Filtros en Espacios de Banach

Autor

Sergio Nicolás Duque Báez

Trabajo presentado como requisito para optar por el título de Profesional en Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Directora

Margot del Valle Salas-Brown

Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Universidad del Rosario

Bogotá D.C. - Colombia

2021

Gracias a mis compañeros y profesores que me acompañaron durante esta etapa.
Agradecimiento profundo a la profesora Margot, mi compañero constante de carrera
Samuel, mi papá Orlando, mi mamá Lua y mi querida María.

Índice general

Introducción 1

1. Preliminares 4

1.1. Algunas nociones topológicas y de orden 4

1.2. Espacios normados y espacios de Banach 7

2. Filtros 13

2.1. Ultrafiltros 19

2.2. Topología sobre los Ultrafiltros 23

3. Convergencia de sucesiones vía Filtros 27

3.1. Convergencia en espacios topológicos vía filtros 27

3.2. Convergencia en espacios normados vía filtros 33

3.3. Otras nociones de convergencia vía filtros en espacios normados . . . 42

4. Una aplicación: Notación asintótica 48

4.1. $\mathcal{O}$ grande vía filtros: $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ 48

4.2. o pequeña vía filtros: $o_{\mathcal{F}}$ 52

Conclusiones 56

Bibliografía 57

Introducción

Las sucesiones juegan un papel fundamental en las matemáticas por su utilidad en las demostraciones de teoremas y propiedades de la topología, también son fundamentales en las matemáticas aplicadas. Solo por nombrar ejemplos, las sucesiones son claves en la caracterización de funciones continuas o en la caracterización de subconjuntos compactos en espacios metrizables, son usadas para demostrar la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones a través del Teorema del Punto Fijo o en métodos iterativos como el de divide y vencerás e incluso con la notación asintótica que permite estimar la eficiencia de un algoritmo.

En los últimos 50 años, aproximadamente, diversos matemáticos han realizado contribuciones sobre generalizaciones de este concepto. Específicamente, han realizado generalizaciones del concepto clásico de convergencia por medio de nociones conjuntistas. Por ejemplo, [12] usa la noción de ideal topológico, introducida por Kuratowski en el año 1933 [13], para generar una convergencia de sucesiones vía ideales. También es muy conocida la generalización de convergencia de sucesiones usando la noción de filtro, los cuales fueron introducidos por Cartan [5] en 1937. No se sabe a ciencia cierta quien introduce la noción de convergencia usando filtros, lo que sí es cierto es que ya forma parte del folklore dentro de la topología y es usada por muchos matemáticos para realizar generalizaciones de teorías basadas en este concepto. [1] [2] [9] [10]

En el año 2000 Kostyrko, Šalát y Wilczyński [12] generalizan la noción de convergencia por medio de una estructura dual a la de filtros: los ideales. En este artículo, para un ideal $\mathcal{I}$, se introduce la noción de $\mathcal{I}-$convergencia, se estudian propiedades y caracterizaciones, entre otras cosas. La noción de sucesión $\mathcal{I}-$Cauchy fue introducida en el año 2005, por Dems [7], en este trabajo se estudia la relación que existe entre las sucesiones $\mathcal{I}-$Cauchy y las sucesiones $\mathcal{I}-$convergentes, aun cuando podría pensarse que estas nociones podrían conducir a un $\mathcal{I}-$espacio de Banach, sorprende leer el resultado proporcionado por los autores en donde caracterizan los espacios de Banach en términos de sucesiones $\mathcal{I}-$Cauchy y las sucesiones $\mathcal{I}-$convergentes, lo cual proporciona una herramienta adicional para el estudio de este tipo de espacios. En el año 2010 Pelihvan, Şençimen y Yaman [15] trabajan las nociones de $\mathcal{I}-$convergencia débil e $\mathcal{I}-$débil* establecen propiedades de éstas similares a las que satisfacen las sucesiones débilmente convergente y las sucesiones de operadores débilmente* convergentes y en el 2012, Bhardwaj [3] estudia estas nociones en el contexto de espacios ℓ_p.

En este trabajo, se realiza un estudio de nociones de convergencia similar al realizado en los trabajos [12] [7] [15], pero esta vez desde el punto de vista de filtros, lo cual representa un aporte modesto a la literatura ya que hasta la fecha no se han encontrado referencias que evidencien la existencia de estas.

Como una aplicación, se estudian algunas notaciones asintóticas en términos de filtros, [6] [14]. La notación asintótica es comprendida como una herramienta fundamental para estimar la complejidad computacional de los algoritmos, es decir, estudiar su tasa de crecimiento. Teniendo en cuenta la naturaleza de las notaciones asintóticas, es posible interpretarlas en términos de sucesiones y, por tanto, generalizarlas usando filtros. De manera que, en este trabajo, se introduce una generalización de las notaciones asintóticas: $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ y $o_{\mathcal{F}}$, se establecen relaciones entre estas dos notaciones, las propiedades que satisfacen, así como también se relacionan con las nociones previamente definidas y estudiadas.

En el primer capítulo de este trabajo, se presentan varios resultados que serán utilizados a lo largo de cada capítulo, estos resultados son conocidos de forma general y su presentación no irán más allá de su remembranza. Forman parte de conceptos y teoremas clásicos de la teoría de conjuntos, topología y espacios normados que son útiles para el desarrollo del trabajo.

En el segundo capítulo se realiza un estudio de los filtros, se dan ejemplos, se enuncian y se demuestran sus principales propiedades, se hace uso del Lema de Zorn para garantizar la existencia, bajo ciertas condiciones, de los ultrafiltros (también conocidos como filtros maximales), se dota a la colección de todos los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ de una topología y el espacio topológico obtenido resulta siendo la compactificación de Stone-Čech de los números naturales. [11]

En el tercer capítulo se introduce la noción de sucesión convergentes vía filtros. Dado un filtro $\mathcal{F}$, se estudia la noción de sucesión $\mathcal{F}-$convergente sobre un espacio topológico, se desglosa una parte del artículo de Ferreira [8], en el cual se trabaja el concepto de convergencia de sucesiones usando filtros libres sobre los números naturales. Además, se caracterizan nociones comunes de la topología como: punto de adherencia o acumulación y el comportamiento de sucesiones $\mathcal{F}-$convergentes bajo funciones continuas.

Posteriormente se realiza un estudio similar pero ahora considerando espacios topológicos muy particulares: espacios normados, en estos se profundiza un poco más la convergencia vía filtros, añadiendo el estudio de diversos tipos de convergencias como son la convergencia débil y la convergencia débil*.

En el último capítulo, luego de estudiar diversos tipos de convergencias vía filtros en diferentes contextos, se presenta una aplicación de la convergencia vía filtro al considerar la notación asintótica, usada para determinar el tiempo de ejecución de un algoritmo, como clases muy especiales de sucesiones. De manera que se introduce una generalización de las notaciones $\mathcal{O}$ grande y o pequeña vía filtros, asimismo, se establecen algunas propiedades y se estudia la relación existente entre estos nuevos conceptos y los estudiados en capítulos anteriores.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este primer capítulo es presentar varios resultados de carácter general que se emplearán a la largo de este trabajo. Algunos de ellos forman parte de la teoría básica de espacios topológicos y de espacios normados, por lo que en la mayoría de los casos se proporcionan referencias bibliográficas de los mismos.

1.1. Algunas nociones topológicas y de orden

Sea X un conjunto, una sucesión en X es una función f definida sobre el conjunto de los números naturales y tiene como rango un subconjunto de X, esto es $f : \mathbb{N} \to X$. Usualmente se utiliza la expresión x_n para expresar la imagen de n bajo la función f, y en vez de usar la notación funcional se emplea la notación (x_n) para indicar el conjunto de elementos que pertenecen al rango de la sucesión, dichos elementos son los *términos* o *elementos* de la sucesión.

Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$, se denota por $\mathcal{N}(x)$ el conjunto $\{U \in \tau : x \in U\}$.

Definición 1.1. *Sean X un espacio topológico, (x_n) una sucesión en X se denomina convergente a $x \in X$, lo cual se denota por $x_n \to x$, si para todo abierto $U \in \mathcal{N}(x)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in U$.*

En un espacio topológico puede ocurrir que una sucesión converja a más de un punto, la unicidad del límite se obtiene si se le exige al espacio topológico la condición de ser T_2 o Hausdorff.

Las sucesiones en espacios topológicos, entre otras cosas, permiten caracterizar funciones continuas y compacidad en espacios metrizables, es decir espacios topológicos que provienen de una métrica.

Teorema 1.1. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si existe una sucesión (x_n) tal que $x_n \to x$, entonces $x \in \bar{A}$.*

El anterior teorema se conoce como el Lema de la Sucesión, el recíproco de este resultado es cierto si X es metrizable, este teorema genera una caracterización para los puntos de la clausura en términos de sucesiones.

Teorema 1.2. *Sea X un espacio metrizable. X es metrizable, X es compacto si y sólo si toca sucesión de X tiene una subsucesión convergente.*

Esta caracterización corresponde a la noción de secuencialmente compacto, es decir, un espacio X es secuencialmente compacto si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente. A continuación se enuncian y demuestran algunas propiedades relacionadas con familias que satisfacen la propiedad de intersección finita y que serán usadas en capítulos posteriores.

Definición 1.2. *Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjunto de X*

1. *Se dice que $\mathcal{A}$ posee la propiedad de intersección finita si la intersección entre los elementos de cualquier subfamilia finita es no vacía.*

2. *Se dice que $\mathcal{A}$ posee la propiedad de intersección infinita si la intersección entre los elementos de cualquier subfamilia finita es infinita.*

Dada una una familia $\mathcal{A}$ no vacía de subconjuntos de X se tiene que si posee la propiedad de intersección infinita, entonces también posee la propiedad de intersección finita, lo anterior debido a que como la segunda propiedad garantiza una intersección infinita, implica directamente que es no vacía.

Lema 1.1. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ un punto en la clausura del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. La familia $\{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\}$ posee la propiedad de intersección finita.*

Demostración. Si la familia $\{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\}$ no tiene la propiedad de intersección finita quiere decir que existe una subfamilia finita $\{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_i\} : V_i \in \mathcal{N}(x)\}_{i=1}^{k}$ tal que la intersección de sus elementos es vacía, es decir:

$$\bigcap_{i=1}^{k}\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_i\} = \emptyset$$

de tal manera que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i\} = \emptyset$, de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ sucede que $x_n \notin \bigcap_{i=1}^{k} V_i$. Ahora note que $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \in \mathcal{N}(x)$, por tanto, como x es punto de acumulación, ocurre que $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$, o sea, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i$, lo cual es una contradicción. En consecuencia la familia $\{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\}$ posee la propiedad de intersección finita. $\square$

A continuación se introducen algunas nociones relacionadas con un orden para enunciar el Lema de Zorn.

Definición 1.3. *Sean A un conjunto no vacío y $\leq$ una relación sobre A. Si $\leq$ cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva se dice $\leq$ es una relación de orden parcial sobre A.*

Definición 1.4. *Sean A un conjunto no vacío y $\leq$ una relación de orden parcial sobre A. Dado $m \in A$, se dice que m es elemento maximal si no existe $a \in A$ tal que $m \leq a$.*

Definición 1.5. *Sean A un conjunto no vacío y $\leq$ una relación de orden parcial sobre A. Se dice que un subconjunto B de A es una cadena si para todo par de elementos $a, a' \in B$ se tiene que $a \leq a'$ o $a' \leq a$, es decir, para todo par de elementos $a, a' \in B$, a y a' son comparables.*

Lema 1.2. (Lema de Zorn) *Sean A un conjunto no vacío y $\leq$ una relación de orden parcial sobre A. Si toda cadena de A tiene cota superior en A, entonces A tiene un elemento maximal.*

1.2. Espacios normados y espacios de Banach

Se considerarán espacios vectoriales X definidos sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$. Una norma sobre X es una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\|x\| \geq 0$,

2. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (Desigualdad triangular).

Al par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X y una norma $\|\cdot\|$ sobre X se denomina espacio normado.

Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio topológico. La topología sobre X inducida por la norma $\|\cdot\|$ tiene por base la colección formada por las bolas abiertas $B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$ donde $x \in X$ y $r > 0$.

El ejemplo clásico de espacio normado es el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ junto con la norma euclídea $\|x\| = \left\{\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2\right\}^{1/2}$.

Una sucesión (x_n) en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se denomina convergente a un punto $x \in X$, lo cual se denota por $x_n \to x$, si dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Observe que el concepto de sucesión convergente en un espacio normado coincide con la noción de sucesión convergente en un espacio topológico al considerar la topología inducida por la norma.

Una sucesión (x_n) en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se denomina de Cauchy, si dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$. Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy, sin embargo existen sucesiones de Cauchy que no son convergentes. Por ejemplo, si considera $X = (0, 1)$ como subespacio vectorial de $\mathbb{R}$ con la norma inducida por el valor absoluto, entonces la sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ es de Cauchy pero no converge en X.

Los espacios normados en los cuales toda sucesión de Cauchy es convergente, se denominan espacios de Banach.

Para un estudio detallado de los espacios de Banach puede consultar [1]. A continuación, se proporcionan algunas definiciones y propiedades asociadas a espacios de Banach que serán usadas en algunas secciones de este trabajo, se omiten las demostraciones de las propiedades, las cuales pueden ser encontradas en [1] o [2].

Sean X y Y espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ se denomina acotado, si existe $c > 0$ tal que $\|Tx\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in X$. Se denota por $\mathcal{L}(X, Y)$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales y acotados de X en Y. La aplicación

$$\| \cdot \| : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathbb{R}^+, \text{ definida por } \|T\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

es una norma sobre $\mathcal{L}(X, Y)$. Si Y es un espacio de Banach entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio de Banach. Si $X = Y$ entonces el espacio de todos los operadores lineales y acotados de X en X se denota por $\mathcal{L}(X)$ en vez de $\mathcal{L}(X, X)$.

Un caso muy especial ocurre cuando se consideran operadores lineales y acotados de un espacio normado X en $\mathbb{R}$, es decir cuando se considera $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Operadores de esta forma se denominan funcionales, y dado que $\mathbb{R}$ con la norma euclídea es Banach entonces $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ también es Banach. Usualmente se denota por X^* el espacio $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ y se denomina espacio dual de X.

Uno de los teoremas más importante dentro del análisis funcional es el Teorema de Hahn-Banach, el cual es un teorema de extensión de funcionales lineales y proporciona condiciones para la existencia de funcionales lineales que preserven ciertas propiedades.

Teorema 1.3. (Hahn-Banach en espacios normados) *Sean X un espacio normado, M un subespacio de X y $f : M \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y acotado, entonces existe un funcional lineal y acotado $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in M$ y $\|F\| = \|f\|$.*

Son varios los corolarios que se obtienen como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, a continuación se enuncian solo un par de ellos.

Corolario 1.1. *Sean X un espacio normado y $x_0 \in X$ tal que $x_0 \neq 0$, entonces existe un funcional lineal y acotado $F \in X^*$ tal que $\|F\| = 1$ y $F(x_0) = \|x_0\|$.*

Corolario 1.2. *Sea X un espacio normado si $x_0 \in X$ es tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$ entonces $x_0 = 0$.*

Observe que dado un espacio normado X, a cada $x \in X$ le corresponde un único funcional $g_x : X^* \to \mathbb{R}$ definido por $g_x(f) = f(x)$. g_x se denomina funcional evaluación y como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach se demuestra que satisface las siguientes propiedades:

1. g_x es lineal,

2. $|g_x(f)| \leq \|x\| \cdot \|f\|$ para todo $f \in X^*$, es decir g_x, es acotado

3. $g_x \in X^{**}$,

4. $\|g_x\| = \|x\|$.

Otro resultado muy importante en el análisis funcional es el Teorema de Acotación Uniforme, el cual proporciona un criterio para determinar cuándo una familia de operadores lineales y acotados está acotada uniformemente.

Teorema 1.4. (Principio de Acotación Uniforme) *Sea $(T_\alpha)_{\alpha \in J}$ una familia de elementos de $\mathcal{L}(X, Y)$, donde X es Banach. Si $(\|T_\alpha x\|)_{\alpha \in J}$ está acotada para todo $x \in X$, esto es si para todo $x \in X$ existe $c_x > 0$ tal que $\|T_\alpha x\| \leq c_x$ entonces existe $c > 0$ tal que $\|T_\alpha\| \leq c$.*

Además de la convergencia usual en espacios normados es posible estudiar otros tipos de convergencias, que inducen topologías diferentes a la topología inducida por la norma.

Definición 1.6. *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado* X*,* (x_n) *una sucesión en* X*,*$x \in X$*. Se dice que* (x_n) *converge débilmente a* x*, lo cual se denota por* $x_n \xrightarrow{d} x$*, si para todo* $f \in X^*$ *se cumple que* $f(x_n) \to f(x)$*.*

Si $x_n \xrightarrow{d} x$ se dice que x es límite débil de la sucesión (x_n), a continuación se presentan algunas propiedades de la convergencia débil.

Teorema 1.5. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* (x_n) *una sucesión en* X *tal que* $x_n \xrightarrow{d} x \in X$*, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *El límite débil de la sucesión* (x_n) *es único,*
2. *Toda subsucesión de* (x_n) *converge débilmente a* x*,*
3. *La sucesión en norma* $(\|x_n\|)$ *es acotada.*

Teorema 1.6. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* (x_n) *una sucesión en* X*. Si* $x_n \to x$*, entonces* $x_n \xrightarrow{d} x$*.*

El anterior teorema establece que la convergencia usual (también llamada fuerte) implica la convergencia débil con el mismo límite, el recíproco generalmente no es cierto, de hecho, una condición para que se satisfaga el recíproco es que la dimensión del espacio X sea finita. A continuación se presenta una caracterización para la convergencia débil.

Teorema 1.7. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* (x_n) *una sucesión en* X*. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $x_n \xrightarrow{d} x$*.*
2. *La sucesión en norma* $(\|x_n\|)$ *es acotada.*
3. *Si para todo* $f \in M \subseteq X'$*,* M *un conjunto total, se cumple que* $f(x_n) \to x$*.*

A continuación, se presenta un tipo de convergencia para funcionales lineales: la convergencia débil*.

Definición 1.7. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado,* (f_n) *una sucesión en* X^**, se dice que* (f_n) *converge débilmente* a* $f \in X^*$*, lo cual se denota por* $f_n \xrightarrow{d^*} f$*, si para todo* $x \in X$ *se cumple que* $f_n(x) \to f(x)$*.*

La convergencia débil y la convergencia débil* son, como puede que sea intuitivo, conceptos muy cercanos. El siguiente teorema ilustra que la convergencia débil implica la convergencia débil* sin ningún otro tipo de condición.

Teorema 1.8. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* (f_n) *una sucesión en* X^**. Si* $(f_n) \xrightarrow{d^*} f \in X^*$*, entonces* $(f_n) \xrightarrow{d} f$

A continuación se enuncian un par de definiciones y una propiedad relativas a espacios normados que serán de utilidad en capítulos posteriores.

Definición 1.8. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $A \subseteq X$ *no vacío y acotado, se define el diámetro de A, lo cual se denota por diam(A), como*

$$diam(A) = sup\{\|x - y\| : x, y \in A\}$$

Definición 1.9. *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* (F_n) *una sucesión de subconjuntos de* X*, se dice que la sucesión* (F_n) *es una sucesión encajada de Cantor si para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. F_n *es cerrado.*
2. *La sucesión es decreciente, es decir:* $F_{n+1} \subseteq F_n$*.*
3. $diam(F_n) \to 0$*.*

Teorema 1.9. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado completo, si* (F_n) *es un encaje de Cantor, entonces existe* $x \in$ *tal que:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}.$$

Demostración. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado completo, (F_n) una sucesión de subconjuntos de X que es un encaje de Cantor y (x_n) una sucesión sobre X tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $x_k \in F_k$, se mostrará que (x_n) es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, note que como la sucesión (F_n) es un encaje de Cantor, pasa que $diam(F_n) \to 0$, de esta manera, para ε, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_\varepsilon$, entonces $\|diam(F_n) - 0\| = \|diam(F_n)\| < \varepsilon$, luego, tome $n, m \geq N_\varepsilon$, sin pérdida de generalidad $m \geq n$ y como (F_n) es decreciente, sucede que $x_n, x_m \in F_n$, por ende

$$\|x_n - x_m\| \leq diam(F_n) < \varepsilon,$$

y así $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, por tanto la sucesión (x_n) es de Cauchy.

Seguido a lo anterior, como el espacio es completo, es posible afirmar que (x_n) es convergente, suponga que converge a un punto $x \in X$, se mostrará que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Para ello asuma que no es así, es decir que $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, de esta manera existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin C_k$, por tanto $\|x - C_k\| = r > 0$, por lo que la bola $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ no comparte ningún elemento con F_k, además, note que si se toma $n > k$ pasa que $x_n \notin B\left(x, \frac{r}{2}\right)$, de tal forma que para el abierto $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ no existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in B\left(x, \frac{r}{2}\right)$, por tanto se produce una contradicción ya que $x_n \to x$.

Ya se tiene que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, no hace falta más que demostrar que es el único elemento en dicha intersección, suponga que existe $y \in X$ tal que $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, de modo que para $n \in \mathbb{N}$

$$\|x - y\| \leq diam(F_n),$$

como $diam(F_n) = 0$, pasa que $\|x - y\| \leq 0$, ergo $x = y$. De esta manera se demuestra que la intersección de los subconjuntos de la sucesión en consideración se compone de un único elemento. $\square$

Capítulo 2

Filtros

Los filtros topológicos son una estructura que permiten, de una forma natural, describir y extender la noción de convergencia en topología general. Los filtros fueron introducidos en 1937 por Henri Cartan [5]. En 1940, Nicolas Bourbaki [4] hace uso de la noción de filtro para demostrar muchos resultados de la topología general, como por ejemplo, el famoso Teorema de Tychonoff para el producto arbitrario de espacios compactos. En este capítulo se introduce la noción de filtro, se presentan ejemplos, se establece la existencia de los ultrafiltros y se proporciona una topología sobre el conjunto de los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$.

A continuación se presenta la definición de filtro, el cual es una familia no vacía de subconjuntos que cumplen tres características.

Definición 2.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es un filtro si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. *Si* $A, B \in \mathcal{F}$, *entonces* $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. *Si* $A \in \mathcal{F}$ *y* $A \subseteq B$, *entonces* $B \in \mathcal{F}$.

Estudiando las consecuencias más simples de esta definición, es fácil darse cuenta que, utilizando un argumento inductivo y a partir de la segunda propiedad, los filtros son cerrados bajo intersecciones finitas. Por otro lado, únicamente por la primera propiedad, el conjunto potencia o partes de X, $\wp(X)$, no es un filtro, sin embargo, el conjunto $\wp(X) - \{\emptyset\}$ sí lo es, este último es conocido como filtro impropio. La tercera propiedad implica que los filtros son familias de subconjuntos monótonas bajo la contenencia, de acá es fácil darse cuenta que para un conjunto no vacío X, X está en todo filtro. A continuación se presentan los ejemplos más clásicos e importantes de esta estructura matemática.

Ejemplo 2.1. *Dado un conjunto infinito X, se denomina filtro trivial a la colección definida como $\{X\}$, es sencillo darse cuenta que esta colección cumple las propiedades de filtro.*

Ejemplo 2.2. *Dado un conjunto infinito X, el filtro de Fréchet se define como $\mathcal{F}_r = \{F \in \wp(X) : X - F \text{ es finito}\}$. Se demostrará que la colección $\mathcal{F}_r$ es en efecto un filtro:*

1. *Note que $\emptyset \notin \mathcal{F}_r$ debido a que, de lo contrario, $X - \emptyset = X$ sería finito. Por hipótesis no lo es.*

2. *Tome $A, B \in \mathcal{F}_r$, se mostrará que $A \cap B \in \mathcal{F}_r$. De la hipótesis de tiene que $X - A$ y $X - B$ son finitos, de modo que $(X - A) \cup (X - B)$ es finito, de esta manera $(X - A) \cup (X - B) = X - (A \cap B)$ es finito, de tal manera que $A \cap B \in \mathcal{F}_r$.*

3. *Sea $A \in \mathcal{F}_r$, y considere B tal que $A \subseteq B$, luego $X - B \subseteq X - A$, de tal manera que como $A \in \mathcal{F}_r$ se cumple que $X - A$ es finito, así, por ser estar contenido en un subconjunto finito, se obtiene que $X - B$ es finito y por tanto $B \in \mathcal{F}_r$.*

Por tanto la colección $\mathcal{F}_r$ es un filtro.

El filtro de Fréchet estará constantemente presente al momento de encontrar ejemplos más adelantes, además, juega un papel muy importante en las caracterizaciones, por medio de la convergencia vía filtros, de nociones que se tienen en la convergencia usual. Los elementos del filtro de Fréchet suelen llamarse cofinitos, debido a que el complemento de todos estos es finito por definición. A continuación se presenta otro ejemplo relevante de filtro: *filtros principales*.

Ejemplo 2.3. *Dado un conjunto infinito X, el filtro principal de un subconjunto no vacío A de X se define como $\mathcal{F}_A = \{F \in \wp(X) : A \subseteq F\}$, este subconjunto A puede reconocerse como el subconjunto principal del filtro $\mathcal{F}_A$. Cuando A se compone de un solo elemento x, el filtro principal se identifica como $\mathcal{F}_x$. Se demostrará que la colección $\mathcal{F}_A$ es en efecto un filtro sobre X:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}_A$ *ya que* $\emptyset$ *no contiene a ningún conjunto a parte de él mismo.*

2. *Sean* $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_A$, *entonces* $A \subseteq A_1$ *y* $A \subseteq A_2$, *así* $A \subseteq A_1 \cap A_2$, *por lo que* $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_A$.

3. *Sea* $A_1 \in \mathcal{F}_A$, *y considere* $A_2 \in \wp(X)$ *tal que* $A_1 \subseteq A_2$. *Se tiene entonces que que* $A \subseteq A_1 \subseteq A_2$ *y por tanto* $A_2 \in \mathcal{F}_A$.

Por tanto la colección $\mathcal{F}_A$ *es, efectivamente, un filtro sobre* X.

Ejemplo 2.4. *Dado un subconjunto* A *de* $\mathbb{N}$, *la densidad de* A, *denotada por* $d(A)$, *se define como:*

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{Card\,(A \cap \{1, 2, ..., n\})}{n}$$

Algunas propiedades de la densidad de A *son las siguientes:*

1. $d(A) \in [0, 1]$.

2. *Si* A *es finito entonces* $d(A) = 0$.

3. $d(\mathbb{N} - A) = 1 - d(A)$.

4. *Si* $A \subseteq B$ *entonces* $d(A) \leq d(B)$.

5. $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$.

La colección $\mathcal{F}_d = \{A \subseteq \mathbb{N} : d(A) = 1\}$ *es un filtro sobre* $\mathbb{N}$. *En efecto:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}_d$ *ya que* $d\,(\emptyset) = 0$.

2. *Sean* $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_d$, *entonces*

$$d\,(\mathbb{N} - (A_1 \cap A_2)) \leq d\,(\mathbb{N} - A_1) \cup d\,(\mathbb{N} - A_1) = 0$$

   por lo que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_2$.

3. *Sea* $A_1 \in \mathcal{F}_d$, *y considere* A_2 *tal que* $A_1 \subseteq A_2$. *Se tiene entonces que que* $d(A_1) \leq d(A_2)$ *y por tanto* $d(A_2) = 1$, *de aquí que* $A_2 \in \mathcal{F}_d$.

Por tanto la colección $\mathcal{F}_d$ es, efectivamente, un filtro sobre X.

En algunos casos, es posible comparar filtros en términos de la contención, esto es, dados $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ filtros sobre sobre un conjunto X , si $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, entonces se dice que el filtro $\mathcal{F}_2$ es *más fino* que el filtro $\mathcal{F}_1$, esto también es posible interpretarlo como que la colección $\mathcal{F}_2$ contiene más subconjuntos de X. El siguiente ejemplo muestra que el filtro de Fréchet satisface la propiedad de intersección infinita, por ende, la propiedad de intersección finita.

Ejemplo 2.5. *Sea X un conjunto infinito y considere el filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ sobre X. Tome una familia finita de subconjuntos del filtro de Fréchet $\{F_i\}_{i=1}^n$, por tanto, cada uno de los elementos de este subconjunto es el complemento de un subconjunto finito de X, es decir $F_i = X - A_i$ en donde A_i es un subconjunto finito de X para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de modo que al realizar la intersección de los elementos de este subconjunto se obtiene:*

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X - A_i) = X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

como $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es finito, por ser unión finita de conjuntos finitos, y dado que X es infinito, entonces $X - \bigcup_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$. Por tanto, la colección $\mathcal{F}_r$ posee la propiedad de intersección infinita y en consecuencia la propiedad de intersección finita.

A continuación se presenta la definición de filtro fijo y filtro libre, los cuales son caracterizados por el filtro de Fréchet y por los filtros principales respectivamente.

Definición 2.2. *Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Se dice que $\mathcal{F}$ es fijo si:*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$$

Si el filtro no es fijo se dice que es libre.

El filtro de Fréchet es el ejemplo clásico de filtro libre mientras que un filtro principal es un ejemplo clásico de filtro fijo, tal y como se exhibe en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6. *Si X es un conjunto infinito, entonces:*

1. *El filtro principal de un subconjunto no vacío A de X es fijo ya que $A \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, así $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.*

2. *El filtro de Fréchet es un filtro libre. Para mostrar esto suponga que no es así, es decir $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_r} F \neq \emptyset$, luego existe $x \in X$ tal que $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}_r} F$, por tanto $x \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}_r$. Observe que $X - \{x\} \in \mathcal{F}_r$ debido a que $X - (X - \{x\}) = \{x\}$ es finito, pero $x \notin X - \{x\}$, lo cual contradice el hecho de que x está en todo elemento de $\mathcal{F}_r$. De esta manera $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_r} F = \emptyset$ y así $\mathcal{F}_r$ es libre.*

A continuación se presenta una caracterización de estos dos tipos de filtros, filtros libres y filtros fijos, la cual se obtiene al considerar el filtro de Fréchet 2.2 y los filtros principales de un subconjunto 2.3. Este teorema será de gran utilidad para demostrar varios resultados que se presentarán posteriormente.

Teorema 2.1. *Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, entonces:*

1. *$\mathcal{F}$ es fijo, si y sólo si existe un subconjunto A no vacío de X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$.*

2. *$\mathcal{F}$ es libre, si y sólo si $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$.*

Demostración. Para mostrar que la primera proposición es cierta asuma que $\mathcal{F}$ es fijo, de esta manera

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset,$$

es decir que existe un subconjunto no vacío A de X tal que $A \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, por tanto, para todo $F \in \mathcal{F}$ se cumple que $A \subseteq F$, de tal manera que $F \in \mathcal{F}_A$ para cualquier $F \in \mathcal{F}$, por ende $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$. Para completar la prueba de la primer afirmación, suponga ahora que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$ para algún conjunto no vacío $A \subseteq X$, de esta manera todo elemento de $\mathcal{F}$ contiene a A, de modo que $\emptyset \neq A \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, por tanto $\mathcal{F}$ es fijo.

Para demostrar la segunda proposición, suponga que $\mathcal{F}$ es libre, primero se mostrará que si $x \in X$ entonces $X - \{x\} \in \mathcal{F}$, en efecto, dado que $\mathcal{F}$ es libre entonces $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$, por lo que existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin F'$, esto significa que $F' \subseteq X - \{x\}$ y por tanto $X - \{x\} \in \mathcal{F}$.

Ahora bien, sea $F \in \mathcal{F}_r$, entonces $F = X - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, con $x_i \in X$, de modo que :

$$F = X - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = \bigcap_{i=1}^{k} X - \{x_i\},$$

como $X - \{x_i\} \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{1, .., k\}$, y dado que los filtros son cerrados para intersecciones arbitrarias se obtiene que $F \in \mathcal{F}$.

Recíprocamente, suponga que $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$ entonces

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}_r} F,$$

dado que el filtro de Fréchet es libre, se obtiene que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}_r} F = \emptyset,$$

luego $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ y así $\mathcal{F}$ es libre. $\square$

Note que, en términos de contenencia, los filtros principales de un único elementos son los más grandes, o mejor dicho, son más finos que los demás filtros principales, de hecho, cuan pequeño es el subconjunto principal, más fino es el filtro.

A continuación, usando el Teorema 2.1 se presenta un ejemplo de filtro libre.

Ejemplo 2.7. *Considere el filtro definido en el Ejemplo 2.4. Se mostrará que $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}_d$ con lu cual $\mathcal{F}_d$ es un filtro libre. En efecto, se $A \in \mathcal{F}_r$, entonces $\mathbb{N} - A$ es finito y por tanto $d(\mathbb{N} - A) = 0$. De aquí que $d(A) = 1$ y por tanto $A \in \mathcal{F}_d$*

El filtro generado por una familia de subconjuntos es una noción que ayudará a demostrar más adelante la existencia de los ultrafiltros. Dado una familia de subconjuntos $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ es posible definir el filtro más pequeño que contenga a $\mathcal{A}$, este se llama el filtro generado por $\mathcal{A}$ y se denota como $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Definición 2.3. *Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$, se define el filtro generado por $\mathcal{A}$ como:*

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \bigcap \{\mathcal{F} \subseteq \wp(X) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}, \mathcal{F} \text{ filtro}\}$$

Evidentemente $\mathcal{A} \subseteq \langle \mathcal{A} \rangle$ y note que este último sí es un filtro ya que, $\emptyset \notin \langle \mathcal{A} \rangle$, porque $\emptyset$ no está en ningún filtro; si toma $F_1, F_2 \in \langle \mathcal{A} \rangle$, pasa que, por Definición 2.3, $F_1 \cap F_2$ está en todo filtro que contiene a $\mathcal{A}$, por tanto $F_1 \cap F_2 \in \langle \mathcal{A} \rangle$; por último, si toma $F_1 \in \langle A \rangle$ y $F_2 \subseteq X$ tal que $F_1 \subseteq F_2$, resulta que, nuevamente por Definición 2.3, F_2 pertenece a todos los filtros que contienen a $\mathcal{A}$ y así $F_2 \in \langle \mathcal{A} \rangle$. De esta manera se confirma que el filtro generado por una familia $\mathcal{A}$ es un filtro.

2.1. Ultrafiltros

A continuación, usando el Lema de Zorn 1.2, se exhibe la existencia de filtros maximales, los cuales se denominan ultrafiltros.

Definición 2.4. *Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, se dice que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si no está contenido propiamente en ningún otro filtro.*

La definición anterior básicamente significa que si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro y otro filtro $\mathcal{G}$ contiene a $\mathcal{F}$ entonces $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. También, el hecho de que para un filtro $\mathcal{F}$ exista un filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, implica que $\mathcal{F}$ no es un ultrafiltro. A continuación se presenta una caracterización para los ultrafiltros, la cual será útil en resultados posteriores.

Teorema 2.2. *Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, entonces $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, si y solo si, para todo $A \subseteq X$, se cumple que $A \in \mathcal{F}$ o $X - A \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, suponga que existe un subconjunto $A \subseteq X$ tal que $A \notin \mathcal{F}$ y $X - A \notin \mathcal{F}$. Considere la familia de subconjuntos de X definida como

$$\mathcal{G}(A) = \{G \subseteq X : \exists F \in \mathcal{F}, F \cap A \subseteq G\},$$

se va a mostrar que $\mathcal{G}(A)$ es filtroque contiene a $\mathcal{F}$. En efecto:

1. Suponga que $\emptyset \in \mathcal{G}(A)$, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \cap A = \emptyset$, esto implica que $F \subseteq X - A$, de modo que $X - A \in \mathcal{F}$ lo que contradice parte de la hipótesis. Por lo tanto $\emptyset \notin \mathcal{G}(A)$.

2. Sean $G_1, G_1 \in \mathcal{G}(A)$,entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $F_1 \cap A \subseteq G_1$ y $F_2 \cap A \subseteq G_2$, como $\mathcal{F}$ es filtro, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ y note que $F_1 \cap F_2 \cap A \subseteq G_1 \cap G_2$, de tal manera que $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}(A)$.

3. Sean $G_1 \in \mathcal{G}(A)$ y $G_2 \subseteq X$ tal que $G_1 \subseteq G_2$, luego existe $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $F_1 \cap A \subseteq G_1 \subseteq G_2$, lo que implica que $G_2 \in \mathcal{G}(A)$.

De los items 1, 2 y 3 se concluye que $\mathcal{G}$ es un filtro.

Ahora bien, tome $F \in \mathcal{F}$, note que $F \cap A \subseteq F$, por tanto $F \in \mathcal{G}$, de tal manera que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Esto último permite afirmar que $\mathcal{F}$ no es un ultrafiltro.

Recíprocamente, suponga que $\mathcal{F}$ no es un ultrafiltro, de modo que existe un filtro $\mathcal{G}$ que lo contiene, tome $A \in \mathcal{G} - \mathcal{F}$, entonces $X - A \notin \mathcal{F}$, porque de lo contrario $(X - A) \cap A = \emptyset \in \mathcal{G}$, por ende $X - A \notin \mathcal{F}$ y $A \notin \mathcal{F}$. □

Como fue mencionado al inicio de esta sección, el Lema de Zorn 1.2 servirá para demostrar que dado un filtro siempre es posible construir un ultrafiltro que lo contiene. Además, en el posterior resultado se usa también el Lema de Zorn 1.2 para demostrar que toda familia de subconjunto que posea la propiedad de intersección finita está contenida en un ultrafiltro.

Teorema 2.3. *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Demostración. Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, se va a demostrar que existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Considere el conjunto:

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ es un filtro y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$$

Defina una relación de orden parcial $\leq$ sobre $\mathcal{P}$ como se sigue: dados $\mathcal{G}, \mathcal{D} \in P$, se dice que $\mathcal{G} \leq \mathcal{D}$ si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$, note que esta relación cumple reflexividad, antisimetría y transitividad. Considere una cadena $\mathcal{C} \subseteq P$, se mostrará que $\bigcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{C}} \mathcal{H}$ es un filtro sobre X:

- $\emptyset \notin \bigcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{C}} \mathcal{H}$ ya que $\emptyset \notin \mathcal{H}$ para ningún $\mathcal{H} \in \mathcal{C}$.
- Sean $A, B \in \bigcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{C}} \mathcal{H}$, por tanto existen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{C}$ tales que $A \in \mathcal{H}_1$ y $B \in \mathcal{H}_2$. Note que como $\mathcal{C}$ es una cadena estos dos elementos están relacionados por medio de $\leq$, sin pérdida de generalidad asuma que $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$, por ende $A \in \mathcal{H}_2$, así, al ser $\mathcal{H}_2$ un filtro pasa que la intersección de cualesquiera dos elementos de $\mathcal{H}_2$ está en $\mathcal{H}_2$, particularmente sucede que $A \cap B \in \mathcal{H}_2$ y en consecuencia $A \cap B \in \bigcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{C}} \mathcal{H}$.
- Suponga que $A \in \bigcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{C}} \mathcal{H}$ y sea B tal que $A \subseteq B$. El hecho de que $A \in \bigcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{C}} \mathcal{H}$ implica que existe $\mathcal{H} \in \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{H}$ de tal manera que como $A \subseteq B$ pasa que $B \in \mathcal{H}$ y por tanto $B \in \bigcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{C}} \mathcal{H}$.

Por tanto $\bigcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{C}} \mathcal{H}$ es un filtro y note que está en $\mathcal{P}$ ya que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \bigcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{C}} \mathcal{H}$, además sucede que $\bigcup_{\mathcal{H}\in\mathcal{C}} \mathcal{H}$ es una cota superior de la cadena C, de tal manera que, por el Lema 1.2, el conjunto $\mathcal{P}$ tiene un elemento maximal $\mathcal{U}$, al ser $\mathcal{U}$ el elemento maximal de $\mathcal{P}$ (el conjunto de los filtros que contienen a $\mathcal{F}$) pasa que no está contenido propiamente en ningún otro filtro, por ende $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro deseado. $\square$

El Lema de Zorn 1.2, como se evidencia en el teorema anterior, garantiza la existencia de los ultrafiltros bajo cierta condiciones específicas, sin embargo, el siguiente resultado muestra que es posible flexibilizar el Teorema 2.3.

Teorema 2.4. *Sea X un conjunto no vacío, toda familia de subconjuntos de X con la propiedad de intersección finita está contenida en un ultrafiltro.*

Demostración. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ con la propiedad de intersección finita, considere $\mathcal{B}$ como el conjunto de todos los filtros que contienen a $\mathcal{A}$ dotado de la relación contenencia como orden parcial, note que $\mathcal{B}$ es no vacío ya que $\langle\mathcal{A}\rangle \in \mathcal{B}$. Tome $\mathcal{C}$ una cadena sobre $\mathcal{B}$, se demostrará que $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C \in \mathcal{B}$:

1. Note que $\emptyset \notin C$ para todo $C \in \mathcal{C}$, por tanto $\emptyset \notin \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.

2. Sean $A_1, A_2 \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, por tanto existe $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tal que $A_1 \in C_1$ y $A_2 \in C_2$, como $\mathcal{C}$ es una cadena, es posible asumir, sin pérdida de generalidad,que $C_1 \subseteq C_2$, de tal manera que $A_1 \cap A_1 \in C_2$ y como C_2 es un filtro sucede que $A_1 \cap A_2 \in C_2$, por tanto $A_1 \cap A_2 \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$.

3. Sea $A_1 \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, $A_2 \subseteq X$ tal que $A_1 \subseteq A_2$, por ende, para algún $C_1 \in \mathcal{C}$ se cumple que $A_1, A_2 \in C_1$, de esta manera $A_2 \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$,

de este modo se demuestra que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ es un filtro, luego $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{B}$, además, esta unión es una cota superior de $\mathcal{B}$, acudiendo al Lema de Zorn 1.2, es posible afirmar que $\mathcal{B}$ tiene un elemento maximal, sea este $\mathcal{U}$. Asuma que existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, de tal manera que, como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$, sucede $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, por ende $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$ y así $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ porque este último es elemento maximal, ergo $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Como el filtro $\mathcal{F}$ fue un filtro arbitrario y se mostró que es el mismo $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{A}$. $\square$

Gracias a los Teoremas 2.3 y 2.4 es posible garantizar la existencia de los ultrafiltros siempre y cuando se cuente con una familia con la propiedad de intersección finita o con un filtro. Como el Teorema 2.1 sobre ultrafiltros fijos denota una relación una relación de contenencia, es natural pensar en el siguiente teorema, el cual permite tener una idea clara acerca de los ultrafiltros fijos

Teorema 2.5. *Los únicos ultrafiltros fijos son los ultrafiltros principales de un único elemento.*

Demostración. Sea X un conjunto y $\mathcal{F}_A$ un ultrafiltro fijo sobre X, se demostrará que $A = \{x\}$ para algún $x \in X$. Como $\mathcal{F}_A$ es fijo pasa que

$$A = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{F} \neq \emptyset,$$

suponga que A se compone de más de un elemento y considere el filtro F_x donde $x \in A$, note que si $F \in \mathcal{F}_A$, entonces $A \subseteq F$ y como $x \in A$, sucede que $x \in \mathcal{F}$, por ende $F \in \mathcal{F}_x$, luego $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_x$ pero, no se tiene que $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}_A$, porque $\{x\} \in \mathcal{F}_x$ pero $\{x\} \notin \mathcal{F}_A$ y esto último solo se daría si $A = \{x\}$. Por tanto A no debe tener más que un elemento, así $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_x$ es ultrafiltro fijo de un solo elemento. $\square$

2.2. Topología sobre los Ultrafiltros

Ahora se considerará el caso muy especial de los ultrafiltros sobre el conjunto de los naturales, el conjunto de los ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ se denota como $\beta(\mathbb{N})$ y cada $m \in \mathbb{N}$ se identifica su ultrafiltro principal $\mathcal{F}_m$, es por eso que es posible crear una relación biunívoca entre $\mathbb{N}$ y los ultrafiltros de los unitarios sobre $\mathbb{N}$, de esta forma se considera a $\mathbb{N}$ como subconjunto propio de $\beta(\mathbb{N})$, se denota por $\mathbb{N}^* = \beta(\mathbb{N}) - \mathbb{N}$.

A partir del Teorema 2.5 se sabe que los únicos ultrafiltros fijos son los filtros principales de un unitario, luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ se puede considerar el ultrafiltro fijo $\mathcal{F}_n$, se denotará por $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ el conjunto de todos los ultrafiltros fijos de $\mathbb{N}$. De esta manera se obtiene una relación biunívoca entre $\mathbb{N}$ y $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, y ahora el conjunto de los ultrafiltros libres será denotado por $\mathbb{N}^* = \beta(\mathbb{N}) - \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$.

A continuación de dotará a $\beta(\mathbb{N})$ de una topología que lo convierte en Hausdorff y compacto, de la siguiente manera, para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ se define el siguiente subconjunto de $\beta(\mathbb{N})$ como $\widehat{A} = \{p \in \beta(\mathbb{N}) : A \in p\}$. Estos conjuntos cumplen propiedades muy útiles que se usarán en demostraciones posteriores, esta se pueden observar en la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Las siguientes propiedades se cumplen:*

1. *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$

2. $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \widehat{A \cap B}$

3. $\widehat{A} \cup \widehat{B} = \widehat{A \cup B}$

4. $\widehat{\mathbb{N} - A} = \beta(\mathbb{N}) - \widehat{A}$

Demostración. Se mostrarán las cuatro propiedades mencionadas en la proposición anterior.

1. Asuma que $A \subseteq B$, tome $p \in \widehat{A}$ por tanto $A \in p$ de tal manera que como p es filtro $B \in p$, así $p \in \widehat{B}$, Luego $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$.

2. Considere $p \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$, de modo que $A \in p$ y $B \in p$, por ende $A \cap B \in p$ y en consecuencia $p \in \widehat{A \cap B}$. Ahora, para mostrar la segunda contenencia, tome $p \in \widehat{A \cap B}$, luego $A \cap B \in p$, como p es filtro y $A \cap B$ está contenido en A y B, entonces $A, B \in p$, luego $p \in A$ y $p \in B$, de modo que $p \in \widehat{A}$ y $p \in \widehat{B}$ y así $p \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$.

3. Para mostrar la primer contenencia tome $p \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$, de este modo $p \in \widehat{A}$ o $p \in \widehat{B}$, sin pérdida de generalidad suponga que $p \in \widehat{A}$, de tal manera que $A \in p$, como p es filtro, $A \subseteq A \cup B \in p$ y entonces $p \in \widehat{A \cup B}$. Tome ahora $p \in \widehat{A \cup B}$, asuma que $p \notin \widehat{A}$ y $p \notin \widehat{B}$, por ende, por la segunda propiedad de este teorema, $p \notin \widehat{A \cap B}$, por la primera propiedad de este teorema sucede que $\widehat{A \cap B} \subseteq \widehat{A \cup B}$

4. Tome $p \in \widehat{\mathbb{N} - A}$, por tanto $\mathbb{N} - A \in p$, como p es ultrafiltro por el Teorema 0, pasa que $\mathbb{N} - (\mathbb{N} - A) = A \notin p$, por tanto $p \notin \widehat{A}$, así $p \in \beta(\mathbb{N}) - A$. Si $p \in \beta(\mathbb{N}) - \widehat{A}$ pasa que $p \notin \widehat{A}$, de tal manera que $A \notin p$, por tanto $\mathbb{N} - A \in p$ y así $p \in \widehat{\mathbb{N} - A}$.

□

Estas propiedades son de bastante importancia para próximos resultados, en especial para mostrar que el conjunto $\{\widehat{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$ es una base para una topología sobre $\beta(\mathbb{N})$ tal y como se muestra a continuación.

Proposición 2.2. *El conjunto $\mathcal{B} = \{\widehat{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$ es una base para una topología sobre $\beta(\mathbb{N})$.*

Demostración. Tome $p \in \beta(\mathbb{N})$, por definición, p es no vacío, por lo que es posible seleccionar $A \in p$ y así $p \in \widehat{A}$, en consecuencia para todo elemento en $\beta(\mathbb{N})$ existe $\widehat{A} \in \mathcal{B}$ que lo contiene. Ahora, suponga que existen $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2 \in \mathcal{B}$ tales que $p \in \widehat{A}_1 \cap \widehat{A}_2$, observe que $\widehat{A}_1 \cap \widehat{A}_2 \in \mathcal{B}$ ya que $\widehat{A}_1 \cap \widehat{A}_2 = \widehat{A_1 \cap A_2}$. Luego $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre $\beta(\mathbb{N})$. $\square$

Se denota por τ la topología sobre $\beta(\mathbb{N})$ generada por la base anteriormente definida. Note que gracias al item 4 del Teorema 2.1 se obtiene que los conjuntos $\widehat{A}$ son cerrados.

Teorema 2.6. *Para todo conjunto cerrado C en $\beta(\mathbb{N})$ existe $B \subseteq \mathbb{N}$ tal que $C \subseteq \widehat{B}$.*

Demostración. Por definición para todo cerrado C pasa que $\beta(\mathbb{N}) - C$ es abierto, de modo que es posible expresarlo como unión de básicos, así, por la Proposición 3.1, $\beta(\mathbb{N}) - C$ es de la forma $\widehat{A}$ para algún $A \subseteq \mathbb{N}$, y de nuevo haciendo uso de las propiedades mostradas en la Proposición 3.1 pasa que $\beta(\mathbb{N}) - \widehat{A} = \widehat{\mathbb{N} - A}$, por ende $\widehat{\mathbb{N} - A} = C$. $\square$

A continuación se mostrarán algunas propiedades topológicas que satisface el espacio $(\beta(\mathbb{N}), \tau)$.

Teorema 2.7. *Las siguientes propiedades se cumplen:*

1. *$(\beta(\mathbb{N}), \tau)$ es un espacio de Hausdorff.*
2. *$(\beta(\mathbb{N}), \tau)$ es un espacio compacto.*
3. *Los elementos de la base de τ son abiertos y cerrados.*
4. *Para cada $A \subset \mathbb{N}$ se tiene que $cl_{\beta(\mathbb{N})}\mathcal{F}_A = \widehat{A}$.*

Demostración.
1. Tome $p, q \in \beta(\mathbb{N})$, $p \neq q$, asuma que $A \in p - q$, de tal manera que como $A \notin q$, por el Teorema 2.2, $\mathbb{N} - A \in q$ y así $q \in \widehat{\mathbb{N} - A}$ y, además, $p \in \widehat{A}$, en consecuencia $\beta(\mathbb{N})$ es de Hausdorff.

2. Es suficiente tomar una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos cerrados de la forma $\widehat{A}$ tal que $\mathcal{A}$ posea la propiedad de intersección finita. Considere $\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \widehat{A} \in \mathcal{A}\}$, sea $\mathcal{F}$ un subconjunto finito de $\mathcal{B}$, entonces existe algún filtro p tal que:

$$p \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \widehat{A},$$

por tanto, $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \in p$, de tal manera que $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$, así, como $\mathcal{F}$ es un subconjunto finito arbitrario, se concluye que $\mathcal{B}$ posee la propiedad de intersección finita, por tanto, por el Teorema 2.4, es posible tomar un ultrafiltro q que cumpla $\mathcal{B} \subseteq q$, finalmente $q \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$.

3. Consideremos un subconjunto C abierto y cerrado de $\beta(\mathbb{N})$ y sea $\mathcal{A} = \{\widehat{A} : A \subseteq D \text{ y } \widehat{A} \subseteq C\}$, como C es abierto sucede que $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de C. Por otro lado, como C es cerrado, es compacto por lo demostrado inmediatamente antes, así es posible tomar una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tal que $C = \bigcup_{A \in \mathbb{F}} \widehat{A}$, es decir que $C = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.

4. Considere $n \in A \subseteq \mathbb{N}$, de este modo $\mathcal{F}_n \in \widehat{A}$ y así, aprovechándose de la Proposición 2.1, $cl_{\beta(\mathbb{N})}\mathcal{F}_A \subseteq \widehat{A}$. Para demostrar la segunda contenencia, tomando un $p \in \widehat{A}$, considere $\widehat{B}$ un abierto que contiene a p, de esta manera pasa que $A \in p$ y $B \in p$, por tanto $A \cap B \neq \emptyset$, así que es posible considerar $n \in A \cap B$, luego $F_a \in \mathcal{F}_A \cap \widehat{B}$, por tanto las intersección entre $\mathcal{F}_A$ y $\widehat{B}$ es no vacía, por ende $p \in cl_{\beta(\mathbb{N})}\mathcal{F}_A$.

□

Capítulo 3

Convergencia de sucesiones vía Filtros

En la primer sección de este capítulo se presentará la noción de convergencia usando filtros, dado un filtro $\mathcal{F}$ se presenta la definición de sucesiones $\mathcal{F}$- convergentes en un espacio topológico. No se sabe a a ciencia cierta quién inició el estudio de convergencia usando filtros, hoy día forma parte del folklore matemático. Sin embargo, si se conocen algunas referencias que usaron esta noción en diversos contextos de las matemáticas. Solo por dar algunos ejemplos, en el año 1967, Florík [9] utilizó los puntos p- límites para generar ultrafiltros sobre la topología ya antes descrita sobre $\beta(\mathbb{N})$, años después, en 1970, Bernstein [2] utilizó este concepto únicamente considerando los ultrafiltros para algunas aplicaciones en el contexto de análisis no estándar, en 1981, Furstenberg [10] utilizó esta noción para algunas aplicaciones en sistemas dinámicos, cuestión que siguió en desarrollo con el trabajo de Akin [1].

Se presentarán varios resultados resultados que se obtienen por medio de la convergencia de sucesiones vía filtros cuyas interpretaciones pueden verse relacionadas con algunas propiedades que se tienen en topología, algo similar que se hace en la segunda sección, la cual trata únicamente sobre espacios normados, junto con sus propiedades, resultados y relación entre conceptos conocidos de antes y también enunciados dentro de la misma sección. Posteriormente, en la tercera sección, se empieza a estudiar diversos tipos de convergencia como los son la convergencia débil y la convergencia débil*, esto, nuevamente, por medio de los filtros y sobre espacios normados.

3.1. Convergencia en espacios topológicos vía filtros

Los resultados aquí presentados se obtuvieron del desarrollo del trabajo de Ferreira [8]. Recuerde que una sucesión (x_n) sobre un espacio topológico X converge a un punto $x \in X$, lo cual se denota por $x_n \to x$, si para todo abierto $U \in \mathcal{N}(x)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in U$. Esta definición establece, entre otras cosas, que la cantidad de enteros para los cuales los términos de la sucesión no pertenecen al abierto U es finita, ver la noción de convergencia de esta manera permite establecer una generalización de esta definición al considerar propiedades que pueden ser descritas sobre subconjuntos de $\mathbb{N}$, tal y como se exhibe en la siguiente definición.

Definición 3.1. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$. Se dice que $x \in X$ es un punto $\mathcal{F}-$límite de una sucesión $(x_n) \subset X$, lo cual se denota $x = \mathcal{F}-lim$ x_n o $x_n \xrightarrow[\mathcal{F}]{} x$, si para todo $V \in \mathcal{N}(x)$ se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathcal{F}$.*

El filtro de Fréchet permite caracterizar la convergencia usual de sucesiones, lo cual expresa que la convergencia usual puede verse como una convergencia en filtro para un filtro adecuado, esto se exhibe en el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Sean X un espacio topológico y (x_n) una sucesión en X, entonces $x_n \to x$, si y sólo si $x = \mathcal{F}_r-lim\ x_n$.*

Demostración. Suponga que $x_n \to x$, se mostrará que $x = \mathcal{F}_r-\lim\ x_n$, para esto tome una abierto $U \in \mathcal{N}(x)$, luego, por hipótesis, existe un entero positivo N_U tal que si $n \geq N_U$ se cumple que $x_n \in U$. Considere el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} = \{n\}_{n=N_U}^{\infty},$$

observe que $\mathbb{N} - A = \{n\}_{n=1}^{N_U-1}$, el cual es finito. Por tanto el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \in \mathcal{F}_r$, y por tanto $x = \mathcal{F}_r-\lim\ x_n$.

Ahora suponga que $x = \mathcal{F}_r-\lim\ x_n$, se demostrará que $x_n \to x$, para esto considere un abierto $U \in \mathcal{N}(x)$, por hipótesis se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \in \mathcal{F}_r$, note que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} = \mathbb{N} - \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$, como este último conjunto pertenece a $\mathcal{F}_r$ se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$ es finito, de esta manera es posible considerar $N_U = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$. Tome $n \geq N_U$, por tanto $n \notin \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}$, así $n \in \mathbb{N} - \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$, de tal forma que $x_n \in U$. $\square$

De esta manera, como bien se mencionó antes, el filtro de Fréchet es el filtro adecuado para caracterizar la convergencia usual por medio de la convergencia vía filtros.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio topológico Haussdorff, $\mathcal{F}$ un filto libre sobre $\mathbb{N}$ y (x_n) una sucesión en X. Si $x, y \in X$ son tales que $x = \mathcal{F}-lim\ (x_n)$ y $y = \mathcal{F}-lim\ (x_n)$, entonces $x = y$.*

Demostración. Suponga que $x = \mathcal{F}-\lim\ (x_n)$ y $y = \mathcal{F}-\lim\ (x_n)$ y, además, $x \neq y$. Dado que X es Haussdorff sucede que existen abiertos $U \in \mathcal{N}(x)$ y $V \in \mathcal{N}(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$. Por hipótesis se tiene que $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathcal{F}$, por definición de filtro se cumple que $A \cap B \in \mathcal{F}$ y por tanto $A \cap B \neq \emptyset$.

Note que $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U \cap V\}$, por lo que $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual contradice lo mencionado anteriormente. De esta manera se demuestra que $x = y$, es decir, el límite es único. □

Ahora bien, así como es posible caracterizar la convergencia usual por medio de la convergencia de sucesiones vía filtros, también se puede caracterizar los elementos de una sucesión por medio de este mismo concepto: para un $m \in \mathbb{N}$ dado se cumple que si x es punto $\mathcal{F}_m-$ límite de alguna sucesión (x_n), entonces x es el $m-$ésimo término de la sucesión, donde $\mathcal{F}_m-$ es el filtro definido en el Ejemplo 2.3, es posible evidenciar esto de una manera más clara con el siguiente resultado junto con su respectiva demostración.

Proposición 3.1. *Sean (x_n) una sucesión en un espacio Hausdorff X. Dado $m \in \mathbb{N}$, si $x = \mathcal{F}_m-\text{lím}\ x_n$, entonces x es el término $m-$ésimo de la sucesión (x_n), es decir, $x = x_m$.*

Demostración. Se quiere mostrar que $x = x_m$, es decir, por Teorema 3.2, es equivalente a demostrar que x_m es punto $\mathcal{F}_m-$límite; para esto considere un abierto $V \in \mathcal{N}(x_m)$, dado que $x_m \in V$ entonces $m \in \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ y por lo tanto

$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathcal{F}_m$, con lo cual $x_m = \mathcal{F}_m-$lím x_n. Luego de la unicidad del límite se concluye que $x = x_m$ $\square$

De ahora en adelante, se seguirán enunciando y demostrando varios resultados que involucran la convergencia de sucesiones vía filtros, pero ahora se consideraran ultrafiltros. La razón de esto es que, dado un filtro siempre existe un ultrafiltro que lo contiene. El siguiente resultado caracteriza los puntos en la clausura de una sucesión en términos de puntos $p-$límites para un utrafiltro p.

Teorema 3.3. *Sean X un espacio topológico y (x_n) una sucesión en X. Un punto $x \in X$ está en la clausura del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si y sólo si existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $x = p-$lim x_n.*

Demostración. Suponga que existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ que cumple que $x = p-\lim x_n$, llame $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y por absurdo suponga que $x \notin \bar{A}$, entonces existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \cap A = \emptyset$. También pasa, por hipótesis, que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \in p$, pero como $U \cap A = \emptyset$, lo anterior implica que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} = \emptyset \in p$, lo cual es una contradicción, luego $x \in \bar{A}$.

Recíprocamente, suponga que $x \in \bar{A}$, por el Lema 1.1 se obtiene que el conjunto

$$A = \{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\}$$

cumple la propiedad de intersección finita, luego, el Teorema 2.4 garantiza la existencia de un ultrafiltro $p \in \beta(\mathbb{N})$, tal que el conjunto $A \subseteq p$ y esto significa que $x = p-\lim x_n$. $\square$

El siguiente resultado es análogo al anterior pero ahora considerando puntos de acumulación en vez de puntos en la clausura.

Teorema 3.4. *Sea X un espacio topológico y (x_n) una sucesión en X. Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si y sólo si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = p-$lim x_n.*

Demostración. Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y asuma que existe un ultrafiltro libre $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = p-\lim x_n$ y suponga que $x \notin A'$, de modo que existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \cap (A - \{x\}) = \emptyset$. Por hipótesis pasa que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \in p$, pero como se tiene que $U \cap A = \emptyset$ sucede que la familia $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} = \emptyset \in p$, lo cual no es posible, por tanto $x \in A'$.

Por otro lado, suponga que $x \in A'$, por el Lema 1.1 se obtiene que el conjunto

$$A = \{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\}$$

cumple la propiedad de intersección finita, luego, el Teorema 2.4 garantiza la existencia de un ultrafiltro $p \in \beta(\mathbb{N})$, tal que el conjunto $\{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\} \subseteq p$ y esto significa que $x = p-\lim x_n$. □

Recuerde que un espacio topológico X es punto límite compacto si todo subconjunto infinito tiene punto de acumulación en X y todo espacio compacto es punto límite compacto, el siguiente teorema es una versión en ultrafiltros de este resultado, es decir, se presenta un resultado que garantiza la existencia de los puntos $p-$límite para p un ultrafiltro libre cuando el espacio es compacto.

Teorema 3.5. *Sean X un espacio topológico compacto y (x_n) una sucesión con rango infinito en X, entonces (x_n) tiene un punto $p-$límite en x, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

Demostración. Sean X un espacio topológico compacto, (x_n) una sucesión con rango infinito en X y $p \in \mathbb{N}^*$, considere la familia de subconjuntos cerrados de X descrita de la siguiente manera: $\mathcal{A} = \{cl_X(\{x_n : n \in A\}) : A \in p\}$, note que esta cumple la propiedad de intersección finita ya que, si se toma $cl_X(\{x_n : n \in A_1\}), cl_X(\{x_n : n \in A_2\}) \in \mathcal{A}$, sucede que

$$cl_X(\{x_n : n \in A_1\}) \cap cl_X(\{x_n : n \in A_2\}) \subseteq cl_X(\{x_n : n \in A_1\} \cap \{x_n : n \in A_2\}),$$

por tanto $cl_X(\{x_n : n \in A_1 \cap A_2\}) \subseteq cl_X(\{x_n : n \in A_1\} \cap \{x_n : n \in A_2\})$ y así $\{x_n : n \in A_1 \cap A_2\} \subseteq cl_X(\{x_n : n \in A_1\} \cap \{x_n : n \in A_2\})$, como $A_1, A_2 \in p$ entonces

$A_1 \neq \emptyset$ y $A_2 \neq \emptyset$, luego el conjunto $\{x_n : n \in A_1 \cap A_2\}$ también es no vacío, por tanto, al estar contenido en la intersección, es posible afirmar que

$$cl_X(\{x_n : n \in A_1\} \cap \{x_n : n \in A_2\}) \neq \emptyset,$$

por lo tanto $\mathcal{A}$ posee la propiedad de intersección finita.

Ahora bien, por hipótesis tenemos que X es compacto, por lo que se cumple que $\bigcap_{A \in p} cl(\{x_n : n \in A\}) \neq \emptyset$. Tome un punto en esta última intersección, llámese este x, se demostrará que este es punto $p-$límite de la sucesión (x_n), para esto considere V una vecindad de x y tome el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$, como para cada $A \in p$ se tiene que $x \in cl_X(\{x_n : n \in A\})$ obtenemos que $V \cap \{x_n : n \in A\} \neq \emptyset$, en consecuencia $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in p$, así, por el Teorema 2.2 se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in p$, de tal manera que $x = p-$lím x_n. $\square$

A continuación se presenta una caracterización de la convergencia usual por medio de la noción de subconjuntos densos del los ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$.

Teorema 3.6. *Sean X un espacio topológico, (x_n) una sucesión en X y $x \in X$. Entonces, $x_n \to x$ si y sólo si existe un subconjunto denso $D \subseteq \mathbb{N}^*$ tal que $x = p-$lím x_n, para todo $p \in D$.*

Demostración. Tome $D = \mathbb{N}^*$ y sea $p \in \mathbb{N}^*$ y asuma que $x_n \to x$, dado que la convergencia usual puede ser caracterizada por el filtro de Frechet se tiene que $x = \mathcal{F}_r-$lim x_n, como p es libre, entonces $\mathcal{F}_r \subseteq p$ y por tanto $x = p-$lím x_n. Ahora suponga que existe un subconjunto denso D de $\mathbb{N}^*$ tal que para todo $p \in D$ se tiene que $x = p-$límx_n, y suponga que (x_n) no converge a x, por lo que existe una vecindad U de x tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ sucede que $x_n \notin U$, de modo que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\} = \mathbb{N}$ $\square$

Teorema 3.7. *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua, $p \in \mathbb{N}^*$, si (x_n) es una sucesión en X y $x = p-$lim x_n, entonces $f(x) = p-$lim $f(x_n)$.*

Demostración. Suponga que $x = p\text{−}\lim x_n$ y tome $V \in \mathcal{N}(f(x))$, dado que f es continua se cumple que $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$, de tal manera que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in f^{-1}(V)\} \in p$ de aquí que $\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \in V\} \in p$, por ende $f(x) = p\text{−}\lim f(x_n)$. □

3.2. Convergencia en espacios normados vía filtros

Luego de haber estudiado la noción de convergencia vía filtros sobre espacios topológicos, es interesante también realizar este estudio sobre espacios topológicos muy particulares, al considerar espacios normados.

Definición 3.2. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$ y (x_n) una sucesión de puntos de X. Se dice que la sucesión (x_n) converge en filtro a $x \in X$, lo cual se denota por $x_n \xrightarrow[\mathcal{F}]{} x$, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$.*

Observe que si (x_n) converge en el sentido usual a un punto x, entonces (x_n) converge en filtro a x, siempre y cuando $\mathcal{F}$ sea libre, esto es si $x_n \to x$, entonces $x_n \xrightarrow[\mathcal{F}]{} x$. En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$, como $x_n \to x$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_\varepsilon$, entonces $||x_n - x|| < \varepsilon$. Considere el conjunto $\mathbb{N} - \{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \varepsilon\}$ y note que

$$\mathbb{N} - \{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \varepsilon\} = \mathbb{N} - \{n : n \geq N_\varepsilon\} = \{1, 2, \ldots, N_\varepsilon - 1\},$$

el cual es finito, esto nos dice que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \varepsilon\}$ tiene complemento finito, por lo que pertenece al filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$, y por tanto, como $\mathcal{F}$ es libre, también a $\mathcal{F}$, así $x_n \xrightarrow[\mathcal{F}]{} x$.

A continuación, se presenta un ejemplo de una sucesión que converge en filtro, pero no converge en el sentido usual.

Ejemplo 3.1. *Para este ejemplo considere el espacio $\mathbb{N}$ dotado de la norma inducida por la métrica discreta δ, la sucesión (x_n) definida por:*

$$x_n = \begin{cases} 1, & si\ n\ es\ par, \\ 0, & si\ n\ es\ impar, \end{cases}$$

y el filtro $\mathcal{F}_2$. A continuación se mostrará que $x_n \underset{\mathcal{F}_2}{\longrightarrow} 1$, tome $\varepsilon > 0$, para lograr el objetivo es necesario analizar dos casos:

1. *Si $\varepsilon \leq 1$ y $\delta(x_n, 1) < \varepsilon$, entonces $\delta(x_n, 1) = 0$, de modo que $x_n = 1$ y así n es par, por tanto $\{n \in \mathbb{N} : \delta(x_n, 1) < \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\} \in \mathcal{F}_2$*

2. *Si $\varepsilon > 1$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : \delta(x_n, 1) < \varepsilon\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}_2$.*

Se concluye que para todo $\varepsilon > 0$ se satisface que $\{n \in \mathbb{N} : \delta(x_n, 1) < \varepsilon\} \in \mathcal{F}_2$, por ende es posible concluir que $x_n \underset{\mathcal{F}_2}{\longrightarrow} 1$, pero esta sucesión no converge en el sentido usual.

Luego de estudiar el símil entre la convergencia usual y la convergencia en filtros, se mostrarán las propiedades que se satisfacen en este tipo de convergencia, tales como la unicidad del límite y propiedades para la suma de sucesiones y producto por un escalar.

Teorema 3.8. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, (x_n) y (y_n) sucesiones sobre X, entonces:*

1. *Si $x_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$ para algún $x \in X$, entonces x es único.*

2. *Si $x_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$ y $y_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} y$, entonces $x_n + y_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x + y$.*

3. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, si $x_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$ entonces $\alpha \cdot x_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \alpha \cdot x$.*

Demostración.

1. Suponga que existen x, $y \in X$, tales que $x_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$ y $x_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} y$; sea $\varepsilon > 0$ note que los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} : ||x - x_n|| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : ||y - x_n|| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ pertenecen a $\mathcal{F}$. Como $A, B \in \mathcal{F}$, se cumple que $A \cap B \in \mathcal{F}$ y así $A \cap B \neq \emptyset$, luego, es posible tomar $m \in A \cap B$, observe que:

   $$||x - y|| \leq ||x_m - x|| + ||x_m - y|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Luego, por arbitrariedad de ε, se obtiene que $||x - y|| = 0$, es decir $x = y$.

2. Sea $\varepsilon > 0$, se mostrará que $C = \{n \in \mathbb{N} : ||(x_n + y_n) - (x + y)|| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$, dado que $x_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$ y $y_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} y$ los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : ||y_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ pertenecen a $\mathcal{F}$ y por tanto su intersección también, lo que permite tomar $m \in A \cap B$, de modo que

$$||(x_m + y_m) - (x + y)|| \leq ||x_m - x|| + ||y_m - y|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

luego $m \in C$. Se acaba de demostrar que C contiene a un elemento del filtro, de tal manera que este también pertenece a $\mathcal{F}$ y por tanto $x_n + y_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x + y$.

3. Sea $\varepsilon > 0$, si $\alpha = 0$ entonces se tendría la sucesión nula, la cual converge trivialmente en filtro a 0, ahora asuma que $\alpha \neq 0$. Se mostrará que $B = \{n \in \mathbb{N} : ||\alpha x_n - \alpha x|| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$, para ello primero note que, por hipótesis, $A = \{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\} \in \mathcal{F}$, tome $m \in A$, por tanto $||x_m - x|| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$, luego $||\alpha x_m - \alpha x|| < \varepsilon$, de modo que $A \subseteq B$y por definición de filtro se concluye que $B \in \mathcal{F}$ y por ende $\alpha \cdot x_n \to \alpha \cdot x$.

$\square$

A continuación se introduce el concepto de sucesión acotada usando filtros.

Definición 3.3. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$ y (x_n) una sucesión en X. Se dice que x_n es $\mathcal{F}$-acotada, si existe $M > 0$ tal que*

$$\{n \in \mathbb{N} : ||x_n|| < M\} \in \mathcal{F}.$$

Observe que si una sucesión es acotada en el sentido usual, entonces también es $\mathcal{F}-$acotada para todo filtro $\mathcal{F}$. En efecto:

Sea (x_n) una sucesión acotada en un espacio normado $(X, ||\cdot||)$, luego existe $M > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $||x_n|| < M$. Tome un filtro $\mathcal{F}$ y considere el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : ||x_n|| < M\}$ entonces:

$$\{n \in \mathbb{N} : ||x_n|| < M\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F},$$

de tal modo que (x_n) es $\mathcal{F}-$acotada.

El siguiente ejemplo ilustra que el reciproco de la proposición anterior, en general, no es cierto, esto es: existen sucesiones que son $\mathcal{F}-$acotadas pero no acotadas.

Ejemplo 3.2. *Considere el espacio $\mathbb{R}$ dotado la norma euclídea, la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ y el filtro fijo $\mathcal{F}_{10}$. Note que si se toma $M = 12$, se cumple que:*

$$\{n \in \mathbb{N} : |n| < M\} = \{1, 2, \ldots, 10, 11\} \in \mathcal{F}_{10},$$

De tal manera que la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{F}_{10}-$acotada, pero, por otro lado, es bien sabido que la sucesión en consideración no es acotada en el sentido usual.

Teorema 3.9. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado y (x_n) una sucesión en X. Si (x_n) es $\mathcal{F}_r-$acotada, entonces es acotada en el sentido usual.*

Demostración. Suponga que (x_n) es $\mathcal{F}_r-$acotada, por tanto existe $M > 0$ tal que $A = \{n \in \mathbb{N} : ||x_n|| < M\} \in \mathcal{F}_r$, luego A tiene complemento finito, es decir que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} - A = \{N_0, N_1, \ldots, N_m\}$. Tome $M' = \text{máx}\{M, ||x_{N_0}||, ||x_{N_1}||, \ldots, ||x_{N_m}||\}$, de modo que $||x_n|| < M'$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto (x_n) es acotada en el sentido usual. □

En virtud del Teorema 3.9 y la observación que sucede a la Definición 3.3, es posible caracterizar las sucesiones acotadas por medio del filtro de Fréchet. A continuación se presenta un lema que permite determinar condiciones bajos las cuales una sucesión $\mathcal{F}-$acotada tiene una subsucesión convergente.

Lema 3.1. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, (x_n) una sucesión en X y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{N}$, entonces (x_n) es $\mathcal{F}-$acotada, si y solo si existe $K = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \in \mathcal{F}$ con $n_k < n_{k+1}$ tal que (x_{n_k}) es acotada en el sentido usual.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre y suponga que (x_n) es $\mathcal{F}-$acotada, entonces existe $M > 0$ tal que

$$K = \{n \in \mathbb{N} : ||x_n|| < M\} \in \mathcal{F},$$

note que el conjunto K es infinito, porque de lo contrario pasaría que $\mathbb{N}-K \in \mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$ y así $K \cap (\mathbb{N}-K) = \emptyset \in \mathcal{F}$, lo cual es imposible. Como K es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ podemos expresarlo como $K = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ tal que $n_k < n_{k+1}$ de modo que $||x_{n_k}|| < M$, para todo $n_k \in K$.

Recíprocamente, suponga que existe $K = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \in \mathcal{F}$ con $n_k < n_{k+1}$ y que la subsucesión (x_{n_k}) es acotada en el sentido usual, por ende, existe $M > 0$ tal que $||x_{n_k}|| < M$ para todo $n_k \in K$, sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} : ||x_n|| < M\},$$

se mostrará que $A \in \mathbb{F}$, para esto tome $n_k \in K$, luego $||x_{n_k}|| < M$, por lo que $n_k \in A$ y así, $K \subseteq A$, y por propiedades de filtros se tiene que $A \in \mathcal{F}$. $\square$

A continuación se exhibe una noción de sucesión de Cauchy, en términos de filtros.

Definición 3.4. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$ y (x_n) una sucesión en X. Se dice que (x_n) es $\mathcal{F}-$Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x_{N_\varepsilon}|| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$.*

Como es costumbre, la relación entre la convergencia usual y la convergencia en filtros es un objeto de estudio, es por eso que a continuación se mostrarán dos ejemplos, el primero de una sucesión que es Cauchy en el sentido usual y en convergencia en filtros, el segundo de una sucesión que no es Cauchy en el sentido usual pero sí es $\mathcal{F}-$Cauchy para algún filtro $\mathcal{F}$.

Ejemplo 3.3. *Considere el espacio normado $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$, por propiedad arquimedeana es posible conseguir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$, si se supone que $n > N_\varepsilon$, entonces $0 < \frac{1}{N_\varepsilon} - \frac{1}{n} < \varepsilon$, luego:*

$$\left|\frac{1}{N_\varepsilon} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{N_\varepsilon}\right| < \varepsilon,$$

por tanto el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : n > N_\varepsilon\}$ está contenido en

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} : \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{N_\varepsilon}\right| < \varepsilon\right\}.$$

Note que B tiene complemento finito, luego $B \in \mathcal{F}_r$, como $B \subseteq A$, por las propiedades de los filtros $A \in \mathcal{F}_r$ y así la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{F}_r-$Cauchy y, como bien se sabe, también es Cauchy.

Ejemplo 3.4. *Tome el espacio $\mathbb{N}$ dotado de la norma inducida por la métrica discreta δ y considere nuevamente la sucesión y el filtro del Ejemplo 3.1. Tome $\varepsilon > 0$, si considera $N_\varepsilon = 2$, note que:*

$$\delta(x_2, x_{N_\varepsilon}) = \delta(1,1) = 0 < \varepsilon,$$

de tal manera que $2 \in \{n \in \mathbb{N} : \delta(x_n, x_{N_\varepsilon}) < \varepsilon\}$, por ende $\{n \in \mathbb{N} : \delta(x_n, x_{N_\varepsilon}) < \varepsilon\} \in \mathcal{F}_2$. Luego es posible concluir que para todo $\varepsilon > 0$ existe el número natural 2 que satisface la Definición 3.4 para el filtro $\mathcal{F}_2$, entonces la sucesión (x_n) es $\mathcal{F}_2-$Cauchy; bien se sabe que esta sucesión no es Cauchy en el sentido usual.

A continuación se muestra la relación que existe entre las sucesiones $\mathcal{F}-$convergentes, $\mathcal{F}-$Cauchy y $\mathcal{F}-$acotadas.

Teorema 3.10. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, (x_n) una sucesión en X y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$. Si (x_n) es $\mathcal{F}-$convergente, entonces es $\mathcal{F}-$Cauchy.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y suponga que $x_n \xrightarrow[\mathcal{F}]{} x$, entonces $A = \{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{F}$, tome $K, m \in A$, luego, por la desigualdad triangular,

$$||x_m - x_K|| \leq ||x_m - x|| + ||x_K - x|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

por ende $m \in B = \{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x_K|| < \varepsilon\}$, de tal forma que $A \subseteq B$ y como $A \in \mathcal{F}$ ocurre que $B \in \mathcal{F}$. Así para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x_K|| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$ y por tanto (x_n) es $\mathcal{F}-$Cauchy. □

A continuación se presenta un ejemplo de una sucesión que es $\mathcal{F}-$Cauchy, pero no $\mathcal{F}-$convergente.

Ejemplo 3.5. *En el espacio normado $((0,1), |\cdot|)$ considere la sucesión $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y el filtro de Fréchet. Sea $\varepsilon > 0$, por propiedad arquimedeana es posible hallar $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$*

tal que $\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$*, de modo que si* $n \geq N$ *se cumple que* $\frac{1}{N_\varepsilon} - \frac{1}{n} < \varepsilon$*, por tanto* $\left|1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{N_\varepsilon} - 1\right| < \varepsilon$ *y así:*

$$\left|\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{N_\varepsilon}\right)\right| = \left|\frac{n-1}{n} - \frac{N_\varepsilon - 1}{N_\varepsilon}\right| < \varepsilon.$$

Se acabó de demostrar que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon\}$ *está contenido en el conjunto* $A = \left\{n \in \mathbb{N} : \left|\frac{n-1}{n} - \frac{N_\varepsilon - 1}{N_\varepsilon}\right| < \varepsilon\right\}$*, el hecho de que* B *tenga complemento finito implica que* $B \in \mathcal{F}_r$ *y como* $B \subseteq A$ *sucede que* $A \in \mathcal{F}_r$*, por ende la sucesión* $(\frac{n-1}{n})$ *es* $\mathcal{F}_r-$*Cauchy.*

Por otro lado, la sucesión en consideración no es $\mathcal{F}_r-$*convergente en* $(0,1)$*, debido a que no es convergente en* $(0,1)$ *(Teorema 3.1).*

Teorema 3.11. *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado,* (x_n) *una sucesión en* X *y* $\mathcal{F}$ *un filtro sobre* $\mathbb{N}$*. Si* (x_n) *es* $\mathcal{F}-$*convergente, entonces es* $\mathcal{F}-$*acotada.*

Demostración. Por hipótesis, para $\varepsilon = 1$ se cumple que $A = \{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < 1\} \in \mathcal{F}$; tome $M = 1 + ||x|| > 0$ y considere $B = \{n \in \mathbb{N} : ||x_n|| \leq M\}$, se mostrará que $A \subseteq B$, para esto tome $m \in A$, de modo que , por medio de la desigualdad triangular,

$$||x_m|| - ||x|| \leq ||x_m - x|| < 1,$$

y por ende, $||x_m|| < 1 + ||x||$, es decir $m \in B$, así se concluye que $B \in \mathcal{F}$ y por tanto (x_n) es $\mathcal{F}-$acotada. □

Teorema 3.12. *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* (x_n) *una sucesión en* X*. Si* (x_n) *es* $\mathcal{F}-$*Cauchy, entonces es* $\mathcal{F}-$*acotada.*

Demostración. Por hipótesis, para $\varepsilon = 1$ existe $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x_{K_1}|| < 1\} \in \mathcal{F}$; considere $M = 1 + ||x_{K_1}|| > 0$, se mostrará que $\{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x_{K_1}|| < 1\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : ||x_n|| \leq M\}$, para esto tome $m \in \{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x_{K_1}|| < 1\}$, por tanto

$$||x_m|| - ||x_{K_1}|| \leq ||x_m - x_{K_1}|| < 1,$$

es decir $||x_m|| \leq 1 + ||x_{K_1}||$. Luego $m \in \{n \in \mathbb{N} : ||x_n|| \leq M\}$, lo cual significa que $\{n \in \mathbb{N} : ||x_n|| \leq M\} \in \mathcal{F}$ y por tanto (x_n) es $\mathcal{F}-$acotada. □

Teorema 3.13. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach, (x_n) una sucesión sobre X y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$. Si (x_n) es $\mathcal{F}-$Cauchy, entonces es $\mathcal{F}-$convergente.*

Demostración. Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach y (x_n) una sucesión $\mathcal{F}-$Cauchy en X. Luego, para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $K_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_m = \left\{ n \in \mathbb{N} : ||x_n - x_{K_m}|| < \frac{1}{2^m} \right\} \in \mathcal{F}.$$

Sea (B_n) una sucesión de subconjuntos de X definida de la siguiente manera: $B_1 = Cl\left(B\left(x_{K_1}, \frac{1}{2}\right)\right)$ y para $m > 1$ se define B_{m+1} como

$$B_{m+1} = B_m \cap Cl\left(B\left(x_{m+1}, \frac{1}{2^{m+1}}\right)\right),$$

se va a mostrar que esta sucesión es un encaje de Cantor. En primer lugar note que, por como está definida la sucesión, para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subseteq B_n$, además pasa que B_1 es cerrado, utilizando un argumento inductivo sobre m, se llega a que B_m también es cerrado. Para mostrar inductivamente que es una colección no vacía, primero tome $A_1 \in \mathcal{F}$ de modo que $A_1 \neq \emptyset$, tome $n \in A_1$, entonces $||x_n - x_{K_1}|| < \frac{1}{2}$, por lo que $x_n \in B\left(x_{K_1}, \frac{1}{2}\right)$ y así $x_n \in cl\left(B\left(x_{K_1}, \frac{1}{2}\right)\right) = B_1$, por tanto $B_1 \neq \emptyset$. Luego, como hipótesis de inducción, asuma que existe un $C \in \mathcal{F}$ tal que, para cualquier $n \in C$, se cumple que $x_n \in B_m$, observe que $A_{m+1} \in \mathcal{F}$ entonces $A_{m+1} \neq \emptyset$, de tal modo que es posible tomar $n \in A_{m+1}$ y así $||x_n - x_{K_{m+1}}|| < \frac{1}{2^{m+1}}$, por ende

$$x_n \in B\left(x_{K_{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}\right) \subseteq cl\left(B\left(x_{k_{m+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right),$$

luego, por hipótesis de inducción, $C \in \mathcal{F}$ y $A_{m+1} \in \mathcal{F}$, por lo que su intersección también pertenece al filtro, por ende, es posible tomar $n' \in C \cap A_{m+1}$, así $x_{n'} \in B_m$ y $x_{n'} \in cl\left(B\left(_{K_{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}\right)\right)$, por tanto $x_{n'} \in B_{m+1}$, por lo que $B_n \neq \emptyset$ para todo n.

Ahora se mostrará que $diam(B_m) \to 0$, para esto note $m \in \mathbb{N}$, si toma $x, y \in B_{m+1} = B_m \cap cl\left(B\left(x_{K_{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}\right)\right)$, por lo que

$$x, y \in cl\left(B\left(x_{K_{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}\right)\right),$$

por tanto para todo $\varepsilon > 0$ pasa que los conjuntos $B(x,\varepsilon) \cap B\left(x_{K_{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}\right)$ y $B(y,\varepsilon) \cap B\left(x_{K_{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}\right)$ son no vacíos, de esta manera es posible tomar $\tilde{x}$ en el conjunto $B\left(x, \frac{1}{2^m}\right) \cap B\left(x_{K_{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}\right)$ y $\tilde{y}$ en el conjunto $B\left(y, \frac{1}{2^m}\right) \cap B\left(x_{K_{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}\right)$ en ambos conjuntos respectivamente. De modo que

$$
\begin{aligned}
||x-y|| &= ||(x-\tilde{x}) + (\tilde{y}-y) + \left(\tilde{x} - x_{K_{m+1}}\right) + (x_{K_{m+1}} - y)|| \\
&\leq ||x-\tilde{x}|| + ||\tilde{y}-y|| + ||\tilde{x} - x_{K_{m+1}}|| + ||x_{K_{m+1}} - y|| \\
&< \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} \\
&= \frac{3}{2^m},
\end{aligned}
$$

de tal manera, como x y y son puntos arbitrarios y la sucesión $\left(\frac{3}{2^m}\right) \to 0$, sucede que $sup\{||x-y|| : x, y \in B_{m+1}\} = diam(B_m) \to 0$.

Se cumplen las condiciones del Teorema de Cantor, es por esto que existe un único $x \in X$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{x\}$. Este elemento x es un serio candidato para ser el punto $\mathcal{F}-$límite de la sucesión (x_n), para demostrarlo tome $\varepsilon > 0$, note que por propiedad arquimedeana existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$, luego, si se considera $\tilde{K} \in A_m$ ocurre que $||x_{\tilde{K}} - x_{K_m}||$, por ende

$$
\begin{aligned}
||x_{\tilde{K}} - x|| &\leq ||x_{\tilde{K}} - x_{K_m}|| + ||x_{K_m} - x|| \\
&< \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} = \frac{2}{2^m} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

por tanto $\tilde{K} \in \{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \varepsilon\} = A$, se mostró que $A_m \subseteq A$, por propiedades de filtros, $A \in \mathcal{F}$ y así $x_n \xrightarrow[\mathcal{F}]{} x$. □

Es tentador pensar que a la luz de estos nuevos conceptos de sucesiones $\mathcal{F}-$Cauchy y $\mathcal{F}-$convergente se podría estar pensando en una generalización de espacios de Banach, sin embargo esto esta muy alejado de la realidad. Estas nuevas definiciones traen una nueva caracterización para los espacios clásicos de Banach, tal y como se muestra en los siguientes resultados

Teorema 3.14. *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado y $\mathcal{F}$ un filtro libre, si toda sucesión sobre X que es $\mathcal{F}-$Cauchy también es $\mathcal{F}-$convergente, entonces $(X, ||\cdot||)$ es Banach.*

Demostración. Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, $\mathcal{F}$ un filtro libre y (x_n) una sucesión de Cauchy sobre X, suponga que toda sucesión $\mathcal{F}-$Cauchy es $\mathcal{F}-$convergente. Como $\mathcal{F}$ es libre sucede que la sucesión (x_n) es $\mathcal{F}-$Cauchy y así, por hipótesis, también es $\mathcal{F}-$convergente. Asuma que $x_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$ para algún $x \in X$, considere la sucesión (A_n) de subconjuntos de $\mathbb{N}$ definida de la siguiente manera:

$$A_n = \left\{ m \in \mathbb{N} : ||x_m - x|| < \frac{1}{n} \right\},$$

note que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $A_n \in \mathcal{F}$.

Dado que $A_1 \neq \emptyset$ es posible seleccionar $m_1 \in A_1$ entonces $||x_{m_1} - x|| < 1$. Como $\mathcal{F}$ un filtro libre entonces $\mathbb{N} - \{m_1\} \in \mathcal{F}$ por lo que $(\mathbb{N} - \{m_1\}) \cap A_2 \in \mathcal{F}$ y por tanto $(\mathbb{N} - \{m_1\}) \cap A_2$ es infinito, luego es posible seleccionar $m_2 \in (\mathbb{N} - \{m_1\}) \cap A_2$ tal que $m_2 > m_1$, y además $||x_{m_2} - x|| < \frac{1}{2}$.

Repitiendo el proceso de forma inductiva es posible seleccionar

$$m_k \in \mathbb{N} - \{m_1, \ldots, m_{k-1}\} \cap A_k$$

tal que $m_k > m_{k-1}$ y tal que $||x_{m_k} - x|| < \frac{1}{k}$, de esta manera se obtiene una subsucesión (x_{m_K}) de (x_n) que converge a x, y dado que (x_n) es de Cauchy se obtiene que $x_n \longrightarrow x$. $\square$

3.3. Otras nociones de convergencia vía filtros en espacios normados

En esta sección, se realiza un estudio de nociones de convergencia similar al realizado en [15] y [3], pero esta vez desde el punto de vista de filtros, lo cual representa un aporte modesto a la literatura ya que hasta la fecha no se han encontrado referencias que evidencien la existencia de estas.

Definición 3.5. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, (x_n) una sucesión en X y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$. Se dice que la sucesión (x_n) es débil $\mathcal{F}-$convergente a un punto*

$x \in X$, lo cual se denota $\omega - \mathcal{F}-$convergente o $x_n \underset{\omega-\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$, si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $f \in X^*$ se cumple que:

$$\{n \in \mathbb{N} : ||f(x_n) - f(x)|| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$$

Teorema 3.15. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, (x_n) una sucesión en X y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$. Si (x_n) es $\omega - \mathcal{F}-$convergente, entonces su límite es único.*

Demostración. Suponga que $x_n \underset{\omega-\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$ y que $x_n \underset{\omega-\mathcal{F}}{\longrightarrow} y$ y sea $\varepsilon > 0$, entonces para todo $f \in X^*$ se tiene que:

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} : ||f(x_n) - f(x)|| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{F} \text{ y}$$
$$B = \left\{n \in \mathbb{N} : ||f(x_n) - f(y)|| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{F},$$

por ende, su intersección también está en $\mathcal{F}$, luego $A \cap B \neq \emptyset$, de tal manera que es posible tomar $m \in A \cap B$ y así, por medio de la desigualdad triangular:

$$||f(x-y)|| = ||f(x) - f(y)|| \leq ||f(x_m) - f(x)|| + ||f(x_m) - y|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de modo que $||f(x-y)|| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, luego, por arbitrariedad de ε, se llega a que $f(x-y) = 0$ para todo $f \in X^*$ y por el Teorema de Hann-Banach, es posible concluir que $x = y$, □

Generalmente la convergencia usual implica la convergencia débil, ese es uno de los resultados que se prevalecen al momento de estudiarlo en su versión en filtros, note que, a diferencia de varios teoremas ya enunciados y demostrados, en el siguiente no se consideran condiciones adicionales sobre el filtro en cuestión.

Teorema 3.16. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, (x_n) una sucesión en X y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$. Si $x_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$, entonces $x_n \underset{\omega-\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$.*

Demostración. Suponga que $x_n \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$, tome $\varepsilon > 0$ y $f \in X^*$, sin pérdida de generalidad asuma que $||f|| \neq 0$, por ende:

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{||f||}\right\} \in \mathcal{F},$$

considere el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : ||f(x_n) - f(x)|| < \varepsilon\}$, se mostrará que $B \in \mathcal{F}$, para esto tome $m \in A$, entonces $||f(x_m) - f(x)|| = ||f(x_m - x)||$ y:

$$||f(x_m - x)|| \leq ||f|| \cdot ||x_m - x|| < ||f|| \cdot \frac{\varepsilon}{||f||} = \varepsilon,$$

luego $m \in B$, así $A \subseteq B$ y como $A \in \mathcal{F}$, se concluye que $B \in \mathcal{F}$. $\square$

Teorema 3.17. *Sean $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, $\mathcal{F}$ un filtro libre y (x_n) una sucesión sobre X. Si $x_n \underset{\omega-\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$, entonces $(||x_n||)$ es $\mathcal{F}-$acotada*

Demostración. Suponga que $x_n \underset{\omega-\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$, entonces para todo $f \in X^*$ se tiene que $f(x_n) \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} f(x)$, esto permite afirmar, gracias al Teorema 3.11, que la sucesión $(f(x_n))$ es $\mathcal{F}-$acotada, por el Lema 3.1, existe un conjunto $\tilde{K} = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \in \mathcal{F}$, tal que $n_k < n_{k+1}$ y $(f(x_{n_k}))$ es acotada en el sentido usual. Por lo que existe $M_f \geq 0$ tal que $||f(x_{n_k})|| \leq M_f$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para $x \in X$ considere el funcional evaluación $g_x : X^* \to \mathbb{R}$ definido por $g_x(f) = f(x)$. Se sabe g_x es un funcional lineal y acotado, y además

$$||g_x|| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|g_x(f)|}{||f||} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{||f||} = ||x||,$$

esta última igualdad se obtiene gracias al Teorema de Hann-Banach. De modo que:

1. $g_{n_k} : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal y acotado,

2. $||g_{x_{n_k}}(f)|| = ||f(x_{n_k})|| \leq M_f$

por tanto, por el Teorema de Acotación Uniforme se tiene que la sucesión $(||g_{x_{n_k}}||)$ es acotada, así mismo lo es la sucesión $(||x_{n_k}||)$, luego por el Lema 3.1 se concluye que la sucesión (x_n) es $\mathcal{F}-$acotada. $\square$

A continuación se introduce la noción de convergencia débil* en el espacio dual de X usando filtros.

Definición 3.6. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, (f_n) una sucesión en X^* y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$. Se dice que (f_n) es $\mathcal{F}-$débil* convergente a $f \in X^*$, lo cual se denota por $f_n \underset{\omega^*-\mathcal{F}}{\longrightarrow}$ o $\omega^* - \mathcal{F}-lim\ f_n$, si para todo $x \in X$ se cumple que $f_n(x) \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} f(x)$*

La anterior definición significa que para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, se cumple que el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}.$$

El siguiente resultado exhibe la relación que existe entre la convergencia débil* y la convergencia débil* vía filtros.

Teorema 3.18. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, (f_n) una sucesión en X^* y $\mathcal{F}$ un filtro libre. Si $f_n \underset{\omega^*}{\longrightarrow} f$, entonces $f_n \underset{\omega^*-\mathcal{F}}{\longrightarrow} f$.*

Demostración. Suponga que $f_n \underset{\omega^*}{\longrightarrow} f$, tome $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, por tanto $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, de modo que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, esto significa que

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}_r,$$

ya que su complemento $\mathbb{N} - A = \{1, \ldots, N_0\}$ es finito y como el filtro $\mathcal{F}$ es libre se obtiene que

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \in \mathcal{F},$$

y así se concluye que $f_n \underset{\omega^*-\mathcal{F}}{\longrightarrow} f$ □

El recíproco de la proposición anterior, por lo general, no es cierto. A continuación se presenta un ejemplo de esto.

Ejemplo 3.6. *Considere el espacio $\ell_1 = \{x = (x_k) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ defina la función $f_k : \ell_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$f_k(x) = \begin{cases} x_1 & si \quad k = m^2, \\ x_k & si \quad k \neq m^2. \end{cases}$$

A continuación se muestra que f_k es lineal para cualquier $k \in \mathbb{N}$, en efecto,sean $x, y \in \ell_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. *Si $k = m^2$ para algún $m \in \mathbb{N}$ entonces $f_k(x) = x_1$ y por tanto $f_k(\alpha \cdot x + y) = x_1 + y_1 = \alpha \cdot f_k(x) + f_k(y)$.*

2. Si $k \neq m^2$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $f_k(x) = x_k$. y por tanto $f_k(\alpha \cdot x + y) = \alpha \cdot x_k + y_k = \alpha \cdot f_k(x) + f_k(y)$.

en cualquier caso el funcional f_k es lineal.

Ahora se muestra que el funcional f_k acotado, en efecto,sea $x \in \ell_1$.

1. Si $k = m^2$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $f_k(x) = x_1$, luego

$$|x_1| \leq |x_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|$$

$$|x_1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

$$|x_1| \leq \|x\|$$

$$|f_k(x)| \leq \|x\|$$

$$\sup_{\|x\| \neq 0} \left\{ \frac{|f_k(x)|}{\|x\|} \right\} \leq 1$$

$$\|f_k\| \leq 1$$

2. Si $k \neq m^2$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $f_k(x) = x_k$, luego:

$$|x_k| \leq \sum_{n=1}^{k-1} |x_n| + |x_k| + \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|$$

$$|x_k| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

$$|f_k(x)| \leq \|x\|$$

$$\sup_{\|x\| \neq 0} \left\{ \frac{|f_k(x)|}{\|x\|} \right\} \leq 1$$

$$\|f_k\| \leq 1$$

por tanto, en ambos casos f_k es acotado, de esta manera para todo (f_k) es una sucesión ${\ell_1}^*$.

La sucesión (f_k) no es débil convergente. En efecto, para $x = (1, 0, 0, ...) \in \ell_1$ observe que:*

1. *Para* $k = m^2$, $m \in \mathbb{N}$, *entonces* $f_k(x) = x_1 \to x_1 \neq 0$

2. *Para* $k \neq m^2$, *entonces* $f_k(x) = x_k = 0 \to 0$

Luego $(f_k(x))$ *no converge por tener dos subsucesiones que convergen a puntos distintos, es decir existe* $x \in \ell_1$ *para el cual* $(f_k(x))$ *no converge y por tanto la sucesión* (f_k) *no es débil* * *convergente.*

Se mostrará que la sucesión (f_n) *converge* $\mathcal{F}_d-$*débil* * *al operador nulo, donde* $\mathcal{F}_d$ *es el filtro definido en el Ejemplo 2.4. En efecto, sea* $\varepsilon > 0$ *y* $x = (x_n) \in \ell_1$. *Dado que* $x = (x_n) \in \ell_1$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *es convergente y por tanto* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. *Por lo que existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n| < \varepsilon$ *siempre que* $n \geq N$.

De modo que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}$ *es finito y por tanto* $d(A) = 0$, *de aquí que* $d(\mathbb{N} - A) = 1$, *es decir*

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| < \varepsilon\} = \mathbb{N} - A \in \mathcal{F}_d$$

Capítulo 4

Una aplicación: Notación asintótica

El análisis asintótico de algoritmos permite determinar el tiempo de ejecución de un algoritmo mediante el orden de crecimiento proporcionando qué tan rápido converge éste a la solución esperada. Usualmente se utiliza la notación de Landau para obtener ciertas cotas que describen el comportamiento y eficiencia asintótica de los algoritmos [6], esto con el objetivo de ser capaces de interpretar y comparar diversos métodos que existen para una misma tarea.

En este capítulo se estudiará la versión vía filtros de las nociones asintóticas más comunes al momento del análisis asintótico de algoritmo $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ y $o_{\mathcal{F}}$, se presentarán sus definiciones, ejemplos, interpretaciones y, además, la relación que tienen entre ellas y con conceptos ya mencionados a lo largo de este trabajo.

4.1. $\mathcal{O}$ grande vía filtros: $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$

En casos generales, se utiliza la notación $\mathcal{O}$ para medir y comparar, en función del tamaño del tamaño del problema, la complejidad del tiempo de ejecución, eso sí, siempre considerando el peor de los casos de los algoritmos para el análisis de rendimiento. Esto por medio de la obtención de una cota inferior para la función que describe el crecimiento en complejidad del algoritmo. El tiempo de ejecución más rápido que se puede dar para cualquier algoritmo es $\mathcal{O}(1)$, este tiempo de ejecución es generalmente conocido como *tiempo de ejecución constante*. Cuando el tiempo de ejecución del algoritmo es constante, no importa qué tan grande es el tamaño de entrada del problema, siempre tardará la misma cantidad de tiempo en ejecutarse. En muy pocas ocasiones es posible lograr este tiempo de ejecución, sin embargo, es el tiempo de ejecución ideal para cualquier algoritmo.

En casos reales, el rendimiento de un algoritmo depende de del tamaño de la entrada que usualmente se denota por la letra n (algunas veces N), que también se puede interpretar, como el número de operaciones que se requieren para cada elemento de la entrada. Cualquier algoritmo puede ser interpretado como una sucesión de salidas que surgen a partir de una serie iterada de pasos, es por ello que es posible interpretarlo como una sucesión. De esta manera es conveniente analizar la tasa de crecimiento de las mismas, es decir, en términos de notaciones asintóticas, determinar con qué sucesión se puede asociar su comportamiento de tal manera que sea un buen descriptor del mismo.

En esta sección del capítulo, se puede observar la versión vía filtros de la notación asintótica $\mathcal{O}$ sobre $\mathbb{R}$ como espacio normado, denotada por $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, desde su definición, sus propiedades más importantes y también su relación con la noción usual por medio del filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$. A continuación se presenta la definición.

Definición 4.1. *Considere $\mathbb{R}$ con la norma euclidea, (x_n) una sucesión sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{F}$ un filtro, se dice que una sucesión $(y_n) \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(x_n)$, si y sólo si existe $c > 0$ tal que*

$$\{n \in \mathbb{N} : y_n \leq cx_n\} \in \mathcal{F}.$$

El conjunto $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(x_n)$ se denomina "$\mathcal{O}$ grande filtro $\mathcal{F}$ de (x_n)"

Observe que si los términos de la sucesión (x_n) son no nulos, entonces la Definición 4.1 se puede interpretar como que la sucesión $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ es $\mathcal{F}-$acotada donde $\mathcal{F}$ un filtro. A continuación se presenta un ejemplo de una sucesión (y_n) que es $\mathcal{O}$ grande filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ de una sucesión (x_n) y otra sucesión (z_n) que no lo es para esta misma sucesión (x_n). Note que, siguiendo la definición usual de $\mathcal{O}$, la sucesión $(y_n) = \mathcal{O}(x_n)$ y la sucesión $(z_n) \neq \mathcal{O}(x_n)$.

Ejemplo 4.1. *Considere la sucesión $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, considerando el filtro de Fréchet, note que la sucesión $(y_n) = \left(\frac{n+1}{n^2}\right) \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}_r}(x_n)$, ya que existe $c = \frac{3}{2} > 0$ tal que:*

$$\left\{n \in \mathbb{N} : y_n \leq \frac{3}{2}x_n\right\} = \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{3}{2n}\right\} = \{2, 3, 4, 5, \ldots\} \in \mathcal{F}_r.$$

Por otro lado, note que la sucesión $(z_n) = (n) \notin \mathcal{O}_{\mathcal{F}_r}(x_n)$, para mostrar esto suponga que sí, es decir que $(z_n) \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(x_n)$, entonces, por la Definición 4.1, existe $c > 0$ tal *que*

$$A=\left\{n\in\mathbb{N}: n\leq c\cdot\frac{1}{n}\right\}\in\mathcal{F}_r,$$

de modo que el conjunto $A=\{n\in\mathbb{N}: n^2\leq c\}=\{n\in\mathbb{N}: n\leq\sqrt{c}\}$ *tiene complemento finito, note que la cardinalidad del conjunto* A *es* $|A|=\lfloor\sqrt{c}\rfloor$*, por tanto* A *es un subconjunto finito de* $\mathbb{N}$*, de tal manera que* $\mathbb{N}-A$ *es infinito, lo cual es contradictorio. Por tanto no existe* $c>0$ *que satisfaga que* $A\in\mathcal{F}_r$*, así* $(z_n)\notin\mathcal{O}_{\mathcal{F}_r}(x_n)$*.*

De ahora en adelante, dado un filtro $\mathcal{F}$, para denotar que una sucesión (y_n) pertenece a $\mathcal{O}$ grande filtro $\mathcal{F}$ de (x_n), se usará la siguiente notación: $y_n=\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(x_n)$, y se dirá que "$(y_n)$ es $\mathcal{O}$ grande filtro $\mathcal{F}$ de (x_n)". De esta manera, siguiendo el Ejemplo 4.1, es posible decir que $\frac{n+1}{n^2}=\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{n}\right)$ y que $n\neq\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\frac{1}{n})$.

A continuación se muestra un resultado clásico de la notación asintótica usual $\mathcal{O}$ en su versión $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$: cualquier polinomio de grado $d\in\mathbb{N}$ (cuyo coeficiente del término de mayor grado es positivo) es $\mathcal{O}(x^d)$. La interpretación de este resultado básicamente consiste en que la tasa de crecimiento de todo polinomio de grado $d\in\mathbb{N}$ puede asimilarse a la tasa de crecimiento del polinomio x^d, esta versión vía filtros otorga una generalización de esto siempre y cuando el filtro en cuestión sea libre.

Teorema 4.1. *Considere* $\mathbb{R}$ *con la norma euclidea,* (x_n) *una sucesión sobre* $\mathbb{R}$ *y* $\mathcal{F}$ *un filtro libre. Si* (x_n) *es de la forma*

$$x_n=\sum_{i=0}^{d}a_in^i,$$

donde $d\in\mathbb{N}$ *y* $a_d>0$*, entonces* $x_n=\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(n^d)$*.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ de la forma $x_n=\sum_{i=0}^{d}a_in^i$ y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{R}$, considere el conjunto

$$A=\left\{n\in\mathbb{N}: x_n\leq\left(\sum_{i=0}^{d}|a_i|\right)n^d\right\},$$

note que este conjunto pertenece al filtro de Fréchet, en efecto, para $n \geq 1$, se cumple

$$x_n = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i \leq \sum_{i=0}^{d} |a_i| n^i = \left(\sum_{i=0}^{d} |a_i| \right) n^d,$$

de modo que para todo $n \geq 1$ sucede que

$$x_n \leq \left(\sum_{i=0}^{d} |a_i| \right) n^d,$$

por ende $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$, así el complemento de A es finito, por tanto $A \in \mathcal{F}_r$ y finalmente $A \in \mathcal{F}$ para $\mathcal{F}$ filtro libre. $\square$

En el siguiente teorema se muestra que con el filtro de Fréchet, como se ha hecho anteriormente, se obtiene una caracterización de la noción usual por medio de esta nueva notación asintótica $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$.

Teorema 4.2. *Sean (x_n) y (y_n) sucesiones en $\mathbb{R}$. $x_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}_r}(y_n)$, si y sólo si $x_n = \mathcal{O}(y_n)$.*

Demostración. Sean (x_n) y (y_n) sucesiones en $\mathbb{R}$ y suponga que la sucesión (x_n) es $\mathcal{O}$ grande filtro de Fréchet de la sucesión y_n, es decir: $x_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}_r}(y_n)$, esto implica que existe $c > 0$ tal que $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq cy_n\} \in \mathcal{F}_r$, por tanto el conjunto A tiene complemento finito, es decir que A es de la forma $A = \mathbb{N} - \{n_0, n_1, \ldots, n_k\}$, considere la constante $M = 1 + \text{máx}(\{n_0, n_1, \ldots, n_k\})$, de tal modo que para $n \geq M$ se cumple que $x_n \leq cy_n$. Note que existe $c > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq M$, pasa que $x_n \leq cy_n$ y por ende $x_n = \mathcal{O}(y_n)$.

Por otro lado, asuma que $x_n = \mathcal{O}(y_n)$, de tal manera que existen $c > 0$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \leq cy_n$, para todo $n \geq N_0$, por tanto

$$\{n \in \mathbb{N} : n \geq N_0\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq cy_n\},$$

como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N_0\} \in \mathcal{F}$, entonces que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq cy_n\}$, por ende $x_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(y_n)$. $\square$

El siguiente teorema muestra las propiedades que satisface $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, como sucede en el sentido usual, se cumplen reflexividad y transitividad, estas propiedades son importantes ya que permiten relacionar, por medio de estas notaciones asintóticas, varias sucesiones (o funciones) de manera más inmediata.

Teorema 4.3. *Considere $\mathbb{R}$ con la norma euclidea, $(x_n), (y_n), (z_n)$ sucesiones en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{F}$ un filtro, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Reflexividad $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$: $x_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(x_n)$.*

2. *Transitividad $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$: Si $x_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces $x_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(z_n)$.*

Demostración. Considere a $\mathbb{R}$ con la norma usual y $\mathcal{F}$ un filtro

1. Note que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq 1 \cdot x_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ para todo filtro $\mathcal{F}$, por tanto $x_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(x_n)$.

2. Suponga que $x_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(z_n)$, de modo que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq c_1 y_n\} \in \mathcal{F} \text{ y } B = \{n \in \mathbb{N} : y_n \leq c_2 z_n\} \in \mathcal{F},$$

se demostrará que el conjunto $C = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq (c_1 c_2) z_n\} \in \mathcal{F}$, para esto se mostrará que $A \cap B \subseteq C$. Dado que $A \cap B \in \mathcal{F}$, es posible seleccionar $n \in A \cap B$, luego $x_n \leq c_1 y_1 \leq (c_1 c_2) z_n$, por tanto $x_n \leq (c_1 c_2) z_n$, así $A \cap B \subseteq C$, como los filtros son monótonos respecto a la contenencia, sucede que $A \cap B \in \mathcal{F}$ y luego $C \in \mathcal{F}$, así $x_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(z_n)$.

□

4.2. o pequeña vía filtros: $o_{\mathcal{F}}$

A diferencia de la notación asintótica $\mathcal{O}$, que obtiene una cota inferior apropiada para que aporta información sobre la descripción de la función de crecimiento de la complejidad del algoritmos, la notación asintótica o obtiene una cota superior con el mismo propósito de las notaciones asintóticas.

En esta segunda sección se introduce la versión vía filtros de o, denotada por $o_{\mathcal{F}}$, la cual, como es costumbre, por medio de subconjuntos y un filtro sobre $\mathbb{N}$ se logra hallar una relación entre la versión usual de esta noción y su versión en filtros.

Definición 4.2. *Considere $\mathbb{R}$ con la norma euclidea, (x_n) una sucesión sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{F}$ un filtro, se dice que una sucesión $(y_n) \in o_{\mathcal{F}}(x_n)$, si y sólo si para todo $c > 0$ se cumple que*

$$\{n \in \mathbb{N} : y_n < cx_n\} \in \mathcal{F}.$$

El conjunto $o_{\mathcal{F}}(x_n)$ se conoce como "o pequeña filtro $\mathcal{F}$ de (x_n)".

Observe que si que los términos de la sucesión (x_n) son no nulos, entonces la Definición 4.2 se puede interpretar como que la sucesión $\left(\frac{y_n}{x_n}\right) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} 0$ donde $\mathcal{F}$ es un filtro. El siguiente ejemplo, muestra una sucesión (y_n) que es o pequeña filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ de una sucesión (x_n) y una sucesión (z_n) que no es o pequeña filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ de la sucesión (x_n). Estas mismas relaciones también satisfacen la definición usual de o, es decir $y_n = o(x_n)$ y $z_n \neq o(x_n)$.

Ejemplo 4.2. *Considerando nuevamente del filtro de Fréchet y las sucesiones $(x_n) = (n^2)$ y $(y_n) = (2n)$, se mostrará que $(y_n) \in o_{\mathcal{F}_r}(x_n)$. Considere $c > 0$ y defina el conjunto A_c como $A_c = \{n \in \mathbb{N} : y_n < c \cdot x_n\}$, de manera tal que el conjunto A_c es posible verlo de la siguiente manera:*

$$A_c = \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{2}{c} < n\right\},$$

por tanto que el conjunto A_c es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, por lo que su complemento $\mathbb{N} - A$ es finito, así $A_c \in \mathcal{F}_r$ y por ende $(y_n) = o_{\mathcal{F}_r}(n^2)$.

Ahora considere la sucesión $(z_n) = (3n^3)$, suponga que $(z_n) \in o_{\mathcal{F}_r}(x_n)$, de esta manera para todo $c > 0$ sucede que

$$A_c = \{n \in \mathbb{N} : z_n < c \cdot x_n\} = \left\{n \in \mathbb{N} : n < \frac{c}{3}\right\} \in \mathcal{F}_r,$$

luego $|A_c| = \left\lfloor \frac{c}{3} \right\rfloor$, *por tanto* A_c *es un subconjunto finito de* $\mathbb{N}$, *por lo que su complemento* $\mathbb{N} - A_c$ *es infinito y así* $A_c \notin \mathcal{F}_r$, *lo cual es contradictorio, por ende* $(z_n) \notin o_{\mathcal{F}_r}(x_n)$

De ahora en adelante, dado un filtro $\mathcal{F}$, para denotar que una sucesión (y_n) pertenece a o pequeña filtro $\mathcal{F}$ de (x_n), se usará la siguiente notación: $y_n = o_{\mathcal{F}}(x_n)$, y se dirá que "$(y_n)$ es o pequeña filtro $\mathcal{F}$ de (x_n)". De esta manera, siguiendo el Ejemplo 4.2 se afirma que $2n = o_{\mathcal{F}_r}(n^2)$ y $3n^3 \neq o_{\mathcal{F}_r}(n^2)$.

Teorema 4.4. *Sean* (x_n) *y* (y_n) *sucesiones en* $\mathbb{R}$. $x_n = o_{\mathcal{F}_r}(y_n)$, *si y sólo si* $x_n = o(y_n)$.

Demostración. Sean (x_n) y (y_n) sucesiones en $\mathbb{R}$ y asuma que la sucesión $x_n = o_{\mathcal{F}_r}(y_n)$, sea $k > 0$, por hipótesis $A_k = \{n \in \mathbb{N} : x_n < ky_n\} \in \mathcal{F}_r$, por tanto el conjunto $A_k = \{n \in \mathbb{N} : x_n < ky_n\}$ tiene complemento finito, es decir, es de la forma $\mathbb{N} - \{n_0, n_1, \ldots, n_{l_k}\}$, luego considere $M_k = 1 + \text{máx}(\{n_1, n_2, \ldots, n_{l_k}\})$ y note que si $n \geq M_k$ sucede que $x_n < ky_n$. Por tanto, como se tomó un $k > 0$ arbitrario y se halló $M_k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M_k$, entonces $x_n < ky_n$, es posible afirmar que $x_n = \mathcal{O}(y_n)$.

Para completar la demostración, asuma que $x_n = o(y_n)$, por tanto para todo $c > 0$ existe $N_c \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_c$, entonces $x_n < cy_n$, de esta manera $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N_c\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x_n < cy_n\}$ tiene complemento finito y así, por definición, hace parte de filtro de Fréchet, de esta manera la sucesión (x_n) es o pequeña filtro de Fréchet de la sucesión y_n, es decir $x_n = o_{\mathcal{F}_r}(y_n)$. $\square$

El siguiente teorema muestra la propiedad que satisface la $o_{\mathcal{F}}$, como en el sentido usual se cumple la transitividad.

Teorema 4.5. *Considere* $\mathbb{R}$ *con la norma euclidea,* $(x_n), (y_n)$ *sucesiones en* $\mathbb{R}$ *y* $\mathcal{F}$ *un filtro, entonces se cumplen las siguiente propiedad de transitividad: Si* $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ *y* $y_n = o_{\mathcal{F}}(z_n)$, *entonces* $x_n = o_{\mathcal{F}}(z_n)$.

Demostración. Suponga que $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = o_{\mathcal{F}}(z_n)$, considere $k > 0$, note que $\sqrt{k} > 0$, por lo que, por hipótesis sucede que $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < \sqrt{k} \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ y $B =$

$\{n \in \mathbb{N} : y_n < \sqrt{k} \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$, por ende, por propiedades de los filtros, $A \cap B \in \mathcal{F}$, observe que

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} : x_n < \sqrt{k} y_n < k z_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x_n < k z_n\}$$

y así se concluye que $x = o_{\mathcal{F}}(z_n)$. $\square$

Desde el punto de vista de análisis lo que significa que $y_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(x_n)$ es que la sucesión $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ es $\mathcal{F}-$acotada, análogamente que $y_n = o_{\mathcal{F}}(x_n)$ implica que la $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} 0$, como toda sucesión $\mathcal{F}-$convergente es $\mathcal{F}-$acotada, entonces es natural establecer una relación entre $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ y $o_{\mathcal{F}}$, tal y como se exhibe en el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Considere* $\mathbb{R}$ *con la norma euclidea,* $\mathcal{F}$ *un filtro y* (x_n) *y* (y_n) *sucesiones en* $\mathbb{R}$ *Si* $y_n = o_{\mathcal{F}}(x_n)$*, entonces* $y_n = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(x_n)$*.*

Demostración. Sean (x_n) y (y_n) sucesiones en $\mathbb{R}$, suponga que $y_n = o(x_n)$, de esta manera, para todo $c > 0$ se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : y_n < c \cdot x_n\} \in \mathcal{F}$, por tanto existe $c > 0$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : y_n < c \cdot x_n\} \in \mathcal{F}$. $\square$

Conclusiones

En este trabajo se utilizó la estructura de filtro para realizar un estudio de ciertas nociones asociadas a sucesiones en términos de ellos. Se estudió la noción de filtro, se proporcionaron algunos ejemplos, se exhibió la existencia de filtros maximales y se dotó de una topología a una clase muy particular de ultrafiltros definidos sobre el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$.

Luego se estudió la noción de sucesiones convergentes en espacios topológicos para luego considerar un espacio topológico muy particular proveniente de la norma de un espacio vectorial, es decir, se consideraron espacios normados. En espacios normados, además de la convergencia fuerte, se introdujeron nuevas nociones vía filtros asociadas a sucesiones de Cauchy, sucesiones acotadas, convergencia débil y débil*. Estas últimas representan un aporte modesto a la literatura, ya que resultados parecidos habían sido estudiados en una estructura dual a la de filtros pero no específicamente en términos de estos.

Finalmente y como una aplicación, se considera par de notaciones asintóticas, las cuales pueden ser interpretada como sucesiones que satisface ciertas propiedades de acotación o de convergencia y por tanto son sensibles a considerarlas en términos de filtros. El estudio de esta generalización de notaciones asintóticas abre las puertas para futuras investigaciones.

Bibliografía

[1] AKIN. E. *Recurrence in topological dynamics. Furstenberg families and Ellis actions*, The University Series in Mathematics, Plenum Press, New York, 1997.

[2] BERNSTEIN, A. R., (1970) *A new kind of compactness for topological spaces*, Fund. Math. **66**, 185-193.

[3] BHARDWAJ, V. K., & RANI, A. (2012). Weak ideal convergence in l_p Spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **75**(2), 247-256.

[4] BOURBAKI, N., (1966) *Elements of Mathematics, General Topology, Part I*, AddisonWesley Pub. Co.

[5] CARTAN, H. (1937). *Théorie des filtres*. Rend, **205**, 595-598.

[6] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., & STEIN, C. (2009) *Introduction to algorithms*. MIT press.

[7] DEMS. K (2005). *On $\mathcal{J}-$Cauchy Sequences*. Real Analysis Exchange, **30**(1), 123-128.

[8] FERREIRA, S. G. (2011) *Algunas aplicaciones de los puntos $\mathcal{F}$-límites en topología, análisis y álgebra*. Boletín de Matemáticas, **18**(1), 1-38.

[9] FROLÍK, Z. (1967). *Sums of ultrafilters*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** , 87-91.

[10] FURSTENBERG, H. *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press. 1981.

[11] HINDMAN, N., & STRAUSS, D. *Algebra in the Stone-Čech Compactification*. Walter de Gruyter. 2011.

[12] KOSTYRKO, P., ŠALÁT, T., & WILCZYŃSKI, W. (2000). *I-convergence**. Real analysis exchange, 669-685.

[13] Kuratowski, K. (1933). *Topologies I.* Warszawa

[14] Mogoş, A. H., Mogoş, B., & Florea, A. M. (2015). *A new asymptotic notation: Weak Theta.* Mathematical Problems in Engineering.

[15] Pehlivan, S., Şençimen, C., & Yaman, Z. H. (2010). *On weak ideal convergence in normed spaces*. Journal of Interdisciplinary Mathematics, **13**(2), 153-162.