados los valores de las incógnitas, deben todavía buscar las construcciones y, localizadas las construcciones, buscar demostraciones con líneas. Es por lo tanto sorprendente que nadie haya considerado que si las demostraciones y las construcciones pueden ser mediante líneas, exceptuando todo cálculo, y mucho más breves, se debe sin ninguna duda producir el hallazgo de las líneas: pues en la síntesis de líneas no menos que en la síntesis algebraica es necesario que haya una regresión. La causa de que no se descubriese todavía el análisis mediante líneas se encuentra sin ninguna duda en que aún no se han hallado los caracteres mediante los cuales se represente directamente el *situs* mismo de los puntos, pues en la gran multitud y confusión de las cosas es muy difícil manejarse sin caracteres (Leibniz G. , 1679/2015b, p. 442)

Para Leibniz, en consecuencia, la geometría analítica parte del álgebra para determinar relaciones entre magnitudes, y solamente lleva el análisis hasta el descubrimiento del valor de una incógnica, para, posteriormente, elaborar la construcción de una figura que representa dicha ecuación. En este punto, cuando Leibniz habla de *análisis*, lo hace con el objetivo de ir más allá de las condiciones métricas del álgebra, pues para la lógica de un espacio de carácter cualitativo, su fundamento está en todas las relaciones posibles que haya entre lugares que Leibniz determina e individualiza mediante *characteres* o símbolos (Cfr. Couturat, 1901, p. 406). Para Leibniz, entonces, toda determinación cuantitativa, esto es, toda extensión o magnitud, debe tener una serie de requisitos cualitativos para que éstos sean posibles.

En el marco de las discusiones que Russell tiene con las geometrías no-euclidianas, y, a pesar de que haya ciertos criterios históricos y filosóficos que demarcan notables diferencias con lo expuesto por Leibniz, éstas se sustentaban en un suelo común que pretendía identificar la naturaleza apodíctica de la geometría en tanto conocimiento exacto. Así pues, la discusión de Russell, que ya mencioné al principio de este capítulo, estriba entre las posturas empiristas representadas, principalmente por Riemman y Helmholtz, dice así: “solo la presencia perceptual de las impresiones espaciales hacen de nuestra experiencia de la verdad de los axiomas tan amplia que parece tener certeza absoluta” (Russell, 1897, p. 1;

§ 1); y la postura que afirma que para todos los espacios cuantitativos, debe haber ciertos requisitos, anteriores a las relaciones métricas, tales que son:

> Aquellos comunes a los espacios euclidianos y no euclidianos. Estos serán encontrados, de un lado, esenciales a la posibilidad de la medida en cualquier continuo; y por otro lado, propiedades necesarias de cualquier forma de externalidad con más de una dimensión. Ellos serán, por tanto, a *priori* (1897, p. 6; §9)

Russell expone estos requisitos como el conjunto de tres axiomas que condicionan la posibilidad métrica del espacio, y los presenta como axiomas de la geometría proyectiva, pero ¿cuáles son los aspectos comunes que hay entre la discusión que tiene Leibniz con las geometrías métricas de su tiempo y la discusión de Russell con las geometrías métricas de su época? ¿en qué aspectos el espacio leibniziano, y por tanto, el *Analysis situs*, tienen vínculos de familia con el espacio que Russell presenta para la geometría proyectiva? Para responder a estas preguntas, en cuyas respuestas se halla el grueso de la tesis que estoy defendiendo en este trabajo, en el presente apartado expondré las principales características que Russell expone para la geometría proyectiva. Paralelamente iré colocando los conceptos que Leibniz postula en el *Analysis situs* y que constituyen los rasgos de familia y parentesco con la propuesta russeliana de una geometría proyectiva. Todo esto en tres puntos diferentes, en el primero identificaré los aspectos con los cuales inicia tanto la geometría proyectiva, como el *Analysis situs*; en la segunda parte presentaré la condición de la externalidad como forma general para las geometrías métricas y para la extensión leibniziana; al final, presentaré las condiciones que determinan la homogeneidad del espacio métrico en la geometría proyectiva y las condiciones para la homogeneidad de la extensión en el *Analysis situs*.

1.) La geometría proyectiva es una geometría pura, no-métrica. A diferencia de las geometrías métricas, ésta prescinde de nociones cuantitativas, tales como igualdad entre segmentos, ángulos, áreas y volúmenes (Nagel, 1972/2006, p. 328). En términos históricos, fue una geometría posterior a las geometrías no-euclidianas, y estructurada por Cayley (1821-1895) y Klein (1849-1925), quienes aceptaron que las geometrías métricas podrían ser reducibles a proyecciones y transformaciones de coordenadas, es decir:

> Mientras Riemman y Helmholtz tratan con ideas métricas, y toman, como sus fundamentos, la medida de la curvatura y la fórmula para los elementos lineales — ambos puramente métricos— el nuevo método es erigido sobre la formula para la transformación de coordenadas que requieren expresar alguna colineación. Esto comienza por una reducción de todas las llamadas nociones métricas —distancia, ángulo, etc.— a las formas proyectivas, y

> obtienen, desde esta reducción, una unidad metodológica y una simplicidad antes imposible (Russell, 1897, p. 28; §30)

Los componentes métricos de las geometrías no-euclidianas quedan reducidos, así, a los criterios proyectivos. Dichos criterios constituyen la posibilidad de prescindir de las condiciones cuantitativas del espacio, tomando como punto de partida sus aspectos cualitativos. En consecuencia, la geometría proyectiva puede entenderse como una geometría cualitativa fundamentada en la idea de un espacio sustentado en propiedades comunes a todos los espacios métricos, y, por tanto anteriores a ellos. De acuerdo con Russell: "la geometría proyectiva, en la medida en que solo trata con las propiedades comunes a todos los espacios, será encontrada, si no me equivoco, totalmente *a priori*, al no tomar nada de la experiencia" (1897, p. 103; §18), de donde se sigue que todas las propiedades cualitativas del espacio aplican para todas las propiedades cuantitativas de los espacios métricos.

De manera intuitiva la geometría proyectiva parte de una postura inicial. Esta sostiene que al admitir un sujeto, al frente de él hay una agrupación o un conjunto de puntos que: "suponemos, por tanto como nuestro *datum*, una agrupación discreta de puntos, sin considerar sus interconecciones" (1897, p. 120 §108). Se deduce de lo anterior que si no tenemos algún criterio que permita diferenciarlos intrínsecamente, entonces todos ellos son puntos que presumimos en el espacio como similares e idénticos. En esa medida:

> Para la geometría proyectiva, cuando solo son dados dos puntos, ellos son cualitativamente indistinguibles desde cualesquiera otros dos puntos sobre una misma línea recta, ya que aquellos puntos tienen la misma relación cualitativa (1897, p. 120; § 108)

Si todos los puntos son iguales entre sí, y son indistinguibles entre sí, solamente pueden ser diferenciados por su posición, y solamente estamos posibilitados para identificar sus respectivas relaciones cualitativas. Al tomarlos como diferentes, según su posición, entonces podemos decir que al relacionarse mutuamente, entre ellos hay una única línea. Podemos decir, de igual forma, que dos líneas intersectan en un único punto. Por el hecho de distinguir tales puntos, Russell expresa que los razonamientos geométricos entran en una circularidad inevitable: "si asumimos que partimos de puntos, ellos solo pueden ser definidos por las líneas y los planos que con ellos se relacionan; y si partimos de asumir líneas o planos éstos solo pueden ser definidos por puntos" (1897, p. 120; § 108). Por tanto, tales objetos iniciales, es decir, puntos, líneas y planos, no se definen mediante la descripción de sus cualidades, sino a partir de sus relaciones con los diferentes objetos.

Podemos sostener, así, que tales objetos pueden ser comprendidos mediante *definiciones implícitas*, esto es, que los objetos geométricos más elementales (tales como puntos, líneas o planos) se definen por todas las relaciones que éstos cumplen en el interior de un cuerpo axiomático determinado, o, mejor decir:

> Pensamos aquellos puntos, líneas rectas y planos como si tuvieran ciertas relaciones mutuas que indicamos por medio de expresiones como 'están situados', 'entre', 'paralelo', 'congruente', 'continuo' etc. La completa y exacta descripción de esas relaciones se sigue como una consecuencia de los axiomas de la geometría" (Hilbert, 1899/ 1902, p. 2; §1)

En consecuencia, para poder hacernos a una idea de su naturaleza, dichos objetos geométricos no requieren de definiciones descriptivas; simplemente, de acuerdo con Hilbert, necesitamos determinar sus relaciones en el marco de una agrupación de puntos determinados. Russell presenta esto mismo cuando piensa en las relaciones extrínsecas, sobre todo cuando ve que en geometría proyectiva los puntos: "han sido definidos como nada más que los términos de las relaciones espaciales. Ellos, por tanto, no poseen propiedades intrínsecas, pero son distinguibles solamente, por medio de sus relaciones" (Russell, 1897, p. 129; §119). Cada punto se define, entonces, con las relaciones que posea con otros puntos pertenecientes al conjunto que intuitivamente un sujeto percibe. Por ende, carecen de definiciones descriptivas, o de propiedades intrínsecas, lo que nos lleva a asumir que al prescindir de tales definiciones, podemos postular un sistema 'axiomático' de elementos y reglas que permitan asegurar enunciados válidos y demostrables, como ocurre en la geometría proyectiva cuando omite el significado de los objetos geométricos más elementales.

Tomando como punto de partida la concepción intuitiva de cierta agrupación de puntos dados a un sujeto determinado, en geometría proyectiva no es relevante, por tanto, lo que un punto signifique, puesto que solamente nos interesan sus características relacionales y sus vínculos externos con otros objetos geométricos en un sistema formal. Por ello hay cierta libertad en geometría proyectiva cuando admitimos que en el interior de un enunciado solo hay relaciones en un conjunto de puntos o líneas, sin que tengamos que acudir a algún tipo de significado que se les pueda adscribir, de ahí que el sentido de esta geometría: "sea, por tanto, comenzar con líneas o con puntos, como eminentemente lo ilustra matemáticamente el principio de dualidad" (1897, p. 120; §108). El principio de dualidad, en geometría proyectiva, no obliga a que un enunciado tenga un solo significado. Esto en virtud de que en un enunciado geométrico pueden intercambiarse ciertas palabras sin que la verdad objetiva del enunciado geométrico varíe, es decir: "el principio de dualidad bidimensional afirma que toda definición permanece significativa, y todo teorema permanece verdadero cuando intercambiamos las palabras *punto* y *línea*" (Coxeter, 1987, p. 25). Con el principio de dualidad, el significado de los objetos geométricos es un factor secundario, pues de lo que se trata es identificar las relaciones lógicas entre puntos y líneas.

Leibniz, sobre este punto, también inicia el desarrollo de sus reflexiones sobre el *Analysis situs* de la misma manera. Para el pensador alemán, en principio, debe asumirse que hay una agrupación de puntos simples e indivisibles que aparecen mediante una reducción de términos complejos en simples, esto es, mediante análisis, puesto que: "todo lo que percibimos simultáneamente lo percibimos en el espacio extenso, esto es, percibimos que podríamos percibir simultáneamente muchos otros puntos de ningún modo discernibles de aquellos" (Leibniz G., 1679/2015b, p. 479). De ese modo, postula que todos los puntos que se hallan en el espacio (que es la única manera de representarlo), conforman una agrupación de puntos indiscernibles entre sí, tal y como hace Russell al inicio. El espacio es, por tanto, el lugar de todos los lugares posibles. Pero como todos los puntos son indistinguibles, Leibniz los diferencia cualitativamente mediante el principio de la identidad de los indiscernibles.

Para llevar esto adelante, Leibniz individualiza cada punto indefinible y simple por medio de letras, por medio de la *characteristica*. Los puntos pueden, así, diferencarse unos de otros según su posición. Al carecer de la definición de punto, entonces determina su particularidad por medio de su posición y sus respectivas relaciones de congruencia. En este punto, conviene resaltar que la noción de congruencia desarrollada por Leibniz, difiere un poco de la noción de congruencia de las geometrías métricas. Él la aplica a puntos, y concluye que un punto puede ser congruente con todos los otros puntos en el espacio, de ahí la expresión $A\gamma Y$. Esta noción de congruencia sostiene que cualquier punto del espacio está en la capacidad de sustituir al punto A sin que en el espacio ocurra modificación alguna. Como veíamos, en las geometrías métricas, el concepto de congruencia también considera superposiciones, pero dicha sustitución se da entre figuras de igual magnitud. En Leibniz la congruencia tiene como finalidad hallar relaciones cualitativas entre puntos individuados y situados.

Vemos que en Leibniz dos puntos pueden diferenciarse por el *situs* que corresponde a cada par de puntos, y que cada uno de ellos no se define por sus características intrínsecas. Aún así, son esenciales para deducir otras verdades esenciales para configurar modelos relacionales o cualitativos. También es posible observar, por tanto, que el pensador alemán ya tenía en mente algunas ideas que anticipaban a las definiciones implícitas. Al igual que Russell y Hilbert, Leibniz está afirmando indirectamente, que los objetos geométricos solo se definen por sus relaciones con otros puntos, a la manera de las definiciones implícitas. Por ello podemos identificar estas mismas características en el *Analysis situs*, pues:

> Se puede resolver todo en geometría considerando solamente puntos. La naturaleza de la línea consiste efectivamente en el hecho de que cualquiera de sus puntos posee una cierta relación con respecto a algunos puntos dados, por los cuales se pueden determinar o descubrir (Leibniz G., 1679/2015b, p. 443)

El primer axioma de la geometría proyectiva formulado por Russell dice: "Podemos distinguir diferentes partes del espacio, pero todas ellas son cualitativamente similares, y son distinguibles solo por el hecho inmediato de que una se encuentran fuera de otras" (Russell, 1897, p. 132; §122). En él hallamos aspectos estrictamente leibnizianos, y podemos decir que si este primer axioma aplica para la geometría proyectiva, como condición *a priori* para las geometrías métricas, entonces este axioma ya estaba formulado en Leibniz como una condición necesaria para para toda extensión. Por tanto, el pensador alemán ya estaba intuyendo o anticipando nociones de la geometría proyectiva.

2.) Otro dato esencial que en geometría proyectiva acompaña a la percepción de una multitud de puntos, consiste en que para poder distinguir dos puntos en dicha agrupación, debe haber cierta actividad que acompañe a esa percepción simultánea de objetos. Russell expone esto así: "la única razón, desde la geometría proyectiva, para no considerar dos figuras proyectivamente idénticas, como actualmente idénticas, es la percepción intuitiva de la diferencia de la posición. Esto es fundamental, y debe ser aceptado como un *datum*" (1897, p. 131; §121). Este *datum* expone una forma de externalidad por el hecho de que los puntos se perciben simultáneamente. Esta *externalidad* refiere a la capacidad de diferenciar, dentro de un conjunto de elementos percibidos simultáneamente (en este caso puntos), lugares o posiciones. La externalidad revela una diversidad amplia de elementos, más concretamente, una diversidad cualitativa entre diferentes lugares, por lo que da la posibilidad de pensar que dos puntos no ocupan un mismo lugar al mismo tiempo, por ende:

> En un mundo en el que la percepción nos presenta varias cosas, con varias discriminaciones y con contenidos diferenciados, debe haber, en la percepción, al menos un "principio de diferenciación", un elemento por el que las cosas presentadas son distinguibles como varias. Este elemento, tomado aisladamente, y abstraído desde desde el contenido en el que es diferenciado, lo llamamos una *forma de externalidad* (1897, p: 136; § 128)

Russell afirma que para todas las relaciones posibles debe haber un principio que exponga la externalidad y la relación simultánea entre objetos. Todo tipo de relación, en consecuencia, debe implicar que aquellos objetos que se perciben son externos. En virtud de lo anterior, en geometría proyectiva todo objeto es diferenciable mediante su relación con otros objetos, por el hecho de que ocupan lugares diferentes. Las respectivas posiciones, son posiciones, en la medida de que exista la posibilidad de mantener sus diferencias cualitativas, y que esta forma de externalidad sea, en términos leibnizianos, una especie de orden de coexistencia. La posición es relativa pues toda externalidad requiere de un sujeto que pueda determinar esas relaciones, por ello: "la externalidad, es, esencialmente, una concepción relativa —nada puede ser externo por sí mismo" (1897, p. 136; § 129). Russell postula, así, que el espacio proyectivo es *relacional*, *cualitativo* y *relativo*.

En apartados anteriores había mostrado que el espacio leibniziano también es relacional, cualitativo y relativo. Pero para que Leibniz pudiera postular esto, debía determinar que hay objetos independientes de quien percibe. De ahí que:

> Puede existir una infinidad de otros puntos que no podemos distinguir de él de ningún modo, o lo que es lo mismo, puede estar tanto en un lugar como en otro, pero como no puede estar en varios lugares simultánemente, ni moverse instantáneamente, percibimos el lugar como un continuo (Leibniz G., 1679/2015b, p.479-480)

Leibniz dice (y posteriormente Russell) que una geometría cualitativa requiere de cierto requisito en la percepción, que es la externalidad. Con este requisito puede identificarse una variedad infinita y comparable de lugares que se relacionan como un continuo, a esto Louis Couturat lo denomina, en su lectura sobre Leibniz, *intuición comprativa* (*comparasion intuitive*) (Cfr. Couturat, 1901, p. 412). Lo único que podemos hacer es diferenciar lugares e identificar en todos ellos relaciones de congruencia. Como veíamos en algún momento dado, Leibniz define al espacio como algo puramente relativo, pues es una abstracción de las relaciones que hay entre un punto respecto a otro. No existe, por ende, por sí mismo. En ese orden de ideas, la relatividad del espacio depende de que exista un presupuesto dado, a saber, que alguien perciba cierta agrupación de objetos externos a él. En consecuencia, cuando Leibniz define al espacio como algo puramente relativo, refiere a que éste se deriva de algunos requisitos que determinan relaciones, por medio de la comparación y ordenación de los objetos, que es, a saber, la externalidad o la comparación intuitiva. Estas nociones (externalidad y relatividad del espacio), presentadas por Russell en la geometría proyectiva, ya estaban vigentes en los presupuestos mismos del *Analysis situs* de Leibniz, a pesar de que Leibniz no hubiera estructurado una axiomática para esta geometría.

3.) Si las posiciones de los puntos son por sí mismas indistinguibles, entonces ellas son homogéneas, pero son homogéneas cuantitativamente en el espacio, de ahí que al ser iguales, puedan colocarse nociones de superposición o de congruencia, equivalencia y proporción. Si esto es así, toda homogeneidad o toda relación cuantitativa debe suponer relaciones de identidad cualitativa. La homogeneidad del espacio, por ende, se corresponde con la relatividad de la posición. Por ese motivo, en toda comparación entre magnitudes espaciales, debe haber un requisito como el de la externalidad y la relatividad de la posición:

> Pues lo *a priori* en la geometría métrica será lo que quiera que se presuponga en la posibilidad de la medida espacial, esto es de la comparación espacial cuantitativa. Pero tal comparación presupone simplemente una identidad conocida de cualidad, cuya determinación es precisamente el problema de la geometría proyectiva (Russell, 1897, p. 148; §141)

La naturaleza cualitativa del espacio relativo (que es en últimas, el espacio proyectivo), es una condición *a priori* del espacio métrico o el espacio homogéneo. En lo que refiere a las carácterísticas del espacio proyectivo, Russell tiene en mente las carácterísticas de continuidad y divisibilidad. En este aspecto, Russell evoca la característica intensiva de un espacio relacional, es decir: “el aspecto de una totalidad […] [y] una cantidad intensiva no es numerable […] pero una cantidad contínua, si es divisible, debe ser infinitamente divisible” (1897, p. 176; §178). Las cantidades intensivas constituyen la idea de que una percepción simultánea de objetos en el espacio forma una totalidad, es decir, el conjunto del todo con el conjunto de sus partes. Pero esas totalidades no son numerables, porque son relaciones. Si hay divisibilidad, éstas partes deben relacionarse continuamente.

De esto se deduce que el espacio proyectivo es de orden intensivo, pues se presenta como la suma total de todas las partes que lo componen. Esto se sintetiza en el axioma dos de Russell, "el espacio es continuo e infinitamente divisible; el resultado de la división infinita, es la extensión cero, llamado punto" (1897, p 132; §122). Russell considera que todo espacio homogéneo es propenso a alteraciones continuas. La divisibilidad es, por ende, un resultado de la forma de externalidad que poseemos sobre la homogeneidad del espacio, por lo cual:

> Encontramos ahora que la distancia, por ejemplo, puede ser alterada continuamente sin que cambie la línea recta sobre la que se mide. De este modo obtenemos, sobre la línea recta en cuestión, una serie continua de puntos, que consideramos como constituyente de nuestra línea recta. Por lo tanto, es sólo a partir de la hipostatización de las relaciones (que la geometría métrica requiere), que surge la visión de líneas rectas y planos como compuestos de puntos, y es a partir de esta hipostatización, que surgen las dificultades de la geometría métrica. (1897, p. 139; §131)

Teniendo en cuenta que el espacio homogéneo se corresponde con la relatividad de la posición, tenemos que asumir que una cantidad extensiva la percibimos mediante nuestra forma de externalidad, es decir, mediante los criterios que permiten que en tal extenso se puedan comparar magnitudes. Si vemos tal cantidad, la vemos como una totalidad constituída por todas sus partes. De la misma forma, podemos establecer una divisibilidad continua de puntos o de relaciones continuas, es decir, una serie de cantidades que se definen por sus relaciones y que son el fundamento de toda comparación cuantitativa. El espacio proyectivo es una cantidad intensiva, y por nuestra forma de externalidad, es una condición formal anterior que determina a las cantidades extensivas, a saber, el espacio homogéneno. Es decir, que a la manera leibniziana, todo orden de coexistencia es el fundamento para toda extensión o comparación de magnitudes.

Leibniz considera algo profundamente parecido. Como evidencié en el apartado anterior, también sostiene que una cantidad extensiva debe ser continua e infinita, pues esto se deriva de la externalidad misma, afirma que: "el extenso es un continuo. En el extenso se pueden encontrar partes. En el extenso se pueden encontrar partes que existan simultáneamente" (Leibniz G., 1679/2015b, p. 480). De esto se sigue que todas las partes extensas se perciben simultáneamente, y que sus partes son continuas y divisibles infinitamente. Para afirmar que toda extensión es posible, deben admitirse todas sus posibles relaciones de lugar y, por ende, sus relaciones de orden y coexistencia. Leibniz entiende, con esto, que el espacio como orden de coexistencia, es una hipóstasis que fundamenta toda magnitud en la extensión. El espacio es, por tanto, una *forma* con la que se ordenan los agregados de las sustancias, o, mejor decir, la extensión en tanto fenómeno. Toda magnitud, por tanto, debe presuponer una posición y un orden de coexistencia. En Leibniz la noción de extensión es una categoría acompañada por la noción de magnitud, por ello es una noción cuantitativa. Por esa razón, para la época de Leibniz, las geometrías métricas solamente llevaron el análisis algebraico hasta el descubrimientos de incógnitas. De este proceso surge la consideración de la extensión como cualidad última del espacio.

Lo que Leibniz pretendió mostrar era que la métrica es viable, si se admite algo como su fundamento, esto es, si se lleva el análisis hacia la comprensión del *situs*. Desde una perspectiva leibniziana, las geometrías métricas sólo tienen en mente la extensión, y no profundizan en lo que la extensión misma abarca, es decir, el espacio local. Por ese motivo, el concepto de espacio definido por Leibniz como relativo, es anterior a la extensión misma, y corresponde con la idea de la relatividad de la posición de Russell. En esto, el espacio debe presuponer el orden relacional y la externalidad misma de una agrupación de puntos en el espacio. Si se perciben dos puntos, aunque percibamos una magnitud, éstos deben localizarse en dos lugares distintos, esto es, que entre los dos puntos individuales y diferenciados, hay un orden de situación, así: "cuando dos puntos se perciben se percibe el *situs* del uno respecto al otro […] cuando se perciben dos puntos de un extenso simultáneamente, es la magnitud lo que permite diferenciar su *situs*, por ello mismo es un extenso lo que se percibe" (Leibniz G., 1679/2015b, p. 479). En ese orden de ideas, cuando Leibniz concibe el *situs* lo hace para exponer que dada una extensión, en tanto cuantitativa, sus respectivas relaciones de magnitud pueden calcularse, siempre y cuando, pueda presuponerse que tales relaciones se fundamentan en relaciones de posición.

Tanto en Leibniz como en Russell toda cantidad extensiva y homogénea es fundamentada por toda cantidad intensiva o proyectiva. Por tanto, cuando en un extenso se perciben relaciones entre diferentes puntos situados, cada punto individual se relaciona con otro punto individualizado, gracias a su posición; de ese modo, hay entre ellos una relación de ubicación; esta relación está dada por el *situs* que comparten dos puntos congruentes. Esto ofrece una medida específica, que no hubiera sido posible reflejar si no se hubiera develado la relación cualitativa entre los dos puntos. Todo orden de relaciones espaciales es una condición necesaria para que toda *magnitud* sea posible. Por ello en Leibniz la relatividad de la posición es anterior a la homogeneidad de la extensión.

Vemos que en Leibniz todos los elementos necesarios están dados para que Russell presente todo un sistema geométrico sustentado en relaciones de situación en sus *Foundations of geometry*. Estas nociones ya las había anticipado el pensador alemán e, indirectamente, las aportó como nociones esenciales para el desarrollo de la geometría proyectiva como tal.

El *Analysis situs* y la geometría proyectiva son geometrías puras y de orden cualitativo, y establecen las condiciones necesarias para todos los sistemas geométricos cuantitativos o métricos, por lo que la geometría proyectiva es una geometría más general. Así, las geometrías no-euclidianas y a la euclidiana, son casos especiales de ésta. Podemos aceptar, por tanto, por medio de una analogía, que lo que las geometrías euclidiana y no-euclidianas son a la geometría proyectiva, la geometría analítica es al *Anaysis situs*. Con esto, pretendo observar que el espacio leibniziano es más general que el espacio de las geometrías euclidiana y analítica, por el hecho de que conserva las mismas cualidades de un espacio cualitativo y proyectivo.

Al igual que Russell, Leibniz ya poseía algunas ideas esenciales de base para estructurar el *Analysis situs*, pues pudo fijar que las geometrías que se ocupaban por las magnitudes necesitaban de algunos fundamentos cualitativos que serían anteriores a toda medida. Por esa razón, lo que hizo falta a Leibniz para llevar a un total desarrollo de sus ideas fue reducir el análisis de la situación y sus propiedades, a relaciones de sección y de proyección, tal como sostiene Couturat:

> Las operaciones proyectivas fundamentales son la proyección y la sección. Dos figuras son proyectivamente equivalentes cuando podemos ponerlas en perspectiva, o transformarlas entre sí mediante una serie de proyecciones y secciones (alineaciones y superposiciones). Si Leibniz hubiera seguido este camino habría fundado la verdadera geometría de la posición (1901, p. 420)

No puedo decir, radicalmente, que el *Analysis situs* haya sido una geometría antecesora de la geometría proyectiva. Pero, si Leibniz no logró consolidar una geometría concreta de la posición, por lo menos dejó los rastros necesarios y la conceptualización suficiente para que se replantearan dichas ideas; y sería el joven Russell, lector riguroso y crítico de Leibniz, quien llevaría estas ideas leibnizianas hacia la consolidación de unos axiomas para el espacio proyectivo. Leibniz no solo buscó reformular las condiciones que rodean a las geometrías métricas de su tiempo, sino que estaba dejando con su *Analysis situs* una especie de legado que consolidaría en el futuro las bases para formular una geometría naciente y lógicamente anterior a las geometrías no-euclidianas, la geometría proyectiva.

Conclusiones

El objetivo del presente trabajo consistía en presentar, de manera general, lo que es el *Analysis situs* y los parecidos de familia que tiene con la geometría proyectiva. Para el desarrollo de este objetivo, en el primer capítulo expuse lo que significaba la palabra *análisis* en esta geometría. Allí mostré el origen geométrico de este método, tomando como referencia principal al geómetra griego, Pappus de Alejandría. Expuse que el análisis de la geometría griega era entendido como un razonamiento en el que se supone un enunciado desconocido como conocido, que va acompañado por una serie de herramientas y condiciones previas de orden geométrico, y ascendemos secuencialmente hasta llegar a un enunciado conocido. Luego desdendemos por los mismos enunciados que se derivaron del enunciado que supusimos como conocido, organizándolos de manera más estructurada hasta volver a él, a esto se le denomina síntesis. Siguendo la lectura de Hinttikka y Remes, expuse las razones por las que debe entenderse el surgimiento de cada enunciado geométrico, como concomitantes y no como consecuencias lógicas, por el hecho de que cada enunciado refiere a relaciones de interedependencia entre objetos geométricos y no entre implicaciones lógicas, denominada interpretación proposicional (Cfr. Hintikka & Remes, 1974, p. 11). Esto me llevó a formular, por tanto, que el método del análisis griego está estrictamente vinculado con las características métricas de la geometría euclidiana, pues para demostrar problemas geométricos, se deben mentar las contrucciones de los objetos geométricos que se ponen en juego.

En la segunda parte expuse las disgresiones que se dieron en el mundo moderno sobre el método analítico, sobre todo en el caso de pensadores como Zabarella, Descartes, Newton y Leibniz. Expuse, cómo este método fue comparado con la pareja deducción-inducción. El análisis era el correlato de la inducción por cuanto suponía que se podía ir de las consecuencias hasta las casusas, y que la síntesis era el retroceso de las causas descubiertas hacia los efectos asumidos. Esto derivó en una interpretación lógica del método analítico, a pesar de que fuera atribuído por estos mismos pensadores a los geómetras griegos. Leibniz no pudo ser una excepción. Al final expuse en qué sentido la interpretación lógica del método analítico, entendido como resolución de complejos en simples, fue aplicado por Leibniz en problemas geométricos. Expuse que fue el método del que se valió el pensador alemán para dejar de lado las condiciones métricas de la geometría euclidiana y cartesiana, la cual concebía como fin último del espacio, la extensión. Así, logra reducir los juicios de la geometría a enunciados de identidad y, allí, en donde no es posible distinguir una cosa de otra, entonces, sólo queda diferenciarlas por símbolos. El análisis da origen a una *characteristica* que en geometría sólo determina relaciones formales entre puntos o lugares, esto es el *situs*. Con esto formulado, Leibniz da lugar a la configuración del *Analysis situs* como una geometría que evalúa relaciones formales entre objetos geométricos.

En el segundo capítulo, expuse los conceptos que dan contenido a la geometría euclidiana; al igual que nociones como 'definición', 'axioma', 'postulado' y 'proposición'. Expuse, también, las respectivas problemáticas que existen en cada uno de esos componentes, y que elucidan las dificultades mismas del sistema euclidiano y que muchos autores han reprochado, entre ellos Leibniz. Tales dificultades se sintetizan en la falta de claridad, tanto en las definiciones, como en los postulados; por otro lado, también se reflejan las dificultades que hay en la construcción diagramática de las figuras geométricas, y junto con ello, la dependencia de estos enunciados con sus respectivos dibujos. Así, mostré cómo procede Euclides con la demostración de las dos primeras proposiciones del libro primero de los *Elementos* y, por ende, cómo procede, paso a paso, al construir cada objeto geométrico en función de los problemas que cada proposición pide construir. Con esto, reflejé el carácter métrico de la geometría euclidiana y las respectivas dificultades que la acompañan.

Posteriormente, mostré que Leibniz ve necesario liberar a la geometría de estas dificultades, y para ello afirma la necesidad de someter los conceptos básicos de la geometría euclidiana a un análisis más riguroso, lo que le lleva a trascender la noción misma de métrica y fundamentar una geometría cualitativa. Presenté, de esa manera, los principios a los que Leibniz acude para fundamentar el *Analysis situs* y los conceptos con los que logra estructurar relaciones cualitativas, como la congruencia y la *characteristica*. Presenté la manera como Leibniz, valiéndose de relaciones cualitativas, logra construir y distinguir objetos euclidianos como plano, circunferencia, recta, punto. Por último, identifiqué las diferencias visibles entre el *Analysis situs* y la geometría euclidiana, y los primeros atisbos que establecen parecidos de familia con la geometría proyectiva.

En el tercer capítulo expuse el sentido cualitativo del *Analysis situs* y los aspectos que determinan el parecido de su geometría con la geometría de Russell, particularmente, con el joven Russell del periodo idealista. Para ello, traté la noción de espacio como orden de coexistencia en Leibniz, para explicar el contenido relativo de esa noción. Con ello establecí su vínculo con la extensión, en tanto condición de posibilidad para magnitudes extensas. A continuación se dio luz para entender el sentido que la noción de extensión leibniziana tiene relaciones con las cantidades métricas y con lo axiomas que Russell formula para dichas geometrías. Esto con el fin de mostrar que las cantidades métricas, desde el punto de vista de Russell, necesitan de condiciones *a priori* para que sean posibles, y que, por tanto, la noción de extensión leibniziana, en tanto cantidad cuantitativa, también requiere de una condición que la determine como posible. Finalmente, presenté en qué sentido el espacio leibniziano y los conceptos fundamentales del *Analysis situs* permiten constituir un parecido de familia con los axiomas que Russell formula para la geometría proyectiva. Evidenciando, de ese modo, que tanto el espacio proyectivo, como el espacio leibniziano son condiciones de posibilidad para todo el conjunto de las geometrías métricas; en términos históricos, para el caso de Russell, condición *a priori* de la geometría euclidiana y no euclidiana; para el caso de Leibniz, condición de posibilidad para la geometría euclidiana y la geometría analítica.

En el desarrollo del trabajo que acabo de presentar, mostré, el papel del método del análisis para Leibniz en el marco de la construcción de su proyecto geométrico. Expuse los paralelos de diferencia con la geometría euclidiana y los conceptos que generan su parentesco con la geometría proyectiva. En este punto, puedo afirmar que los parecidos de familia entre la geometría proyectiva pueden formularse de la siguiente manera: primero, la geometría proyectiva y el *Analysis situs* aceptan que los espacios métricos son homogéneos y que sus condiciones de posibilidad se fundamentan en las relaciones de posición en un conjunto discreto de puntos percibidos. De ahí que ambas geometrías deban aceptar que un sujeto percibe agrupaciones de puntos indiscernibles entre sí, pues no queda más que diferenciarlos por su posición.

En segundo lugar, ambas suponen que hay una *forma* general de externalidad. Esto es, que el sujeto que percibe estos puntos presupone que hay una diversidad de puntos o lugares independientes que se vinculan entre sí. Con más exactitud, Russell las llama *forma de externalidad*, Couturat acuña el término de *intuición comparativa* a esta misma facultad en el pensamiento de Leibniz. Tercero, ambas geometrías aceptan que la relatividad de la posición se corresponde con la homogeneidad del espacio. Esto es, que toda cantidad intensiva condiciona a toda cantidad extensiva. Tanto en Russell como en Leibniz todo cambio de magnitud que sea posible en un espacio homogéneo o en una extensión, se presupone un cambio de posición. Pero todo cambio de posición es relativo, pues para que sea posible, es necesario que dos puntos sean distinguibles entre sí, aplicando el principio de la identidad de los indiscernibles. En ambas geometrías, por tanto el tanto el espacio homogéneo, como la extensión son continuos y divisibles infinitesimalmente. Pero todas las comparaciones de magnitud que puedan expresarse admiten, igualmente, que son cantidades actuales e infinitas, a esto Leibniz lo denominó *laberinto del continum*. Russell lo denominó divisibilidad del continuo. En consecuencia, las cantidades intensivas son condiciones de posibilidad de las cantidades extensivas.

Con lo anterior, el presente trabajo tiene la finalidad de defender que existen parecidos de familia entre la geometría proyectiva y el *Analysis situs*. Pude, por lo demás, recalcar que la geometría leibniziana dejó un suelo amplio de investigación que podría reformular, no sólo el sentido de la geometría euclidiana sino el de la matemáticas en general. Así, la influencia del *Analysis situs* sirvió de referente para el cálculo geométrico de Grassmann (Cfr. Couturat, 1901, p. 430); de referente para los fundamentos de la topología que el mismo Poincaré estudió y que también denominó *Analysis situs* (Cfr. Poincaré, trad. 2010). Leibniz fue, en esa medida, un pensador adelantado a su época, pues cada uno de los proyectos que tuvo en mente, aunque no fueron consolidados por él mismo, si fueron revisados y estructurados por pensadores posteriores. Así, lo que eran ideas extrañas para su época, fueron ideas revolucionarias para la posteridad.

Una geometría de la situación no era algo que fuera fácil de aceptar en los tiempos de Leibniz, pero fue el principio que revolucionaría al pensamiento geométrico de los siglos posteriores. En efecto, pudimos observar que Russell toma conceptos estrictamente leibnizianos para postular sus axiomas de la geometría proyectiva y, aunque no explícitamente, implícitamente, se hallan en sus *Foundatios of geometry* de 1897. Como bien sabemos, uno de los autores sobre los que él hablaba con autoridad era Leibiz, y por tanto, su época idealista es imposible imaginarla sin la misma influencia del pensador alemán. Por un lado, vimos cómo el filósofo inglés acepta que en la geometría proyectiva los puntos son distinguibles únicamente por su posición, idea que Leibniz ya había formulado cuando fundamentaba el *Analysis situs.* De la misma forma, vimos que al igual que Leibniz, Russell se vale del principio de la identidad de los insdiscernibles para diferenciar un punto de otro. Identificamos que para Russell el espacio proyectivo es continuo y divisible infinitesimalmente, y el punto es aquello cuya extensión tiende a cero. De la misma forma para Leibniz, la extensión es infinitesimalmente divisible y su sustento o base de realidad son las puntos simples que carecen de extensión. En consecuencia, la misma idea que Russell determina para la gemetría proyectiva en el segundo axioma es de corte leibniziana. Así, no podríamos concluir de manera radical que el *Analysis situs* sea una geometría que haya antecedido a la geometría proyectiva, pues Leibniz no piensa aún en conceptos como proyecciónes y secciones, pero, sí podemos sostener que muchos de los conceptos que Leibniz aplicó en su geometría tienen una influencia considerable en la conformación del espacio proyectivo, lo que me permite afirmar que ambas son geometrías puras que tiene parecidos de familia por cuanto tratan de entender la naturaleza cualitativa de las formas geométricas.

Bibliografía

Angelis, E. d. (1968). El método geométrico de Descartes a Spinoza. *Tarea*, 25-47.

Aristóteles. (Trad. 1988). Analíticos segundos. En Aristóteles, *Tratados de lógica (Organon)* (Vol. II, págs. 314-440). Trad. Miguel Candel Sanmartin. Madrid: Gredos.

Aristóteles. (Trad. 1993). *Ética Nicomaquea.* Trad. Julio Pallí Bonet. Madrid: Gredos.

Aristóteles. (Trad. 2014). *Metafísica.* Trad. Tomás Calvo Martínez. Madrid: Gredos.

Cassirer, E. (1906/1965). *El problema del conocimiento* (Vol. I). Trad. Wenceslao Roces. México: Fondo de cultura económico

Couturat, L. (1901). *La logique du Leibniz.* París: Félix Alcan editores.

Coxeter, H. (1987). *Projective geometry.* New York: Springer-Verlag.

Descartes, R. (1908). *Ouvres* (Vols. VI- VII- X). (C. Adam, & P. Tanery, Edits.) Paris: Leopold Cerf.

Descartes, R. (1637/1977). *Meditaciones con objeciones y respuestas.* Trad. Vidal Peña. Madrid: Alfaguara.

Descartes, R. (1641/1981). *Discurso del método. Dióptrica, los meteoros y la geometría.* Trad. Guillermo Quintás Alonso. Madrid: Alfaguara.

Descartes, R. (2015). *Obras.* (M. G. Morente, Trad.) Madrid: Gredos.

Descartes & Leibniz (Trad. 1989). *Sobre los principios de la filosofía y observaciones críticas sobre la parte general de los principios cartesianos*. Trad. E. López & M. Graña. Madrid: Gredos.

Echeverría, J., & Mora, M. S. (2016). Leibniz crítico de Euclides. *Kairos. Journal of Philosophy and Science*, 99-123.

Euclides. (Trad. 1982/2007). *Elementos.* Trad. Maria luisa Puertas Castaños. Madrid: Gredos.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's elements* (Vol. I). (S. T. Heath, Ed.) New York: Dover publications.

Hilbert, D. (1899/1902). *The Foundation of geometry . Authorized Translation By E. J. Townsend, Ph. D.* Illinois: The Open Court Publishing Co.

Hilbert, D. (1895/1993). *Fundamentos de matemáticas* . Trad. Luis Felipe Segura. México: Mathema.

Hintikka, J. (1978/1998). Un discurso sobre el método de Descartes. En J. Hintikka, *El viaje filosófico más largo. De Athenas a Bloomsbury* (págs. 93-111). Trad. Marcelo Martín Mendoza Hurtado. Barcelona: Gedisa.

Hintikka, J., & Remes, U. (1974). *The Method of Analisis. Its Geometrical Origin and Its General Significance.* Boston USA: D. Reidel Publishing Company.

Immanuel, K. (1787/2011). *Crítica de la razón pura.* Trad. Mario Caimi. México: Fondo de cultura económica.

Kline, M. (1972/1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Vol I-II-III.* Trad. Marianao Martínez, Juan Tarrés & Alfonso Casal. Madrid: Alianza.

Leibniz. (1716/1980). *La polémica Leibniz Clarke.*Trad. Eloy Rada. Madrid: Taurus.

Leibniz, G. (1679/2015a). Anexo a la carta de Leibniz a Huygens. En G. Leibniz, *Obras filosóficas y científicas* (Vol. 7B, págs. 488-495). Trad. M.S. De Mora Charles. Granada: Comares.

Leibniz, G. (1679/2015b). Los caracteres son. En G. Leibniz, *Obras filosóficas y científicas* (Vol. 7B, págs. 339-480). M.S. De Mora Charles. Granada: Comares.

Leibniz, G. W. (1677/2015c). Característica Geometrica. En G. Leibniz, *Obras filosóficas y científicas* (Vol. 7B, págs. 425-432). M.S. De Mora Charles. Granada: Comares.

Leibniz, G. W. (1679-1680/2015d). Extractos de la correspondencia entre Leibniz y Huygens, respecto a la Catacterística Geométrica. En G. W. Leibniz, *Obras filosóficas y científicas* (Vol. 7B, págs. 417-421). M.S. De Mora Charles. Granada: Comares.

Leibniz, G. W. (1697/2015e). A designa el punto A. En G. W. Leibniz, *Obras filosóficas y científicas* (Vol. 7B, págs. 481-486). M.S. De Mora Charles. Granada: Comares.

Leibniz, G. (1671/2015f). Autobiográfica. En G.W.Leibniz, *Mehodus Vitae* (Vol. III, págs. 3-5). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. (1699(?)/2015g). Partes del arte de la invención. En G. Leibniz, *Methodus vitae* (Vol. III, págs. 38-41). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza & Valdés.

Leibniz, G. (Trad. 2015h). Analisis del sitio. En G. Leibniz, *Methodus Vitae* (Vol II, págs. 70-71). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. (Trad. 2015i). Definiciones geométricas. En G. W. Leibniz, *Methodus Vitae* (Vol. II, pág. 129). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. (trad. 2015j). Sitio. Posición. En G. Leibniz, *Methodus Vitae* (Vol. I, pág. 149). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. (Trad. 2015k). Sobre la sabiduría. En G. Leibniz, *Methodus Vitae* (Vol. III, págs. 165-168). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. W. (1679/2015l). Demostración de los axiomas de Euclides. En G. Leibniz, *Methodus Vitae* (Vol. II, págs. 125-126). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. W. (1680-1684(?)/2015m). Sobre la síntesis y el análisis universal o sea del arte de buscar y juzgar. En G. W. Leibniz, *Methodus Vitae.* (Vol. III, págs. 59-64). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Playa & Valdés.

Leibniz, G. W. (1680-84/2015n). Sobre los principios. En G. W. Leibniz, *Methodus Vitae* (Vol. II, págs. 123-125). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. W. (1686/2015ñ). Espécimen de las invenciones relativas a los maravillosos arcanos de la naturaleza en general. En G. Leibniz, *Methodus Vitae* (Vol II, págs. 144-152). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. W. (1686/2015o). Organización e historia del conocimiento humano para la felicidad del género humano. En G. Leibniz, *Methodus Vitae* (Vol I, págs. 3-16). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. W. (1961/2015p). Extracto de una carta de M. D. L. Para sostener lo que publicó en Le Journal des Savans del 18 de junio de 1961. En G. Leibniz, *Methodus Vitae* (Vol. I, pág. 139). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. W. (Trad. 2015q). Primeros principios de la geometría. En G. Leibniz, *Methodus vitae* (Vol. I. Naturaleza o fuerza, pág. 147). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. W. (Trad, 2015r). Carta de Leibniz a De L'Hopytal. En G. W. Leibniz, *Methodus vitae* (Vol. II, pág. 114). Trad. Agustín Andreu. Madrid: Plaza y Valdés.

Leibniz, G. W. (1710/2015s). *Ensayos de Teodicea. Sobre la bondad de Dios, la libertad del hombre y el origen del mal.* Trad. Aurora Freijo Corbeira, Ángel Hernando Domingo & Enrique Romerales Espinosa. Madrid: Abada Editores.

Leibniz, G. W. (1686/1986). *Investigaciones generales sobre el análisis delas nociones y las verdades.* Trad. Mauricio Beuchot & Alejandro Herrera Ibáñez. México: UNAM.

Leibniz, G. (1720/1983). *Monadología.* Trad. Manuel Fuentes Benot, Alfonso Castaño Piñan & Francisco de P. Samaranch. Barcelona: Orbis.

Leibniz, G. W. (1686/1995). *Discurso de metafísica.* Trad. Julián Marías. Barcelona: Altaya.

Leibniz, G. W. (1765/1992). *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano.* Trad. Javier Echavarría Ezponda. Madrid: Alianza.

Leibniz, G. W. (Trad. 1989). *Filosofía para princesas.* Trad. Javier Echavarría Ezponda. Madrid: Alianza.

Levi, B. (1947/2006). *Leyendo a Euclides.* Trad. Buenos Aires: Libros de Zorzal.

Marzoa, F. M. (1991). *Cálculo y Ser.* Madrid: La balsa de Medusa.

Nagel, E. (1961/2006). *La Estructura de la ciencia. Problemas de la lógica de la investigación científica.* Trad. Néstor Míguez. Barcelona: Paidós.

Newton, I. (1704/1977). *Óptica.* Trad. Carlos Solís. Buenos Aires: Alfaguara.

Pasini, E. (1997). Arcanum artis inveniendi: Leibniz and Analysis. *Analysis and Synthesis in Mathematics*, 35-46.

Platón. (Trad. 1987). *Diálogos* . Trad. J. Calonge Ruíz, E. Acosta Mendez, F. J. Olivieri & J. L. Calvo. Madrid: Gredos.

Poincaré, H. (trad. 2010). *Papers on topology: Analysis situs and its fives suplements* . American Mathematical Soc.

Russell, B. (1897). *An essay on the foundations of geometry.* Cambridge : Cambridge: at the University press.

Russell, B. (1900/1977). *Exposición crítica de la filosofía de Leibniz.* Trad. Hernán Rodriguez. Buenos Aires: Siglo XX.

Russell, B. (1944/2008). *Historia de la filosofía.* Trad. Julio Gómez de la Serna & Antonio Dorta. Madrid: RBA.