El abanico de los números (1)

La noción de número **entero** la adquiere el niño el día en que distingue al papá de la mamá. El concepto de **quebrado** le viene mucho más tarde, cuando tiene que dividir con sus hermanitos la fruta que les obsequió la tía; o cuando cuenta y recuenta los centavos de la alcancía y los relaciona con el $ 1; cuando traza en el patio los círculos y líneas que han de servir al juego de la rayuela; o cuando, sobre las rodillas del abuelo, empieza a conocer las horas en el viejo reloj de oro.

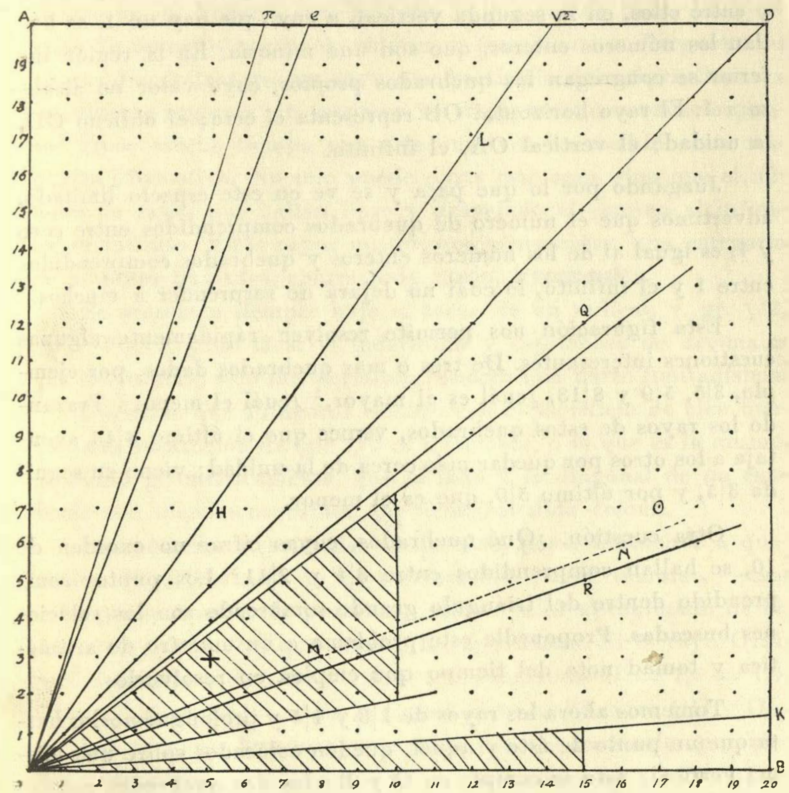
Estas primeras nociones se afianzan, aclaran y amplían en la escuela primaria, si el niño tiene la fortuna de quedar al cuidado de una maestra sensata, a quien los estudios pedagógicos no le hayan hecho perder el sentido de la realidad.

Esa clase de institutoras-mamás no abunda por desgracia, y son muchas, en cambio, y muchos los que enseñan la aritmética sin amarla ni entenderla bien, con lo cual sólo consiguen oscurecer las nociones e ideas de sus alumnos y hacerles tomar aversión por una de las ciencias más bellas y útiles, la única quizás que, bien explicada, está al alcance de todas las mentes, sin exceptuar, dentro de ciertas limitaciones, las de los perros y los caballos, las abejas y las arañas.

LOS NUMEROS RACIONALES

Voy a presentar los números racionales, es decir, los enteros y fraccionarios, en una forma no común y harto sugestiva. En una hoja de papel cuadriculado, tracemos las perpendiculares OA, OB, divididas en 20 partes iguales, como indica la figura. Marquemos, además, dentro del ángulo AOB, los puntos correspondientes a los vértices, o esquinas, de los cuadros del papel. Cada punto queda así en el cruce de dos rectas, horizontal y vertical, señaladas en uno de sus extremos por un número. Si tomamos las cifras de OA como numeradores y las de OB como denominadores, los puntos del cuadro representarán todos los quebrados propios e impropios que pueden formarse con los 20 primeros números, combinados de dos en dos. El lector verá, por ejemplo, el quebrado 3|5 señalado con una cruz y el 7|17 con un círculo.

(1) Capítulo de un libro, próximo a publicarse, sobre cuestiones de aritmética que no se hallan en las aritméticas.



Para hacer más sugestiva esta figuración, vamos a suponer que cada punto está unido al vértice O por una recta que llamaremos rayo, de suerte que el quebrado 3|8, por ejemplo, queda representado por el rayo OM. Si prolongamos este rayo, observamos que pasa por N, punto correspondiente al quebrado 6|16, el cual, aunque con distinta fisonomía, es igual a 3|8. La distancia MN es igual a OM; si continuamos viajando por ese rayo, hallaremos, a trechos iguales a OM, puntos que nos dan el mismo quebrado, con sus dos cifras multiplicadas por un factor entero, lo cual no produce alteración alguna en su valor. El punto M, que entre los ocupantes del rayo, es el más cercano a O, expresa el quebrado en su forma más sencilla, irreductible: en dicho punto, numerador y denominador, tienen el carácter de primos relativos, y éste, o aquél, o ambos, son impares.

La diagonal OD que divide el campo en dos regiones iguales, representa la unidad: los quebrados que la forman tienen, arriba y abajo, cifras idénticas. En la región superior del cuadro, dentro del ángulo AOD, se agrupan los quebrados impropios, y entre ellos, en la segunda vertical, a cuyo pie hay un 1, se hallan los números enteros, que son una minoría. En la región inferior se congregan los quebrados propios, cuyo valor no alcanza a 1. El rayo horizontal OB representa el cero; el oblicuo OD, la unidad; el vertical OA, el infinito.

Juzgando por lo que pasa y se ve en este espacio limitado, advertimos que el número de quebrados comprendidos entre cero y 1, es igual al de los números enteros y quebrados comprendidos entre 1 y el infinito, lo cual no dejará de sorprender a muchos.

Esta figuración nos permite resolver rápidamente algunas cuestiones interesantes. De tres o más quebrados dados, por ejemplo, 3|5, 5|9 y 8|13, ¿cuál es el mayor? ¿cuál el menor? Trazando los rayos de estos quebrados, vemos que el último 8|13 aventaja a los otros por quedar más cerca de la unidad; viene en seguida 3|5, y por último 5|9, que es el menor.

Otra cuestión. ¿Qué quebrados, cuyas cifras no excedan de 10, se hallan comprendidos entre 3|4 y 2|11? Los puntos comprendido dentro del triángulo grande sombreado son las soluciones buscadas. Proponedle este problema a un maestro de aritmética y tomad nota del tiempo que emplea en resolverlo.

Tomemos ahora los rayos de 1|3 y 4|5 y prolonguémoslos hasta que un punto de éste y aquél, queden colocados sobre una misma vertical: esto se cumple en Q y R: los dos quebrados conservan ahí su valor, pero han quedado reducidos a un común denominador: 5|15 y 12|15. Ya se pueden sumar o restar.

Escojamos una fracción muy pequeña, 1|15 por ejemplo, y tracemos su rayo: entre éste y el rayo OB que vale cero, no existe en la región sombreada ningún punto. Prolonguemos indefinidamente el rayo, y bien pronto veremos aparecer, dentro del ángulo KOB, una serie a cada instante más nutrida, de puntos, es decir, de quebrados menores que 1|15. Y como esto puede decirse de cualquier fracción, por pequeña que sea, se advierte que entre un quebrado muy próximo a cero, y cero, caben muy holgadamente una infinidad de quebrados. Y lo que acaece en las vecindades del cero sucede en las del infinito: todo número, por enorme que sea, tiene un número infinito de números mayores que él.

LOS NUMEROS IRRACIONALES Y LOS TRASCENDENTES

Ampliemos con la imaginación nuestro cuadro hasta que, dentro de los linderos cero-infinito, hallen cabida todos los ejércitos de números positivos, enteros y fraccionarios. Preguntamos ahora: puede trazarse un rayo que partiendo del origen llegue a las últimas regiones sin topar en su trayectoria con un solo punto? Hace mucho tiempo que esta cuestión ha recibido una respuesta afirmativa. No sólo puede darse este caso, sino que el número de rayos que hallan libre y despejado el camino al infinito, es infinito. Estos rayos misteriosos representan una categoría de números llamados, contra toda razón, **irracionales.**

Se muestran siempre bajo el techo de un radical, v. gr. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[20]{11}$, y de la serie indefinida y caprichosa de decimales que los forman, sólo nos permiten conocer una parte limitadísima.

Cuéntase que Pitágoras celebró con el sacrificio de cien bueyes la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional, o lo que es lo mismo, hablando geométricamente, que el lado y la diagonal de un cuadrado son inconmensurables, no tienen medida común.

Los números irracionales no pueden, pues, traducirse a quebrados. Pero trazando un rayo irracional, puede tomarse, —esto es lo que se hace en la práctica—, como valor aproximado de él, alguno de los puntos que más se les aproximan. Si el rayo OHL es el equivalente de $\sqrt{2} = 1{,}414.....$, tomamos H = 7|5 = 1,4, o L= 17|12 = 1,416... En la figura se ve a $\sqrt{2}$ entre OH y OL.

Los números irracionales pueden hacerse racionales por medios aritméticos:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.$$

Pero hay otros números de estirpe más elevada, que no se prestan a estas transformaciones, y son los llamados **trascendentes:** guarismos de misterio, siempre embozados; extraños y poderosos personajes sin cuya venia y auxilio no es posible dar un paso en los dominios de las altas matemáticas. Entre ellos hay dos muy nobles y magníficos, que arrastran un séquito de 800 cifras decimales conocidas y millones ignoradas: griego el uno, latino el otro, se representan simbólicamente por las letras **Pi** y **e**: de ellos se hablará en capítulo separado.

Y ahora, para terminar con una visión de conjunto, imaginemos que los infinitos rayos de nuestro cuadro toman determinados colores en armonía con la clase de números que representan, y que son, v. gr., los enteros, verdes; los quebrados propios, rojos; los impropios, anaranjados; los números irracionales amarillos y los trascendentes, azules. Si este prodigio se obrara, ¿quién podría tener idea, quién describir el abanico que se abriría ante nuestros ojos? ¿Quién decir qué matices predominarían? ¿Qué color tendría el núcleo del origen? ¿Habría rayos oscuros en las fronteras de las diversas categorías? ¿Descubriríamos otros rayos, otros números de que no tenemos noticia? Ciertas relaciones que ignoramos formarían curvas de dibujos peregrinos? ¿Hallaríamos en la región inferior números correspondientes a la **Pí** y la e de la superior?

"Algún día —dice el gran matemático espiritualista Hermite—, recibirá el alma la revelación de esas maravillosas armonías, de las que sólo un reflejo es accesible a nuestra limitada inteligencia".

VICTOR E. CARO

Síndico-Secretario de este Colegio Mayor.