



Un enfoque teórico en tiempo continuo para modelos de equilibrio general dinámicos estocásticos

Autor:

Juan Carlos Zambrano Jurado *

Trabajo presentado como requisito para optar por el
título de Doctor en Economía

Tutor:

Rafael Serrano **.

FACULTAD DE ECONOMÍA
DOCTORADO EN ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

BOGOTÁ-COLOMBIA

28 de abril de 2021

*Estudiante Doctorado en Economía E-mail: juan.zambrano@urosario.edu.co

**PhD, Profesor Asociado Facultad de Economía Universidad del Rosario E-mail: rafael.serrano@urosario.edu.co

Resumen

Este documento contiene tres aportes teóricos que se encuentran en la interacción entre los modelos estocásticos de equilibrio general, la macroeconomía dinámica y el control óptimo en tiempo continuo. En el primer capítulo, se estudia una solución analítica de dos modelos DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*) en tiempo continuo con preferencias CRRA, tecnología tipo Cobb-Douglas y choques en la dinámica de acumulación de capital que combinan un proceso de difusión con saltos aleatorios asociados a eventos raros. El factor de tecnología puede tomar la forma de un proceso CIR con reversión a la media o un movimiento browniano geométrico. En el segundo capítulo, se propone la solución de un modelo de crecimiento neoclásico estocástico en tiempo continuo con un solo sector, de tipo Ramsey, con función de utilidad CRRA y tecnología tipo Cobb-Douglas, con acumulación de capital, efectividad y la fuerza del trabajo sujetos a choques exógenos que siguen procesos de difusión con saltos, dados por eventos raros. Finalmente, en el tercer capítulo, estudiamos un problema de agentes heterogéneos en tiempo continuo. Analizamos el efecto de los choques estocásticos con saltos en la dinámica y distribución del ingreso de los agentes, y su impacto en el consumo, el ahorro y la distribución conjunta de la riqueza e ingreso. En todos los modelos, el principio de programación dinámica, el teorema de verificación y el método de diferencias finitas permitieron encontrar soluciones analíticas y numéricas de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) y Kolmogorov-Forward (kF). Eso permite obtener las funciones de política óptimas para las variables de control, analizar en cada caso de forma analítica y numérica los efectos de este tipo de choques estocásticos sobre las decisiones económicas de los agentes; como también destacar que el empleo de modelos dinámicos, que siguen procesos de difusión con saltos, representan los fenómenos económicos de forma más realista y enriquecen el análisis en ambientes con riesgo e incertidumbre.

Palabras clave: Modelos DSGE en tiempo continuo, Control óptimo estocástico, Modelos de agentes heterogéneos, Procesos de difusión con saltos aleatorios, Riesgo de desastres, Ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman y Kolmogorov-Forward, Método de diferencias finitas.

Abstract

This document contains three theoretical contributions that lie in the interplay between stochastic general equilibrium models, dynamic macroeconomics, and optimal control in continuous time. In the first chapter, we study an analytic solution of two continuous-time DSGE models with CRRA preferences, Cobb-Douglas type technology, and shocks in the capital accumulation dynamics that combine a diffusion process with random jumps associated with rare events. The technology factor can take the form of, either a mean-reverting CIR process or a geometric Brownian motion. In the second chapter, we study a stochastic continuous-time one-sector neoclassical growth model of Ramsey type with CRRA utility function and a Cobb-Douglas type technology, with capital accumulation, effectiveness and the labor force subject to exogenous shocks that follow diffusion processes with jumps, given by rare events. Finally, in the third chapter, we study a heterogeneous agent problem in continuous time. We analyze the effect of stochastic shocks with jumps in the dynamics and distribution of agent's income, and their impact on consumption, saving and joint distribution of wealth and income. In all models, the dynamic programming principle, the verification theorem and the method of finite differences allowed us to find analytical and numerical solutions of the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) and Kolmogorov-Forward (kF) equations. This allows obtaining the optimal policy functions for the control variables, analyzing in each case analytically and numerically the effects of this type of stochastic shocks on the economic decisions of the agents; as well as highlighting that the use of dynamic models, which follow diffusion processes with jumps, represent economic phenomena in a more realistic way and enrich the analysis in environments with risk and uncertainty.

Keywords: Continuous-Time DSGE Models, Optimal stochastic control, Heterogeneous agent models, Diffusion process with random jumps, Disaster risk, Hamilton-Jacobi-Bellman and Kolmogorov-Forward equations, Finite difference method.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor el profesor Rafael Serrano, quien con su experiencia, conocimiento y motivación me orientó a través de cada una de las etapas, para alcanzar los resultados en esta investigación.

También quiero agradecer a la Universidad del Rosario y la Universidad del Valle por brindarme todos los recursos y herramientas que fueron necesarios para llevar a cabo mis estudios y el proceso de investigación.

A los Grupos de investigación de Macroeconomía y de Métodos Cuantitativos de la Universidad del Rosario porque a través de los distintos seminarios permitieron construir la base de esta investigación. De manera especial al profesor Hugo Ramírez por su orientación en la implementación y pruebas de los métodos numéricos.

Por último, quiero agradecer a todos mis compañeros del programa de Doctorado en Economía, por sus valiosos comentarios y especialmente a mi familia, por su apoyo incondicional en todo este proyecto.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción | 12 |
| 1. Solución teórica para un modelo DSGE de crecimiento neoclásico estocástico con dinámica de capital discontinua | 15 |
| Introducción | 16 |
| 1.1. Revisión de literatura | 19 |
| 1.2. Metodología | 26 |
| 1.3. Modelo de referencia DSGE con dinámica de capital discontinua | 26 |
| 1.3.1. Solución analítica caso 1: PTF sigue un proceso de reversión a la media (CIR) | 32 |
| 1.3.2. Una ecuación de Euler | 37 |
| 1.3.3. Solución analítica caso 2: PTF sigue un Movimiento Browniano Geométrico | 38 |
| 1.3.4. Conceptos básicos sobre Ahorro precautorio | 41 |
| 1.4. Solución numérica | 44 |
| 1.4.1. Aproximación de las derivadas por medio de diferencias finitas | 45 |
| 1.4.2. Cálculo de la integral asociada a la componente de saltos | 47 |
| 1.4.3. Solución para el modelo con un CIR en la PTF y trabajo variable. | 49 |
| 1.5. Análisis de convergencia del modelo | 64 |
| 1.5.1. Sanity check: Tasas de convergencia | 65 |
| 1.5.2. Prueba de convergencia para el caso A variable L variable | 67 |
| 1.6. Discusión de resultados | 71 |
| 2. Solución para un modelo DSGE con fuerza de trabajo estocástica y dinámica de capital discontinua. | 75 |
| Introducción | 76 |
| 2.1. El marco económico del modelo | 78 |
| 2.2. Solución analítica para un modelo DSGE con efectividad del trabajo A_t , fuerza de trabajo L_t estocásticos y dinámica de capital discontinua | 86 |
| 2.3. Solución numérica | 89 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 2.3.1. | Solución para el modelo con un browniano geométrico en la fuerza de trabajo y dinámica de capital discontinua. | 89 |
| 2.4. | Análisis de convergencia del modelo | 102 |
| 2.4.1. | Tasa de convergencia | 102 |
| 2.4.2. | Prueba de convergencia para el modelo con fuerza de trabajo variable | 103 |
| 2.5. | Discusión de resultados | 106 |
| 3. | Un modelo de agentes heterogéneos en tiempo continuo con choques estocásticos en el ingreso. | 108 |
| 3.1. | Introducción | 109 |
| 3.2. | Metodología | 112 |
| 3.3. | Modelo de referencia | 112 |
| 3.3.1. | Equilibrio estacionario | 118 |
| 3.4. | Solución numérica | 119 |
| 3.4.1. | Ecuación de HJB | 120 |
| 3.4.2. | Ecuación de (k.F) | 125 |
| 3.5. | Análisis de precisión del esquema de diferencias finitas | 134 |
| 3.5.1. | Precisión del la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman | 135 |
| 3.5.2. | Precisión del la ecuación de kolmogorov-Forward | 141 |
| 3.5.3. | Tasa de convergencia | 143 |
| 3.6. | Discusión de resultados | 144 |
| | Conclusiones | 146 |
| | A. Anexo 1 | 149 |
| | Planteamiento de la ecuación H.J.B. | 149 |
| | Condiciones de primer orden | 151 |
| | Guess de la función de Valor | 152 |
| | Demostración Proposición 1 | 152 |
| | Demostración Corolario 1 | 155 |
| | Demostración Proposición 2 | 155 |
| | Demostración Corolario 2 | 159 |
| | Demostración proposición 3 | 159 |
| | Demostración Corolario 3 | 161 |
| | Condiciones de segundo orden | 161 |
| | Estado estacionario | 162 |
| | Tabla de calibración de modelos en estudios similares | 164 |
| | B. Anexo 2 | 165 |
| | Demostración Proposición 4 cap. 2 | 165 |
| | Demostración Corolario 4 | 167 |

| | |
|--|------------|
| Demostración Proposición 5 cap. 2 | 167 |
| C. Anexo 3 | 170 |
| C.1. Solución para el modelo con PTF constante y trabajo constante sin saltos en el capital | 170 |
| C.2. Solución para el modelo con PTF constante y trabajo constante. | 174 |
| C.2.1. Tasa de convergencia | 178 |
| C.2.2. Prueba de convergencia para el caso A constante L constante con saltos | 179 |
| C.3. Solución para el modelo con un CIR en la PTF y trabajo constante ($l_t \equiv 1$). | 181 |
| C.3.1. Tasa de convergencia | 191 |
| C.3.2. Prueba de convergencia para el caso A variable $l \equiv 1$ constante incluido saltos en el capital | 192 |
| C.4. Solución para el modelo con un Browniano geométrico en la PTF. | 194 |
| C.4.1. Tasa de convergencia | 205 |
| C.4.2. Prueba de convergencia para el modelo con browniano geométrico en la PTF | 206 |

Índice de cuadros

| | |
|---|-----|
| 1.1. Tabla de Casos a considerar | 47 |
| 1.2. Número de pasos en las variables | 54 |
| 1.3. Parámetros del modelo A y l variables incluido saltos. | 55 |
| 1.4. Parámetros del modelo con L_t variable incluido saltos con $\rho \neq \bar{\rho}$ | 62 |
| 1.5. Velocidad y precisión del modelo 3 | 71 |
| 2.1. Número de pasos en las variables | 93 |
| 2.2. Parámetros del modelo con L_t variable incluido saltos. | 94 |
| 2.3. Parámetros del modelo con L_t variable incluido saltos con $\alpha \neq \gamma$ | 100 |
| 2.4. Velocidad y precisión del modelo L_t variable | 106 |
| 3.1. Parámetros del modelo | 128 |
| 3.2. Velocidad y precisión del modelo | 141 |
| 3.3. Velocidad y precisión del modelo | 143 |
| A.1. Calibración de estudios similares | 164 |
| C.1. Número de pasos en k | 172 |
| C.2. Parámetros del modelo A constante sin saltos | 172 |
| C.3. Número de pasos en k | 175 |
| C.4. Parámetros del modelo A constante con saltos | 176 |
| C.5. Velocidad y precisión del modelo 1. | 181 |
| C.6. Número de pasos en las variables | 183 |
| C.7. Parámetros del modelo k y A variables $l \equiv 1$ incluido saltos. | 184 |
| C.8. Parámetros del modelo con L_t variable incluido saltos con $\alpha \neq \gamma$ | 189 |
| C.9. Velocidad y precisión del modelo 2 | 194 |
| C.10. Número de pasos en las variables | 197 |
| C.11. Parámetros del modelo con A y l variables incluido saltos. | 197 |
| C.12. Parámetros del modelo con A_t y L_t variable incluido saltos con $\rho \neq \bar{\rho}$ | 203 |
| C.13. Velocidad y precisión del modelo 4 | 209 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1. Función de valor sin saltos $\lambda = 0$ | 56 |
| 1.2. Función de consumo sin saltos $\lambda = 0$ | 56 |
| 1.3. Función de consumo A cte. sin saltos $\lambda = 0$ | 57 |
| 1.4. Función de Trabajo sin saltos $\lambda = 0$ | 57 |
| 1.5. Función de valor con saltos $\lambda = 1$ | 58 |
| 1.6. Función de consumo con saltos $\lambda = 1$ | 58 |
| 1.7. Función de consumo en A cte. con saltos $\lambda = 0,03$ | 59 |
| 1.8. Función de Trabajo con saltos $\lambda = 0,03$ | 59 |
| 1.9. Funciones de Valor con saltos distinto λ | 60 |
| 1.10. Funciones de política con saltos distinto λ | 60 |
| 1.11. Funciones de valor y política para distinto γ incluido saltos | 61 |
| 1.12. Funciones de valor y política para distinto ψ incluido saltos | 61 |
| 1.13. Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 1. | 62 |
| 1.14. Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 2. | 62 |
| 1.15. Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 3. | 63 |
| 1.16. Función de valor y consumo con distintas distribuciones. | 63 |
| 1.17. Tasa de convergencia Modelo A Variable L Variable. | 67 |
| 1.18. Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla fina J=200 puntos en la grilla de capital. | 68 |
| 1.19. Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla gruesa J=20 puntos en la grilla de capital. | 69 |
| 1.20. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina J=200 puntos en la grilla de capital. | 69 |
| 1.21. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa J=20 puntos en la grilla de capital. | 70 |
| 1.22. Error de aproximación en la función de Trabajo usando diferencias finitas, grilla fina J=200 puntos en la grilla de capital. | 70 |
| 1.23. Error de aproximación en la función de Trabajo usando diferencias finitas, grilla gruesa J=20 puntos en la grilla de capital. | 71 |

| | |
|--|-----|
| 2.1. Función de valor sin saltos $\lambda = 0$ | 95 |
| 2.2. Función de consumo sin saltos $\lambda = 0$ para distintos valores de L | 95 |
| 2.3. Función de consumo $L_t = 0,66842$ cte. sin saltos $\lambda = 0$ | 96 |
| 2.4. Función de valor con saltos $\lambda = 2$ | 96 |
| 2.5. Función de consumo con saltos $\lambda = 0,03$ para distintos valores de L | 97 |
| 2.6. Función de consumo $L_t = 0,66842$ con saltos $\lambda = 0,03$ | 97 |
| 2.7. Función de valor y consumo con saltos distinto λ | 98 |
| 2.8. Funciones consumo numérico para distintos η, σ | 99 |
| 2.9. Funciones de valor y consumo para distinto γ incluido saltos | 99 |
| 2.10. Función de valor, consumo con calibración distinta 1. | 100 |
| 2.11. Función de valor, consumo con calibración distinta 2. | 101 |
| 2.12. Función de valor, consumo con calibración distinta 3. | 101 |
| 2.13. Función de valor y consumo con distintas distribuciones. | 102 |
| 2.14. Tasa de convergencia modelo con factor de trabajo variable | 103 |
| 2.15. Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla fina J=200 puntos en la grilla de capital. | 104 |
| 2.16. Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla gruesa J=20 puntos en la grilla de capital. | 104 |
| 2.17. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina J=200 puntos en la grilla de capital. | 105 |
| 2.18. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa J=20 puntos en la grilla de capital. | 105 |
| | |
| 3.1. Función de Valor y Diferencia. | 128 |
| 3.2. Función de Ahorro y Diferencia. | 129 |
| 3.3. Función de Consumo y Diferencia. | 129 |
| 3.4. Comparación tasa de ahorro | 130 |
| 3.5. Función de Distribución Conjunta. | 131 |
| 3.6. Función de Distribución Conjunta y Diferencia. | 131 |
| 3.7. Distribución Conjunta Difusión y solo saltos | 132 |
| 3.8. Funciones de Consumo y Ahorro para distinto λ | 132 |
| 3.9. Funciones de valor y distribución conjunta para distinto λ | 133 |
| 3.10. Funciones de Consumo y Ahorro para distinto γ | 133 |
| 3.11. Funciones de valor y distribución conjunta para distinto γ | 134 |
| 3.12. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina J=1000 puntos en la grilla de riqueza a | 137 |
| 3.13. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa J=100 puntos en la grilla de riqueza a | 138 |
| 3.14. Error de aproximación en la función de Ahorro usando diferencias finitas, grilla fina J=1000 puntos en la grilla de riqueza a | 139 |

| | |
|---|-----|
| 3.15. Error de aproximación en la función de Ahorro usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=100$ puntos en la grilla de riqueza a . | 140 |
| 3.16. Error de aproximación en la función de distribución conjunta usando diferencias finitas, grilla fina $J=1000$ puntos en la grilla de riqueza a . | 142 |
| 3.17. Error de aproximación en la función de distribución conjunta usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=100$ puntos en la grilla de riqueza a . | 142 |
| 3.18. Tasa de convergencia Modelo de Agentes Heterogéneos | 144 |
| C.1. Función de valor numérica y analítico $A=2$ | 173 |
| C.2. Función de consumo numérica y analítico $A=2$ | 173 |
| C.3. Función de valor Analítica y Numérica | 176 |
| C.4. Función de consumo Analítica y Numérica | 177 |
| C.5. Función de valor y consumo distinto A | 177 |
| C.6. Tasa de convergencia Modelo con A constante con saltos | 178 |
| C.7. Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla fina $J=10000$ puntos en la grilla de capital. | 179 |
| C.8. Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=1000$ puntos en la grilla de capital. | 179 |
| C.9. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina $J=10000$ puntos en la grilla de capital. | 180 |
| C.10. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=1000$ puntos en la grilla de capital. | 180 |
| C.11. Funciones de valor sin saltos | 184 |
| C.12. Diferencia función de valor sin saltos | 185 |
| C.13. Función de consumo sin saltos | 185 |
| C.14. Función de consumo $A=0.984$ sin saltos | 186 |
| C.15. Diferencia Función de valor con saltos $\lambda = 0,03$ | 186 |
| C.16. Diferencia función de consumo con saltos $\lambda = 2$ | 187 |
| C.17. Diferencia función de consumo $A=0.984$ con saltos $\lambda = 2$ | 187 |
| C.18. Función de valor y consumo con distinto λ | 188 |
| C.19. Función de valor y consumo con calibración distinta 1. | 189 |
| C.20. Función de valor y consumo con calibración distinta 2. | 190 |
| C.21. Función de valor y consumo con calibración distinta 3. | 190 |
| C.22. Función de valor y consumo con distintas distribuciones. | 191 |
| C.23. Tasa de convergencia Modelo A Variable L constante. | 191 |
| C.24. Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital. | 192 |
| C.25. Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital. | 192 |

| | |
|---|-----|
| C.26. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina J=200 puntos en la grilla de capital. | 193 |
| C.27. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa J=20 puntos en la grilla de capital. | 193 |
| C.28. Función de valor sin saltos $\lambda = 0$ | 198 |
| C.29. Función de consumo sin saltos $\lambda = 0$ | 198 |
| C.30. Función de consumo A cte. sin saltos $\lambda = 0$ | 199 |
| C.31. Función de Trabajo sin saltos $\lambda = 0$ | 199 |
| C.32. Función de valor con saltos $\lambda = 0,03$ | 200 |
| C.33. Función de consumo con saltos $\lambda = 0,03$ | 200 |
| C.34. Función de consumo en A cte con saltos $\lambda = 0,03$ | 201 |
| C.35. Función de Trabajo con saltos $\lambda = 0,03$ | 201 |
| C.36. Función de valor con saltos distinto λ | 202 |
| C.37. Funciones de política con saltos distinto λ | 202 |
| C.38. Funciones de valor y política para distinto γ incluido saltos | 203 |
| C.39. Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 1. | 204 |
| C.40. Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 2. | 204 |
| C.41. Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 3. | 204 |
| C.42. Función de valor y consumo con distintas distribuciones. | 205 |
| C.43. Tasa de convergencia Modelo con Browniano Geométrico en PTF. | 205 |
| C.44. Error de aproximación en la función de Valor usando diferencias finitas, grilla fina J=200 puntos en la grilla de capital. | 206 |
| C.45. Error de aproximación en la función de Valor usando diferencias finitas, grilla gruesa J=20 puntos en la grilla de capital. | 206 |
| C.46. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina J=200 puntos en la grilla de capital. | 207 |
| C.47. Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa J=20 puntos en la grilla de capital. | 207 |
| C.48. Error de aproximación en la función de Trabajo usando diferencias finitas, grilla fina J=200 puntos en la grilla de capital. | 208 |
| C.49. Error de aproximación en la función de Trabajo usando diferencias finitas, grilla gruesa J=20 puntos en la grilla de capital. | 208 |

Introducción

La teoría del control óptimo se ha convertido en un instrumento central de la teoría del crecimiento económico, puesto que permite resolver diferentes problemas de optimización dinámica asociados con los modelos de crecimiento económico, logrando ampliar su campo de acción a numerosas aplicaciones en el contexto teórico y práctico en economía, las cuales resultan claves a la hora de determinar las trayectorias óptimas e interpretar el comportamiento de los agentes económicos a través del tiempo. Los trabajos pioneros en esta línea son los desarrollados por Phillips (1954, 1957), Kalman (1963), Bellman (1957) y Pontryagin (1962). Todos ellos, en un principio, intentaron explicar algunos de los problemas que con el cálculo de variaciones tradicional no se habían resuelto.

La optimización intertemporal estocástica, considerada en un principio difícil y bastante formal, ofrece un enfoque que muchos investigadores han desarrollado en los últimos años. Estudios como Merton (1971, 1975), Prescott (1971), Kendrick (1976, 1981), Bertsekas (1987), Hernández-Lerma (1989) y Blanchard (2009) muestran cómo a través del uso del cálculo estocástico en tiempo continuo, junto con restricciones y formas funcionales específicas, como movimientos Brownianos, procesos de Poisson, procesos de reversión a la media etc., han logrado grandes ventajas en comparación con los métodos tradicionales en tiempo discreto. Por ejemplo: integrar problemas de finanzas corporativas que son relevantes en macroeconomía, donde diferentes indicadores como el riesgo, el crecimiento, la inflación son tratados de manera más real, como directamente se pueden presentar a través del tiempo. En todos estos problemas es necesario considerar los diferentes elementos de tipo estocástico que permitan modelar la incertidumbre asociada a través del uso de sistemas dinámicos. Esta es la característica fundamental que diferencia a los problemas de control óptimo de los problemas de optimización comunes.

Uno de los cambios más importantes en la teoría económica es la superación del marco determinista, sustentado en los cambios constantes de la política económica, la volatilidad de los mercados financieros, las decisiones de consumo, portafolio y producción que representan una respuesta más completa a los procesos de decisión de los agentes económicos, cuando se ven afectados por la incertidumbre económica y financiera. Por esto es relevante estudiar modelos donde las variables económicas y financieras tienen un comportamiento y herramientas más sofisticadas, como por ejemplo: procesos estocásticos de difusión o de difusión con saltos, tiempos de parada en tiem-

po continuo; con el fin de que permiten un análisis más real y una mayor comprensión de los fenómenos económicos.³

Otro punto importante que debe mencionarse es la preocupación por obtener soluciones numéricas a los problemas de control óptimo. Esta originó el uso de nuevas técnicas de programación matemática y de programación dinámica dentro de la teoría de control, permitiendo su extensión hasta el caso estocástico para estudiar el manejo de la incertidumbre asociada.

Ésta investigación inicialmente contribuye a la literatura y al estado del arte en macroeconomía dinámica, debido a que toma en cuenta los estudios sobre el planteamiento teórico de modelos de equilibrio general dinámico estocástico (DSGE, por sus siglas en inglés).

Al respecto los trabajos de Kydland and Prescott (1982), King et al. (1988) y de Ireland (2004), son considerados como punto de partida de la teoría del ciclo económico real (RBC) y de los modelos DSGE en general. Por otro lado Rotemberg and Woodford (1997); Michael (2003) y Galí et al. (2008) introducen los modelos DSGE nekeynesianos con estructura similar a los modelos RBC, para comprender la relación entre la política monetaria, la inflación, el ciclo comercial y sus implicaciones políticas.⁴

Otro punto a tener presente es el estudio de los modelos DSGE en tiempo continuo, que incluyen en su definición varias preferencias, tecnologías, formas interacción y distintos procesos estocásticos para analizar cómo estas variables evolucionan con el tiempo. Para ello se tomó como referencia principal los trabajos de Steger (2005), Aruoba et al. (2006), Turnovsky (2006), Smith (2006, 2007), Posch (2009, 2011), Wälde (2011), Moll (2014), Parra-Alvarez (2017).

Otra línea importante a destacar es la aplicación de modelos DSGE en tiempo continuo, relacionada con agentes heterogéneos que incluyen en su dinámica choques estocásticos asociados a procesos brownianos y a procesos de saltos de Poisson en tiempo continuo.

Para la solución de este tipo de problemas es necesario resolver el sistema de ecuaciones acopladas, formado por la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B) que se encarga de obtener las elecciones óptimas de los individuos y la ecuación de Kolmogorov Forward (K.F) que caracteriza la evolución de la distribución conjunta del ingreso y la riqueza para los agentes, de acuerdo las elecciones óptimas de los individuos. Para ello, se tomó como referencia los trabajos de Huggett (1993), Heathcote et al. (2009), Guvenen (2011), Kaplan et al. (2018), Achdou et al. (2014), Achdou et al. (2017) y Kaplan et al. (2018).

Finalmente se presenta una revisión sobre estudios que analizan soluciones numéricas de los modelos DSGE en tiempo continuo, relacionados con choques que involucran procesos de difusión y procesos de saltos discontinuos. A razón de lo anterior, se tuvieron como referencias los trabajos de Judd (1996, 1998), Riascos (2009), Kompas and Chu (2012), Posch (2013) y Parra-Alvarez

³Turnovsky (2006), Riascos (2009), Kaplan et al. (2018)

⁴Frische and Gröbl (2010)

(2017). Para la solución y calibración de los modelos, se usó el método de diferencias finitas, basado en los estudios de Candler et al. (1998), Strikwerda (2004), d'Halluin et al. (2005), Li et al. (2017) Hirsá (2016) y Achdou et al. (2017).

Mi pregunta general de investigación en esta disertación es: ¿Cómo se puede extender el comportamiento de los agentes económicos en los modelos de equilibrio general en tiempo continuo, cuando se introducen procesos de incertidumbre en las variables económicas, definidos por procesos estocásticos brownianos y procesos de saltos aleatorios no necesariamente de tamaño constante?

Este estudio aporta las siguientes contribuciones:

En primer lugar, Permite encontrar soluciones analíticas de los modelos de equilibrio bajo ciertas restricciones paramétricas, para el caso en el que se considere una productividad total de los factores, una fuerza de trabajo e ingreso estocásticos y una dinámica de capital discontinua. que son consideradas como una extensión de los estudios de Aruoba et al. (2006), Posch (2011, 2013), Parra-Alvarez (2017), Smith (2007) y Achdou et al. (2017). En segundo lugar, realiza una implementación numérica en diferencias finitas, mediante el uso de un método Implícito-Explícito (IMEX), la parte local (parte diferencial) se resuelve usando un paso implícito y la parte no local (término integral) usa un paso explícito, desarrollado en **Matlab** que permite resolver las ecuaciones integro-diferenciales de (H.J.B) y (k.F) asociadas con este tipo de problemas y que a su vez permiten ser comparadas con las soluciones analíticas propuestas. En tercer lugar contribuye a la literatura existente sobre el uso de modelos de equilibrio general dinámico estocástico, para resolver problemas de equilibrio en macroeconomía dinámica en tiempo continuo.

El documento contiene cinco secciones, incluyendo la presente introducción. En las tres secciones siguientes se presentan los tres problemas de investigación. En el primer capítulo, se estudió la solución analítica y numérica de dos modelos DSGE con dinámica de capital discontinua y factor de tecnología estocástico. En el segundo capítulo, se da cuenta sobre una solución analítica y numérica de un modelo de crecimiento neoclásico estocástico en tiempo continuo con un solo sector, tipo Ramsey con función de utilidad CRRA y tecnología tipo Cobb-Douglas, donde el capital, la efectividad del trabajo y la fuerza de trabajo son afectados por choques exógenos estocásticos. En el tercer capítulo, se estudió la aplicación a un problema agentes heterogéneos asociado con choques estocásticos de tipo browniano y procesos de saltos en la dinámica del ingreso de los agentes. Finalmente se muestran los anexos y las referencias principales.

Capítulo 1

Solución teórica para un modelo DSGE de crecimiento neoclásico estocástico con dinámica de capital discontinua

Juan Carlos Zambrano *

Rafael Serrano **

DOCTORADO EN ECONOMÍA

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

CALLE 12 C NO. 4-60

BOGOTÁ, COLOMBIA

Resumen: Este trabajo investigativo propone una solución analítica y numérica de un modelo DSGE en tiempo continuo con saltos aleatorios en la dinámica de capital, asociados a eventos raros y con un factor de tecnología estocástico. La solución se estableció bajo el principio de optimización dinámica y el teorema de verificación, lo que permite resolver la ecuación de HJB en tiempo continuo, obteniendo, a su vez, las funciones de política óptimas para las variables de control. La solución numérica de la ecuación de HJB en tiempo continuo se estableció por medio de diferencias finitas usando el esquema (*Upwind*). Se estudió su calibración y se comparó con los resultados obtenidos en estudios similares. Posteriormente se analizó una extensión del modelo cuando se tuvo un factor de tecnología que siguió un browniano geométrico. En todos los casos se puede apreciar cómo los eventos raros, modelados con saltos en la dinámica de capital, afectan las decisiones de política óptima de los hogares.

*Estudiante Doctorado en Economía E-mail: juan.zambrano@urosario.edu.co

**PhD, Profesor Asociado Facultad de Economía Universidad del Rosario E-mail: rafael.serrano@urosario.edu.co

Introducción

El desarrollo vertiginoso de modelos DSGE y la importancia de usar este tipo de modelos en macroeconomía dinámica puede observarse en numerosos estudios a lo largo de las últimas dos décadas; en especial cuando se trabaja en tiempo continuo con variables económicas que siguen procesos de incertidumbre e incluyen combinaciones de procesos estocásticos. Cabe resaltar que el potencial de aplicaciones de estos modelos es bastante grande para analizar ciertas eventualidades, como los vínculos entre el sector financiero y la economía en general; las macrofinanzas para estudiar los efectos no lineales de los choques financieros al resto de la economía; la política monetaria para analizar las decisiones de fijación de precios; la política fiscal para estudiar el comportamiento de modelos con agentes heterogéneos, la teoría del crecimiento y la organización industrial, entre otras.¹

Apoyados en los estudios Rietz (1988), Barro (2006, 2009); Barro and Jin (2011), Barro and Ursúa (2012), Gourio (2012); Nakamura et al. (2013) quienes estudian eventos catastróficos raros, relacionados con eventos de escala nacional o global que reducen sustancialmente el stock de capital y / o la eficiencia productiva del capital y que a su vez implica una reducción sustancial del PIB, el consumo y la riqueza. Desarrollan modelos macroeconómicos en tiempo discreto para resolver el problema de choques asociados a catástrofes raras por medio de saltos estudiando el tamaño, la probabilidad y el tipo de distribución que los desastres raros pueden presentar. Muestran que este tipo de estructuras ayudan a explicar mejor el problema de las altas primas de riesgo de capital y de rendimientos bajos y libres de riesgo.

Nuestro trabajo pretende extender este problema usando modelación en tiempo continuo. Dado que en el momento de presentarse un evento de esta naturaleza, las respuestas de los agentes económicos son inmediatas y por eso, los modelos DSGE en tiempo continuo tienen una gran importancia ya que permiten representar explícitamente la incertidumbre a la que se somete la economía, por medio de procesos estocásticos de difusión y de saltos, cuando se ve afectada por este tipo de eventos raros. Esto significa que el valor de la variable asociada a un evento raro, se toma de un conjunto de valores posibles, cada uno de los cuales tiene asociado una probabilidad de ocurrencia. Mejorando el realismo de dichos modelos y también permitiendo estimar el impacto de la incertidumbre sobre la política óptima de los agentes.

Otra razón fundamental es que al usar este tipo de metodología se amplía el espectro de distribuciones no necesariamente gaussianas que pueden asociarse a diferentes variables económicas. Es decir al combinar procesos estocásticos brownianos con procesos de difusión discontinuos en la dinámica de capital, convierte al capital físico en un activo de riesgo, el cual presenta una distribución no necesariamente gaussiana con exceso de curtosis, colas pesadas y sesgo. Esto permite, ampliar el espectro de su distribución, capturar los distintos cambios debidos a pequeñas fluctuaciones y a cambios bruscos e inesperados (auges y caídas) y producir dinámicas más realistas

¹Nuño (2015), Moll (2014), Posch (2011)

que representen el capital, las cuales no pueden ser generadas utilizando únicamente procesos de difusión.

El problema de los choques representados analíticamente por medio de saltos en la dinámica del capital está fuertemente relacionado con diferentes fenómenos. Los choques negativos, se encuentran en problemas como desastres por el cambio climático, un ataque terrorista nuclear o biológico, un virus altamente contagioso que se propaga sin control, cambios de régimen, guerras, crisis financieras, cambios en política fiscal, monetaria y cambiaria; como también medidas de corto plazo que manejan la inflación y el desempleo.

Por su parte ejemplos de choques positivos en el capital no son tan comunes de encontrar, pero como ejemplos se puede pensar en una reforma institucional, la cual genera un cambio en el gobierno, libera el tipo de cambio en el país, abre la inversión extranjera generando un cambio en la estructura del capital. También está el caso de los países que hacen nuevos descubrimientos de materia prima o recursos naturales, esto genera nueva disposición de activos de capital que a su vez trae nueva inversión extranjera y por tanto un cambio positivo en su nivel de capital.

El impacto de los desastres raros asociados al cambio climático, es uno de los problemas de mayor atención en la actualidad y se aborda en los informes de Tol (2006), Stern et al. (2010) y UNDRR (Oficina de las Naciones Unidas para la reducción del Riesgo de Desastres) quienes concluyen que, entre 1998 y 2017, los fenómenos meteorológicos extremos representaron el 77% del total de las pérdidas económicas, equivalente a 2,24 billones de dólares, y que el incremento en los niveles de amenazas por el cambio climático tiene un enorme efecto amplificador para el riesgo de desastres.²

También, los efectos de una guerra sirven de ilustración para este tipo de problemas de saltos en el capital. por ejemplo el informe del banco mundial Group (2018) sobre reconstrucción e inversión de IRAk, después de la guerra, mostró que, para el 2017, el acumulado real de las pérdidas debidas al conflicto en el PIB no petrolero ascendieron a 107 mil millones de dólares, equivalente a 72 por ciento del PIB de 2013 y 142 por ciento del PIB no petrolero del mismo año. Esto afectó sectores principales para el crecimiento económico como lo son la infraestructura, industria, comercio, agricultura, vivienda, patrimonio cultural y turismo.

A raíz de la situación anterior, se planteó la metodología desde el control óptimo estocástico en tiempo continuo, donde los choques del capital asociados a desastres raros se modelan por combinación de procesos estocásticos brownianos y de saltos aleatorios no necesariamente de tamaño constante. Dicho método se convierte en una herramienta fundamental para resolver este tipo de problemas puesto que permiten capturar interrupciones severas que ocurren en la producción al momento de ocurrir un desastre poco convencional y además bajo ciertas restricciones paramétricas es posible también obtener soluciones cerradas las cuales se puede utilizar para evaluar la precisión de las soluciones numéricas.

²<https://www.eird.org/americas/docs/perdidas-economicas-pobrez-y-desastres.pdf>

El objetivo en este capítulo es desarrollar analíticamente y solucionar numéricamente un modelo DSGE de crecimiento neoclásico estocástico en tiempo continuo, que involucre a una economía pequeña y cerrada; la cual posee consumidores racionales que maximizan su utilidad y son aversos al riesgo. Además, estos consumidores pueden tomar decisiones sobre la distribución de la riqueza entre consumo e inversión, y pueden incluir factores de incertidumbre en la dinámica de capital en el que se combinan procesos de difusión con procesos de saltos no necesariamente de tamaño constante, en tiempo continuo; los cuales, se suponen asociados con eventos raros.

Para cumplir este objetivo se hizo uso de la teoría de control óptimo estocástico que permite plantear el modelo de referencia de equilibrio general dinámico estocástico, como también el problema de control óptimo en tiempo continuo a resolver, junto con las condiciones de optimalidad establecidas por el principio de programación dinámica, el teorema de verificación y las condiciones que permiten investigar si existe una solución cerrada para este problema. Para la solución numérica, se tomaron como referencia los trabajos tanto en tiempo continuo y tiempo discreto; así como los estudios que incluyen soluciones en diferencias finitas para la función de valor y las funciones de política, asociadas a combinaciones de procesos brownianos y procesos de saltos de Poisson.

Este estudio se hace debido a que puede generar los siguientes aportes:

En primer lugar, el aporte principal de este estudio está orientado al planteamiento de soluciones cerradas para el problema de control óptimo estocástico que combina choques brownianos y saltos discontinuos no necesariamente de tamaño constante en la dinámica del capital y en la productividad total de los factores (PTF) asociada a procesos estacionarios de reversión a la media (CIR) y procesos no estacionarios como movimientos brownianos geométricos (BG), los cuales se consideran asociados con eventos raros y permiten estudiar el efecto de la incertidumbre de la productividad total de los factores y del capital sobre las decisiones óptimas de los agentes, comparar los resultados con la solución numérica propuesta como también estudiar el uso de aproximaciones locales a la economía descrita.

Este estudio también extiende los siguientes modelos: Aruoba et al. (2006), el cual considera un modelo neoclásico con características similares donde los hogares maximizan su utilidad descontada dependiente del ocio y consumo, con productividad total de los factores de tipo exponencial que tiene asociado un proceso estocástico AR(1) sin choques en la dinámica del capital, ellos sugieren explorar nuevas soluciones con procesos estocásticos distintos y otros métodos no lineales diferentes. En particular al incluir procesos de difusión y de saltos se logra estudiar las no linealidades de una función de producción neoclásica y predictibilidad a lo largo del ciclo económico de manera más real.

El modelo DSGE de Parra-Alvarez (2017), quien considera una dinámica de capital asociada a un proceso browniano sin incluir saltos y es un referente principal porque estudia diferentes métodos numéricos que permiten abordar la solución de este tipo de problemas en tiempo continuo. En

nuestro caso, damos un conjunto de restricciones para establecer la solución cerrada cuando se tiene una fuerza de trabajo l_t variable y con los saltos se captura los efectos de los eventos raros a los que se enfrenta la dinámica del capital sobre el factor de descuento ρ y sobre la función de valor que esta directamente relacionada con funciones de consumo y trabajo óptimas.

Finalmente los modelos DSGE de Posch (2011, 2013), quienes incluyen saltos en la dinámica de capital de tamaño constante para analizar la relación entre la prima de riesgo y las no linealidades de una función de producción. En nuestro caso se extiende la forma funcional de la función de valor que depende de un factor asociado a la PTF, la cual se puede modelar con un CIR o con un BG y es importante considerar que la naturaleza económica y la magnitud de los saltos asociados a eventos raros a los que se enfrenta el capital no necesariamente poseen un tamaño constante. En nuestro caso el tamaño de los saltos esta asociado a una función cualquiera y se estudia el problema para diferentes tipos de distribución del tamaño de los saltos, representando mejor la realidad del problema.

En segundo lugar, esto permite realizar una implementación numérica en diferencias finitas que resuelven, mediante el uso de un método Implícito-Explícito (IMEX), la ecuación integro-diferencial, asociada al problema de optimización, para cuantificar numéricamente los efectos sobre la política óptima. Finalmente el estudio contribuye a la literatura existente sobre el uso de modelos de equilibrio general dinámico estocástico, para solucionar problemas de equilibrio en macroeconomía dinámica en tiempo continuo.

Las preguntas de investigación de este trabajo son las siguientes:

1. ¿Cómo se afectan las decisiones de consumo y trabajo de los agentes en un modelo neoclásico de crecimiento en tiempo continuo, cuando se introducen factores de incertidumbre en la dinámica de capital asociados a desastres raros?.
2. ¿Bajo qué condiciones existe solución cerrada para el caso donde se combinan procesos de difusión y de saltos discontinuos en la PTF y en la dinámica de capital?.
3. ¿Cómo resolver numéricamente la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) en tiempo continuo, para el caso de saltos en la dinámica de capital con tamaño no necesariamente constante?

1.1. Revisión de literatura

La implementación de modelos y la simulación numérica en macroeconomía se ha vuelto significativamente más sofisticada desde hace aproximadamente tres décadas. Particularmente los modelos DSGE, se han convertido en el referente fundamental de la modelización macroeconómica en la actualidad, su frecuente uso se debe a que estos modelos se fundamentan sobre la teoría microeconómica, para analizar los fenómenos macroeconómicos, y porque nos permiten

analizar cómo responden los diferentes agentes económicos ante cambios en su entorno a lo largo del tiempo.

El enfoque dinámico de los choques a las distintas variables económicas se ha estudiado por diferentes autores entre los cuales podemos citar a Long Jr and Plosser (1983) en su investigación proponen modelos de equilibrio con expectativas racionales para explicar los movimientos conjuntos de las variables económicas de los diversos sectores productivos. Además, destacan la persistencia intertemporal (enfoque dinámico) de las fluctuaciones y la componente de tendencia de la economía.³ El trabajo de Greenwood et al. (1988) propone evaluar, desde un enfoque keynesiano, un choque a la inversión, entendido como un elemento importante para explicar los ciclos económicos y resaltar la variable del capital como nuevo mecanismo de transmisión de los choques, y como un principal elemento de los modelos RBC. A su vez King et al. (1988) resumen el desarrollo de la teoría de los modelos RBC y proponen nuevas líneas de investigación que se derivan de estos modelos. Una de estas es considerar que la senda de crecimiento podría tener un componente estocástico, lo cual difiere del análisis usual de los modelos RBC que tienen una senda de crecimiento exógeno y determinístico.

Bernanke et al. (1998), proponen un modelo de equilibrio general dinámico estocástico (DSGE) de “acelerador financiero”, en el cual incorporan el dinero y la rigidez de los precios, para estudiar la manera en que influyen las fricciones en el mercado de crédito sobre la transmisión de la política monetaria; analizan también la heterogeneidad entre las empresas. En la misma línea, Michael (2003) establece las bases de un modelo de equilibrio general dinámico estocástico (DSGE) microfundamentado, y resalta la importancia de las expectativas para determinar la efectividad de las políticas y la importancia de las perturbaciones reales (tecnología, preferencias, políticas fiscales, etc) como una fuente de fluctuaciones económicas.

Otros estudios como Merton (1971); Merton and Samuelson (1992), Giulano and Turnovsky (2003), Venegas-Martínez (2001), Turnovsky (2006), Venegas Martínez and Polanco Gaytán (2011), nos muestran diversas aplicaciones de procesos estocásticos en mercados financieros, política-económica y política-monetaria, donde se relacionan con la volatilidad de los mercados financieros, las decisiones de consumo, el portafolio y la producción que representa una respuesta más completa a los procesos de decisión de los agentes económicos, afectados por la incertidumbre. Este trabajo pretende usar la generalización de estos procesos estocásticos, para representar mejor las dinámicas de capital, PTF y del ingreso.

Existe una fuerte evidencia empírica desde el punto de vista estadístico en estudios como los de Venegas-Martínez (2009); Giulano and Turnovsky (2003); Turnovsky (1993, 1999), los autores aseguran que la mayoría de variables financieras no se comportan de acuerdo a una distribución log-normal. En general, se observa que las distribuciones empíricas divergen notablemente de la distribución normal y que es común observar que la cresta de la distribución empírica es más alta

³La componente de tendencia se amplía en los estudios de Hodrick and Prescott (1997), King and Rebelo (1999) y Baxter and King (1999).

que la de la normal estándar. También aseguran que la mezcla de procesos de difusión con procesos de saltos proporcionan una alternativa para modelar las colas pesadas de la distribución empírica y el sesgo existente en la distribución. por tanto, que una adecuada y oportuna administración de riesgos reduce la varianza de las variables de política; creando así dispositivos congruentes, eficaces y creíbles que minimicen el impacto esperado de los choques exógenos. En este sentido, los autores muestran que en los modelos de macroeconomía dinámica es común observar que se combinen los instrumentos de política monetaria junto con los instrumentos de política fiscal, modelados conjuntamente con procesos de difusión y procesos de saltos para reducir la exposición a los distintos riesgos que pueden tener efectos negativos en la economía.

Steger (2005) compara la tasa de crecimiento resultante de un modelo de crecimiento endógeno simple bajo la incertidumbre modelada con procesos brownianos y procesos discontinuos. Supone los procesos con valores esperados idénticos para concluir que las implicaciones cualitativas son perfectamente idénticas y siempre que ambos procesos estocásticos tengan la misma varianza. Turnovsky (2006), derivan una relación de equilibrio de forma cerrada entre el consumo y la riqueza, que se mantiene a lo largo de un camino de crecimiento equilibrado en un modelo de crecimiento endógeno de Romer, en presencia de ingresos laborales estocásticos. Estiman que la medida del riesgo actual en la economía se comparte entre el trabajo y el capital; demostrando cómo el equilibrio determina conjuntamente la relación consumo-capital y ocio (empleo).

En los modelos de Venegas-Martínez (2005) y Castillo-Ramírez et al. (2016), se trabajan modelos de equilibrio general dinámicos y estocásticos, que consideran cambios externos y repentinos. Los autores argumentan que las variables económicas ocasionalmente presentan movimientos inesperados (auges o caídas) con mucha frecuencia; incluso si se supone una volatilidad razonablemente baja. Este hecho lo consideran relevante para la teoría y para la investigación empírica; y no es simplemente una sofisticación más en el desarrollo teórico de modelos de equilibrio general. Para ello se supone que las dinámicas de las distintas variables económicas son estocásticas y se conducen por procesos de difusión brownianos y procesos discontinuos. Por ejemplo: determinan que el equilibrio macroeconómico en el que las varianzas de los choques exógenos, tanto para difusiones como para saltos, desempeñan un papel importante en la administración de riesgos. Además explican los efectos que tienen los saltos inesperados en el gasto de gobierno per cápita y en variables demográficas en el crecimiento económico per cápita.

La presencia de procesos de difusión y de saltos en la evolución de las series macroeconómicas se puede apoyar en diferentes estudios, entre los cuales podemos destacar Rietz (1988) sin abandonar el paradigma de los modelos tipo Arrow-Debreu, introduce saltos asociados a desastres raros en un modelo de fijación de precios de activos y sostiene que este tipo de estructuras ayudan a explicar mejor el problema de las altas primas de riesgo de capital y de rendimientos bajos y libres de riesgo, siempre que este tipo de eventos sean aceptables, graves y no demasiado improbables. Por su parte en Barro (2006), la producción se toma como una caminata aleatoria con deriva, y los desastres raros se identifican como caídas grandes, instantáneas y permanentes en la producción,

a su vez calibra la frecuencia y el impacto permanente de los desastres para que coincida con las grandes caídas en el PIB real per cápita de largo plazo para 35 países, usando un conjunto de datos de panel. Un resultado importante su modelo es que aproximadamente se puede hacer coincidir la prima de renta variable observada con un coeficiente de aversión relativa al riesgo del consumidor representativo.

El modelo desarrollado por Barro and Jin (2011) analiza el tamaño de la distribución de los desastres macroeconómicos, muestra que el coeficiente requerido de aversión relativa al riesgo se puede reducir a alrededor de tres si la distribución de tamaño de los desastres macroeconómicos se mide mediante una distribución estimada de la ley de potencias. En Gourio (2012) se construye un modelo en el cual se asume que un desastre es impulsado por choques permanentes y transitorios de productividad, así como por choques de depreciación. Muestra que el efecto promedio a largo plazo de un desastre sobre el consumo es significativamente negativo, además la introducción del riesgo de desastres variable en el tiempo en un modelo de ciclo económico real estándar, mejora el ajuste de los datos de retorno para los activos, conserva las implicaciones para las cantidades en respuesta a las perturbaciones de la PTF y crea algunas dinámicas macroeconómicas nuevas e interesantes.

Barro and Ursúa (2012) destacan que la investigación teórica y empírica sugiere que los modelos de desastres raros tienen un mayor poder explicativo para entender una variedad de acertijos sobre los precios de los activos. Además, las probabilidades de desastres que varían en el tiempo pueden ser un componente importante de los modelos de ciclos económicos en una economía cerrada y abierta. Argumentan que la probabilidad y la distribución del tamaño de los desastres macroeconómicos son difíciles de cuantificar empíricamente porque los eventos relevantes son raros y posiblemente ausentes en muestras cortas. Por lo tanto, se requiere de series de tiempo largas para cuantificar los efectos durante muchos eventos claves, como guerras y grandes crisis financieras.

El trabajo de Nakamura et al. (2013) se constituye como uno de los primeros estudios que permite para estimar los efectos dinámicos, tanto a largo como a corto plazo, de grandes desastres sobre la dinámica del consumo. Particularmente, desarrollan un modelo de desastres de consumo que permite que los desastres se desarrollen durante varios años y que sean seguidos sistemáticamente por recuperaciones. El modelo también permite que los choques transitorios crezcan en tiempos normales y estén correlacionados en el momento de los desastres entre países. Con esto se captura el efecto de que los grandes desastres, como las guerras mundiales del siglo XX, afectan a muchos países simultáneamente. Modelan los desastres de dos formas, primero, el caso donde los desastres causan una gran caída a corto plazo del consumo y en segundo lugar, los desastres que pueden afectar el nivel de consumo potencial al que volverá el nivel de consumo real. Asumen que los desastres tienen una distribución normal truncada en el intervalo $[-\infty, 0]$ y una distribución gamma la cual es una distribución flexible unilateral que tiene un exceso de curtosis en relación con la distribución normal. Muestran que el consumo suele disminuir durante varios años antes

de recuperarse cuando sucede un desastre, lo cual implica que la EIS que rige la disposición de los consumidores para compensar el consumo a lo largo del tiempo, juega un papel importante en la determinación de las implicaciones de precios de los activos.

Pindyck and Wang (2013) desarrollan un modelo de equilibrio en tiempo continuo de una economía que incorpora choques catastróficos en el capital social modelados por procesos de difusión y de saltos de tamaño constante con una distribución de potencia, y que vincula los primeros cuatro momentos de los rendimientos de las acciones, junto con variables económicas como el consumo, la inversión, tasas de interés, y la q de Tobin, con los parámetros que describen las características de los shocks, así como con los parámetros de comportamiento como el coeficiente de aversión relativa al riesgo y elasticidad de la sustitución intertemporal. El modelo permite calcular la tasa impositiva máxima porcentual permanente que los agentes están dispuestos a aceptar para eliminar la posibilidad de un choque catastrófico, o reducir el máximo impacto posible del choque. También calcula el precio de equilibrio del seguro contra el riesgo catastrófico, y compara el uso del seguro con el costo de reducir o eliminar el riesgo.

Un punto de partida para esta investigación es el trabajo de Aruoba et al. (2006) quienes analizan un modelo de crecimiento neoclásico en tiempo discreto, el cual tiene asociado una componente estocástica de tipo exponencial en el factor de tecnología. Los autores resuelven el problema del planeador central para el caso discreto, por medio de la ecuación de Bellman. Establecen la solución numérica y comparan los algoritmos del método de perturbaciones y de proyecciones donde se consideran elementos finitos y polinomios de chebyshev. Nuestro estudio se puede observar como una versión en tiempo continuo de este modelo.

Otro trabajo fundamental en la estructura de nuestro modelo, al que hacemos una extensión, considerando saltos en la dinámica del capital asociados a eventos raros, es el de Parra-Alvarez (2017). El autor considera una versión en tiempo continuo de un modelo DSGE, donde el *stock* de capital está sujeto a choques exógenos aleatorios, definidos por un proceso browniano con volatilidad σ y los choques de la productividad total de los factores heterocedásticos, definidos por un proceso Cox-Ingersoll-Ross (CIR). El autor en la solución numérica compara el método de perturbaciones, proyecciones y *linear-quadratic approximation*. Lo anterior trae como consecuencia mejores resultados con el método de perturbaciones para valores razonables de los parámetros estructurales; al igual que con el método de proyecciones cuando es requerido un alto grado de precisión.

Los estudios de Posch (2009), Posch (2011) y Posch (2013) resaltan la importancia del uso de saltos modelados con procesos de Poisson para representar desastres raros que afectan las variables económicas. También analizan la relación entre la prima de riesgo, las no linealidades de una función de producción neoclásica y predictibilidad a lo largo del ciclo económico. Muestran que estas características empíricas se vuelven relevantes cuando se permiten no-normalidades en la forma de desastres raros. Emplean soluciones analíticas de modelos dinámicos de equilibrio general estocástico (DSGE), en el que mezclan procesos brownianos con procesos de saltos deter-

minísticos con tamaño constante; con el fin de obtener expresiones cerradas de la prima de riesgo. Particularmente estos estudios son tomados como base para desarrollar las demostraciones de las propuestas analíticas en este documento, en el caso de saltos en la dinámica del capital.

Los modelos que combinan procesos de difusión y saltos, también son usados por Tsai and Wachter (2015), para analizar el efecto que tiene el aumento en el riesgo de desastres y las crisis financieras sobre los precios de activos y ciclos económicos. Muestran que el riesgo de desastres ofrece un marco coherente y detallado para comprender los fenómenos que suceden sobre los precios de activos, que incluyen la prima de equidad, la tasa libre de riesgo y la volatilidad; así como en renta fija y mercados de opciones.

En los trabajos de Wälde (2005), Wälde (2011) y Hiraguchi (2014), se destaca el uso de métodos de modelación en tiempo continuo bajo incertidumbre en aplicaciones macroeconómicas, puesto que dadas sus propiedades resultan ser convenientes para representar los distintos fenómenos a los que se exponen las variables en economía. Muestran que se dispone de una formulación alternativa de tecnologías de producción que no tienen los inconvenientes del enfoque diferencial, que obtienen soluciones de forma cerrada para problemas de maximización con utilidad instantánea logarítmica; y cuentan con una utilidad de aversión relativa al riesgo constante (CRRA); las cuales están asociadas a un proceso browniano y a procesos de Poisson como fuente de incertidumbre para la evolución de la productividad total de los factores (PTF), en una tecnología Ak.

Los estudios de Wang (2007), Brunnermeier and Sannikov (2014) y Wang et al. (2016) se encuentran misma línea del impacto de las mejoras tecnológicas, junto con variaciones de ingresos en productividad y distribución de riqueza, donde la economía es propensa a la inestabilidad y ocasionalmente, entra en episodios de crisis volátiles.

Dentro de los principales estudios relacionados con los impactos macroeconómicos asociados al cambio climático, que permiten observar el manejo de la incertidumbre y el efecto de este tipo de eventos raros sobre el crecimiento de la economía, podemos mencionar los trabajos de Stern (2007) y Economics (2013). Estos informes cuentan sobre el impacto del cambio climático y el calentamiento global sobre la economía mundial. Aseguran que el cambio climático tiene un impacto sobre la tasa de crecimiento de una economía, al afectar las existencias de factores, la productividad y las tasas de crecimiento de ambos; como también al afectar la forma en que los agentes maximizan sus objetivos. En Fankhauser (2005), los autores modifican el modelo DICE (Dynamic Integrated model of Climate and the Economy) para ajustarlo a diferentes modelos de crecimiento y simular los impactos del cambio climático sobre la magnitud de los costos totales. Encontraron que el efecto de acumulación de capital es mayor que el efecto de ahorro.

Hallegate (2010) analizó los diferentes tipos de pérdidas que pueden causar los desastres asociados al cambio climático, dado que los desastres naturales destruyen el capital y existe un efecto directo sobre la productividad. Gillingham et al. (2015), es un estudio de la incertidumbre en el cambio climático. Utilizando múltiples modelos de evaluación integrada (IAMs), se analiza el modelo y

las incertidumbres paramétricas para la población, la productividad total de los factores y la sensibilidad climática. En dicho trabajo se encontró que la incertidumbre paramétrica es más importante que la incertidumbre en la estructura del modelo.

Hambel et al. (2020), tienen en cuenta el riesgo de desastres macroeconómicos para separar los efectos económicos del cambio climático e investigar la interacción entre el cambio climático y el precio de los activos verdes y sucios, analizan la dinámica de la tasa libre de riesgo y las primas de riesgo durante la transición de una economía intensiva en carbono a una economía de cero emisiones. Por su parte Fried (2018) cuantifica la interacción entre innovación endógena y política climática en un modelo dinámico de equilibrio general que modela explícitamente el impacto macroeconómico de la innovación en los sectores de energía fósil, energía verde y no energética.

Sobre la parte numérica, inicialmente se abordaron estudios que describen las no linealidades de los modelos DSGE, las cuales se convierten en un objetivo de estudio. Para ello se hace uso de otro tipo de aproximaciones numéricas de orden superior, junto con perturbaciones y proyecciones; esto según autores como Taylor and Uhlig (1990), Fernández-Villaverde and Rubio-Ramírez (2005), Aruoba et al. (2006), Schmitt-Grohé and Uribe (2004). Otra línea de estudios, apunta al caso de métodos de solución para modelos DSGE en tiempo continuo que se asocian con dinámicas y procesos estocásticos brownianos, y con procesos discontinuos; esto según Judd (1998), Miranda and Fackler (2004), Parra-Alvarez (2017) Posch (2013), Fernández-Villaverde et al. (2016) y Fernández-Villaverde and Levintal (2018).

En particular Miranda and Fackler (2004) describen diferentes métodos computacionales utilizados para resolver problemas dinámicos en economía agrícola, macroeconomía y finanzas. Describen métodos numéricos básicos para casos determinísticos, que presentan la forma de resolver modelos estocásticos dinámicos en economía y finanzas. De igual modo, se incluyen la programación dinámica, las expectativas racionales y los modelos de fijación de precios de arbitraje en tiempo discreto y continuo.

Fernández-Villaverde et al. (2016) y Fernández-Villaverde and Levintal (2018) proporcionan una visión general de las técnicas de solución y estimación para modelos DSGE. Describen los fundamentos de las técnicas de aproximación numérica, así como la inferencia estadística. Argumentan que los modelos DSGE con desastres raros requieren métodos de solución que puedan manejar las grandes no linealidades, desencadenadas por eventos de baja probabilidad y alto impacto con precisión y velocidad. Para ello utilizan métodos de perturbación, proyección de Taylor y colocación de Smolyak.

Strikwerda (2004); Scott (1999); Li et al. (2017) y Hirsu (2016) son importantes para entender la teoría básica y las herramientas sobre la solución de ecuaciones diferenciales por diferentes métodos numéricos; en especial el método de diferencias finitas, el cual se pretende implementar en este trabajo para aproximar la solución de los problemas de control óptimo a resolver.

Finalmente, en los estudios de Candler et al. (1998); Moll (2014) y Achdou et al. (2017), se hace una descripción completa sobre la solución de modelos en tiempo continuo usando diferencias finitas y en particular desarrollan una implementación del esquema *upwind* en diferencias finitas, que permite resolver modelos RBC de equilibrio general y modelos de agentes heterogéneos con dinámicas estocásticas.

1.2. Metodología

Los modelos DSGE a desarrollar de crecimiento neoclásico estocástico en tiempo continuo, corresponden a una economía pequeña y cerrada, que incluye variables de política económica en las cuales se combinan procesos de difusión brownianos y de saltos aleatorios, para modelar la incertidumbre. Las etapas para lograr el objetivo de este trabajo se describen a continuación.

Inicialmente se describió el modelo de referencia de equilibrio general dinámico y estocástico, a través de sus actores. También se hizo la descripción de los supuestos y formas funcionales sobre las cuales se construyen los modelos. En la segunda etapa, se plantea el problema de control óptimo estocástico en tiempo continuo a resolver. En la tercera etapa se determinó la solución del problema de control óptimo bajo el principio de optimalidad de Bellman y el teorema de verificación en tiempo continuo. En la cuarta etapa se usó las condiciones de primer orden para encontrar la función de valor adecuada que permitiera establecer la solución óptima del problema. En la quinta etapa se estableció las condiciones y supuestos necesarios para la existencia de una solución cerrada al problema en tiempo continuo. En la sexta etapa se encontró el equilibrio de estado estacionario mediante el planteamiento de la ecuación de HJB en tiempo continuo, para las funciones de política de los agentes; posteriormente se discretizó usando diferencias finitas la ecuación de (HJB) maximizada que resulta del proceso de optimización. se debió calibrar el modelo usando parámetros comunes a otros estudios similares; y bajo ciertas restricciones, se estudió la convergencia del modelo. Finalmente se discutió los resultados analíticos proporcionados para la solución del problema y para el estudio de posibles generalizaciones al modelo.

1.3. Modelo de referencia DSGE con dinámica de capital discontinua

Corresponde a un modelo de equilibrio general que trata de dar una explicación global del comportamiento de la producción, el consumo, el capital y la formación de precios en una economía, donde la empresa representativa produce un único bien que es propiedad de los hogares y se asume que opera en mercados competitivos.

Particularmente el modelo a estudiar considera una versión modificada de un modelo RBC en tiempo continuo descrito en Parra-Alvarez (2017) en el que el stock de capital está sujeto a

choques aleatorios continuos y discontinuos, y choques de la productividad total de los factores heterocedásticos. Se considera una función de producción agregada con retornos constantes a escala tipo Cobb- Douglas $Y_t = F(K_t, L_t)$ con $F_k, F_L > 0$ $F_{KK}, F_{LL} < 0$ y $F_{KL} > 0$

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad \alpha \in (0, 1) \quad (1.1)$$

Donde A_t es el factor estacionario asociado a la productividad total de los factores, L_t es el capital agregado y L_t es la fracción de horas trabajadas. La productividad total de los factores (PTF) se describe de forma general como

$$dA_t = a(A_t, t)dt + b(A_t, t)dB_{A,t} \quad (1.2)$$

Inicialmente se asume sigue un proceso de reversión a la media del tipo Cox-Ingersoll-Ross(CIR)

$$dA_t = \beta(\omega - A_t)dt + \eta\sqrt{A_t}dB_{A,t} \quad \beta \in \mathbb{R}, \omega > 0, \eta > 0. \quad A_0 = A > 0 \quad (1.3)$$

donde $B_{A,t}$ es un Movimiento Browniano estándar, que modela el factor de riesgo en el PTF. β corresponde a la velocidad de ajuste, ω media de largo plazo y η la volatilidad del proceso.⁴

Según Cox et al. (2005) bajo la hipótesis $2\beta\omega \geq \eta^2$ se garantiza que A_t toma siempre valores no-negativos.⁵

La ecuación (1.3) indica que la PTF tiende a cambiar su comportamiento de crecimiento o decrecimiento en el momento en que ocurre un choque excepcional modelado por el movimiento browniano, pero este cambio de comportamiento converge a la media de largo plazo cuando los hechos vuelven a ser normales ya que disminuyen las probabilidades de que se repita el hecho excepcional. En otras palabras, la reversión a la media consiste en que el valor que toma la PTF sea más cercano a su valor medio a medida que pasa el tiempo. Es de anotar que este tipo de procesos se han usado por Moll (2014) para ilustrar el papel de la autocorrelación de los choques de productividad frente a una mala asignación de capital y las pérdidas implícitas de PTF. El autor destaca que este tipo de procesos de reversión a la media, permiten una distribución estacionaria en los choques.

El proceso de capital agregado K_t es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dK_t = (I_t - \delta K_t)dt + K_t dJ_t \quad K_0 = K > 0 \quad (1.4)$$

⁴Presenta incrementos independientes $B_{A,t}(t+s) - B_{A,t}(t) \sim N(\mu s, \sigma^2 s)$.

⁵El proceso CIR también conocido como proceso de difusión de Feller, que tiene como valor esperado $E(A_t) = e^{-\beta t} A(0) + \omega(1 - e^{-\beta t})$ y como varianza $Var(A_t) = A(0) \frac{\eta^2}{\beta} (e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}) + \frac{\omega \eta^2}{2\beta} (1 - e^{-\beta t})^2$.

$$J_t = \sigma B_{K,t} + \sum_{n=1}^{N_t} (e^{z_n} - 1) \quad (1.5)$$

Donde I_t inversión, δ tasa de depreciación del capital, $dB_{K,t}$ choque exógeno agregado browniano con volatilidad $\sigma > 0$ que modela las pequeñas fluctuaciones de capital que se observan todos los días alrededor de su tendencia.⁶ El termino $\sum_{\tau_n \leq t} (e^{z_n} - 1)$ representa la suma de todos los saltos proporcionales al capital anterior que ocurren en la dinámica para un intervalo de tiempo dado. Así un proceso de Poisson compuesto modela los saltos bruscos e inesperados que ocasionalmente ocurren en el tamaño del capital y puede parametrizarse por una intensidad ("tasa de arribo") $\lambda > 0$ y una distribución de probabilidad específica para el tamaño de los saltos F .

En este caso la ecuación (1.4) indica la evolución del capital en el tiempo, que cuando se somete a un choque browniano nos dice que cada cambio de capital es independiente de los cambios de capital anteriores y presentan una volatilidad de capital moderada, además el hecho de incluir saltos en la dinámica de capital nos proporciona unas características especiales que los modelos de difusión no llegan a capturar, por ejemplo cuando los posibles resultados en la modelación incluyen valores positivos y negativos para el capital en forma de desastres raros.

Específicamente si ocurre un salto (asociado a un auge o a una caída) en el proceso de capital en el tiempo τ_n entonces el salto es proporcional al capital en el instante anterior K_{τ_n-} y el capital K_{τ_n} se puede expresar como:

$$\begin{aligned} K_{\tau_n} &= K_{\tau_n-} + \text{salto} \\ &= k_{\tau_n-} + K_{\tau_n-} (e^{z_n} - 1) \\ &= K_{\tau_n-} e^{z_n} \end{aligned}$$

Se obtienen choques negativos proporcionales al capital en el estado anterior si $e^{z_n} - 1 < 0$, esto ocurre cuando $z_n < 0$ y específicamente si el valor de z_n toma valores negativos muy grandes $e^{z_n} - 1 = -1$ por lo tanto se pueden obtener cambios relativos en el capital desde $(-1)K_t$ en adelante.

La condición de vaciado de mercado es:

$$Y_t = C_t + I_t \quad (1.6)$$

de donde $I_t = Y_t - C_t$ donde C_t consumo, I_t Inversión.

La empresa representativa que produce el bien único en la economía es propiedad de los hogares y se supone que opera en mercados competitivos. El objetivo de las firma es maximizar beneficios

⁶ $dJ_t = \sigma dB_{K,t} + \int (e^z - 1) N(dz, dt)$. $N(dz, dt)$ denota la medida de conteo aleatorio de un proceso de saltos con compensador $\nu = \lambda F$.

Π en cada período, de donde:

$$\Pi = Y_t - r_t K_t - w_t L_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - (r_t K_t + w_t L_t)$$

se obtiene como demandas óptimas de capital y trabajo

$$r_t = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \quad w_t = (1 - \alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (1.7)$$

operando se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \blacksquare r_t K_t &= \alpha A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = \alpha Y_t \\ \blacksquare w_t L_t &= (1 - \alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = (1 - \alpha) Y_t \\ r_t K_t + w_t L_t &= \alpha Y_t + (1 - \alpha) Y_t = Y_t \end{aligned} \quad (1.8)$$

Usando la relación (1.8) y reemplazando en (1.4) se obtiene el siguiente comportamiento para el proceso de capital agregado

$$dK_t = ((r_t - \delta)K_t + w_t l_t - C_t)dt + K_t - dJ_t, \quad K_0 = K > 0 \quad (1.9)$$

Combinando con la restricción (1.6) se obtiene:

$$dK_t = (A_t K_t^{\alpha-1} l_t^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t) dt + K_t - dJ_t, \quad K_0 = K > 0 \quad (1.10)$$

Se considera una función de utilidad de aversión relativa al riesgo constante (CRRA) ($f' > 0$ y $f'' < 0$) de la forma

$$f(C_t, L_t) = \frac{(C_t(1 - L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{con } \psi \geq 0 \text{ y } \gamma > 0.$$

El hogar representativo maximiza la utilidad esperada de la vida útil descontada que se derivada del consumo, C_t y ocio $(1 - L_t)$, sujeto a la función de producción, la evolución de la PTF, la evolución del stock de capital, la condición de vaciado del mercado $Y_t = C_t + I_t$ y algunas condiciones iniciales $K_0 = K > 0$, $A_0 = A > 0$, planteando el siguiente problema de control óptimo.

$$\max_{\{C_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \frac{(C_t(1-L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \quad \psi \geq 0 \quad \gamma > 0$$

s.a :

$$\begin{aligned} Y_t &= A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad \alpha \in (0, 1) \\ dA_t &= \beta(\omega - A_t)dt + \eta\sqrt{A_t}dB_{A,t} \quad \beta, \omega > 0 \quad A_0 = A > 0 \\ dK_t &= (A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t) dt + K_t dJ_t, \quad K_0 = k > 0 \\ Y_t &= C_t + I_t \end{aligned} \tag{1.11}$$

Donde se tiene como variables de control $C_t(k_t, A_t)$, $L_t(K_t, A_t)$ y variables de estado k_t, A_t . Para este proceso de control $(c, L) = \{(C_t, L_t)\}_{t \geq 0}$ toman valores en $[0, \infty) \times (0, 1)$, $K = K^{c,L}$ denota la solución de la ecuación diferencial estocástica controlada (1.10). Además para garantizar la existencia del máximo, se necesita que la función de utilidad se cóncava, por tanto según Swanson (2012), la medida de ocio consumo de la aversión relativa al riesgo debe ser mayor o igual a cero, $\gamma - (1 - \gamma)\psi \geq 0$.

Este problema de control se puede considerar como una versión continua del modelo discreto de Aruoba et al. (2006), el cual considera una productividad total de los factores de tipo exponencial que tiene asociado un proceso estocástico AR(1). Además es una extensión del modelo DSGE de Parra-Alvarez (2017) que incluye una dinámica de capital asociada a un proceso browniano sin incluir saltos y del modelo DSGE de Posch (2011, 2013) que incluye saltos en la dinámica de capital de tamaño constante.

Dado que el proceso K_t es de Markov, es posible usar el método conocido como programación dinámica y el teorema de verificación aplicado para el caso de dinámicas que combinan procesos de difusión y de saltos de poisson, usando como referencias principales Oksendal and Sulem (2009), Fleming and Soner (2006) y Hanson (2007). Esto permite definir la función de valor óptimo de este problema como

$$V(K_t, A_t) := \sup_{K_t^{C_t, L_t} \geq 0} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} f(C_t, L_t) dt \right], \quad K_0 = K \geq 0, \quad A_0 = A > 0 \tag{1.12}$$

El teorema de verificación conecta esta función con la siguiente ecuación integro-diferencial no lineal de segundo orden de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

$$-\rho V(K_t, A_t) + \sup_{C_t \geq 0, L_t \in (0,1)} \{[\mathcal{A}^{C_t, L_t} V](K_t, A_t) + f(C_t, L_t)\} = 0, \quad K \geq 0, \quad A > 0. \tag{HJB}$$

Para cada $C_t \geq 0$ y $L_t \in (0, 1)$, \mathcal{A}^{C_t, L_t} es el operador

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}^{C_t, L_t} V](K, A) &= (A_t L_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t) + \beta(w - A_t) \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t) \\ &+ \frac{1}{2} \eta^2 A_t \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t) + \lambda \int [V(e^z K_t, A_t) - V(K_t, A_t)] G(z) dz. \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden para este problema permiten encontrar las funciones óptimas de consumo y trabajo y establecen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} [C_t] : \frac{(1 - L_t)^{\psi(1-\gamma)}}{C_t^\gamma} &= \frac{\partial V}{\partial K_t} \\ [L_t] : \psi \frac{(C_t(1 - L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1 - L_t} &= (1 - \alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \frac{\partial V}{\partial K_t} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Por otro lado, para cada $(K, A) \in \mathbb{R}_+^2$ el máximo en la ecuación HJB satisface:

$$(\hat{C}_t(K_t, A_t, V_K), \hat{L}_t(K_t, A_t, V_K)) = \arg \max_{C_t \geq 0, L_t \in (0, 1)} [\mathcal{A}^{C_t, L_t} \hat{V}](K_t, A_t) + f(C_t, L_t)$$

Si se supone que \hat{c} y \hat{l} son óptimas, entonces se obtiene la siguiente ecuación de HJB:

$$-\rho \hat{V}(K_t, A_t) + \{[\mathcal{A}^{\hat{C}_t, \hat{L}_t} \hat{V}](K_t, A_t) + f(\hat{C}_t(K_t, A_t, V_K), \hat{L}_t(K_t, A_t, V_K))\} = 0.$$

El teorema de verificación establece que, $V = \hat{V}$ resuelve la ecuación (HJB) y garantiza la existencia de una regla de política óptima \hat{C}_t y \hat{L}_t tal que $\hat{C}_t = c(K_t, A_t)$ y $\hat{L}_t = L(K_t, A_t)$.

Así la solución de este problema esta completamente caracterizada por la ecuación de HJB Maximizada dada por:

$$\begin{aligned} \rho V(K_t, A_t) &= f(\hat{C}_t, \hat{L}_t) + (A_t K_t^\alpha \hat{L}_t^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t) + \beta(w - A_t) \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t) + \\ &\frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \eta^2 A_t \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t) + \lambda \int V(e^z K_t, A_t) G(z) dz - \lambda V(K_t, A_t). \end{aligned} \quad (1.14)$$

$G(z)$ es la función de densidad de probabilidad del salto de amplitud z , se asume que las variables aleatorias z_n son absolutamente continuas.

Condiciones de Equilibrio

Este planificador busca maximizar la utilidad de las familias representada por (1.11) sujeta a la función de producción (1.1), a las restricciones de la productividad total de los factores (1.3), la de acumulación de capital (1.10) y la restricción de equilibrio del mercado (1.6). Las cantidades resultantes de esta maximización son Optimos de Pareto, en el sentido que no es posible aumentar la utilidad de alguna de las firmas sin reducir la de otra.

El equilibrio de esta economía usa las condiciones de primer orden (1.13) para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (1.28) la cual permite encontrar la función de valor óptima junto con las demandas óptimas de consumo y de trabajo $\hat{V}(K_t, A_t)$, $\hat{C}(K_t, A_t)$ y $\hat{L}(K_t, A_t)$, de tal forma que dado un proceso exógeno estocástico, $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$ y la condición inicial $K_0 > 0$, se cumplan todas las restricciones planteadas.

En la siguiente sección mostramos que al igual que en Parra-Alvarez (2017); Boucekkine et al. (2018) y Posch (2009, 2011), bajo algunas restricciones paramétricas es posible derivar expresiones analíticas para la función del valor y las funciones de la política.

Las soluciones cerradas tienen por objetivo contribuir al estudio generalizaciones para este tipo de modelos de equilibrio general en el caso estocástico que ayuden a explicar el efecto de la incertidumbre sobre las decisiones de los agentes. Particularmente en este trabajo se extienden los resultados cuando se tiene una productividad total de los factores que se maneja por diferentes dinámicas como lo son un proceso de reversión a la media y un browniano geométrico, junto con el capital representado por combinación de procesos de difusión y saltos no necesariamente de tamaño constante.

Dado que en este tipo de problemas de control óptimo estocástico muchas veces es difícil encontrar soluciones cerradas. Entonces estas también juegan un papel fundamental porque se toman como referencia para estudiar las aproximaciones numéricas de las ecuaciones diferenciales que resultan en la solución del problema.

Otro aspecto importante es que permiten incluir una serie de condiciones para poder estudiar las aproximaciones numéricas, permiten derivar diferentes análisis de sensibilidad para ser comparados con las distintas soluciones numéricas posibles y ayudan a escoger las posibles calibraciones para los distintos modelos.

1.3.1. Solución analítica caso 1: PTF sigue un proceso de reversión a la media (CIR)

En general problema de control óptimo planteado, donde la PTF está asociado a un proceso CIR dado por (1.3) y la dinámica de capital que combina procesos brownianos y procesos discontinuos dados por (1.4) no admite solución cerrada, pero si se suponen ciertas restricciones paramétricas

se puede encontrar una solución cerrada para la función de valor y las funciones de política, que a su vez se pueden usar más adelante para evaluar la precisión de la solución numérica asociada. Esto nos permite plantear la siguiente proposición.

Proposition 1 *Suponga que los parámetros del modelo satisfacen la siguiente condición*

$$\beta\gamma + \lambda[m(1 - \alpha\gamma) - 1] > (1 - \alpha\gamma) \left[\delta + \frac{1}{2}\alpha\gamma\sigma^2 \right]. \quad (\star)$$

Aquí $m(\xi) := \mathbb{E}[e^{\xi y}] = \int e^{\xi y} F(dy)$ es la función generadora de momentos de la distribución $F(dy)$.

Asuma que existe $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ satisfaciendo la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden correspondiente a una ecuación hipergeométrica confluyente sobre \mathbb{R}_+

$$-\bar{\rho}g(A_t) + \beta(w - A_t)g'(A_t) + \frac{1}{2}\eta^2 A_t g''(A_t) = 0, \quad A_t > 0$$

con

$$\bar{\rho} := -(1 - \alpha\gamma) \left(\delta + \frac{1}{2}\alpha\gamma\sigma^2 \right) + \beta\gamma + \lambda(m(1 - \alpha\gamma) - 1) > 0.$$

Suponga además que se cumple la siguiente condición

$$\beta w = \frac{1}{2}\eta^2(\gamma + 1) \quad (\star\star)$$

y se define

$$\hat{L}_t(K_t, A_t) := \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)} \quad (1.15)$$

$$\hat{C}_t(K_t, A_t) := \frac{(1 - \alpha)(1 - \hat{L}_t)}{\psi \hat{L}_t} A_t K_t^\alpha \hat{L}_t^{1 - \alpha} \quad (1.16)$$

$$\hat{V}(K_t, A_t) := \Gamma \frac{K_t^{1 - \alpha\gamma}}{1 - \alpha\gamma} A_t^{-\gamma} + g(A_t) \quad (1.17)$$

con

$$\Gamma = (1 - L_t)^{\psi(1 - \gamma) - \gamma} \left(\frac{\psi}{1 - \alpha} \right)^\gamma \quad (1.18)$$

Entonces para cada $(K_t, A_t) \in \mathbb{R}_+^2$ el máximo en la ecuación (HJB) satisface:

$$(\hat{C}_t(K_t, A_t), \hat{L}_t(K_t, A_t)) = \arg \max_{C_t \geq 0, L_t \in (0, 1)} [\mathcal{A}^{C_t, L_t} \hat{V}](K_t, A_t) + f(C_t, L_t)$$

Si se supone \hat{c} y \hat{L} óptimas, se obtiene la siguiente ecuación de HJB:

$$-\bar{\rho}\hat{V}(K_t, A_t) + \{[\mathcal{A}^{\hat{c}, \hat{L}} \hat{V}](K_t, A_t) + f(\hat{c}(K_t, A_t), \hat{L}_t)\} = 0.$$

En otras palabras, \hat{V} resuelve la ecuación (HJB) con $\rho = \bar{\rho}$. Este indica el grado de impaciencia que tiene el consumidor, cuanto más grande es ρ mayor importancia tendrá la utilidad presente del consumo comparada con la futura.⁷ En estas condiciones, según Oksendal and Sulem (2009), Fleming and Soner (2006) y Hanson (2007), el teorema de verificación garantiza la existencia de una regla de política óptima para este valor particular de ρ y esta dada por

$$\hat{C}_t = \hat{c}(K_t, A_t) = \frac{(1 - \alpha)(1 - \hat{L}_t)}{\psi \hat{L}_t} A_t K_t^\alpha \hat{L}_t^{1-\alpha}$$

Con \hat{L}_t constante dado por (1.15).

Este resultado nos muestra al igual que en Parra-Alvarez (2017) y Posch (2011) que cuando se introducen factores de incertidumbre en la dinámica de capital que mezclan procesos brownianos y procesos de saltos aleatorios no necesariamente de tamaño constante y el parámetro ρ toma el valor específico $\rho = \bar{\rho}$, el modelo proporciona soluciones cerradas que sirven principalmente para verificar la precisión de las soluciones numéricas a resolver, además el individuo obtiene un consumo óptimo proporcional a su nivel de ingreso, un factor de trabajo óptimo constante, el ahorro constante inversamente proporcional a la aversión relativa al riesgo de su utilidad $s = \frac{1}{\gamma}$ y la función de utilidad indirecta dada por la función de valor presenta aversión relativa al riesgo constante $\frac{-V_{KK} K}{V_K} = \alpha\gamma$.

También se puede anotar que la participación del capital α , La aversión relativa al riesgo γ , la medida de ocio consumo ψ , la volatilidad del capital σ , la tasa de arribo de los saltos λ y la función generadora de momentos asociada a la distribución de los saltos, influyen directamente sobre las funciones de consumo y trabajo óptimas y sobre el factor impaciencia ρ de los agentes, particularmente ρ es creciente en la media β_A , en la volatilidad del capital σ_k y en la componente de los saltos.

Específicamente la contribución de la componente de saltos al factor de impaciencia de los agentes la da el término asociado a la función generadora de momentos, dependiendo del tipo de distribución asociada al salto si $m(1 - \alpha\gamma) > 1$ se obtiene una contribución positiva en ρ , el individuo valora más el presente que el futuro.

La intuición que se tiene al cumplirse la restricción paramétrica $\rho = \bar{\rho}$ implica que todos los agentes deben tener algún nivel de ahorro y valoran su consumo futuro, si $\rho > \bar{\rho}$ los agentes ahorran menos y el stock de capital cae y si $\rho < \bar{\rho}$ ahorran mucho y consumen cada vez menos. Es de anotar también que este aspecto que esta relacionado con el factor de impaciencia de los individuos, que se explica mejor con la teoría relacionada con la tercera derivada de la función de utilidad incluida también en este capítulo.

⁷ Al cumplirse la restricción paramétrica $\rho = \bar{\rho}$ implica que todos los agentes deben tener algún nivel de ahorro y valoran su consumo futuro, si $\rho > \bar{\rho}$ los agentes ahorran menos y el stock de capital cae y si $\rho < \bar{\rho}$ ahorran mucho y consumen cada vez menos.

Por su parte el mecanismo de transmisión de los parámetros asociados al proceso de reversión a la media CIR hacia las funciones óptimas de consumo y trabajo se hace indirectamente a través de la función de valor, la cual tiene asociado un término que resulta de solucionar la ecuación hipergeométrica confluyente en $g(A_t)$.

Corolario 1 *Si se cumple la restricción paramétrica $\rho = \bar{\rho}$ entonces para un nivel de (K_t, A_t) dados, las elasticidades de la función de consumo y trabajo con respecto a la aversión al riesgo γ y a la medida de ocio consumo ψ , están dadas por:*

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{-\psi(1-\alpha)}{[\gamma(1-\alpha) - \psi(1-\gamma)]^2} < 0 \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = -\frac{(1-\alpha)}{\psi}(\alpha + (1-\alpha)l_t)AK_t^\alpha L_t^{-\alpha-1} \frac{\partial L_t}{\partial \gamma} > 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\gamma(1-\alpha)(1-\gamma)}{[\gamma(1-\alpha) - \psi(1-\gamma)]^2} \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \psi} = -\frac{(1-\alpha)(1-L_t)}{\psi^2 L_t} AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} < 0 \quad (1.22)$$

Esto nos indica que al aumentar la aversión relativa al riesgo γ los agentes tienden a preferir resultados con baja incertidumbre, en este caso se espera que aumenten su consumo y tengan una demanda de trabajo decreciente.

por otro lado al aumentar la medida relativa al ocio consumo ψ se espera que los agentes disminuyan su consumo y si son más adversos al riesgo la demanda de trabajo es decreciente.

El planteamiento de la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman (H.J.B) para este problema, las condiciones de primero y segundo orden que resuelven el problema de optimización, el guess de la función de valor adecuado y las condiciones bajo las cuales existe solución cerrada como el equilibrio de estado estacionario y el corolario (1) se presentan en el Anexo 1. ⁸

Proposition 2 *Suponga que el factor de trabajo es constante y se normaliza a un tamaño de uno, es decir $l_t \equiv 1$, la PTF está asociado a un proceso CIR dado por (1.3) y la dinámica de capital que combina procesos brownianos y procesos discontinuos dados por (1.4). Si $\alpha = \gamma$ ⁹ entonces la función de valor óptimo es:*

$$V(K_t, A_t) = \Omega \frac{K_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + B(A_t) \quad (1.23)$$

⁸La demostración se hace tomando como referencia Parra-Alvarez (2017) y la proposición (3.2) de Posch (2011)

⁹Si $\alpha = \gamma$ al igual que en Smith (2006) y Smith (2007), el consumo C_t y el capital K_t crecen a la misma tasa para que su relación sea constante e igual a: $\frac{C_t}{K_t} = \frac{2\rho + 2\delta(1-\gamma) + \gamma(1-\gamma)\sigma^2 - 2\lambda(m(1-\gamma) - 1)}{2\gamma}$

la política óptima de consumo es

$$C_t(K_t, A_t) = \Omega^{\frac{-1}{\gamma}} K_t \quad (1.24)$$

donde

$$\Omega = \left(\frac{2\rho + 2\delta(1 - \gamma) + \gamma(1 - \gamma)\sigma^2 - 2\lambda(m(1 - \gamma) - 1)}{2\gamma} \right)^{-\gamma} \quad (1.25)$$

Asuma que existe $B \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ solución de la Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden correspondiente a una ecuación hipergeométrica confluyente no homogénea sobre \mathbb{R}_+

$$\frac{1}{2}\eta^2 A_t B''(A_t) + \beta(\omega - A_t)B'(A_t) - \rho B(A_t) = -\Omega A_t, \quad A_t > 0$$

Cuya solución se expresa como:¹⁰

$$B(A_t) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(C+n)} \frac{z^n}{n!} + \frac{\Omega}{\beta + \rho} \left(A_t + \frac{\beta\omega}{\rho} \right); \quad z = \frac{2\beta}{\eta^2} A_t \quad C = \frac{2\beta\omega}{\eta^2} \quad b = \frac{\rho}{\beta}$$

La incertidumbre asociada a la dinámica del capital afecta directamente las decisiones de consumo de los agentes, la incertidumbre de la PTF lo hace indirectamente a través de la función de valor.

Es de anotar que el supuesto teórico de $\alpha = \gamma$ si $\alpha \in (0, 1)$ se toma con el propósito de encontrar una solución cerrada al modelo y para establecer la precisión de las soluciones numéricas a resolver. Además esta restricción implica una elasticidad intertemporal de sustitución relativamente alta $EIS = \frac{1}{\gamma}$, lo que implica que la suavización del consumo sea débil. Esta suposición esta bien establecida en la literatura correspondiente a modelos estocásticos de equilibrio general por ejemplo se puede observar los trabajos de Smith (2006, 2007); Feicht and Stummer (2010); Wälde (2005); Posch (2009, 2013); Candler et al. (1998).

La evidencia empírica se puede ver por ejemplo en los resultados del trabajo de Candler et al. (1998) quien estudia un modelo neoclásico estocástico donde asume una función de utilidad $U(c) = \frac{c^\gamma}{\gamma}$ con $\gamma < 1$ y particularmente resuelve el caso especial $\alpha = \gamma = 0,5$ para poder comparar la solución numérica con la solución analítica exacta, también toma este valor para evitar la no linealidad existente a la hora de calcular el consumo óptimo.

También en Posch (2013) se plantean distintas calibraciones para un modelo con desastres raros con tamaño constante y destrucción de capital donde se usa $\alpha = \gamma = 0,5$ y simplemente se toman para comparar una calibración donde existe una solución analítica disponible.

Corolario 2 Si se cumple la restricción paramétrica $\alpha = \gamma$ entonces para un nivel de (K_t, A_t) dados las elasticidades de la función de consumo con respecto a la intensidad de los saltos λ y a la aversión relativa al riesgo γ respectivamente son:

¹⁰La demostración se hace en el anexo 1 tomando como referencia Smith (2007) y Posch (2011)

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda} = -\frac{m(1-\gamma)-1}{\gamma} K_t \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{-\delta - \frac{\gamma^2}{2}\sigma^2 + \lambda(\gamma \frac{\partial m(1-\gamma)}{\partial \gamma}) + m(1-\gamma) - 1 - \rho}{\gamma^2} K_t \quad (1.27)$$

Esto nos indica que la razón de cambio del consumo óptimo con respecto a la tasa de arribo de los saltos y a la aversión relativa al riesgo depende directamente del tipo de función generadora de momentos $m(\xi)$ asociada a la función de densidad de los saltos. En este caso la estructura de los saltos en el capital juega un papel importante en el comportamiento del consumo óptimo. Ver demostración en el anexo 1.

1.3.2. Una ecuación de Euler

Usando lo descrito por Achdou et al. (2017), se puede obtener la ecuación de Euler a partir de la ecuación de HJB, usando las condiciones de primer orden y el teorema de la envolvente, los resultados se muestran a continuación.

El punto de partida es la ecuación maximizada de HJB (1.28)

$$\begin{aligned} \rho V(K_t, A_t) = & f(\hat{C}_t, \hat{L}_t) + (A_t K_t^\alpha \hat{L}_t^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t) + \beta(w - A_t) \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t) + \\ & \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \eta^2 A_t \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t) + \lambda \int V(e^z K_t, A_t) G(z) dz - \lambda V(K_t, A_t). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Derivando la ecuación anterior con respecto a K_t (condición de la envolvente) y usando la condición de primer orden

$$f_c(C(K, A), L(K, A)) = V_K(K_t, A_t)$$

De donde

$$V_{KK}(K_t, A_t) = f_{cc}(c(K, A), L(K, A)) \frac{\partial c}{\partial K}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \rho V_K = & (\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - \delta - C_K) V_K + (A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - c) V_{KK} + \beta(w - A_t) V_{AK} + \sigma^2 K V_{KK} + \\ & \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 V_{KKK} + \frac{1}{2} \eta^2 A V_{AAK} + \lambda \int V_K(e^z K, A) G(z) dz - \lambda V_K \end{aligned}$$

Que se puede escribir como:

$$(\rho - \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + \delta + C_K) V_K = (A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - c + \sigma^2 K) V_{KK} + \beta(w - A_t)(V_K)_A + \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 (V_K)_{KK} + \frac{1}{2} \eta^2 A (V_K)_{AA} + \lambda \int V_K(e^z K, A) G(z) dz - \lambda V_K$$

equivalente a la ecuación:

$$(\rho - \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + \delta + C_K) f_c = (A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - c + \sigma^2 K) f_{cc} C_k + \beta(w - A_t)(f_c)_A + \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 (f_c)_{KK} + \frac{1}{2} \eta^2 A (f_c)_{AA} + \lambda \int f_c(e^z K, A) G(z) dz - \lambda f_c$$

Si llamamos $S = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - c$ se obtiene la correspondiente ecuación de Euler la cual se establece como una condición necesaria para establecer las funciones óptimas de consumo y de trabajo, que también se obtienen resolviendo la ecuación de HJB (1.28). La ecuación de Euler es de la forma:

$$(\rho - S_K) f_c = (S + \sigma^2 K) C_K f_{cc} + \mathcal{B}(f_c) \quad (1.29)$$

Donde \mathcal{B} el generador infinitesimal asociado al proceso estocástico del ingreso que combina el proceso de difusión y de saltos:

$$\mathcal{B}(\nu) = \beta(w - A_t) \frac{\partial}{\partial A}(\nu) + \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 \frac{\partial^2}{\partial k^2}(\nu) + \frac{1}{2} \eta^2 A \frac{\partial^2}{\partial A^2}(\nu) + \lambda \int \nu(e^z K, A) G(z) dz - \lambda \nu$$

1.3.3. Solución analítica caso 2: PTF sigue un Movimiento Browniano Geométrico

En este modelo se considera que la productividad total de los factores (PTF) A_t sigue un movimiento browniano geométrico entonces, se supone que el valor actual de A_t se conoce en el tiempo t , pero que sus valores futuros son inciertos. En otras palabras, A_t se describe como en Merton (1975) es decir, cada cambio de la PTF es independiente de los cambios anteriores y la volatilidad de dichos cambios es constante.

$$dA_t = \beta A_t dt + \eta A_t dB_{A,t} \quad \beta > 0 \quad A_0 = A > 0 \quad (1.30)$$

Donde $B_{A,t}$ es un Movimiento Browniano estándar que modela el factor de riesgo en la PTF con tasa de crecimiento esperada $\beta \geq 0$ y volatilidad $\eta > 0$.

El hogar representativo maximiza la utilidad esperada de la vida útil descontada que se deriva del consumo, C_t y ocio $(1 - L_t)$ y resuelve el siguiente problema de control óptimo.

$$\max_{\{C_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \frac{(c_t(1-L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \quad \psi \geq 0 \quad \gamma > 0$$

s.a :

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad \alpha \in (0, 1)$$

$$dA_t = \beta A_t dt + \eta A_t dB_{A,t} \quad \beta > 0, \quad A_0 = A > 0$$

$$dK_t = (A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t) dt + K_t dJ_t,$$

$$K_0 = K > 0$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

Proposition 3 *Suponga que los parámetros del modelo satisfacen la siguiente condición*

$$\bar{\rho} = -\delta(1-\alpha\gamma) + \beta\gamma - \frac{1}{2}\alpha\gamma\sigma^2(1-\alpha\gamma) + \frac{1}{2}\eta^2\gamma(\gamma+1) + \lambda(m(1-\alpha\gamma) - 1) > 0 \quad (1.31)$$

Asuma que existe $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ solución de la Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden sobre \mathbb{R}_+

$$-\bar{\rho}g(A_t) + \beta A_t g'(A_t) + \frac{1}{2}\eta^2 A_t^2 g''(A_t) = 0, \quad A > 0$$

cuya solución tiene la forma: $g(A_t) = C_1 A_t^{r_1} + C_2 A_t^{r_2}$;

Se define

$$\hat{L}_t(K_t, A_t) := \frac{\gamma(1-\alpha)}{\gamma(1-\alpha) - \psi(1-\gamma)} \in [0, 1] \quad (1.32)$$

$$\hat{C}_t(K_t, A_t) := \frac{\gamma-1}{\gamma} A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (1.33)$$

$$\hat{V}(K_t, A_t) := \Gamma \frac{K_t^{1-\alpha\gamma}}{1-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma} + g(A_t) \quad (1.34)$$

con

$$\Gamma = (1-l_t)^{\psi(1-\gamma)-\gamma} \left(\frac{\psi}{1-\alpha} \right)^\gamma \quad (1.35)$$

Entonces para cada $(K_t, A_t) \in \mathbb{R}_+^2$ el máximo en la ecuación (HJB) satisface:

$$(\hat{C}_t(K_t, A_t), \hat{L}_t(K_t, A_t)) = \arg \max_{C_t \geq 0, L_t \in (0,1)} [\mathcal{A}^{C_t, L_t} \hat{V}](K_t, A_t) + f(C_t, l_t)$$

Si se supone \hat{c} y \hat{L} óptimas se obtiene la siguiente ecuación de HJB:

$$-\bar{\rho}\hat{V}(K_t, A_t) + \{[\mathcal{A}^{\hat{C}_t, \hat{L}_t} \hat{V}](K_t, A_t) + f(\hat{C}_t(K_t, A_t), \hat{L}_t)\} = 0.$$

\hat{V} resuelve la ecuación (HJB) con $\rho = \bar{\rho}$ y de esta forma el teorema de verificación garantiza la existencia de la política óptima para este valor particular de ρ , dada por:

$$\hat{C}_t(K_t, A_t) := \frac{\gamma - 1}{\gamma} A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

$$\hat{L}_t(K_t, A_t) := \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)} \in [0, 1]$$

La demostración se puede ver en el anexo 1.

Corolario 3 *Bajo la restricción paramétrica $\rho = \bar{\rho}$ y con (K_t, A_t) dados, las elasticidades de la función de consumo y trabajo con respecto a la aversión relativa al riesgo γ son:*

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{-\psi(1 - \alpha)}{[\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)]^2} < 0 \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{(1 - \alpha)[\gamma(1 - \alpha) - \psi\alpha(1 - \gamma)]}{\gamma[\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)]^2} A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (1.37)$$

Ver demostración en el anexo 1.

En este caso podemos calcular la tasa de depreciación efectiva del capital, si se reemplaza el consumo $\hat{C}_t(K_t, A_t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ en la dinámica del capital dada por la ecuación se obtiene:

$$dK_t = (A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} (\frac{1}{\gamma}) - \delta K_t) dt + K_t dJ_t, \quad K_0 = K > 0$$

Si consideramos $k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$ y aplicamos la regla del producto para procesos de difusión de Itô podemos expresar el capital en unidades efectivas luego

$$\frac{d(K_t)}{dt} = \frac{d(K_t/A_t L_t)}{dt} = \frac{A_t L_t \frac{dK_t}{dt} - K_t (L_t \frac{dA_t}{dt} + A_t \frac{dL_t}{dt})}{(A_t L_t)^2} = \frac{1}{A_t L_t} \frac{dK_t}{dt} - \frac{K_t}{A_t L_t} \left[\frac{dA_t}{dt} + \frac{dL_t}{dt} \right]$$

En este modelo $\frac{dL_t}{dt} = 0$ por tanto al reemplazar obtenemos que la dinámica del capital efectivo dada por:

$$dk_t = \left[\frac{1}{\gamma} (A_t k_t)^\alpha - (\delta + \beta - \frac{1}{2} \eta^2) k_t \right] dt + k_t (\sigma dB_{K,t} - \eta dB_{A,t}) + k_t \int (e^z - 1) N(dz, dt)$$

Así la tasa de crecimiento efectiva de capital es:

$$\frac{dk_t}{k_t} = \left[\frac{1}{\gamma} A_t^\alpha k_t^{\alpha-1} - (\delta + \beta - \frac{1}{2} \eta^2) \right] dt + (\sigma dB_{K,t} - \eta dB_{A,t}) + \int (e^z - 1) N(dz, dt) \quad (1.38)$$

Aquí se muestra que la incertidumbre de la productividad de los factores (η) reduce la tasa efectiva

de depreciación del capital dada por $\hat{\delta} = \delta + \beta - \frac{1}{2}\eta^2$ y esto implica un efecto positivo sobre los niveles de la tasa de crecimiento efectiva de capital.

1.3.4. Conceptos básicos sobre Ahorro precautorio

Usando los resultados de Kimball (1990); Turnovsky (2006); Wang et al. (2016) se pretende mostrar que si la utilidad marginal del consumo es una función convexa del consumo, el consumidor presenta un comportamiento prudente lo cual implica que reacciona al aumento de incertidumbre ahorrando más. Cuanto más convexa sea la utilidad marginal más prudentes son los consumidores.

El coeficiente de prudencia absoluta se define por:

$$P_A = -\frac{U'''(C_t)}{U''(C_t)}$$

por su parte el coeficiente de prudencia relativa que determina la fuerza del ahorro precautorio se define por la siguiente expresión:

$$P_R = -\frac{-U'''(C_t)}{U''(C_t)}C_t$$

Tambien se puede expresar el coeficiente de aversión absoluta y relativa al riesgo :

$$R_A = \frac{-U''(C_t)}{U'(C_t)}$$

$$R_R = \frac{-U''(C_t)}{U'(C_t)}C_t$$

El coeficiente de aversión relativa al riesgo, R_R tiene efectos compensatorios; un coeficiente mayor representa un motivo precautorio más fuerte (más riqueza acumulada), pero al mismo tiempo, un R_R mayor conduce a una elasticidad intertemporal de sustitución menor, aumentando la condición de impaciencia.

Finalmente la relación entre la aversión al riesgo y la prudencia se establece por la siguiente expresión:

$$P_A - R_A = -\frac{d(\ln(R_A))}{dC_t}$$

Ahora trato de mostrar como estos conceptos se pueden relacionar con el modelo de difusión y de saltos que estamos estudiando.

En primer lugar, en nuestro caso la función de utilidad es de tipo CRRA dada por

$$U(C_t, L_t) = \frac{(C_t(1 - L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{con } \psi \geq 0 \text{ y } \gamma > 0.$$

Entonces respectivamente los coeficientes de prudencia y aversión relativa son:

$$P_R = -\frac{-U'''(C_t)}{U''(C_t)}C_t = (\gamma + 1)$$

$$R_R = \frac{-U''(C_t)}{U'(C_t)}C_t = \gamma$$

Dado que el coeficiente de prudencia determina la **fuerza del ahorro precautorio**, el coeficiente positivo indica que la motivación que tienen los agentes para ahorrar, es significativa.

En segundo lugar, el modelo considera un proceso CIR para la PTF

$$dA_t = \beta(w - A_t)dt + \eta\sqrt{A_t}dB_{A,t}$$

y un proceso de difusión y de saltos para la dinámica del capital

$$dK_t = (A_tK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t)dt + K_t\sigma dB_{K,t} + K_t\int (e^z - 1)N(dz, dt)$$

Usando la condición de primer orden $f_C = V_K$ permite escribir el consumo óptimo como $\hat{C}(K_t, A_t) = I(V_K)$ donde $I = (f_C)^{-1}$, entonces si aplicamos diferenciación de Itô obtenemos $d\hat{C}(K_t, A_t)$:

$$d\hat{C}(K_t, A_t) = \left[(A_tK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t)\hat{C}_K + \beta(w - A_t)\hat{C}_A + \frac{1}{2}\sigma^2 K_t^2 \hat{C}_{KK} + \frac{1}{2}\eta^2 A_t \hat{C}_{AA} \right] dt$$

$$+ \sigma K_t \hat{C}_K dB_{K,t} + \eta\sqrt{A_t} \hat{C}_A dB_{A,t} + \int \left(\hat{C}(K_t + k_t(e^z - 1), A_t) - \hat{C}(K_t, A_t) \right) N(dz, dt)$$

Que es equivalente a

$$d\hat{C}(K_t, A_t) = \left[(A_tK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t)\hat{C}_K + \beta(w - A_t)\hat{C}_A + \frac{1}{2}\sigma^2 K_t^2 \hat{C}_{KK} + \frac{1}{2}\eta^2 A_t \hat{C}_{AA} + \lambda \int \hat{C}(K_t e^z, A_t) G(z) dz - \lambda \hat{C}(K_t, A_t) \right] dt + \sigma K_t \hat{C}_K dB_{K,t} + \eta\sqrt{A_t} \hat{C}_A dB_{A,t}$$

Por ejemplo si se considera el caso donde $A_t = A$ y $L_t = L$ son constantes, podemos analizar la

componente de tendencia de la variación del consumo de la siguiente forma:

$$d\hat{C}(K_t, A) = \left[(AK_t^\alpha L^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t)\hat{C}_K + \frac{1}{2}\sigma^2 K_t^2 \hat{C}_{KK} + \right. \\ \left. + \lambda \int \hat{C}(K_t e^z, A)G(z)dz - \lambda \hat{C}(K_t, A) \right] dt + \sigma K_t \hat{C}_K dB_{K,t}$$

$$\hat{C}_K = I'(V_K)V_{KK} \\ \hat{C}_{KK} = I''(V_K)(V_{KK})^2 + I'(V_K)V_{KKK}$$

Por otro lado por definición de la derivada de la inversa

$$I'(z) = \frac{1}{f''(z)} \quad I''(z) = -\frac{f'''(z)}{(f''(z))^3}$$

De esta forma se puede describir las derivadas del consumo así:

$$\hat{C}_K = \frac{V''(K)}{f''(I(V'(K)))} = \frac{V''(K)}{f''(\hat{C})} \\ \hat{C}_{KK} = \frac{-f'''(\hat{C})(V''(K))^2}{[f''(\hat{C})]^3} + \frac{V'''(K)}{f''(\hat{C})}$$

Entonces el termino de tendencia de $d\hat{C}(K, A)$ se escribe como:

$$\left\{ [AK_t^\alpha L^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t] \frac{V''(K)}{f''(\hat{C})} + \frac{1}{2}\sigma^2 K_t^2 \left(\frac{-f'''(\hat{C})(V''(K))^2}{[f''(\hat{C})]^3} + \frac{V'''(K)}{f''(\hat{C})} \right) \right. \\ \left. + \lambda \int I(V'(K))(K_t e^z, A)G(z)dz - \lambda I(V'(K)) \right\} dt$$

reescribiendo

$$\left\{ [AK_t^\alpha L^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t] \frac{V''(K)}{f''(\hat{C})} + \frac{\sigma^2 K_t^2}{2} \frac{1}{f''(\hat{C})} \left(\frac{(V''(K))^2 - f'''(\hat{C})}{f''(\hat{C})} - V''(K) \frac{-V'''(K)}{V''(K)} \right) \right. \\ \left. + \lambda \int I(V'(K))(K_t e^z, A)G(z)dz - \lambda I(V'(K)) \right\} dt \\ \left\{ [AK_t^\alpha L^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t] \frac{V''(K)}{f''(\hat{C})} + \frac{\sigma^2 K_t^2}{2} \frac{1}{f''(\hat{C})} \left(\frac{(V''(K))^2}{f''(\hat{C})} P_A(f(\hat{C})) - V''(K) P_A(V(K)) \right) \right. \\ \left. + \lambda \int I(V'(K))(K_t e^z, A)G(z)dz - \lambda I(V'(K)) \right\} dt$$

Donde

$$P_A(f(\hat{C})) = \frac{-f'''(\hat{C})}{[f''(\hat{C})]} \quad P_A(V(K)) = \frac{-V'''(K)}{V''(K)}$$

Respectivamente representan los coeficientes de prudencia absoluta en la función de utilidad $f(\hat{C})$ y en la función de valor $V(K)$, en términos de la convexidad de la utilidad marginal y de la función de valor ($f''' > 0, V''' > 0$) que básicamente es la característica de las preferencias de los agentes, para que surja el ahorro precautorio. Por tanto se demuestra que la tendencia del consumo está asociada a qué tan prudentes son los agentes.

1.4. Solución numérica

El uso de los modelos DSGE para resolver distintos problemas en macroeconomía dinámica es cada vez más común. Sin embargo, la naturaleza estocástica de las variables que se involucran en este tipo de modelos y los comportamientos de sus dinámicas, que muchas veces no son de carácter lineal, muestran, generalmente, cierta dificultad a la hora de encontrar soluciones analíticas para las distintas funciones de política que describen estos modelos en su equilibrio.

Es por ello que en macroeconomía dinámica han tomado mucha importancia los estudios dedicados a establecer soluciones aproximadas que, normalmente, se basan en técnicas de aproximación numérica y varían dependiendo de su uso, complejidad y requisitos computacionales.

La ecuación a resolver se puede reescribir en dos términos. El primero que depende las variables de control, el cual contiene una expresión no lineal. Por su lado, el segundo, aunque no está asociado a las variables de control, contiene el operador integral de los saltos, de la siguiente forma:

$$-\rho V(K_t, A_t) + \sup_{C_t \geq 0, L_t \in (0,1)} \left\{ (A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t) + f(C_t, L_t) \right\} + [\mathfrak{L}V](L_t, A_t) = 0$$

$$K \geq 0, A > 0.$$
(1.39)

donde

$$[\mathfrak{L}V](K_t, A_t) = \beta(w - A_t) \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \eta^2 A_t \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t) + \lambda \int [V(e^z K_t, A_t) - V(K_t, A_t)] G(z) dz$$
(1.40)

El objetivo es resolver numéricamente toda la ecuación integro-diferencial, es decir: encontrar una función (o alguna aproximación discreta a esta función) que satisfaga la relación de sus derivadas en alguna región del espacio, con una serie de valores en su frontera. La metodología propuesta fue

el uso de diferencias finitas para discretizar la ecuación, aproximar el operador integral asociado a los saltos e investigar cómo resolver el caso no lineal asociado al primer termino.

El método de diferencias finitas consiste en una aproximación de las derivadas parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un número finito de puntos seleccionados en el dominio. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en los puntos seleccionados. El valor de los puntos seleccionados se convierten en las incógnitas. La solución del sistema de ecuaciones algebraico permite obtener la solución aproximada en cada punto seleccionado de la malla.¹¹

1.4.1. Aproximación de las derivadas por medio de diferencias finitas

Para el estudio de diferencias finitas se tiene en cuenta los trabajos de Strikwerda (2004), Scott (1999), Li et al. (2017) Hirsra (2016). Inicialmente se debe encontrar una aproximación de las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial, en el punto (K_j, A_n) , para ello se usa las siguientes expansiones de Taylor.

$$V(K+\Delta K, A) = V(K, A) + \Delta K V_K(K, A) + \frac{(\Delta K)^2}{2!} V_{KK}(K, A) + \frac{(\Delta K)^3}{3!} V_{KKK}(K, A) + \dots \quad (1.41)$$

$$V(K-\Delta K, A) = V(K, A) - \Delta K V_K(K, A) + \frac{(\Delta K)^2}{2!} V_{KK}(K, A) - \frac{(\Delta K)^3}{3!} V_{KKK}(K, A) + \dots \quad (1.42)$$

$$V(K, A+\Delta A) = V(K, A) + \Delta A V_A(K, A) + \frac{(\Delta A)^2}{2!} V_{AA}(K, A) + \frac{(\Delta A)^3}{3!} V_{AAA}(K, A) + \dots \quad (1.43)$$

La aproximación de V_K en el punto (K_j, A_n) evaluando (1.41) en dicho punto:

$$V(K_{j+1}, A_n) = V(K_j, A_n) + \Delta K V_K(K_j, A_n) + \frac{(\Delta K)^2}{2!} V_{KK}(\tau, A_n), \quad \tau \in (K_j, K_{j+1}), \quad (1.44)$$

Al despejar $V_K(K_j, A_n)$ se obtiene

$$V_K(K_j, A_n) = \frac{V(K_{j+1}, A_n) - V(K_j, A_n)}{\Delta K} - \frac{(\Delta K)^2}{2!} V_{KK}(\tau, A_n), \quad \tau \in (K_j, K_{j+1}),$$

De donde

¹¹Tomado de Hernández (2010)

$$V_K(K_j, A_n) \approx \frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta K} \text{ con error } O(\Delta K) \quad (1.45)$$

La aproximación de V_{KK} en el punto (K_j, A_n) . Se obtiene evaluando (1.41), (1.42) en dicho punto y sumando para obtener

$$V(K_{j+1}, A_n) + V(K_{j-1}, A_n) = 2V_K(K_j, A_n) + (\Delta K)^2 V_{KK}(K_j, A_n) + \frac{(\Delta K)^4}{12} V_{KKKK}(\tau, A_n), \quad \tau \in (K_{j-1}, K_{j+1}),$$

Despejando $V_{KK}(K_j, A_n)$ se obtiene

$$V_{KK}(K_j, A_n) \approx \frac{V(K_{j+1}, A_n) - 2V_K(K_j, A_n) + V(K_{j-1}, A_n)}{(\Delta K)^2} - \frac{(\Delta K)^2}{12} V_{KKKK}(\tau, A_n),$$

$$V_{KK}(K_j, A_n) \approx \frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{(\Delta K)^2} \text{ con error } O((\Delta K)^2) \quad (1.46)$$

Usando el mismo argumento para las derivadas con respecto a A , podemos escribir:

$$V_A(K_j, A_n) \approx \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta A} \text{ con error } O(\Delta A) \quad (1.47)$$

$$V_{AA}(K_j, A_n) \approx \frac{V_j^{n+1} - 2V_j^n + V_j^{n-1}}{(\Delta A)^2} \text{ con error } O((\Delta A)^2) \quad (1.48)$$

Para efectos de entender mejor el problema se dividió en tres casos, el primero donde se analiza solo la parte de la ecuación diferencial parcial con A constante y l constante, luego consideramos el caso donde A es variable y l es constante y finalmente el caso donde A es variable y l es variable. Analizamos los casos anteriores sin la parte de los saltos en la dinámica del capital y luego incluyendo los saltos en el capital. Finalmente se incluye también el caso del browniano geométrico en la PTF. En cada uno se resuelve la ecuación integro-diferencial resultante.

En resumen la para solución numérica de la ecuación de H.J.B. en Tiempo continuo se realizan las siguientes etapas:

- Se resuelve numéricamente la ecuación de HJB por medio de un esquema Implícito-Explícito (IMEX) de diferencias finitas, dado que el problema incluye una PIDE (Ecuación Parcial Integro-Diferencial).
- La parte local (Parte diferencial) del operador se resuelve utilizando un paso implícito, método *Upwind*. Candler et al. (1998) y Achdou et al. (2017).

- El esquema *Upwind* (contra-viento o contracorriente) se usa para aproximar mejor la no linealidad que se presenta en V_K , que cambie automáticamente el método de diferenciación en función del coeficiente local en V_K .
- La parte no local (Término integral) se resuelve usando un paso explícito, d'Halluin et al. (2005) y Cont and Voltchkova (2005). Básicamente este método explícito usa la Transformada Rápida de Fourier (FFT) para evaluar $I(K_t, A_t)$.
- Se analiza los casos siguientes incluyendo la parte de los saltos en el capital, con la productividad total de los factores tomando un proceso de reversión a la media (CIR) y un browniano geométrico (BG) y en cada caso se resuelve la ecuación integro-diferencial resultante.

| | Trabajo(l_t) | | |
|--------------|------------------|-----------|----------|
| | | Constante | Variable |
| PTF(A_t) | Constante | C-C | C-V |
| | Variable | V-C | V-V |

Cuadro 1.1: Tabla de Casos a considerar

- Se presenta inicialmente una sección donde se explica el cálculo de la integral correspondiente a la componente de los saltos, la cual se usa para resolver los distintos modelos que incluyen saltos en la dinámica del capital, capítulo 1 y 2 como también los saltos en el ingreso que se resuelven en el problema de agentes heterogéneos, capítulo 3.
- Se presenta la solución numérica del modelo más general, donde se tiene como variables de control el consumo C_t y trabajo L_t y como variables de estado a la PTF A_t y al capital K_t . La solución numérica de los otros modelos se puede ver en el anexo 3.

1.4.2. Cálculo de la integral asociada a la componente de saltos

En esta sección se explica el procedimiento a seguir para calcular la integral asociada a la componente de saltos, cuando se calcula fuera de la grilla del capital y del ingreso. El proceso se describe a partir de la dinámica del capital que contiene saltos asociados a eventos raros los cuales se trabajan en los modelos del capítulo 1 y 2. Este procedimiento también se seguirá para el caso del modelo de agentes heterogéneos que contiene saltos en la dinámica del ingreso.

Para la discretización de la ecuación parcial integro-diferencial PIDE(1.39) se sigue la línea de argumentación planteada en d'Halluin et al. (2005) y Cont and Voltchkova (2005), quienes utilizan un paso explícito para calcular la integral asociada a la componente de saltos.

Particularmente el término integral de la ecuación (1.40) se transforma mediante una sustitución adecuada en una integral de correlación que permite una evaluación de una manera más eficiente para todos los valores de K .

Sea

$$I(K_t, A_t) = \int V(e^z K_t, A_t) G(z) dz$$

Usando el cambio de variable $s = \log(K_t)$ entonces:

$$I(K, A) = \int V(e^z e^s, A) G(z) dz$$

La definición de una integral de correlación para el caso continuo establece lo siguiente:

$$f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(y)dy$$

de esta forma el primer paso será expresar el término integral $I(K_t, A_t)$ como una integral de correlación

$$I(K_t, A_t) = \int V(e^{s+z}, A) G(z) dz = \int \bar{V}(s+z, A) G(z) dz = \bar{V} \otimes \bar{G} \quad (1.49)$$

Donde $V(e^{s+z}, A) = \bar{V}(s+z, A)$.

Se tiene $I_i = I(i \Delta K, A)$, $\bar{V}_i = \bar{V}(i \Delta K, A)$, $\bar{G}_j = G(j \Delta z)$. Se asume que $\Delta K = \Delta z$ y que $\bar{V}(\log K, A) = V(K, A)$, donde

$$\bar{G}_j = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_j - \Delta z/2}^{z_j + \Delta z/2} G(z) dz$$

Considerando la función de utilidad

$$f(C_t, L_t) = \frac{(C_t(1-L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{con } \psi \geq 0 \text{ y } \gamma > 0.$$

Las condiciones de primer orden establecen las relaciones para encontrar las funciones de consumo y de trabajo:

$$C_t = (1-L_t)^{\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}} (V_K)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

$$(1-L_t)^{\frac{\psi(1-\gamma)-\gamma}{\gamma}} L_t^\alpha = \frac{1-\alpha}{\psi} A_t K_t^\alpha (V_K)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Como (1.49) corresponde a una integral de correlación, se puede aprovechar la propiedad de la transformada de Fourier aplicada sobre una operación de correlación entre dos funciones, que se transforma en el producto de la transformada de la primera función por el conjugado de la segunda.

$$\mathcal{F}(f(x) \otimes g(x)) = F(u).G(u)^*$$

En particular, el método de la Transformada Rápida de Fourier FFT (Fast Fourier Transform) es una opción para calcular de manera eficiente esta integral. Corresponde a un algoritmo que permite calcular la transformada de Fourier discreta (DFT) y su inversa.

La Definición de la transformada discreta y su inversa establece lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} D &= FFT(I) = \sum_{j=1}^n I(j)W_n^{(j-1)(k-1)} \\ I &= IFFT(D) = \sum_{j=1}^n D(k)W_n^{-(j-1)(k-1)} \end{aligned} \right\} W_n = e^{(-2\pi i)/n} \quad \text{para } I \text{ y } D \text{ con una longitud } n$$

Entonces, suponiendo que G es real se tiene:

$$FFT(I(K, A)) = (FFT(\bar{V}))(FFT(G))^* \quad (1.50)$$

$(.)^*$ denota el complejo conjugado. Dado que $G(z)$ es la función de densidad de probabilidad del salto de amplitud z , la cual es una función específica asociada a los saltos, simplemente podemos calcular previamente $FFT(G)$ en la cuadrícula igualmente espaciada en las coordenadas z . Luego podemos realizar la FFT inversa para obtener los valores de la integral de correlación en la cuadrícula $s = \log K$. Se requiere un paso de interpolación adicional para obtener el valor de la integral de correlación en la cuadrícula K .

La integral I_i de acuerdo con la sustitución empleada en la transformación $s = \log(K)$ es evaluada sobre un punto $K = e^{s_i}$ el cual no coincide con un punto de la cuadrícula K_r , para ello es necesario interpolar linealmente I_i para obtener el valor deseado. Si $e^{s_r} \leq K_r \leq e^{s_{r+1}}$ entonces por la definición de interpolación se tiene:

$$I(K_r) = \phi_r I_r + (1 - \phi_r) I_{r+1} + O((e^{s_r} - e^{s_{r+1}})^2) \quad (1.51)$$

Donde ϕ_r es un peso de interpolación tal que $0 \leq \phi_r \leq 1$.

1.4.3. Solución para el modelo con un CIR en la PTF y trabajo variable.

Para este caso la función de valor satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman siguiente:

$$-\rho V(K_t, A_t) + \sup_{C_t \geq 0, L_t \in (0,1)} \{[\mathcal{A}^{C_t, L_t} V](K_t, A_t) + f(C_t, L_t)\} = 0, \quad K_t \geq 0, A_t > 0. \quad (\text{HJB4})$$

Para cada $(K_t, A_t) \in \mathbb{R}_+^2$ el máximo en la ecuación HJB satisface:

$$(\hat{c}(K_t, A_t, V_K), l(K_t, A_t, V_K)) = \arg \max_{C_t \geq 0, L_t \in (0,1)} [\mathcal{A}^{C_t, L_t} \hat{V}](K_t, A_t) + f(C_t, L_t)$$

Si se supone que \hat{C}_t y \hat{l}_t son óptimas, entonces se obtiene la siguiente ecuación de HJB:

$$-\rho \hat{V}(K_t, A_t) + \{[\mathcal{A}^{\hat{C}_t, \hat{L}_t} \hat{V}](K_t, A_t) + f(\hat{c}(K_t, A_t, V_K), \hat{l}(K_t, A_t, V_K))\} = 0.$$

Por último el teorema de verificación establece que, $V = \hat{V}$ resuelve la ecuación (HJB4) y garantiza la existencia de una regla de política óptima \hat{C}_t y \hat{l}_t tal que $\hat{C}_t = g_1(K_t, A_t)$ y $\hat{l}_t = g_2(K_t, A_t)$.

Así la ecuación de HJB maximizada corresponde a la ecuación:

$$\begin{aligned} \rho V(K_t, A_t) = & f(\hat{C}_t, \hat{L}_t) + (A_t K_t^\alpha \hat{L}_t^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t) + \beta(w - A_t) \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t) + \\ & \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \eta^2 A_t \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t) + \lambda \int V(e^z K_t, A_t) G(z) dz - \lambda V(K_t, A_t). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Las condiciones de primer orden asociadas a este problema de control óptimo establecen que:

$$[C_t] : \frac{\partial f}{\partial C_t} = \frac{\partial V}{\partial K_t}$$

$$[l_t] : \frac{\partial f}{\partial L_t} = -\frac{\partial V}{\partial K_t} (1 - \alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha}$$

Considerando la función de utilidad

$$f(C_t, L_t) = \frac{(C_t(1 - L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1 - \gamma} \quad \text{con } \psi \geq 0 \text{ y } \gamma > 0.$$

de manera equivalente se tiene:

$$C_t = (1 - L_t)^{\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}} (V_K)^{\frac{-1}{\gamma}} \quad (1.53)$$

$$(1 - l_t)^{\frac{\psi(1-\gamma)-\gamma}{\gamma}} L_t^\alpha = \frac{1 - \alpha}{\psi} A_t K_t^\alpha (V_K)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Si llamamos $H(l_t) = (1 - L_t)^{\frac{\psi(1-\gamma)-\gamma}{\gamma}} L_t^\alpha$ se tiene:

$$H(l_t) = \frac{1 - \alpha}{\psi} A_t K_t^\alpha (V_K)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (1.54)$$

Para encontrar numéricamente las políticas óptimas de \hat{C}_t y \hat{l}_t debemos resolver inicialmente la

ecuación (1.54), que debe cumplir las siguientes restricciones sobre l_t :

$$L_t \in (0, 1)$$

$H(L_t)$ es una función estrictamente creciente, para ello $H'(L_t) > 0$ y esto se cumple siempre que $L_t > \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - \psi(1-\gamma)}$, condición que garantiza la existencia de su inversa.

Además se conoce que $\alpha \in (0, 1)$ y si $\alpha\gamma - \psi(1-\gamma) > 0$ entonces el factor $\frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - \psi(1-\gamma)}$ debe ser menor que 1 por la restricción en L_t , de esta forma se encuentra que $\frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - \psi(1-\gamma)} > 1$ debe cumplir con las siguientes condiciones para la existencia de la política óptima \hat{L}_t :

$$\text{mín}\{\gamma > \frac{\psi}{\alpha + \psi}; \gamma > 1\}$$

Conocida \hat{L}_t se usa la ecuación (1.53) para hallar \hat{C}_t .

Siguiendo el esquema de diferencias finitas presentado en la sección anterior (1.4.4) se pretende resolver la ecuación de Bellman maximizada (1.52), su forma discreta es la siguiente:

$$\begin{aligned} \rho V_{i,j}^{n+1} = & f(c_{i,j}^n, l_{i,j}^n) + \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta K} R_{i,j,F}^{n+} + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta K} R_{i,j,B}^{n-} + \beta(w - A_j) \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta A} + \\ & \frac{1}{2} \sigma^2 K_i^2 \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta K)^2} + \frac{1}{2} \eta^2 A_j \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta A)^2} + \lambda I(K_i) - \lambda V_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

se define:

$$c_{i,j}^n = (f')^{-1}[V'_{i,j}]$$

$$R_{i,j,F}^n = A_j K_i^\alpha (L_{i,j}^n)^{1-\alpha} - \delta K_i - (f')^{-1}[(V'_{i,j,F})]$$

$$R_{i,j,B}^n = A_j K_i^\alpha (L_{i,j}^n)^{1-\alpha} - \delta K_i - (f')^{-1}[(V'_{i,j,B})]$$

$$R_{i,j,F}^{n+} = [A_j K_i^\alpha (L_{i,j}^n)^{1-\alpha} - \delta K_i - c_{i,j,F}^n]^+ = \text{máx}\{A_j K_i^\alpha (L_{i,j}^n)^{1-\alpha} - \delta K_i - c_{i,j,F}^n, 0\}$$

$$R_{i,j,B}^{n-} = [A_j K_i^\alpha (L_{i,j}^n)^{1-\alpha} - \delta K_i - c_{i,j,B}^n]^- = \text{mín}\{A_j K_i^\alpha (L_{i,j}^n)^{1-\alpha} - \delta K_i - c_{i,j,B}^n, 0\}$$

$$V'_{i,j,F} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta K} \quad V'_{i,j,B} = \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta K} \quad (1.55)$$

Para calcular $V'_{i,j}$ se utiliza la siguiente expresión:

$$V'_{i,j} = V'_{i,j,F} \mathbb{1}\{R_{i,F}^n > 0\} + V'_{i,j,B} \mathbb{1}\{R_{i,j,B}^n < 0\} + \bar{V}'_{i,j} \mathbb{1}\{R_{i,j,F}^n \leq 0 \leq R_{i,j,B}^n\} \quad (1.56)$$

$$\bar{V}'_{i,j} = f'(A_j K_i^\alpha (l_{i,j}^n)^{1-\alpha} - \delta K_i)$$

Reemplazando las derivadas y reordenando términos, se puede ver de forma equivalente a:

$$\rho V_{i,j}^{n+1} = f(c_{i,j}^n, l_{i,j}^n) + X_{i,j} V_{i-1,j}^{n+1} + (Y_{i,j} + \nu_j) V_{i,j}^{n+1} + Z_{i,j} V_{i+1,j}^{n+1} + \chi_j V_{i,j-1}^{n+1} + \varsigma_j V_{i,j+1}^{n+1} + \lambda I(K_i) - \lambda V_{i,j}^{n+1}$$

donde

$$X_{i,j} = \frac{\sigma^2 K_i^2}{2(\Delta K)^2} - \frac{R_{i,j,B}^{n-}}{\Delta K}$$

$$Y_{i,j} = \frac{R_{i,j,B}^{n-}}{\Delta K} - \frac{R_{i,j,F}^{n+}}{\Delta K} - \frac{\sigma^2 K_i^2}{(\Delta K)^2}$$

$$Z_{i,j} = \frac{R_{i,j,F}^{n+}}{\Delta K} + \frac{\sigma^2 K_i^2}{2(\Delta K)^2}$$

$$\nu_j = -\frac{\beta(w - A_j)}{\Delta A} - \frac{\eta^2 A_j}{(\Delta A)^2}$$

$$\chi_j = \frac{\eta^2 A_j}{2(\Delta A)^2}$$

$$\varsigma_j = \frac{\beta(w - A_j)}{\Delta A} + \frac{\eta^2 A_j}{2(\Delta A)^2}$$

Esto permite resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\rho + \lambda) V_{i,j}^{n+1} = f(c_{i,j}^n, l_{i,j}^n) + \mathbf{A}^n V_{i+1,j}^{n+1} + \lambda I(K_i)$$

Donde:

$$\mathbf{A}^n = \tilde{A}(X_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j}) + D(\nu_j, \chi_j, \varsigma_j)$$

$$(\rho + \lambda) V^{n+1} - \mathbf{A}^n V^{n+1} = f(c^n, l^n) + \lambda I(K)$$

$$((\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n) V^{n+1} = f^n + \lambda I(K)$$

$$\mathbf{B}^n = (\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n \quad \mathbf{b}^n = f^n + \lambda I(K)$$

$$\mathbf{B}^n V^{n+1} = \mathbf{b}^n$$

Finalmente la función de valor se obtiene resolviendo:

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} \mathbf{b}^n$$

En resumen el algoritmo para calcular la integral asociada a la componente de saltos, la función de valor y las demandas óptimas de consumo y trabajo, en cada iteración tiene los siguientes pasos:

- Definimos una grilla para los valores de K_t y para A_t

$$dK = \frac{K_{max} - K_{min}}{K_p} \quad dA = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_p}$$
- Definimos los parámetros α, γ, ψ con las restricciones planteadas en la proposición 1.
- Planteamos un valor inicial L_0 , para ello usamos $L_0 := \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)}$
- Definimos un valor inicial $V_i^0 = \frac{((AK_i^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_i)(1 - l)^\psi)^{(1-\gamma)}}{(1 - \gamma)} \quad i = 1, 2, \dots, I$
- Trasformamos la grilla de K al dominio de $s = \log(K)$. Dado que $\log(K)$ no es lineal interpolamos entre $s_{\max} = \log(K_{\max})$ y $s_{\min} = \log(K_{\min})$ un número de puntos que coincida con el número de puntos de la grilla de K y encontramos los valores de V en el nuevo dominio de la grilla de s .
- Dada la función de distribución de los saltos $G(z)$ y una grilla para los valores de $z \in [-1, 1]$ donde $ds = dz$, se calcula la $FFT(G(z))$ y su conjugado $(FFT(G(z)))^*$
- Encontramos $FFT(V(s))$
- Calculamos $FFT(V(s)) \cdot (FFT(G(z)))^*$
- Calculamos la transformada inversa $IFFT(FFT(V(s)) \cdot (FFT(G(z)))^*) = I(s)$
- Como $I(s)$ esta en el dominio de s y $K = e^s$ entonces $e^{s_r} \leq I_K \leq e^{s_{r+1}}$ ajustamos el valor real en la grilla de K interpolando linealmente los valores de la integral.

$$I(K_r) = \phi_r I_r + (1 - \phi_j) I_{r+1} + O((e^{s_r} - e^{s_{r+1}})^2)$$

Donde ϕ_r es un peso de interpolación tal que $0 \leq \phi_r \leq 1$.

- Calcula $(V_{i,j}^n)'$ usando (1.55) y (1.56)
- Las condiciones de frontera para la función de valor se establecen con respecto a una extrapolación de segundo orden de unos puntos internos para hallar el valor en su frontera:

$$V(1) = \frac{5}{2}V(2) - 2V(3) + \frac{1}{2}V(4)$$

$$V(F) = \frac{5}{2}V(F-1) - 2V(F-2) + \frac{1}{2}V(F-3)$$

Esto permitió lograr estabilidad en el modelo para obtener convergencia en la solución final.

- Hallamos las matrices $\tilde{A}(X_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j})$ y $D(\nu_j, \chi_j, \varsigma_j)$
- se resuelve la ecuación

$$H(l_t) - \frac{1-\alpha}{\psi} A_t K_t^\alpha (V_K)^{\frac{1}{\gamma}} = 0$$

para Calcular l^n como $l_{i,j}^n = \frac{1-\alpha}{\psi} H^{-1} \left(A_j K_i^\alpha ((V_{i,j}^n)')^{\frac{1}{\gamma}} \right)$

- Se resuelve el sistema

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} f^n$$

- Calcula c^{n+1} como $c_{i,j}^{n+1} = (f')^{-1} [(V_{i,j}^{n+1})']$
- Se detiene cuando la función de valor alcanza la tolerancia indicada $\|V^{n+1}(K_i, A_j) - V^n(K_i, A_j)\|^2 < tol$, donde $10^{-4} \leq tol \leq 10^{-6}$
- Las aproximaciones de la función de valor son calculadas en el intervalo $[1K_{ss}, 3K_{ss}]$ usando diferencias finitas. Este intervalo se establece con el objetivo de lograr la convergencia del modelo con la metodología planteada.¹²
- El número de pasos en cada variable es:

| Variable | Valor | Nombre |
|----------|-------|----------------------|
| Kp | 20 | Número de pasos en K |
| Ap | 20 | Número de pasos en A |

Cuadro 1.2: Número de pasos en las variables

Para establecer la precisión del algoritmo, se compara los resultados de la solución numérica del modelo con la solución analítica de la proposición (1), sección (1.3.1).

$$V(K_t, A_t) = \Gamma \frac{K_t^{1-\alpha\gamma}}{1-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma} + g(A_t)$$

con

$$\Gamma = (1-l)^{\psi(1-\gamma)-\gamma} \left(\frac{\psi}{1-\alpha} \right)^\gamma$$

$${}^{12}K_{ss} = \left(\frac{\alpha\omega}{\rho+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{ss} \quad ; \quad L_{ss} = \frac{1-\alpha}{1+\psi-\alpha-\frac{\alpha\psi\delta}{\rho+\delta}}$$

En el siguiente cuadro se muestra la calibración de los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \eta, \rho, \sigma$ y ω siguiendo las calibraciones de los estudios de Parra-Alvarez (2017), Posch (2011), Achdou et al. (2017), Moll (2014), Gourio (2012) y Nakamura et al. (2013) que permite encontrar la convergencia de la solución numérica y a su vez calcula la solución que más se aproxime a la solución analítica desarrollada en la proposición 1.

También se toma como referencia a Barro (2006); Barro and Jin (2011) para definir la tasa de arribo de los saltos, quienes sugieren una tasa del orden de $\lambda = 0,03$

Para el caso de la distribución del tamaño de los saltos asociados al capital existe evidencia empírica en los trabajos de Barro (2006) y Wang et al. (2016) quienes toman los saltos asociados a desastres raros distribuidos por medio de una ley de potencia. En nuestro caso tomamos como referencia los trabajos de Gourio (2012); Nakamura et al. (2013) quienes sugieren que la evidencia empírica de los choques transitorios dados por saltos asociados a desastres raros se pueden distribuir de forma normal truncada con valores negativos en el intervalo $(-\infty, 0)$ y con una distribución Gamma con valores positivos, la cual tiene una curtosis menor que la distribución normal. Cabe resaltar que el ejercicio también se resuelve con otros tipos de distribuciones como la exponencial, Uniforme y Normal, mostrando que es posible modelar los diferentes tipos de choques positivos y negativos en la dinámica del capital.

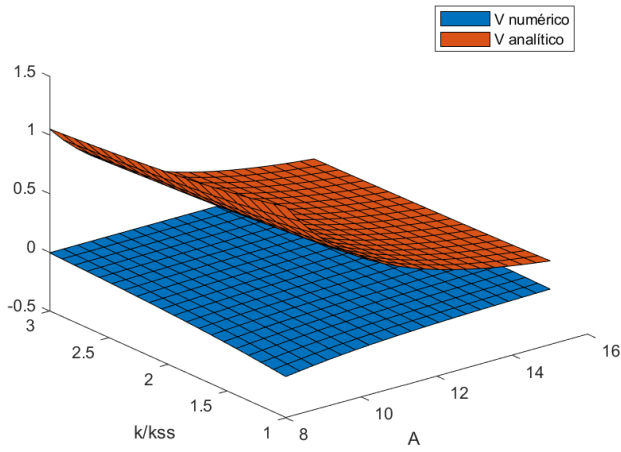
| Parámetro | Valor 1 | Valor 2 | Valor 3 | Valor 4 | Nombre |
|-------------|---------|---------|---------|---------|-----------------------------------|
| λ | 0 | 0.03 | 0.07 | 0.1 | Intensidad de los saltos |
| α | 0.4176 | 0.4176 | 0.4176 | 0.4176 | Elasticidad del capital |
| γ | 2.1250 | 2.1250 | 2.1250 | 2.1250 | Aversión al riesgo |
| ρ | 0.0028 | 0.0204 | 0.0207 | 0.0383 | Factor de descuento |
| ψ | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | Medida de preferencia por el ocio |
| σ | 0.0092 | 0.0092 | 0.0092 | 0.0092 | Volatilidad del capital |
| δ | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | Depreciación del capital |
| ω | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Media de largo plazo |
| η | 0.0072 | 0.0072 | 0.0072 | 0.0072 | Volatilidad en A |
| β | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Velocidad de ajuste |
| ν | -0.055 | -0.055 | -0.055 | -0.055 | Media de los saltos |
| φ^2 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | Varianza de los saltos |

Cuadro 1.3: Parámetros del modelo A y l variables incluido saltos.

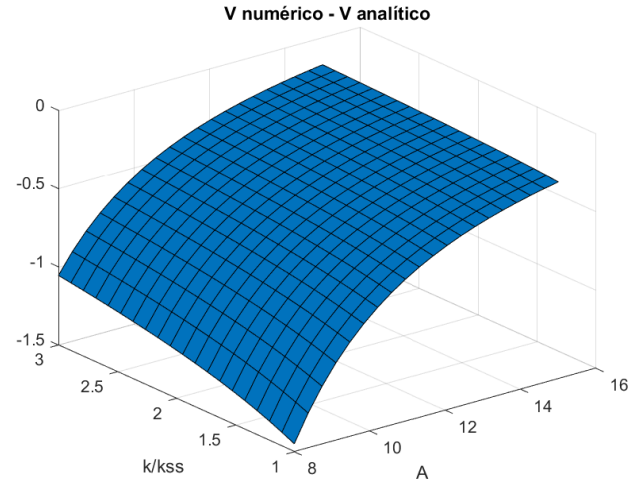
Los parámetros descritos para este proceso de optimización muestran los siguientes resultados para la función de valor y las funciones de política y sus diferencias.

Particularmente, En todos los casos los saltos en la dinámica de capital tienen distribución normal truncada con valores negativos y positivos $\bar{N}(\nu, \varphi^2)$ como lo sugiere Gourio (2012); Nakamura et al. (2013) con media $\nu = -0,055$ y varianza $\phi^2 = 0,041$ truncando los valores de $-1 \leq z \leq 1$ desde $a = -0,5$ hasta $b = 0,2$. También el ejercicio se extiende utilizando una distribución Gamma que solo toma valores positivos con media $\mu = 0,1$ y $SD = 0,058$ como lo sugieren las referencias.

Los resultados para el caso sin saltos $\lambda = 0$ son los siguientes:

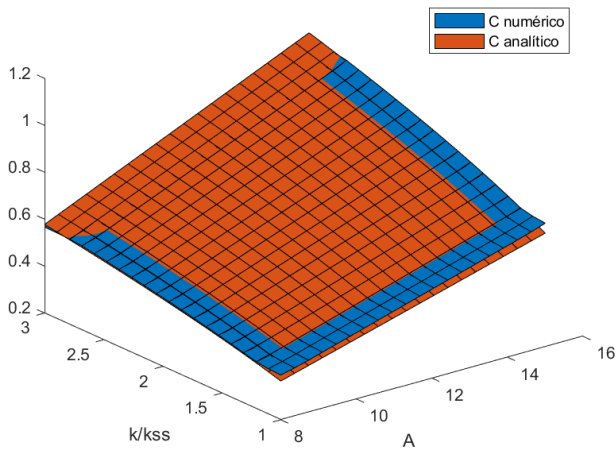


(a) Fun. Valor

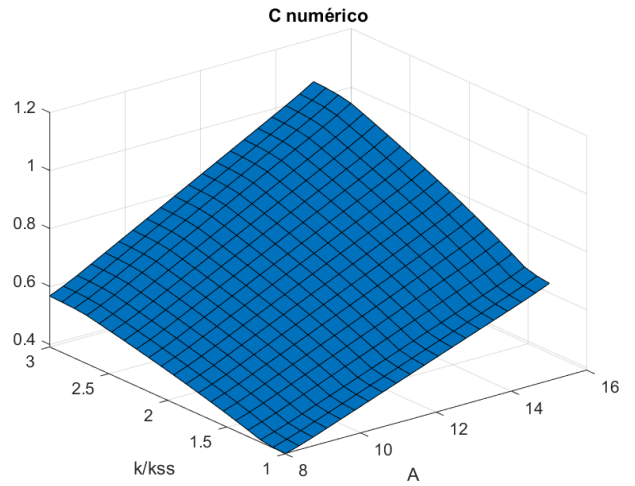


(b) Dif. Fun. Valor

Figura 1.1: Función de valor sin saltos $\lambda = 0$

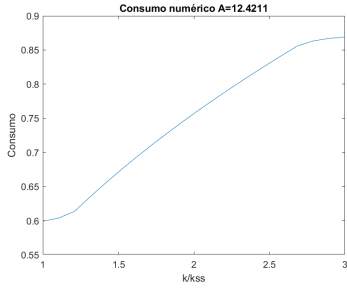


(a) Fun. Consumo

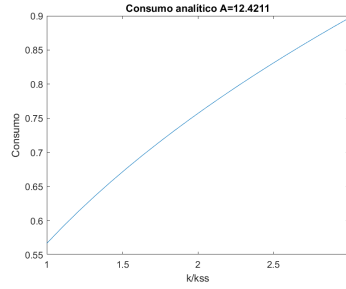


(b) Fun. Consumo numérico

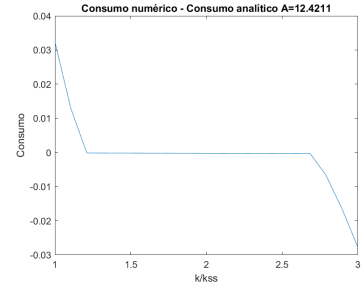
Figura 1.2: Función de consumo sin saltos $\lambda = 0$



(a) Fun. Consumo numérico

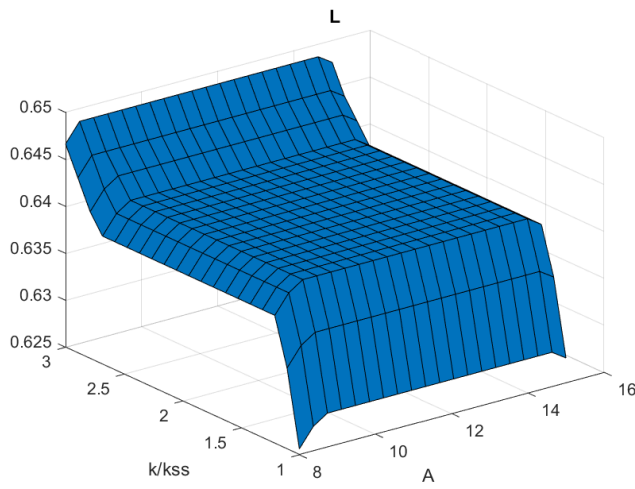


(b) Fun. Consumo analítico

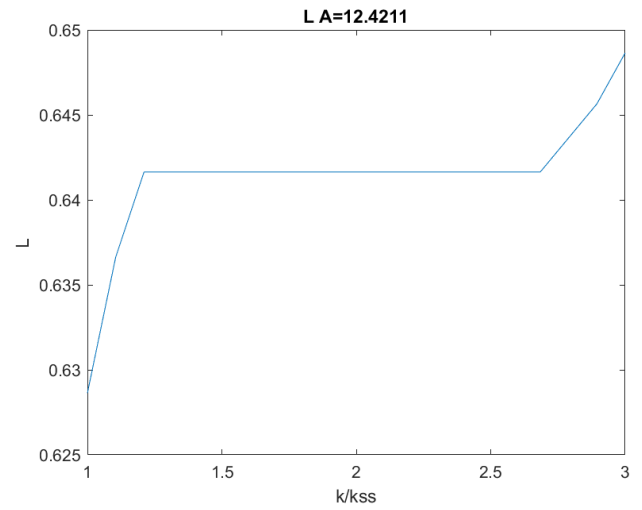


(c) Dif Consumo

Figura 1.3: Función de consumo A cte. sin saltos $\lambda = 0$



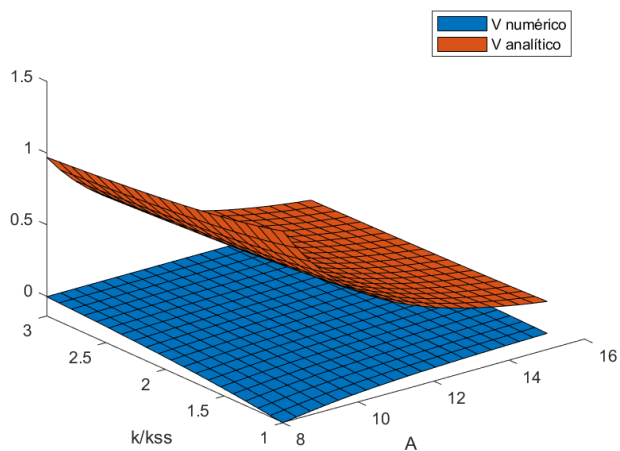
(a) Fun.Trabajo



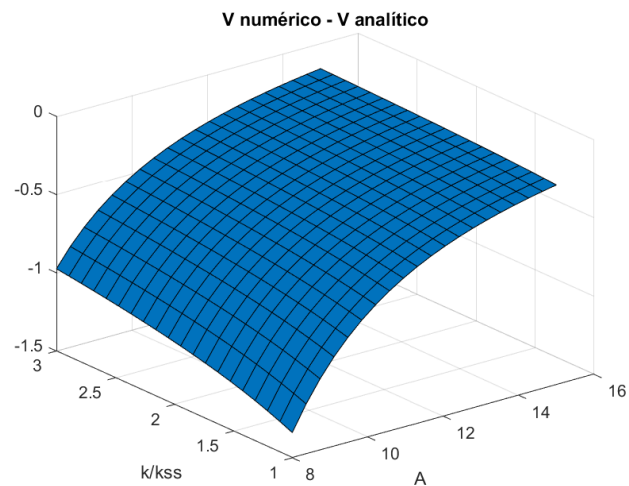
(b) Fun. Trabajo A cte.

Figura 1.4: Función de Trabajo sin saltos $\lambda = 0$

El resultado al incluir los saltos, para $\lambda = 0,03$ es:

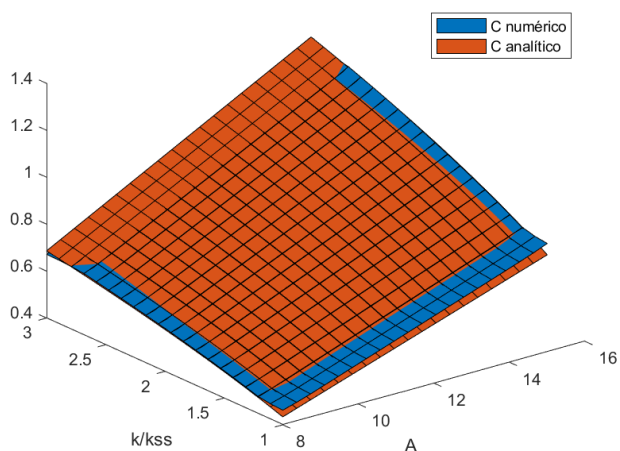


(a) Fun. Valor

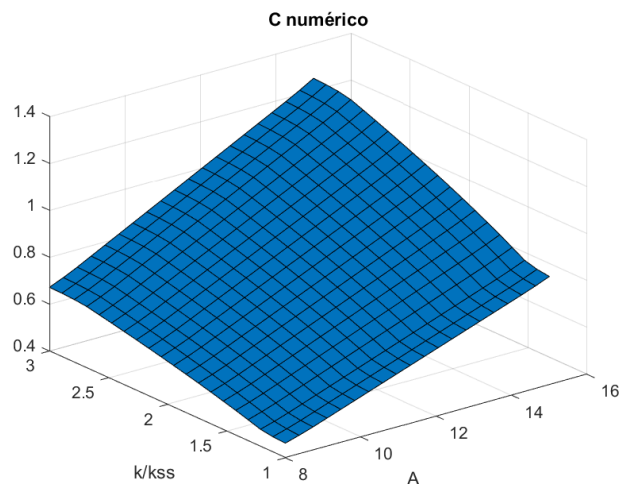


(b) Dif. Fun. Valor

Figura 1.5: Función de valor con saltos $\lambda = 1$



(a) Fun. Consumo



(b) Fun. Consumo numérico

Figura 1.6: Función de consumo con saltos $\lambda = 1$

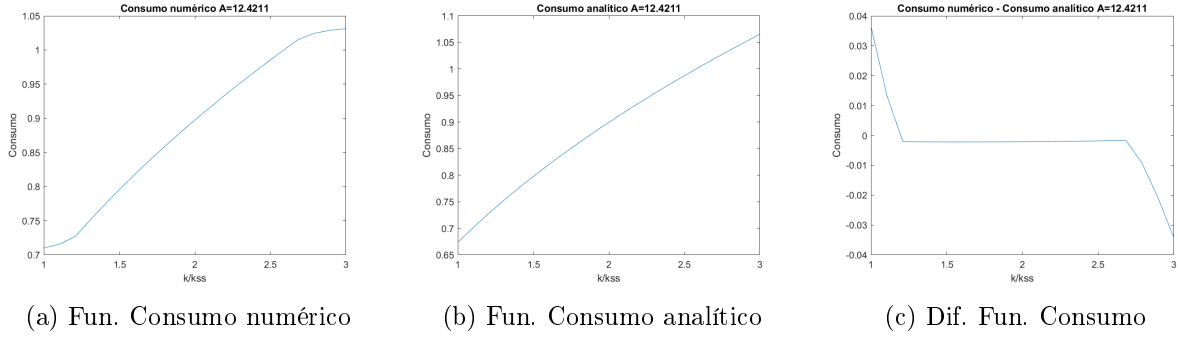


Figura 1.7: Función de consumo en A cte. con saltos $\lambda = 0,03$

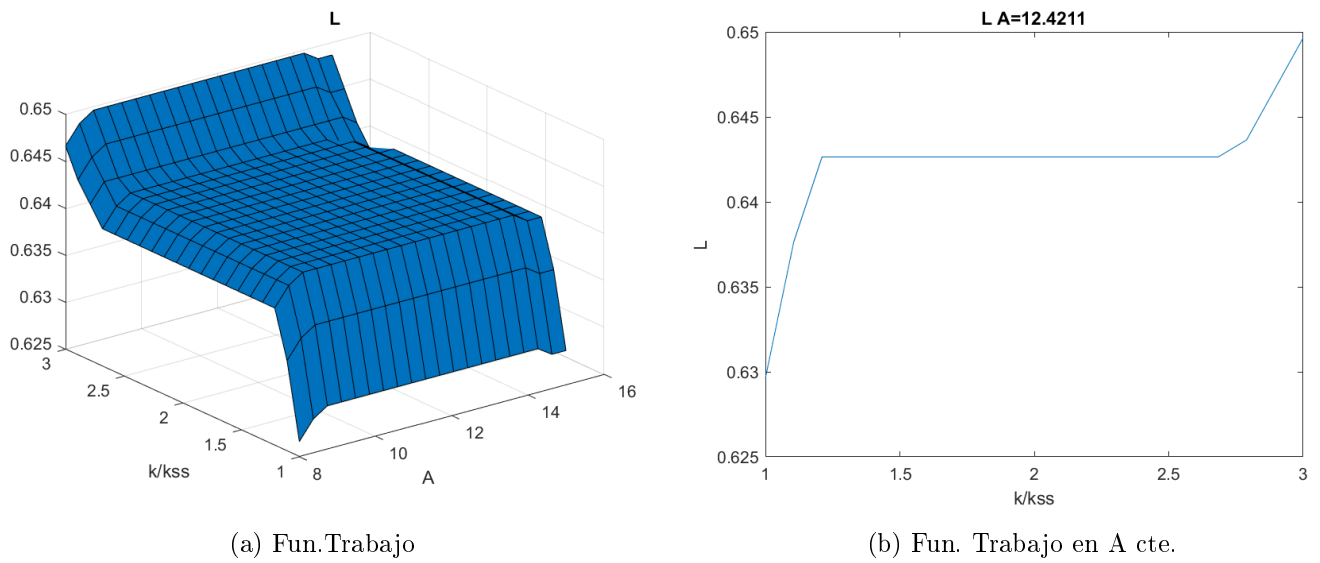
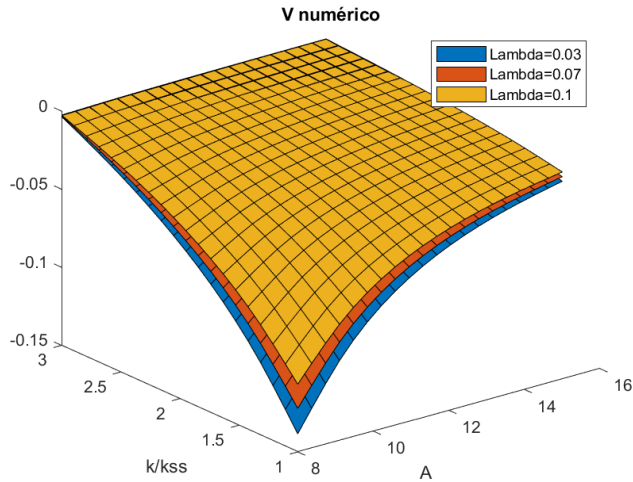
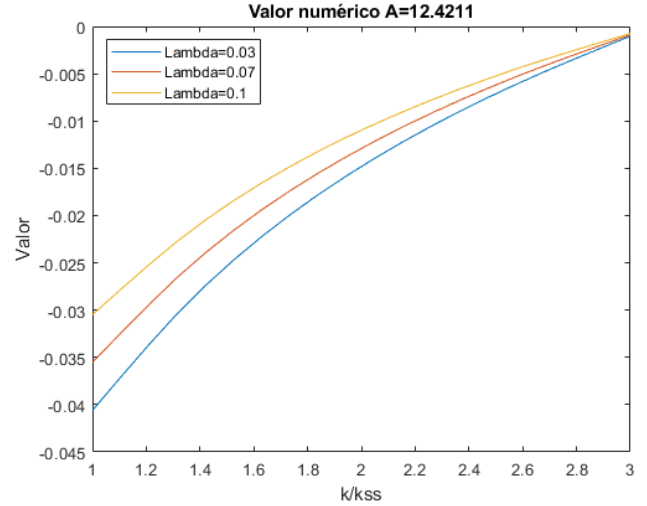


Figura 1.8: Función de Trabajo con saltos $\lambda = 0,03$

Los resultados con los distintos valores de λ son:

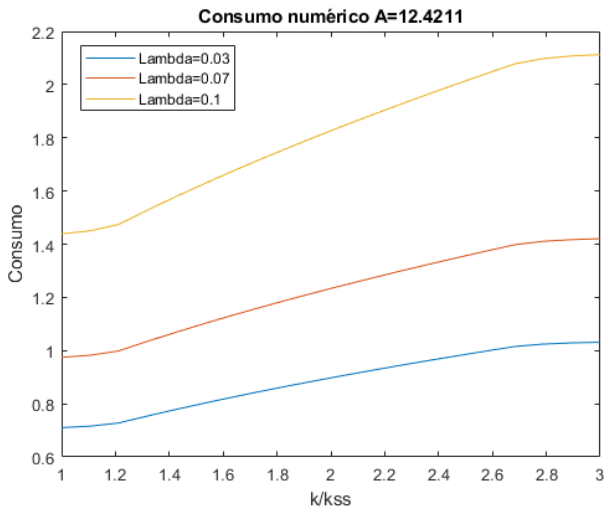


(a) Fun. Valor

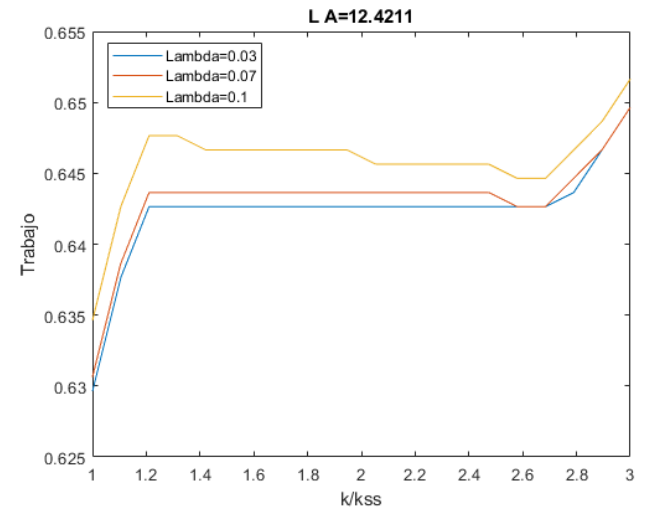


(b) Fun. Valor en A cte.

Figura 1.9: Funciones de Valor con saltos distinto λ



(a) Fun. Consumo en A cte.



(b) Fun. Trabajo en A cte.

Figura 1.10: Funciones de política con saltos distinto λ

En comparación con los resultados de las funciones de política sin incluir los saltos, se presenta una aumento en la política de consumo, esto podría explicarse observando que al aumentar la tasa de arribo de los saltos (λ), los agentes tienen un factor de impaciencia mayor o menor factor de prudencia (menor deseo de ahorrar) lo cual conduce a los individuos a tener un menor nivel de riqueza esperada y por tanto se traduce en un aumento del consumo. La política de trabajo tiende a permanecer constante, similar al comportamiento de la solución analítica para este factor.

Las siguientes gráficas muestran la variación de las funciones de política cuando se toman distintos

valores en el parámetro γ (aversión al riesgo), considerando saltos en la dinámica de capital:

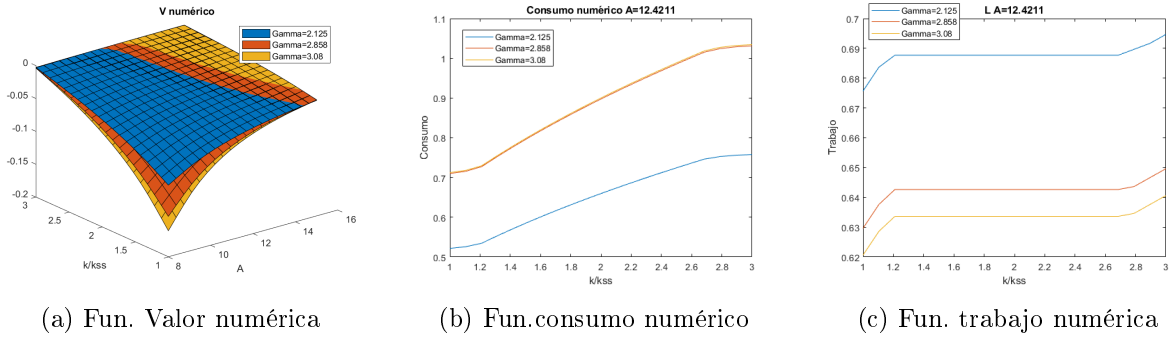


Figura 1.11: Funciones de valor y política para distinto γ incluido saltos

Un aumento en la aversión al riesgo (γ) se traduce en una disminución en la elasticidad intertemporal de sustitución¹³ y por tanto en un incremento del factor de impaciencia, esto implica una disminución de la riqueza esperada de los agentes y por tanto se tiene un incremento en el consumo. La política de trabajo tiene un comportamiento contrario, al aumentar γ la política de trabajo disminuye.

Este resultado esta de acuerdo con el comportamiento analítico de las políticas óptimas al calcular las elasticidades del consumo y trabajo con respecto a γ dadas por (1.20) y (1.19).

Las siguientes gráficas muestran la variación cuando se toman distintos valores en el parámetro ψ (Medida de preferencia por el ocio), considerando saltos en la dinámica de capital:

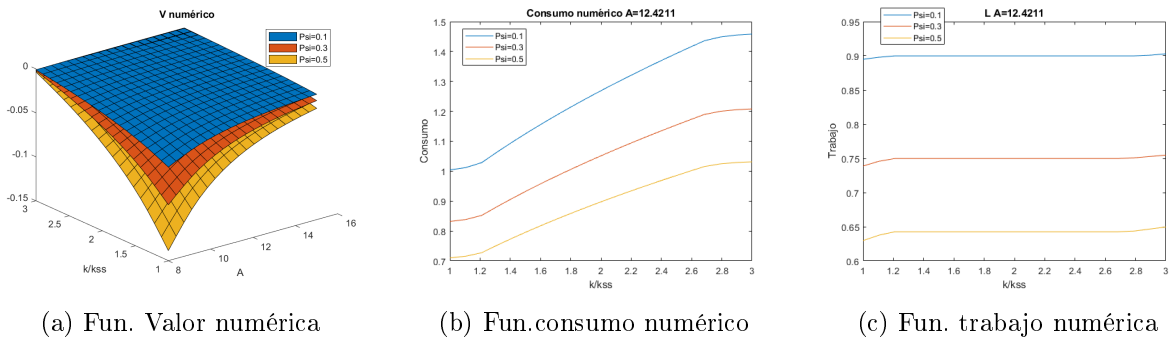


Figura 1.12: Funciones de valor y política para distinto ψ incluido saltos

Se observa que un aumento en la preferencia por el ocio, aumenta la riqueza esperada (mayor deseo de ahorrar) por tanto el consumo y trabajo disminuyen.

En la siguiente tabla, se muestra la solución para calibraciones distintas, donde no se cumple la condición $\rho = \tilde{\rho}$ por tanto no es comparable con la solución analítica. Particularmente se

¹³Para el caso de una función de utilidad $U(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ la $EIS = \frac{1}{\gamma}$

incrementó los parámetros asociados a la incertidumbre en la productividad total de los factores y en la dinámica de capital.

| Parámetro | Calibración 1 | Calibración 2 | Calibración 3 | Nombre |
|--------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------------------|
| λ | 0.03 | 0.03 | 0.03 | Intensidad de los saltos |
| α | 0.4176 | 0.4176 | 0.4176 | Elasticidad del capital |
| γ | 2 | 2 | 1.4691 | Aversión al riesgo |
| ρ | 0.0156 | 0.0172 | 0.0212 | Factor de descuento |
| $\bar{\rho}$ | 0.0254 | 0.0253 | 0.0717 | Factor de descuento |
| ψ | 0.5 | 0.5 | 0.5 | Medida de preferencia por el ocio |
| σ | 0.005 | 0.05 | 0.1 | Volatilidad del capital |
| δ | 0.05 | 0.05 | 0.05 | Depreciación del capital |
| η | 0.02 | 0.05 | 0.5 | Volatilidad en A |
| β | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Velocidad de ajuste en A |
| ω | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Media de largo plazo en A |
| ν | -0.055 | -0.055 | -0.055 | Media de los saltos |
| φ^2 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | Varianza de los saltos |

Cuadro 1.4: Parámetros del modelo con L_t variable incluido saltos con $\rho \neq \bar{\rho}$.

Los resultados de las calibraciones son:

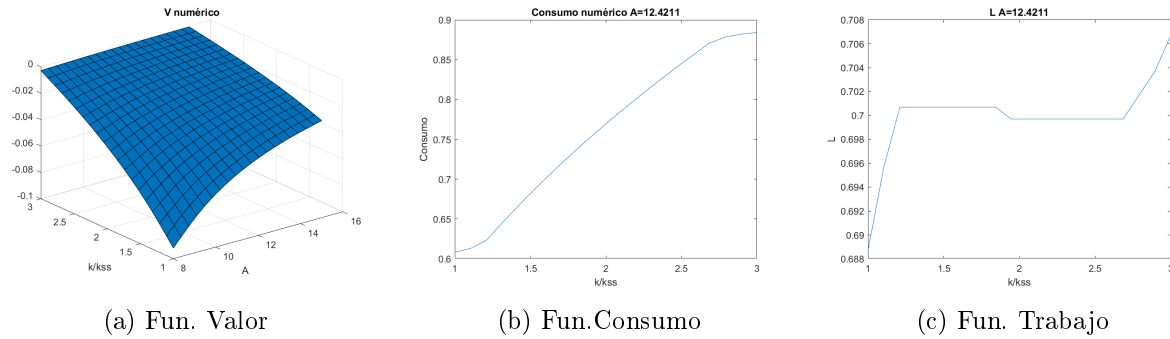


Figura 1.13: Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 1.

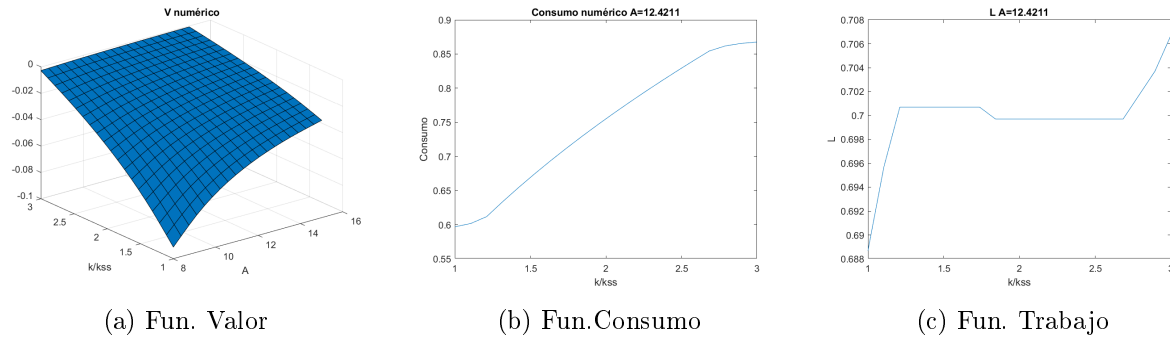


Figura 1.14: Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 2.

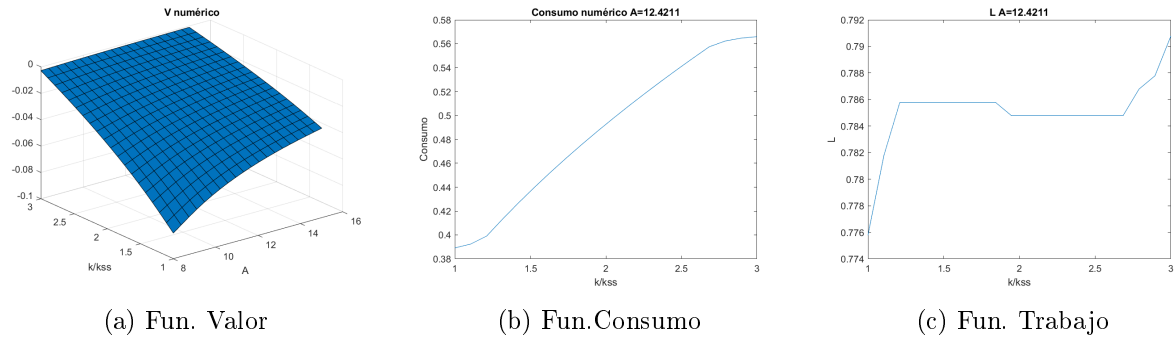


Figura 1.15: Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 3.

Lo anterior nos muestra la importancia de la incertidumbre y de la volatilidad, es decir cuanto más incierta y volátil es la economía, los individuos presentan un mayor deseo de ahorrar y por tanto una disminución en el consumo. La política de trabajo tiene un comportamiento a establecerse en un valor constante, similar a la solución analítica.

Finalmente se muestra los resultados de la función de valor y de consumo para distintas funciones de distribución de los saltos. En realidad nuestro objetivo inicial fue resolver el ejercicio numérico para que funcione con cualquier tipo de distribución de los saltos. Como ejemplo, se usa una distribución Normal truncada $\bar{N}(-0,055, 0,041)$ con valores negativos, una distribución Gamma con media $\mu = 0,1$ y $SD = 0,058$ con valores positivos, que son distribuciones con mayor evidencia empírica como lo sugiere Gourio (2012); Nakamura et al. (2013) y además se usa otro tipo de distribuciones como una normal con parámetros $N(0, 1)$, una exponencial de parámetro $\nu = 0,4$, la uniforme $U(a, b) = U(3, 7)$ y la distribución de saltos de tamaño constante $z = 1$, para tratar de mostrar si existe algún tipo de sensibilidad con respecto a la distribución de los saltos.

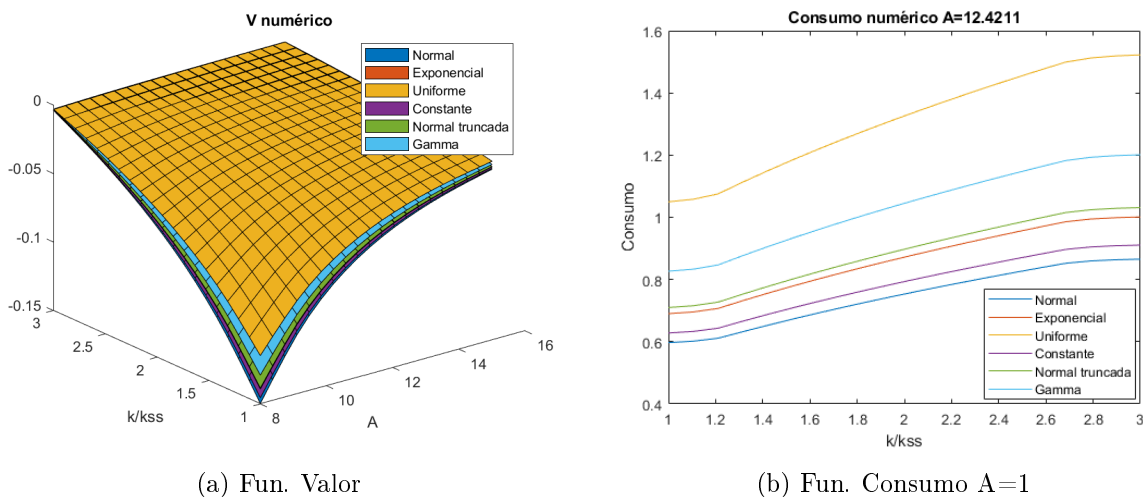


Figura 1.16: Función de valor y consumo con distintas distribuciones.

Esto nos muestra que existe cierto grado de sensibilidad de la función de valor y de la política

óptima de consumo con respecto al tipo de distribución de los saltos. Particularmente se observa un comportamiento similar en el caso de las distribuciones exponencial y gamma que simulan choques positivos observando un incremento en el consumo, para la distribución normal truncada con choques negativos se obtiene una disminución del consumo en los agentes.

1.5. Análisis de convergencia del modelo

Para establecer las pruebas de convergencia se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

- Cuando se construye las diferencias finitas para la solución de una ecuación diferencial, se hacen aproximaciones de las derivadas a través de polinomios de Taylor. Dicha construcción me da un orden de convergencia que depende del polinomio con que se hizo la aproximación.

$$V(K_{j+1}, A_n) = V(K_j, A_n) + \Delta K V_K(K_j, A_n) + \frac{(\Delta K)^2}{2!} V_{KK}(\tau, A_n), \quad \tau \in (K_j, K_{j+1}),$$

Al despejar $V_K(K_j, A_n)$ se obtiene

$$V_K(K_j, A_n) \approx \frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta K} \text{ con error } O(\Delta K)$$

$$V(K_{j+1}, A_n) + V(K_{j-1}, A_n) = 2V_K(K_j, A_n) + (\Delta K)^2 V_{KK}(K_j, A_n) + \frac{(\Delta K)^4}{12} V_{KKKK}(\tau, A_n), \quad \tau \in (K_{j-1}, K_{j+1})$$

Despejando $V_{KK}(K_j, A_n)$ se obtiene

$$V_{KK}(K_j, A_n) \approx \frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{(\Delta K)^2} \text{ con error } O((\Delta K)^2)$$

- El orden teórico de convergencia de una ecuación de diferencias está dado por el orden más bajo de los términos que aparecen en la ecuación diferencial modificada. En el caso de la ecuación de HJB el orden teórico de convergencia para k más pequeño lo dan las derivadas de primer orden que se tienen en las diferencias forward y backward usadas en el método upwind. Orden 1.
- Por otro lado se debe verificar que el algoritmo converge en el orden teórico, dicho valor debe ser homogéneo en toda la grilla y que coincida con el orden teórico.
- El método de la tasa de convergencia permite calcular numéricamente el orden de convergencia del algoritmo para saber si es consistente en toda la grilla con el orden teórico planteado.

- También se hace un análisis de convergencia donde se comparan las dos soluciones analítica y numérica en términos de precisión y velocidad al usar tanto grilla fina como grilla gruesa. Para esto, primero se resuelve el problema de la ecuación de HJB con una grilla fina y se examina la compensación de precisión-velocidad que surge cuando se resuelve numéricamente el mismo problema con una grilla más gruesa, la idea central es verificar que el método de diferencias finitas converge de manera más precisa a medida que el espaciado de la cuadrícula sea más pequeño.

1.5.1. Sanity check: Tasas de convergencia

El método implementado para determinar la tasa de convergencia toma como referencia la tesis doctoral de Ramirez (2016) "Optimal decision in illiquid hedge funds". El método consiste en incrementar en un factor r el número de pasos cada una de las dimensiones de la grilla y resolver el problema cada vez. Se muestra que la tasa de convergencia asociada a la dimensión en la que se está incrementando el número de pasos, es $\log_r(Q_i)$ donde Q_i es el i -ésimo cociente de dos diferencias consecutivas.

Sea $V(K, A)_{(N_K, N_A)}$ la aproximación a la función V , en el punto (K, A) con grilla de dimensión $N_K \times N_A$. Esta aproximación se puede escribir como el valor verdadero de la función V más un error, es decir, se puede escribir como

$$V(K, A)_{(N_K, N_A)} = V(K, A) + \left(\frac{D}{N_K}\right)^{c_K} + \left(\frac{E}{N_A}\right)^{c_A}$$

D Y E constantes, c_K y c_A tasas de convergencia de K y A respectivamente. Así mismo,

La misma estructura se puede aplicar para definir la tasa de convergencia de K entonces $c_K = \text{Log}_r(Q_i)$

$$V(K, A)_{(N_K, N_A)} = V(K, A) + \left(\frac{D}{N_K}\right)^{c_K} + \left(\frac{E}{N_A}\right)^{c_A}$$

D Y E constantes, c_K y c_A tasas de convergencia de K y A respectivamente. si se incrementa en un factor r el numero de pasos de la grilla de K se tiene;

$$V(K, A)_{(rN_K, N_A)} = V(K, A) + \left(\frac{D}{rN_K}\right)^{c_K} + \left(\frac{E}{N_A}\right)^{c_A}$$

Incrementando nuevamente la grilla en ese factor obtenemos:

$$V(K, A)_{(r^2 N_K, N_A)} = V(K, A) + \left(\frac{D}{r^2 N_K} \right)^{c_K} + \left(\frac{E}{N_A} \right)^{c_A}$$

Al hacer las diferencias de dos aproximaciones sucesivas se obtiene,

$$D_{0-1} = V(K, A)_{(N_K, N_A)} - V(K, A)_{(r N_K, N_A)} = \left(\frac{D}{N_K} \right)^{c_K} - \left(\frac{D}{r N_K} \right)^{c_K}$$

Se calcula entre los valores de la función de valor inicial y los valores de la función evaluada con el primer aumento de la grilla en un factor r .

De forma similar se calculan las siguientes diferencias:

$$D_{1-2} = V(K, A)_{(r N_K, N_A)} - V(K, A)_{(r^2 N_K, N_A)} = \left(\frac{D}{r N_K} \right)^{c_K} - \left(\frac{D}{r^2 N_K} \right)^{c_K}$$

Tomando el cociente entre dos diferencias sucesivas se obtiene:

$$Q_1 = \frac{D_{0-1}}{D_{1-2}} = \frac{\left(\frac{D}{N_K} \right)^{c_K} - \left(\frac{D}{r N_K} \right)^{c_K}}{\left(\frac{D}{r N_K} \right)^{c_K} - \left(\frac{D}{r^2 N_K} \right)^{c_K}} = r^{c_K}$$

De aquí podemos despejar la tasa de convergencia para k

$$c_K = \text{Log}_r(Q_1)$$

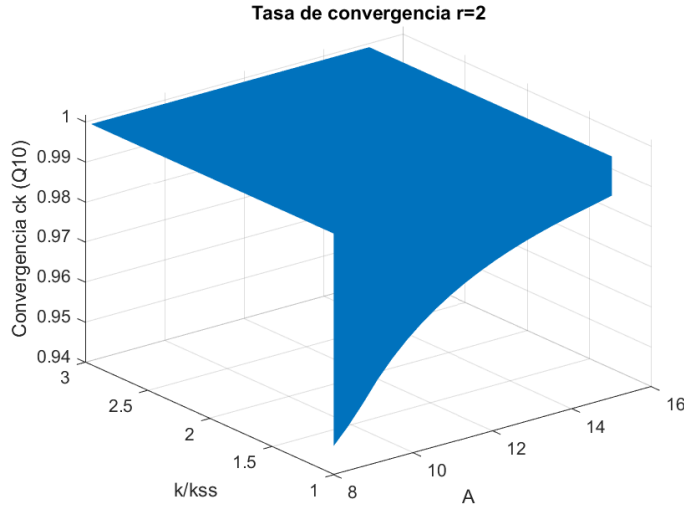
De manera general $c_K = \text{Log}_r(Q_i)$

En la grilla de A se puede hacer el mismo procedimiento para encontrar de manera general la tasa de convergencia para A dada por $c_A = \text{Log}_r(Q_i)$

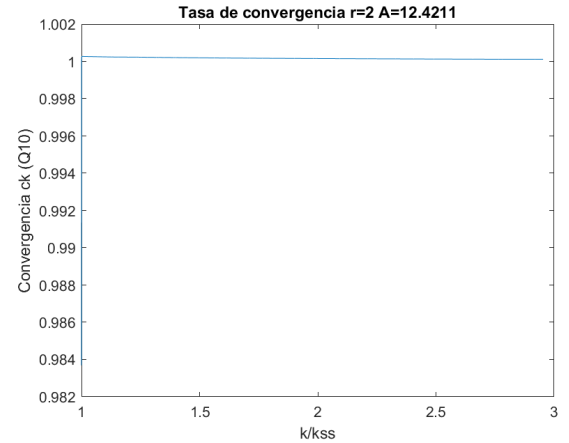
Aquí se hace necesario implementar un ciclo que nos permita calcular los valores de la función de valor evaluada en cada aumento de la grilla y con esto poder hallar los cocientes que definen la tasa de convergencia y trazar la gráfica de dichas tasas manteniendo uno de los factores constantes, en nuestro caso graficamos sobre la grilla de capital manteniendo constante A

Cabe resaltar que en el proceso de discretización la ecuación integro-diferencial se aproximó mediante diferencias finitas tipo Backward y Forward, pero la integral y el método upwind dañan el segundo orden de convergencia de las diferencias centrales, por tanto, según Wanner and Hairer (1996) y Barles and Jakobsen (2002) se tiene que el máximo teórico es orden de convergencia 1, lo que significa que nuestra aproximación es sobre el orden $O(\Delta t)$.

La siguiente gráfica muestra que la tasa de convergencia es consistente con el orden teórico planteado en toda la grilla.



(a) Tasa de convergencia $r=2$



(b) Tasa de convergencia A cte. $r=2$.

Figura 1.17: Tasa de convergencia Modelo A Variable L Variable.

1.5.2. Prueba de convergencia para el caso A variable L variable

se tuvo en cuenta el esquema de precisión del método de diferencias finitas para la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, planteado en el apéndice online del Achdou et al. (2017), ya que estos últimos afirman que los resultados teóricos desarrollados por Barles and Souganidis (1991) permiten probar la convergencia de una amplia clase de esquemas de aproximación de PDE elípticas o parabólicas de segundo orden, totalmente no lineales. Todo esto es posible mediante el uso de la noción de soluciones de viscosidad. En este caso, dichos métodos garantizan que la solución del esquema de diferencias finitas converge a la solución de viscosidad única de la ecuación HJB, a medida que el espaciado de la cuadrícula converge a cero. Además el estudio de Cont and Voltchkova (2005) propone un esquema Implícito-Explícito (IMEX) de diferencias finitas para resolver un problema que incluye una PIDE (Ecuación Parcial Integro-Diferencial), donde la parte local (Parte diferencial) del operador se resuelve utilizando un paso implícito, y la parte no local (Término integral) se resuelve usando un paso explícito. Esto permite una eficiente implementación numérica, y en el marco de soluciones de viscosidad, resuelven ciertas dificultades del operador; demostrando la consistencia y estabilidad de este tipo de esquemas, y garantizan que el esquema es monótono, incondicionalmente estable y consistente. Fuera de eso, proporcionan las condiciones para su convergencia a la solución de la PIDE.

Recordemos que la calibración de los modelos toma como referencia la calibración de Parra-Alvarez (2017),¹⁴ Posch (2013) y otros estudios similares.¹⁵

¹⁴ $\rho = 0,0105$, $\psi = 1,8011$, $\gamma = 2,0$, $\alpha = 0,4$, $\delta = 0,0196$, $\sigma = 0,0001$

¹⁵ $\rho = 0,01785$, $\gamma = 2,5$, $\alpha = 0,5$, $\delta = 0,05$, $\lambda = 0,2$.

Entonces en este experimento se resuelve numéricamente la ecuación de HJB por diferencias finitas, luego se usa la solución analítica de la función de política para compararla con la solución numérica. Para esto, primero se resuelve el problema de la ecuación de HJB con una grilla fina y se examina la compensación de precisión-velocidad que surge cuando se resuelve numéricamente el mismo problema con una grilla más gruesa. En este caso, se comparara la función de política de consumo, se resuelve el problema con una grilla fina de $J=200$ puntos en la grilla de capital, se calcula el consumo numérico y analítico, se calcula el error relativo de la diferencia entre las dos soluciones (Analítica Vs Numérica); mostrando, como resultado, que es pequeño. Posteriormente se repite el mismo proceso para el caso de una grilla más gruesa, $J=20$ puntos en la grilla del capital. Los resultados se muestran en las siguientes figuras.

Los resultados en el error de aproximación que se presentan a continuación se establecen para el valor de $\lambda = 1$, casos similares se obtienen en el otros valores de λ .

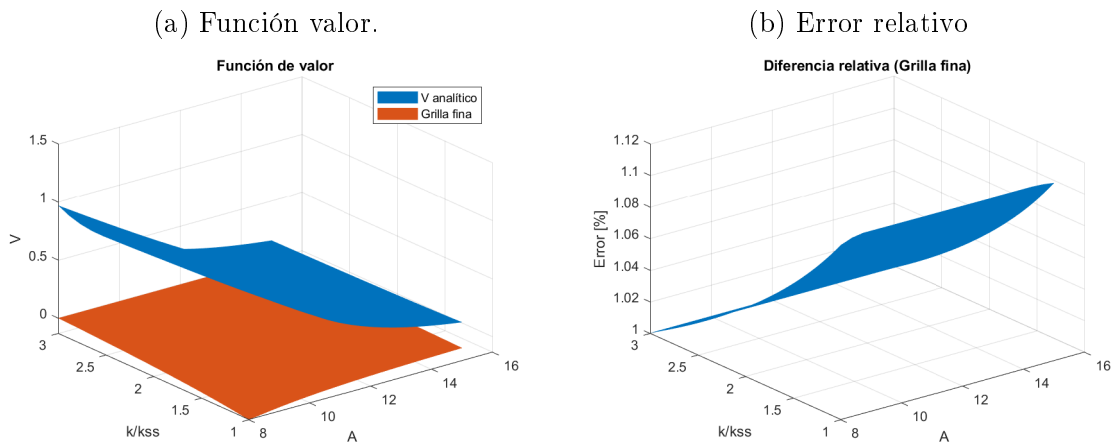


Figura 1.18: Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital.

Mirar tabla de calibraciones en estudios similares en el anexo 1

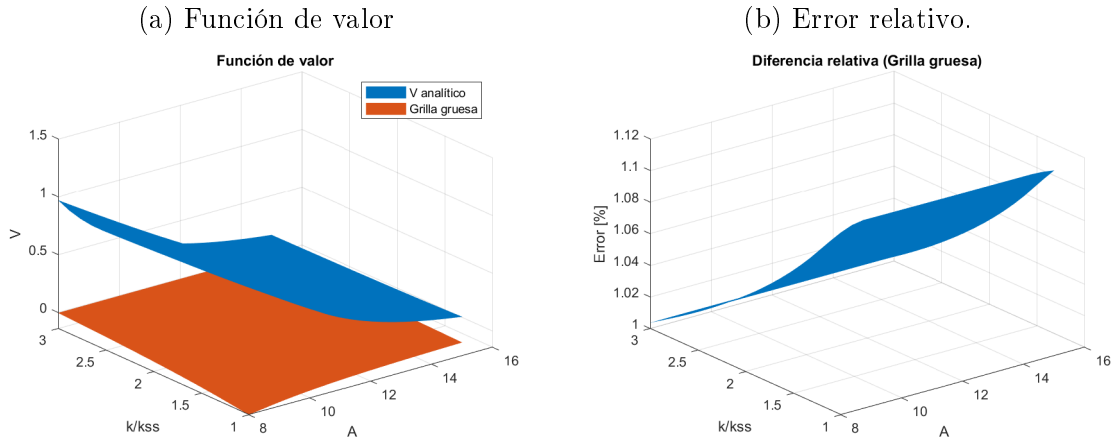


Figura 1.19: Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital.

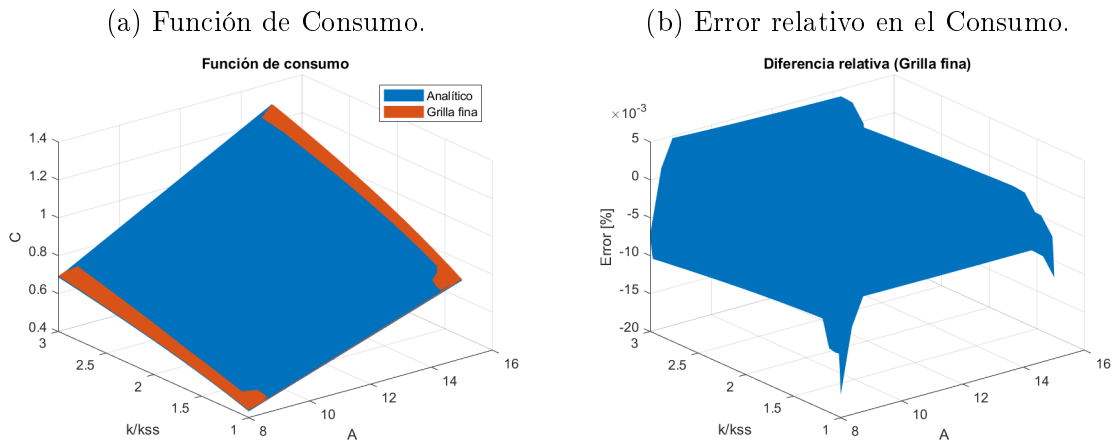
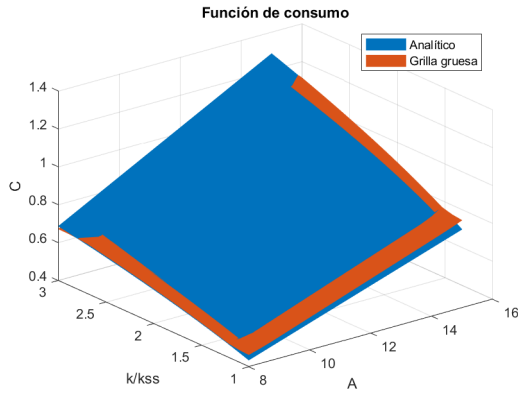


Figura 1.20: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital.

La solución numérica del consumo con grilla fina presenta un error relativo de aproximación que va en un rango del -0.02% a 0.005%

(a) Función de Consumo.



(b) Error relativo en el Consumo.

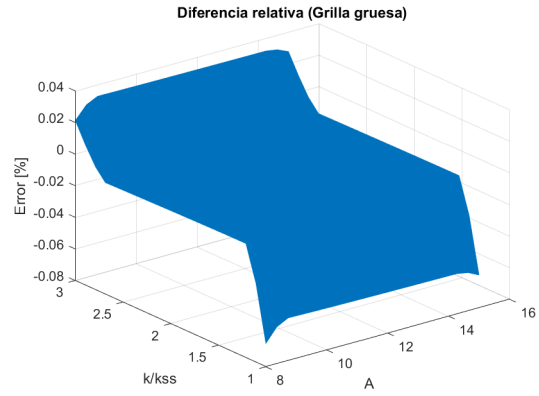
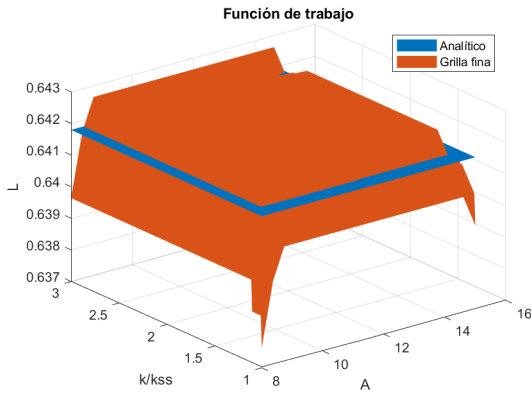


Figura 1.21: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital.

El error relativo de aproximación con grilla gruesa para el consumo presenta un rango del -0.08% a 0.04%

El error para la política de trabajo es:

(a) Función de Trabajo.



(b) Error relativo en el Trabajo.

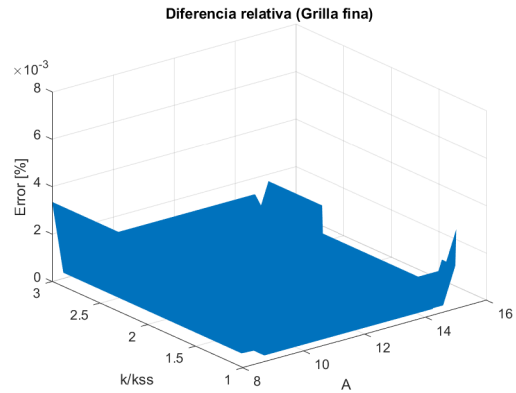


Figura 1.22: Error de aproximación en la función de Trabajo usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital.

La solución usando la grilla fina del trabajo presenta un error relativo de aproximación en un rango que va del 0.0002% al 0.003%

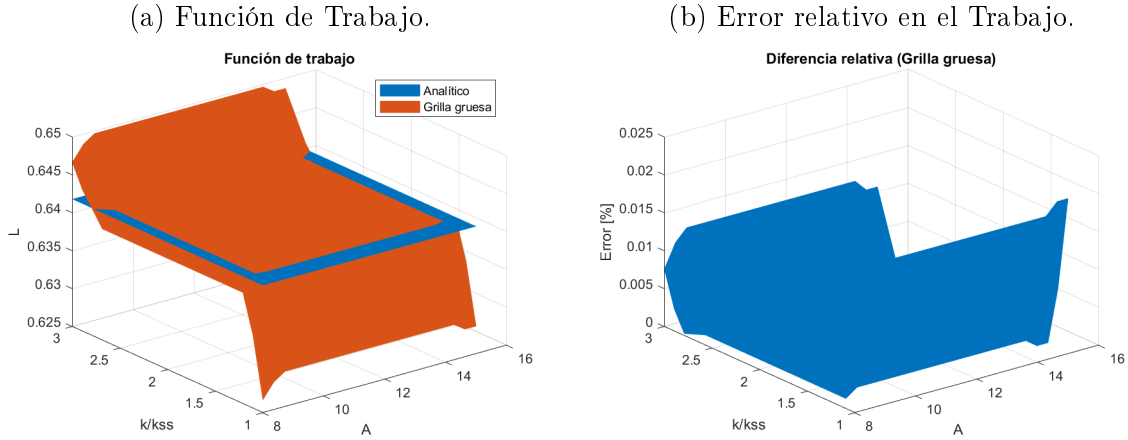


Figura 1.23: Error de aproximación en la función de Trabajo usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital.

El error relativo del trabajo que se presenta con la grilla gruesa va aproximadamente del 0.002 % al 0.017 %

Para este modelo, los resultados de velocidad y precisión son los siguientes. Nuevamente se establece la integral sobre la función de consumo como la métrica de precisión.

| Modelo | Grillas | Velocidad(seg.) | Integral del Consumo |
|------------|--------------|-----------------|----------------------|
| Avar, Lvar | J=200 | 0.83747 | 0.16027 |
| | J=20 | 0.096964 | 0.16758 |
| | Fila 2/Fila1 | 0.6050 | 1.0456 |

Cuadro 1.5: Velocidad y precisión del modelo 3

los resultados muestran que reducir el número de puntos de la grilla de 200 a 20 da como resultado un aumento aproximado de nueve veces en la velocidad computacional y un deterioro de la precisión en aproximadamente 4.56 %. mostrando un comportamiento a favor de la grilla fina.

1.6. Discusión de resultados

Cunado se tiene la restricción paramétrica $\rho = \bar{\rho}$ los resultados nos muestran, al igual que en los estudios de Parra-Alvarez (2017) y Posch (2011), que cuando se introducen factores de incertidumbre en la dinámica de capital, mezclados con procesos brownianos y procesos de saltos aleatorios no necesariamente de tamaño constante, los agentes obtienen un consumo óptimo proporcional a su nivel de ingreso y un factor de trabajo óptimo constante los cuales no se afectan directamente por los parámetros asociados por los choques, pero el mecanismo de transmisión de

estos parámetros se hace indirectamente a través de la función de valor escogida para calcular las demandas óptimas y a través del factor de descuento ρ .

Un resultado importante de este estudio que extiende los trabajos de Posch (2009, 2011, 2013); Parra-Alvarez (2017), como lo indican las proposiciones 1 y 2 muestra que bajo ciertas restricciones paramétricas es posible encontrar soluciones cerradas en el caso donde la productividad total de los factores (PTF) sigue un proceso de reversión a la media (CIR), básicamente se muestra que la contribución de los choques brownianos y de saltos no necesariamente de tamaño constante se hace a través de la función de valor, la cual tiene un término adicional $g(A_t)$ asociado con (PTF) que se resuelve por medio de una ecuación hipergeométrica confluyente y a través del factor de descuento. De esta forma se permite ampliar el uso de aproximaciones locales en los modelos de equilibrio general dinámicos estocásticos. Otro resultado importante es que el estudio permite construir mediante el uso de un método explícito sustentado en d'Halluin et al. (2005) la aproximación numérica de las integrales asociadas a la componente de saltos, las cuales evalúan la función de valor por fuera de la grilla del capital y de los ingresos, mediante la evaluación de $V(e^z K)$

A diferencia de la restricción $\rho = \bar{\rho}$ cuando se tiene la restricción de participación de capital igual a la aversión relativa al riesgo $\alpha = \gamma$ y donde la fuerza de trabajo se considera constante, los resultados concuerdan con los estudios de Smith (2006, 2007); Feicht and Stummer (2010); Wälde (2005), la estrategia de consumo óptimo \hat{c} depende directamente de la incertidumbre dada en la dinámica del capital asociada al choque browniano, al proceso de saltos y de la aversión relativa al riesgo. nuevamente el mecanismo de transmisión de la incertidumbre en la PTF, afecta al consumo de manera indirecta a través de la función de valor. Se comprueba numéricamente este resultado de la solución analítica donde la política óptima de consumo disminuye frente a un incremento en la incertidumbre del capital.

El trabajo muestra que los resultados obtenidos al convertir el capital en un activo de riesgo modelado por choques brownianos y por procesos de saltos discontinuos asociados a eventos raros, están de acuerdo con los resultados de los modelos en tiempo discreto de Barro (2006); Barro and Jin (2011); Gourio (2012); Nakamura et al. (2013) quienes modelan los desastres como una combinación de choques permanentes y transitorios a la productividad y un choque de depreciación al capital mostrando que el efecto promedio a largo plazo de un desastre se observa significativamente sobre el consumo y que un aumento en el riesgo de desastres lleva al agente a acumular capital. Esto también se observa con los estudios de impacto macroeconómico, asociados al cambio climático Hallegate (2010); Gillingham et al. (2015). Por tanto se demuestra que la metodología planteada desde el control óptimo estocástico, permite un análisis más detallado y acorde con el comportamiento real de las variables de interés, permite replicar con precisión la respuesta de las políticas óptimas de consumo y trabajo de los agentes ante un desastre y de manera general se tiene que un aumento en la probabilidad de desastres afecta la economía al reducir las expectativas y al aumentar el riesgo y por tanto el crecimiento económico.

La respuesta óptima de los agentes a choques asociados a desastres o eventos raros depende del nivel de riqueza. En otras palabras: si el consumo de los agentes disminuye cuando se ve afectada su riqueza, a través de los choques, entonces el comportamiento de los agentes es más prudente; lo que hace que por lo menos mantengan un ahorro constante. Como se muestra en Guvenen et al. (2015); Wang et al. (2016) donde los saltos se consideran útiles para aumentar aún más los motivos de ahorro precautorio en los agentes. Por tanto los agentes son menos propensos al riesgo cuando se tiene un mejor nivel de riqueza, de esta forma a medida que el agente se vuelve menos prudente (mayor ρ), su consumo óptimo aumenta, en este caso, la acumulación del capital en el futuro para los agentes se vuelve menos importante.

Cuando $\alpha = \gamma$ y el trabajo L_t es constante, el factor correspondiente a la tasa de arribo de los saltos λ afecta de manera directa la política óptima de consumo. Numéricamente se prueba que un incremento de la tasa de arribo de los saltos disminuye el consumo de los agentes. En este caso los agentes son más prudentes, deciden conservar sus activos de valor y sacrificar su consumo. Este resultado está de acuerdo con elasticidad de la función de consumo analítica con respecto a λ , que se puede calcular para cualquier función de densidad asociada a los saltos en el capital.

En los modelos donde el trabajo L_t es variable, la función de valor y las políticas óptimas presentan una relación indirecta con respecto a la tasa de arribo de saltos λ , a medida que aumenta la tasa de arribo, los individuos aumentan su valor (su riqueza) presentan mayor deseo de ahorrar y disminuyen su consumo.

En el caso de tener un proceso de reversión a la media (CIR) en la PTF A_t y la condición $\alpha\gamma > 1$, el factor $\rho = \bar{\rho}$ es creciente en la media β_A , en la volatilidad del capital σ_K y en la componente de los saltos. Si se tiene un Browniano geométrico en la PTF es creciente en la volatilidad de la PTF η_A , en la volatilidad del capital σ_K y en la componente de los saltos. Por otra parte si se tiene $\rho \neq \bar{\rho}$ y se incrementa la incertidumbre el comportamiento de los agentes es más prudente y se tiene una tasa de ahorro mayor, disminuyendo su consumo.

Al igual que en Gourio (2012); Wang et al. (2016) quienes muestran que la elasticidad intertemporal de sustitución es un parámetro crítico, si la IES es igual a uno, el riesgo de desastre no afecta las cantidades al menos en el caso de desastres instantáneos y permanentes. En nuestro caso se observó también cambios en la política óptima de consumo cuando se incrementa la aversión al riesgo γ . Esto se traduce en una disminución de la EIS, que representa una disminución de su riqueza esperada; haciendo que los individuos aumentan su consumo. La política de trabajo tiene un comportamiento inverso al aumentar γ , la fracción de trabajo disponible disminuye. Comportamiento que se probó al calcular de manera analítica las elasticidades del consumo y el trabajo con respecto a γ .

Se verificó la importancia de las soluciones cerradas encontradas en los distintos modelos, debido a que, al igual que Parra-Alvarez et al. (2017a), Posch (2011) y Posch (2013), estas permiten analizar el efecto de la incertidumbre sobre las decisiones óptimas de los agentes y se usan para

verificar precisión de los métodos numéricos empleados en la solución.

Se evaluó la precisión y velocidad de convergencia usando grillas finas y gruesas para examinar el buen comportamiento de la solución numérica con respecto a la solución analítica, justificando el uso de las grillas finas a la hora de aumentar la precisión de los modelos. Este resultado está en la línea del resultado teórico propuesto por Barles and Souganidis (1991) y los encontrados por Candler et al. (1998) y Achdou et al. (2017); quienes afirman que, la solución del esquema de diferencias finitas converge a la solución de viscosidad única de la ecuación HJB, a medida que el espaciado de la cuadrícula converge a cero.

Capítulo 2

Solución para un modelo DSGE con fuerza de trabajo estocástica y dinámica de capital discontinua.

Juan Carlos Zambrano *

Rafael Serrano **

DOCTORADO EN ECONOMÍA

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

CALLE 12 C NO. 4-60

BOGOTÁ, COLOMBIA

Resumen: En este estudio se propone una solución analítica y numérica de un modelo teórico de crecimiento neoclásico estocástico, en tiempo continuo, con un solo sector, tipo Ramsey con función de utilidad CRRA y tecnología tipo Cobb-Douglas. En el modelo se asumen el capital, la efectividad del trabajo y la fuerza de trabajo, sujetos a choques exógenos que siguen procesos de difusión con saltos, que a su vez modelan eventos raros en la economía. La solución analítica se establece bajo el principio de optimización dinámica, el teorema de verificación y bajo una restricción paramétrica, permitiendo resolver la ecuación de HJB en tiempo continuo resultante para obtener la función de valor y la política óptima de consumo. La solución numérica de la ecuación de HJB en tiempo continuo se estableció por medio de diferencias finitas usando el esquema *Upwind* para resolver la no-linealidad existente. Todo lo anterior muestra cómo la incertidumbre asociada al capital, a la efectividad del trabajo y al mismo trabajo afectan, las decisiones de consumo de los agentes y la tasas efectivas de depreciación y crecimiento del capital.

*Estudiante Doctorado en Economía E-mail: juan.zambrano@urosario.edu.co

**PhD, Profesor Asociado Facultad de Economía Universidad del Rosario E-mail: rafael.serrano@urosario.edu.co

Introducción

En las últimas dos décadas, los modelos dinámicos estocásticos han cobrado gran importancia en el desarrollo de la macroeconomía. Especialmente, el uso de métodos numéricos son una herramienta fundamental para aproximar las soluciones de este tipo de modelos, debido a que, en muchas ocasiones, no es fácil encontrar soluciones analíticas simples, obligando a aproximar numéricamente las trayectorias óptimas con un margen de error mínimo. Sin embargo, los estudios sobre existencia de soluciones analíticas bajo ciertas restricciones de parámetros juegan un papel importante, puesto que con ellos se permite comparar las soluciones que proporcionan los distintos métodos numéricos, y, además, pueden tomarse como punto de referencia para explorar otros modelos; así como el vínculo entre los modelos en tiempo discreto y continuo, y los distintos canales de transmisión, a través de los cuales, los métodos numéricos son usados para resolver nuevos problemas en macroeconomía.

La literatura sobre este tema es bastante extensa, particularmente se halla en los estudios que involucran soluciones analíticas de modelos dinámicos estocásticos en tiempo continuo. Ese tipo de estudios se han convertido en una herramienta fundamental para obtener información real de la existencia y funcionamiento de la incertidumbre asociada a las diferentes variables económicas. Ejemplos pueden encontrarse en los estudios de Merton (1975); Chang (2004); Turnovsky (2006); Smith (2007), Smith (2006); Øksendal (2006); Posch (2009), Posch (2011) y Wälde (2011).

Otra línea de estudios apunta al caso de métodos de solución numérica para modelos DSGE en tiempo continuo, que tienen asociado en sus dinámicas procesos estocásticos brownianos y procesos discontinuos, como los de Judd (1998); Gaspar and Judd (1997); Miranda and Fackler (2004); Parra-Alvarez (2017); Posch (2013); Fernández-Villaverde et al. (2016) y Fernández-Villaverde and Levintal (2018). El estudio de Duarte (2018) se destaca por proponer métodos numéricos nuevos basados en el aprendizaje automático de técnicas mediante el uso de redes neuronales, que pueden resolver modelos complejos de tiempo continuo en macroeconomía y finanzas; ellos aproximan la solución del operador de Bellman y comparan los resultados con las soluciones analíticas obtenidas de un modelo de crecimiento neoclásico con choques estocásticos en las variables de estado, que bajo supuestos adecuados, admite soluciones cerradas.

Finalmente los estudios de Strikwerda (2004); Scott (1999); Li et al. (2017); Hirta (2016); Achdou et al. (2017); Moll (2014) y D'Avernas (2019) presentan la teoría básica sobre la solución de ecuaciones diferenciales por diferentes métodos numéricos; en especial el método de diferencias finitas, en el que se hace una descripción completa sobre la solución de modelos en tiempo continuo, usando diferencias finitas; y, en particular, desarrollando una implementación del esquema *Upwind* en diferencias finitas, que permite resolver modelos RBC de equilibrio general y modelos de agentes heterogéneos con dinámicas estocásticas.

De esta forma, el presente estudio tiene como objetivo desarrollar un modelo de crecimiento

neoclásico estocástico, de un solo sector en tiempo continuo, tipo Ramsey, con la utilidad CRRA y la tecnología Cobb-Douglas; donde la incertidumbre asociada al capital (k_t), a la efectividad del trabajo (A_t) y a la fuerza de trabajo (L_t), se modela con choques exógenos asociados a procesos de difusión y de saltos discontinuos, definidos por un sistema ecuaciones diferenciales estocásticas interrelacionadas, que nos permita resolver el interrogante de ¿cómo afecta la incertidumbre del capital, de la efectividad de trabajo (tecnología) y de la fuerza de trabajo a las decisiones óptimas de los agentes en términos de la función de valor y de la función de consumo óptimo?

Este estudio obtiene soluciones cerradas para la función de valor, la función de consumo óptimo y para la tasa de crecimiento efectiva del capital, en el caso de considerar la fuerza de trabajo estocástica y la efectividad del trabajo descritos por medio de un proceso browniano geométrico y cuando la dinámica del capital se define por una combinación de procesos de difusión y de saltos discontinuos asociados a eventos raros. Para ello hacemos uso del principio de optimalidad de Bellman y el teorema de verificación en tiempo continuo, y bajo el supuesto de que el coeficiente de aversión relativa al riesgo es igual a la participación del capital ($\alpha = \gamma$), cuya evidencia empírica se describe de manera más extensa en diferentes estudios como Barro and Sala-i Martin (2004); Smith (2006); Smith (2007); Wälde (2005); Feicht and Stummer (2010) y Posch (2009). Lo anterior también nos permite establecer un vínculo entre los modelos en tiempo discreto modelos de ciclo económico y la literatura de crecimiento estocástico en tiempo continuo desde los trabajos pioneros como Turnovsky (1995, 2006).

Este trabajo también resuelve numéricamente la ecuación de HJB por medio de un esquema Implícito-Explícito (IMEX) de diferencias finitas, debido a que el problema incluye una PIDE (Ecuación Parcial Integro-Diferencial), donde la parte local (Parte diferencial) del operador se resuelve utilizando un paso implícito *Upwind*; y la parte no local (Término integral) se resuelve usando un paso explícito. Lo anterior se apoya en los estudios de Cont and Voltchkova (2005); d'Halluin et al. (2005) y Achdou et al. (2017). Finalmente, se realiza el análisis de convergencia y una prueba de precisión y velocidad para la respuesta del modelo.

La línea teórica del modelo toma como referencias principales los trabajos de Smith (2006); Smith (2007); Posch (2009) y Wälde (2005). Básicamente, la contribución de este trabajo se refleja en los siguientes aspectos. En primer lugar, se establece soluciones cerradas para un modelo teórico que considera, de manera conjunta, choques exógenos estocásticos a la efectividad del trabajo, a la fuerza de trabajo y a la dinámica del capital que nos muestra el efecto de la incertidumbre sobre las decisiones óptimas de los agentes.

El estudio extiende el trabajo de Smith (2007), quien modela analíticamente solo los choques de la efectividad del trabajo A_t y la fuerza de trabajo L_t de forma separada con procesos de difusión, en nuestro caso incluimos choques brownianos conjuntos en A_t , L_t y en la dinámica del capital incluyendo saltos asociados a eventos raros. También se hace una extensión del trabajo de Baten et al. (2013), quienes desarrollan un modelo estocástico de horizonte finito tipo Ramsey con función de producción Cobb-Douglas, utilidad logarítmica, fuerza de trabajo variable asociada

a un Browniano geométrico y sin choques en la dinámica de capital; resuelven teóricamente el modelo con la técnica del método de viscosidad para garantizar la existencia de la solución para la función de valor y la política óptima de consumo.

En segundo lugar, se construye una implementación numérica para resolver la ecuación integro-diferencial de (HJB) que permite obtener la función de valor óptimo y la política óptima de consumo en el caso de choques que combinan procesos de difusión con procesos de saltos no necesariamente de tamaño constante y se contrasta estos resultados con las soluciones cerradas. Se verifica en cada caso cuál es la relación existente entre las fuentes de incertidumbre del capital, de la efectividad del trabajo, de la fuerza de trabajo y las no-linealidades en la economía, con la decisión de política óptima de los agentes.

2.1. El marco económico del modelo

Se considera un modelo de crecimiento neoclásico estocástico de un solo sector en tiempo continuo tipo Ramsey, con la utilidad CRRA y la tecnología Cobb-Douglas. Donde el capital (k_t) y la fuerza de trabajo (L_t) se exponen a choques exógenos; la dinámica correspondiente es modelada por un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas que se definen de la siguiente forma.

Se supone que la función de producción para la economía es del tipo Cobb-Douglas definida para alguna participación de capital arbitraria pero fija, $\alpha \in (0, 1)$.

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} \quad \alpha \in (0, 1) \quad (2.1)$$

Este primer modelo considera que la efectividad del trabajo $A_t \equiv 1$ y luego se propone un modelo más general donde la efectividad del trabajo es también estocástica.

Desde el estudio de Kydland and Prescott (1982) se deduce que el cambio tecnológico es variante en el tiempo y que el ciclo económico se encuentra afectado por distintas perturbaciones de carácter exógeno que se prolongan por diferentes mecanismos internos. Otros estudios como Turnovsky (1993); Venegas-Martínez (2001); Cruz (2012) muestran que dichas perturbaciones tienen su origen en diferentes problemas de la demanda agregada, entre los cuales están la volatilidad de las decisiones de inversión y la volatilidad de la fuerza laboral, puesto que generan perturbaciones reales constantes, con mecanismos de propagación basadas en las rigideces nominales, sobre todo de los salarios. Por tanto al incluir un análisis de riesgo que con lleva a movimientos inesperados generados por la volatilidad en las variables del nivel del producto, se encuentra que una de las variables exógenas con alta volatilidad que incide sobre la acumulación de capital es la fuerza laboral, la cual se asume varía en forma estocástica por tanto se puede representar por medio de un proceso definido por una ecuación diferencial estocástica.

Un caso particular en el cual la fuerza de trabajo que se expone a diferentes tipos de choques,

por ejemplo se sustenta en el informe de la Organización Internacional del Trabajo OIT (2017), quienes afirman que “los elevados niveles de desocupación y la precariedad del empleo han afectado a la gran mayoría de países durante las últimas décadas y son consideradas como una consecuencia de una demanda insuficiente que se suma a un crecimiento económico desequilibrado”. Además la volatilidad de la fuerza de trabajo se debe entender como una medida de la movilidad laboral que refleja la inestabilidad en el empleo de la fuerza de trabajo.

Teniendo en cuenta lo anterior se asume que la fuerza de trabajo L_t sigue un movimiento browniano geométrico, se supone que el valor actual de L_t se conoce en el tiempo t , pero que sus valores futuros son inciertos. En otras palabras, L_t se describe como en Merton (1975) es decir, cada cambio de la fuerza de trabajo es independiente de los cambios de trabajo anteriores y la volatilidad de dichos cambios es constante.

$$dL_t = \beta L_t dt + \eta L_t dB_{L,t} \quad \beta \geq 0 \quad L_0 = L > 0 \quad (2.2)$$

Donde $B_{l,t}$ es un Movimiento Browniano estándar que modela el factor de riesgo en la fuerza de trabajo con tasa de crecimiento esperada de la población activa $\beta \geq 0$ y volatilidad de la fuerza de trabajo $\eta > 0$, βL_t es el término de tendencia y $\eta L_t dB_{L,t}$ es el término estocástico. Dividiendo por L_t la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{dL_t}{L_t} = \beta dt + \eta dB_{L,t}$$

Lo cual significa que la proporción del crecimiento de la fuerza laboral tiene una distribución normal con media β y varianza η^2 . Asimismo, dada la condición inicial $L(0) = L_0$, entonces la ecuación diferencial estocástica representa un Movimiento browniano geométrico, lo que implica una solución dada por la exponencial estocástica:

$$L_t = L_0 e^{(\beta - \frac{1}{2}\eta^2)t + \eta B_{L,t}}$$

Esto implica que la variabilidad de la fuerza laboral va a determinar la estabilidad de la trayectoria de crecimiento pues éste depende de la acumulación de capital y el capital, además de depender de si mismo, depende de la fuerza laboral, como se muestra en la siguiente ecuación:

El proceso de capital agregado K_t es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dK_t = (Y_t - \delta K_t - L_t c_t)dt + K_t dJ_t \quad K_0 = K > 0 \quad (2.3)$$

Donde

$$J_t = \sigma B_{K,t} + \sum_{n=1}^{N_t} (e^{z_n} - 1) \quad (2.4)$$

De esta forma de los valores de la economía K_t y L_t se exponen a una fuente de incertidumbre, en forma de movimientos brownianos estándar independientes $B_{K,t}$ y $B_{L,t}$. Remplazando (2.1) se tiene:

$$dK_t = (K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - L_t c_t) dt + K_t dJ_t, \quad K_0 = K > 0 \quad (2.5)$$

δ tasa de depreciación del capital, $dB_{K,t}$ choque exógeno agregado browniano con volatilidad $\sigma > 0$ que modela las pequeñas fluctuaciones de capital que se observan todos los días alrededor de su tendencia.³ El termino $\sum_{\tau_n \leq t} (e^{z_n} - 1)$ representa la suma de todos los saltos proporcionales al capital anterior que ocurren en la dinámica para un intervalo de tiempo dado.

Así un proceso de Poisson compuesto modela los saltos bruscos e inesperados que ocasionalmente ocurren en el tamaño del capital y puede parametrizarse por una intensidad ("tasa de arribo") $\lambda > 0$ y una distribución de probabilidad específica para el tamaño de los saltos F . El hecho de incluir saltos en la dinámica de capital nos proporciona unas características especiales que los modelos de difusión no llegan a capturar, por ejemplo cuando los posibles resultados en la modelación incluyen valores positivos y negativos para el capital en forma de desastres raros.

Se supone que el consumidor representativo tiene una tasa de preferencia intertemporal constante $\rho \geq 0$ y una función de utilidad CRRA, (con $f' > 0$ y $f'' < 0$)

$$f(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (2.6)$$

El agente representativo maximiza la utilidad esperada de la vida útil descontada que se derivada del consumo per cápita, c_t , sujeto a la función de producción, la evolución de la fuerza de trabajo, la evolución del stock de capital, la condición de vaciado del mercado $Y_t = C_t + I_t$ y algunas condiciones iniciales $K_0 = K > 0$, $L_0 = L > 0$.

En cada momento del tiempo existirá una cantidad de fuerza de trabajo L_t , por lo que la utilidad

³ $dJ_t = \sigma dB_{K,t} + \int (e^z - 1) N(dz, dt)$. $N(dz, dt)$ denota la medida de conteo aleatorio de un proceso de saltos con compensador $\nu = \lambda F$.

de la sociedad es $L_t f(c_t)$. De esta forma se plantea el siguiente problema de control óptimo. ⁴

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \mathbb{E} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} L_t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \quad \gamma > 0 \\ \text{s.a :} \quad & \\ Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad & \alpha \in (0, 1) \\ dL_t = \beta L_t dt + \eta L_t dB_{L,t} \quad & \beta \geq 0 \quad \eta > 0 \quad L_0 = L > 0 \\ dK_t = (K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - L_t c_t) dt + K_t dJ_t \quad & \delta > 0 \quad K_0 = K > 0 \\ Y_t = C_t + I_t \end{aligned} \tag{2.7}$$

Donde se tiene como variable de control $c_t(K_t, L_t)$, y variables de estado K_t, L_t . Para este proceso de control $c = \{c_t\}_{t \geq 0}$ toma valores en $[0, \infty)$, $K = K^c$ denota la solución de la ecuación diferencial estocástica controlada (2.3). La función de utilidad es cóncava para garantizar la existencia del máximo.

Con el objetivo de encontrar una solución cerrada al modelo, se supone que el coeficiente de aversión relativa al riesgo es igual a la participación de capital, es decir, $\gamma = \alpha$. Este mismo hecho se usa en las soluciones cerradas planteadas en los estudios de Smith (2006), Smith (2007) y Posch (2009) .

La solución de este problema tiene como herramientas principales al enfoque de programación dinámica y el teorema de verificación aplicados a dinámicas que combinan procesos de difusión y de saltos de Poisson. Para ello se toma como referencias principales a (Oksendal and Sulem, 2009), (Fleming and Soner, 2006) y (Hanson, 2007).

La solución, en primer lugar define la siguiente función de valor óptimo:

$$V(K_t, L_t) := \sup_{c \geq 0} \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} e^{-\rho t} L_t f(c_t) dt \right], \quad K_0 = K \geq 0, \quad L_0 = L > 0 \tag{2.8}$$

con la siguiente ecuación integro-diferencial no lineal de segundo orden de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B):

$$-\rho V(K_t, L_t) + \sup_{c_t \geq 0} \{[\mathcal{A}^{c_t} V](K_t, L_t) + L_t f(c_t)\} = 0, \quad K_t \geq 0, \quad L_t > 0. \tag{HJB}$$

Para cada $c \geq 0$ \mathcal{A}^c es el operador

⁴El consumo per cápita es $c_t = \frac{C_t}{L_t}$ entonces $C_t = L_t c_t$

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}^{c_t}V](K_t, L_t) &= (K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - L_t c_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, L_t) + \beta L_t \frac{\partial V}{\partial L_t}(K_t, L_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, L_t) \\
&+ \frac{1}{2} \eta^2 L_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial L_t^2}(K_t, L_t) + \lambda \int [V(e^z K_t, L_t) - V(K_t, L_t)] G(z) dz.
\end{aligned}$$

La condición de primer orden para este problema permite encontrar la función óptima de consumo y esta dada por:

$$c_t^{-\gamma} = \frac{\partial V}{\partial K_t} \quad (2.9)$$

de donde

$$c_t = (V_K)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

Por definición, para cada $(K_t, L_t) \in \mathbb{R}_+^2$ el máximo de la ecuación HJB cumple:

$$\hat{c}(K_t, L_t, V_K) = \arg \max_{c \geq 0} [\mathcal{A}^{c_t} \hat{V}](K_t, L_t) + L_t f(c_t)$$

Si se supone que \hat{c}_t es óptima, entonces se obtiene la siguiente ecuación de HJB:

$$-\rho \hat{V}(K_t, L_t) + \{[\mathcal{A}^{\hat{c}_t} \hat{V}](K_t, L_t) + L_t f(\hat{c}(K_t, L_t, V_K))\} = 0.$$

El teorema de verificación establece que, $V = \hat{V}$ resuelve la ecuación (HJB) y garantiza la existencia de una regla de política óptima \hat{c}_t tal que $\hat{c}_t = c(K_t, L_t)$

Así la solución de este problema esta completamente caracterizada por la ecuación de HJB Maximizada dada por:

$$\begin{aligned}
\rho V(K_t, L_t) &= L_t f(\hat{c}_t) + (K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - L_t \hat{c}_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, L_t) + \beta L_t \frac{\partial V}{\partial L_t}(K_t, L_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, L_t) \\
&+ \frac{1}{2} \eta^2 L_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial L_t^2}(K_t, L_t) + \lambda \int V(e^z K_t, L_t) G(z) dz - \lambda V(K_t, L_t).
\end{aligned} \quad (2.10)$$

$G(z)$ es la función de densidad de probabilidad del salto de amplitud z .

Condiciones de Equilibrio

Este planificador busca maximizar la utilidad de las familias representada por (2.7), el equilibrio de esta economía usa las condiciones de primer orden (2.9) de tal forma que dado un proceso exógeno estocástico, $\{L_t\}_{t=0}^\infty$ y la condición inicial $K_0 > 0$, se cumpla:

- En cada instante de tiempo la ecuación de H.J.B. maximizada (2.10) dada por el planeador central.
- La restricción de la fuerza de trabajo (2.2).
- La restricción de acumulación de capital (2.3).
- La restricción de equilibrio del mercado $Y_t = C_t + I_t$.

de esta forma es posible encontrar la función de valor óptima junto con las demandas óptimas de consumo y de trabajo $\hat{V}(K_t, A_t)$, $\hat{c}(K_t, A_t)$ y $\hat{L}(K_t, A_t)$. Las cantidades resultantes de esta maximización son Óptimos de Pareto, en el sentido que no es posible aumentar la utilidad de alguna de las firmas sin reducir la de otra.

En seguida se muestra cómo bajo algunas restricciones paramétricas es posible derivar expresiones analíticas para la función del valor y la función de política.

Proposition 4 *Si se supone que la participación del capital es igual a la aversión relativa al riesgo $\alpha = \gamma$ entonces la función de valor es*

$$V(K_t, L_t) = \Omega \frac{L_t^\gamma K_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + HL_t$$

y la política óptima de consumo es de la forma:

$$c_t(K_t, L_t) = \Omega^{\frac{-1}{\gamma}} \frac{K_t}{L_t};$$

Donde

$$H = \frac{\Omega}{\rho - \beta}$$

$$\Omega = \left(\frac{2\rho - 2\beta\gamma + (1-\gamma)(2\delta + \gamma(\sigma^2 + \eta^2)) - 2\lambda(m(1-\gamma) - 1)}{2\gamma} \right)^{-\gamma}$$

Aquí $m(\xi) := \mathbb{E}[e^{\xi y}] = \int e^{\xi y} F(dy)$ es la función generadora de momentos de la distribución $F(dy)$.

La restricción paramétrica $\alpha = \gamma$ se toma específicamente para lograr soluciones cerradas al modelo que permiten comparar la precisión de las soluciones numéricas a resolver.

Una diferencia fundamental con respecto al modelo planteado en el capítulo 1, el cual consideraba un CIR en la PTF, es que en primer lugar las restricciones paramétricas para encontrar las soluciones son distintas $\rho = \bar{\rho}$ frente a $\alpha = \gamma$ y en el caso de fuerza de trabajo L_t variable, el mecanismo de transmisión del factor de riesgo del trabajo, del capital y la componente de los saltos, se hace de manera directa sobre el consumo óptimo. En el primer caso se hace a través de

la función de valor. La demostración se ve en el anexo 2.⁵

Reemplazando el consumo $c_t(K_t, L_t) = \Omega^{\frac{-1}{\gamma}} \frac{K_t}{L_t}$ en la ecuación de la dinámica del capital (2.3) se obtiene:

$$dK_t = (K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - (\delta + b)K_t) dt + K_t dJ_t, \quad K_0 = K > 0$$

Donde

$$b = \frac{2\rho - 2\beta\gamma + (1 - \gamma)(2\delta + \gamma(\sigma^2 + \eta^2)) - 2\lambda(m(1 - \gamma) - 1)}{2\gamma}$$

Si consideramos $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ y aplicamos la regla del producto para procesos de difusión de Itô podemos expresar el capital en unidades efectivas entonces

$$\frac{d(k_t)}{dt} = \frac{d(K_t/L_t)}{dt} = \frac{L_t \frac{dK_t}{dt} - K_t \frac{dL_t}{dt}}{L_t^2} = \frac{1}{L_t} \frac{dK_t}{dt} - \frac{K_t}{L_t} \left[\frac{dL_t}{L_t} \right]$$

Reemplazando obtenemos la dinámica del capital efectivo dada por:

$$dk_t = [k_t^\alpha - (\delta + b + \beta - \frac{1}{2}\eta^2)k_t]dt + k_t(\sigma dB_{k,t} - \eta dB_{L,t}) + k_t \int (e^z - 1)N(dz, dt) \quad (2.11)$$

De donde la tasa de crecimiento efectiva de capital es:

$$\frac{dk_t}{k_t} = [k_t^{\alpha-1} - (\delta + b + \beta - \frac{1}{2}\eta^2)]dt + (\sigma dB_{k,t} - \eta dB_{L,t}) + \int (e^z - 1)N(dz, dt) \quad (2.12)$$

Esto implica entonces que tanto la parte determinista como la parte estocástica de la tasa de crecimiento efectiva del capital están afectadas por la fuerza laboral, por tanto las variaciones aleatorias del capital dependen de las fluctuaciones aleatorias de la fuerza laboral.

También se observa que la incertidumbre de la fuerza de trabajo (η) reduce la tasa efectiva de depreciación del capital dada por $\hat{\delta} = \delta + \beta - \frac{1}{2}\eta^2$ y esto implica un efecto positivo sobre los niveles de la tasa de crecimiento efectiva de capital. Además la ecuación (2.12) permite caracterizar el capital de estado estacionario de esta economía cuando $\eta = \sigma = \lambda = 0$.

Corolario 4 *Si se tiene la restricción paramétrica $\alpha = \gamma$ entonces las elasticidades de la función de consumo con respecto a la tasa de arribo de los saltos λ , a la aversión relativa al riesgo γ , a la volatilidad del capital σ y a la volatilidad del trabajo η respectivamente son:*

⁵Smith (2007) sugiere que la incertidumbre aumenta (disminuye) el consumo cuando la elasticidad intertemporal de sustitución es mayor (menor) que uno. En este caso, la elasticidad intertemporal debe exceder a uno porque está restringida para igualar al recíproco de la participación del capital.

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda} = -\frac{m(1-\gamma) - 1}{\gamma} \frac{K_t}{L_t} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{-\delta + \frac{\gamma^2}{2}(\sigma^2 + \eta^2) + \lambda(\gamma \frac{\partial m(1-\gamma)}{\partial \gamma}) + m(1-\gamma) - 1 - \rho}{\gamma^2} \frac{K_t}{L_t} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = (1-\gamma)\sigma \frac{K_t}{L_t} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \eta} = (1-\gamma)\eta \frac{K_t}{L_t} \quad (2.16)$$

Se demuestra que las elasticidades del consumo en λ y γ dependen de la función generadora de momentos $m(\xi)$ asociada a la función de densidad de los saltos y muestra la importancia de este tipo de choques en la generación de la política de consumo. Ver demostración en el anexo 2.

Finalmente es de aclarar algunas diferencias con respecto al modelo planteado en el capítulo 1 proposición 2.

En primer lugar son soluciones cerradas que se obtienen bajo restricciones paramétricas diferentes en el caso 2 del capítulo 1 es $\rho = \bar{\rho}$ y en el modelo del capítulo 2 es $\alpha = \gamma$

En segundo lugar las funciones de consumo que se obtienen cambian dependiendo de la restricción en el primer caso el consumo óptimo $\hat{c}_t(K_t, A_t) = \frac{\gamma-1}{\gamma} A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ es proporcional al un proporcional a su nivel de ingreso los factores de incertidumbre de la PTF no afectan directamente al consumo, lo hacen indirectamente a través de la función de valor.

En el segundo caso $c_t(K_t, A_t, L_t) = b \frac{K_t}{L_t}$ con

$$b = \frac{\rho - \beta\gamma + (1-\gamma)(\delta + \frac{1}{2}\gamma(\sigma^2 + \eta^2)) - \lambda(m(1-\gamma) - 1)}{\gamma}$$

Es lineal en el capital y los factores de incertidumbre del trabajo afectan directamente al consumo.

En tercer lugar si analizamos la tasa de crecimiento efectiva del capital en cada caso se tiene:

$$\frac{dk_t}{k_t} = \left[\frac{1}{\gamma} A_t^\alpha k_t^{\alpha-1} - (\delta + \beta - \frac{1}{2}\eta^2) \right] dt + (\sigma dB_{K,t} - \eta dB_{A,t}) + \int (e^z - 1) N(dz, dt)$$

Aquí se muestra que la incertidumbre de la productividad de los factores (η) reduce la tasa efectiva de depreciación del capital dada por $\hat{\delta} = \delta + \beta - \frac{1}{2}\eta^2$ y esto implica un efecto positivo sobre los niveles de la tasa de crecimiento efectiva de capital.

En otro caso la tasa de crecimiento efectiva de capital es:

$$\frac{dk_t}{k_t} = \left[k_t^{\alpha-1} - (\delta + b + \beta - \frac{1}{2}\eta^2) \right] dt + (\sigma dB_{k,t} - \eta dB_{L,t}) + \int (e^z - 1) N(dz, dt)$$

Esto implica entonces que tanto la parte determinista como la parte estocástica de la tasa de crecimiento efectiva del capital están afectadas por la fuerza laboral, por tanto las variaciones aleatorias del capital dependen de las fluctuaciones aleatorias de la fuerza laboral.

Entonces se muestra que la tasa efectiva de crecimiento es distinta.

2.2. Solución analítica para un modelo DSGE con efectividad del trabajo A_t , fuerza de trabajo L_t estocásticos y dinámica de capital discontinua

Nuevamente se considera un modelo de crecimiento neoclásico estocástico de un solo sector en tiempo continuo tipo Ramsey, con la utilidad CRRA y la tecnología Cobb-Douglas. Donde el capital (K_t), la efectividad del trabajo A_t y la fuerza de trabajo (L_t) se exponen a choques estocásticos exógenos.

Se supone que la función de producción para la economía es del tipo Cobb-Douglas

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} \quad \alpha \in (0, 1) \quad (2.17)$$

Es posible resolver el modelo considerando en el caso más general donde A_t y L_t son movimientos brownianos geométricos:

$$dA_t = \mu A_t dt + \nu A_t dB_{A,t} \quad \mu \geq 0 \quad A_0 = A > 0 \quad (2.18)$$

Donde $B_{A,t}$ es un Movimiento Browniano estándar que modela el factor de riesgo en efectividad del trabajo con tasa de crecimiento esperada $\mu \geq 0$ y volatilidad constante $\nu > 0$.

$$dL_t = \beta L_t dt + \eta L_t dB_{L,t} \quad \beta \geq 0 \quad L_0 = L > 0 \quad (2.19)$$

Donde $B_{L,t}$ es un Movimiento Browniano estándar que modela el factor de riesgo en la fuerza de trabajo con tasa de crecimiento esperada de la población activa $\beta \geq 0$ y volatilidad constante $\eta > 0$

La dinámica del capital considera choques conjuntos dados por un proceso de difusión y de saltos⁶:

$$dK_t = [K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} - \delta K_t - L_t c_t] dt + K_{t-} dJ_t, \quad K_0 = K > 0 \quad (2.20)$$

⁶ $dJ_t = \sigma dB_{K,t} + \int (e^z - 1) N(dz, dt)$. $N(dz, dt)$ denota la medida de conteo aleatorio de un proceso de saltos con compensador $\nu = \lambda F$.

De esta forma el agente representativo resuelve el siguiente problema de control óptimo:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} L_t \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} dt \quad \gamma > 0$$

s.a :

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} \quad \alpha \in (0, 1)$$

$$dA_t = \mu A_t dt + \nu A_t dB_{A,t} \quad \mu \geq 0; \quad \nu > 0 \quad A_0 = A > 0$$

$$dL_t = \beta L_t dt + \eta L_t dB_{L,t} \quad \beta \geq 0 \quad L_0 = L > 0$$

$$dK_t = (K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} - \delta K_t - L_t c_t) dt + K_t dJ_t, \quad K_0 = K > 0$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

Las dinámicas de K_t , A_t y L_t se exponen a una fuente de incertidumbre, en forma de movimientos brownianos estándar independientes $B_{K,t}$, $B_{A,t}$ y $B_{L,t}$ y saltos discontinuos en el capital que modelan los eventos raros e inesperados que ocasionalmente ocurren en el tamaño del capital.

Usando el enfoque de programación dinámica y el teorema de verificación se define la siguiente ecuación integro-diferencial de HJB:

$$-\rho V(K_t, A_t, L_t) + \sup_{c_t \geq 0} \{[\mathcal{A}^{c_t} V](K_t, A_t, L_t) + L_t f(c_t)\} = 0, \quad K_t \geq 0, \quad A_t > 0 \quad L_t > 0. \quad (\text{HJB})$$

Para cada $c \geq 0$ \mathcal{A}^c es el operador

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}^{c_t} V](K_t, A_t, L_t) &= (K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} - \delta K_t - L_t c_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t, L_t) + \beta L_t \frac{\partial V}{\partial L_t}(K_t, A_t, L_t) + \mu A_t \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t, L_t) \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t, L_t) + \frac{1}{2} \eta^2 L_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial L_t^2}(K_t, A_t, L_t) + \frac{1}{2} \nu^2 A_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t, L_t) \\ &+ \lambda \int [V(e^z K_t, A_t, L_t) - V(K_t, A_t, L_t)] G(z) dz. \end{aligned}$$

$G(z)$ es la función de densidad de probabilidad del salto de amplitud z .

Proposition 5 *Suponga que A_t dado por (2.18), L_t dado por (2.19) son brownianos geométricos y la dinámica de capital (2.20). Si $\alpha = \gamma$ entonces la función de valor óptimo está dada por:*

$$V(K_t, A_t, L_t) = \Omega K_t^{1-\gamma} L_t^\gamma + \Gamma A_t^{1-\gamma} L_t + H L_t$$

y la política de consumo óptimo es de la forma:

$$\bar{c}_t(K_t, A_t, L_t) = [(1-\gamma)\Omega]^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{K_t}{L_t};$$

Donde

$$\Omega = \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\rho - \beta\gamma + (1-\gamma)(\delta + \frac{1}{2}\gamma(\sigma^2 + \eta^2)) - \lambda(m(1-\gamma) - 1)}{\gamma} \right)^{-\gamma}$$

$$\Gamma = \frac{\Omega(1-\gamma)}{\rho - \beta + (1-\gamma)(\frac{1}{2}\nu^2\gamma - \mu)}$$

$$H = -\frac{1}{(1-\gamma)(\rho - \beta)}$$

En el caso $\alpha = \gamma$ la política óptima del consumo se ve afectado directamente por la incertidumbre del capital K_t , de la fuerza de trabajo L_t e indirectamente por la incertidumbre de la efectividad del trabajo A_t a través de la función de valor. La demostración se ve en el anexo 2.⁷

De forma similar si se reemplaza el consumo $c_t(K_t, A_t, L_t) = [(1-\gamma)\Omega]^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{K_t}{L_t}$ en la dinámica del capital dada por la ecuación (2.20) se obtiene:

$$dK_t = (K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} - (\delta + b)K_t) dt + K_t dJ_t, \quad K_0 = K > 0$$

Donde

$$b = [(1-\gamma)\Omega]^{-\frac{1}{\gamma}}$$

Si consideramos $k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$ y aplicamos la regla del producto para procesos de difusión de Itô podemos expresar el capital en unidades efectivas luego

$$\frac{d(k_t)}{dt} = \frac{d(K_t/A_t L_t)}{dt} = \frac{A_t L_t \frac{dK_t}{dt} - K_t (L_t \frac{dA_t}{dt} + A_t \frac{dL_t}{dt})}{(A_t L_t)^2} = \frac{1}{A_t L_t} \frac{dK_t}{dt} - \frac{K_t}{A_t L_t} \left[\frac{dA_t}{A_t} + \frac{dL_t}{L_t} \right]$$

Reemplazando obtenemos la dinámica del capital efectivo dada por:

$$dk_t = [k_t^\alpha - (b + \delta + \beta + \mu - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\nu^2)k_t]dt + k_t(\sigma dB_{k,t} - \eta dB_{L,t} - \nu dB_{A,t}) + k_t \int (e^z - 1)N(dz, dt)$$

Así la tasa de crecimiento efectiva de capital es:

$$\frac{dk_t}{k_t} = [k_t^{\alpha-1} - (b + \delta + \beta + \mu - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\nu^2)]dt + (\sigma dB_{k,t} - \eta dB_{L,t} - \nu dB_{A,t}) + \int (e^z - 1)N(dz, dt) \quad (2.21)$$

Nuevamente se obtiene que tanto la parte determinista como la parte estocástica de la tasa de crecimiento efectiva del capital están afectadas por la fuerza laboral y por la efectividad del

⁷Para la demostración se sigue Smith (2007), Posch (2009) y Feicht and Stummer (2010).

trabajo (tecnología), por tanto las variaciones aleatorias del capital dependen de las fluctuaciones aleatorias de la fuerza laboral y de la efectividad laboral.

Aquí se muestra que la incertidumbre de la fuerza de trabajo (η) y de la efectividad del trabajo (ν) reducen la tasa efectiva de depreciación del capital dada por

$\hat{\delta} = \delta + \beta - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\nu^2$ y esto implica un efecto positivo sobre los niveles de la tasa de crecimiento efectiva de capital. Además la ecuación (2.21) permite caracterizar el capital de estado estacionario de esta economía cuando $\eta = \nu = \sigma = \lambda = 0$.

2.3. Solución numérica

El objetivo es resolver numéricamente toda la ecuación integro-diferencial, es decir, encontrar una función (o alguna aproximación discreta a esta función) que satisfaga la relación de sus derivadas en alguna región del espacio, con una serie de valores en su frontera. La metodología de diferencias finitas que se propuso en el capítulo 1 se usa para discretizar la ecuación, aproximar el operador integral asociada a los saltos e investigar cómo resolver el caso no lineal asociado al primer termino.

El procedimiento de diferencias finitas permite escribir las derivadas de la función de valor con respecto a k y L de la siguiente forma:

$$V_K(K_j, L_n) \approx \frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{\Delta K} \text{ con error } O(\Delta K) \quad (2.22)$$

$$V_{KK}(K_j, L_n) \approx \frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{(\Delta K)^2} \text{ con error } O((\Delta K)^2) \quad (2.23)$$

$$V_L(K_j, L_n) \approx \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta L} \text{ con error } O(\Delta L) \quad (2.24)$$

$$V_{LL}(K_j, L_n) \approx \frac{V_j^{n+1} - 2V_j^n + V_j^{n-1}}{(\Delta L)^2} \text{ con error } O((\Delta L)^2) \quad (2.25)$$

2.3.1. Solución para el modelo con un browniano geométrico en la fuerza de trabajo y dinámica de capital discontinua.

Para este caso la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman a resolver corresponde a:

$$-\rho V(K_t, L_t) + \sup_{c_t \geq 0} \{[A^{c_t} V](K_t, L_t) + L_t f(c_t)\} = 0, \quad K_t \geq 0, \quad L_t > 0. \quad (\text{HJB1})$$

Para cada $(K_t, L_t) \in \mathbb{R}_+^2$ el máximo en la ecuación HJB satisfice:

$$\hat{c}(K_t, L_t, V_K) = \arg \max_{c_t \geq 0} [\mathcal{A}^{c_t} \hat{V}](K_t, L_t) + L_t f(c_t)$$

Luego la ecuación de HJB se transforma en:

$$-\rho \hat{V}(K_t, L_t) + \{[\mathcal{A}^{\hat{c}} \hat{V}](K_t, L_t) + L_t f(\hat{c}(K_t, V_K))\} = 0.$$

Por último el teorema de verificación establece que, $V = \hat{V}$ resuelve la ecuación (HJB1) y garantiza la existencia de una regla de política óptima para \hat{c} . La ecuación resultante es:

$$\begin{aligned} \rho V(K_t, L_t) = & L_t f(\hat{c}_t(K_t, V_K)) + (K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta k_t - L_t \hat{c}_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, L_t) + \beta L_t \frac{\partial V}{\partial L_t}(K_t, L_t) + \\ & \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, L_t) + \frac{1}{2} \eta^2 L_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial L_t^2}(K_t, L_t) + \lambda \int V(e^z K_t, L_t) G(z) dz - \lambda V(K_t, L_t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para la discretización de la ecuación parcial integro-diferencial PIDE(2.26) se sigue la línea de argumentación planteada en Cont and Voltchkova (2005), Baten et al. (2013) y d'Halluin et al. (2005), usando un método Implícito-Explícito (IMEX). La parte diferencial se resuelve usando el método explícito *Upwind* Candler et al. (1998); Achdou et al. (2017) y el término integral $I(K_t)$ por medio del método explícito de la FFT, que usa una sustitución adecuada para transformarla en una integral de correlación y posteriormente se usa la transformada rápida de Fourier FFT, que permite una evaluación de una manera más eficiente de la integral para todos los valores de K , así como se mostró en el capítulo anterior.

Usando la condición de primer orden, las funciones de consumo y utilidad se expresan de la siguiente forma:

$$c_t = \left(\frac{\partial V}{\partial K} \right)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

$$f \left(c_t, \frac{\partial V}{\partial K} \right) = \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\partial V}{\partial K} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Reemplazando estos resultados en (2.26) se tiene:

$$\begin{aligned} \rho V(K_t, L_t) &= L_t V_K^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{\gamma}{1-\gamma} + (K_t^\gamma L_t^{1-\gamma} - \delta K_t) V_K + \beta L_t V_L \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 V_{KK} + \frac{1}{2} \eta^2 L_t^2 V_{LL} + \lambda \int [V(e^z K_t, L_t) - V(K_t, L_t)] F(dz) \end{aligned}$$

se puede expresar el término $I(K)$ como una integral de correlación discreta

$$I(K_t) = \int V(e^{s+z}, L) G(z) dz = \int \bar{V}(s+z, L) G(z) dz = \bar{V} \otimes \bar{G} \quad (2.27)$$

Donde $V(e^{s+z}, L) = \bar{V}(s+z, L)$.

$$FFT(I(K)) = (FFT(\bar{V}))(FFT(G))^* \quad (2.28)$$

(.)* denota el complejo conjugado. Dado que $G(z)$ es la función de densidad de probabilidad de z , la cual es una función específica asociada a los saltos, simplemente podemos calcular previamente $FFT(G)$ en la cuadrícula igualmente espaciada en las coordenadas z . Luego podemos realizar la FFT inversa para obtener los valores de la integral.

La discretización de la ecuación de Bellman maximizada (2.26), usa el esquema de diferencias finitas siguiendo Achdou et al. (2017) y tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho V_{i,j}^{n+1} &= L_j f(c_{ij}^n) + \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta K} R_{i,j,F}^{n+} + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta K} R_{i,j,B}^{n-} + \beta L_j \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta L} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sigma^2 K_i^2 \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta K)^2} + \frac{1}{2} \eta^2 L_j^2 \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta L)^2} + \lambda I(K_i) - \lambda V_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

Se define:

$$c_{i,j}^n = (f')^{-1}[V'_{i,j}]$$

$$R_{i,j,F}^n = K_i^\alpha L_j^{1-\alpha} - \delta K_i - L_j (f')^{-1}[(V'_{i,j,F})]$$

$$R_{i,j,B}^n = K_i^\alpha L_j^{1-\alpha} - \delta K_i - L_j (f')^{-1}[(V'_{i,j,B})]$$

$$V'_{i,j,F} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta K} \quad V'_{i,j,B} = \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta K} \quad (2.29)$$

Para calcular V'_i se utiliza la siguiente expresión:

$$V'_{i,j} = V'_{i,j,F} \mathbb{1}\{R_{i,F}^n > 0\} + V'_{i,j,B} \mathbb{1}\{R_{i,j,B}^n < 0\} + \bar{V}'_{i,j} \mathbb{1}\{R_{i,j,F}^n \leq 0 \leq R_{i,j,B}^n\} \quad (2.30)$$

$$\bar{V}'_{i,j} = f'(K_i^\alpha L_j^{1-\alpha} - \delta K_i)$$

Donde para algún número x , la notación $x^+ = \max\{x, 0\}$ parte positiva de x , análogamente $x^- = \min\{x, 0\}$, luego:

$$R_{i,j,F}^{n+} = [K_i^\alpha (L_j)^{1-\alpha} - \delta K_i - L_j c_{i,j,F}^n]^+ = \max\{K_i^\alpha (L_j)^{1-\alpha} - \delta K_i - L_j c_{i,j,F}^n, 0\}$$

$$R_{i,j,B}^{n-} = [K_i^\alpha (L_j)^{1-\alpha} - \delta K_i - L_j c_{i,j,B}^n]^- = \min\{K_i^\alpha (L_j)^{1-\alpha} - \delta K_i - L_j c_{i,j,B}^n, 0\}$$

Reemplazando las derivadas y reordenando términos, se puede ver de forma equivalente a:

$$\rho V_{i,j}^{n+1} = L_j f(c_{i,j}^n) + X_{i,j} V_{i-1,j}^{n+1} + (Y_{i,j} + \nu_j) V_{i,j}^{n+1} + Z_{i,j} V_{i+1,j}^{n+1} + \chi_j V_{i,j-1}^{n+1} + \varsigma_j V_{i,j+1}^{n+1} + \lambda I(K_i) - \lambda V_{i,j}^{n+1}$$

donde

$$X_{i,j} = \frac{\sigma^2 K_i^2}{2(\Delta K)^2} - \frac{R_{i,j,B}^{n-}}{\Delta K}$$

$$Y_{i,j} = \frac{R_{i,j,B}^{n-}}{\Delta K} - \frac{R_{i,j,F}^{n+}}{\Delta K} - \frac{\sigma^2 K_i^2}{(\Delta K)^2}$$

$$Z_{i,j} = \frac{R_{i,j,F}^{n+}}{\Delta K} + \frac{\sigma^2 K_i^2}{2(\Delta K)^2}$$

$$\nu_j = -\frac{\beta L_j}{\Delta L} - \frac{\eta^2 L_j^2}{(\Delta L)^2}$$

$$\chi_j = \frac{\eta^2 L_j^2}{2(\Delta L)^2}$$

$$\varsigma_j = \frac{\beta L_j}{\Delta L} + \frac{\eta^2 L_j^2}{2(\Delta L)^2}$$

Esto permite resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\rho + \lambda) V_{i,j}^{n+1} = L_j f(c_{i,j}^n) + A^n V_{i+1,j}^{n+1} + \lambda I(K_i)$$

Donde:

$$\mathbf{A}^n = \tilde{A}(X_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j}) + D(\nu_j, \chi_j, \varsigma_j)$$

$$(\rho + \lambda)V^{n+1} - \mathbf{A}^n V^{n+1} = Lf(c^n) + \lambda I(K)$$

$$((\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n)V^{n+1} = Lf^n + \lambda I(K)$$

$$\mathbf{B}^n = (\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n \quad \mathbf{b}^n = Lf^n + \lambda I(K)$$

$$\mathbf{B}^n V^{n+1} = \mathbf{b}^n$$

Finalmente la función de valor se obtiene resolviendo:

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} \mathbf{b}^n$$

El algoritmo tiene los siguientes pasos:

- Parte de un Guess inicial $V^0 = \frac{K^{1-\gamma}}{1-\gamma} L^\gamma$
- Calcula $(V_{i,j}^n)'$ usando (2.29) y (2.30)
- Encuentra

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} f^n$$

- Calcula c^n como $c_{i,j}^n = (f')^{-1}[(V_{i,j}^n)']$
- Se detiene cuando la función de valor alcanza la tolerancia indicada:
 $\|V^{n+1}(K_i, L_j) - V^n(K_i, L_j)\|^2 < tol$
- Las aproximaciones de la función de valor son calculadas tomando valores en el intervalo $[1K_{ss}, 3K_{ss}]$ para establecer la convergencia y el rendimiento del método de aproximación de diferencias finitas, mediante la comparación de la solución analítica con la solución numérica, la velocidad y precisión al usar grillas finas y gruesas. ⁸
- El número de pasos en cada variable es:

| Variable | Valor | Nombre |
|----------|-------|----------------------|
| Kp | 20 | Número de pasos en K |
| Lp | 20 | Número de pasos en L |

Cuadro 2.1: Número de pasos en las variables

⁸Se usa la ecuación (2.12) donde $\eta = \sigma = \lambda = 0$; para encontrar el estado estacionario del capital dado por:

$$K_{ss} = \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Se compara los resultados de la solución numérica del modelo con la solución analítica de la proposición 1, sección 2.

$$V(K, L) = \Omega \frac{K_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} L_t^\gamma + HL_t$$

con

$$H = \frac{\Omega}{\rho - \beta}$$

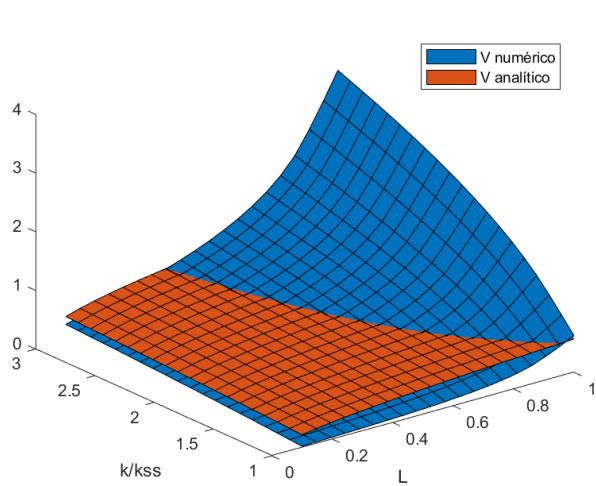
En el siguiente cuadro se muestra la calibración de los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \rho$ y σ siguiendo las calibraciones de los estudios Posch (2009), Posch (2011), (Achdou et al., 2017) y (Feicht and Stummer, 2010). En todos los casos los saltos en la dinámica de capital tienen distribución normal truncada $\bar{N}(\nu, \phi^2)$ como lo sugiere Gourio (2012); Nakamura et al. (2013) con media $\nu = -0,055$ y varianza $\phi^2 = 0,041$ truncando los valores de $-1 \leq z \leq 1$ desde $a = -0,5$ hasta $b = 0,2$. Se extiende también para el caso de una distribución Gamma que toma valores positivos con $\mu = 0,1$ y $SD = 0,058$.

| Parámetro | Valor 1 | Valor 2 | Valor 3 | Valor 4 | Nombre |
|-----------|----------|-------------|-------------|------------|--------------------------|
| λ | 0 | 0.03 | 0.07 | 0.1 | Intensidad de los saltos |
| α | 0.4176 | 0.4176 | 0.4176 | 0.4176 | Elasticidad del capital |
| γ | 0.4176 | 0.4176 | 0.4176 | 0.4176 | Aversión al riesgo |
| ρ | 0.0105 | 0.0105 | 0.0105 | 0.0105 | Factor de descuento |
| σ | 0.0092 | 0.0092 | 0.0092 | 0.0092 | Volatilidad del capital |
| δ | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Depreciación del capital |
| η | 0.0072 | 0.0072 | 0.0072 | 0.0072 | Volatilidad en L |
| β | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Velocidad de ajuste en L |
| ν | -0.055 | -0.055 | -0.055 | -0.055 | Media de los saltos |
| ϕ^2 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | Varianza de los saltos |

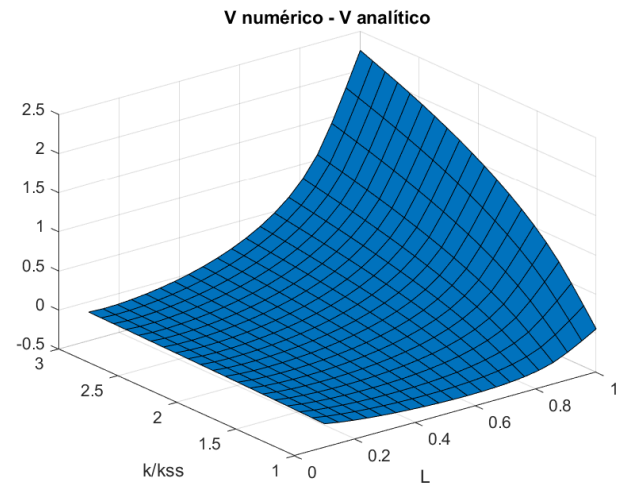
Cuadro 2.2: Parámetros del modelo con L_t variable incluido saltos.

Con los parámetros descritos, los resultados del proceso de optimización que considera un browniano geométrico en la fuerza de trabajo y dinámica de capital discontinua, muestran que el método converge según las pruebas descritas mas adelante y se obtienen los siguientes resultados para la función de valor y la función de política óptima.

Para el caso sin saltos $\lambda = 0$ se tiene los siguientes resultados:

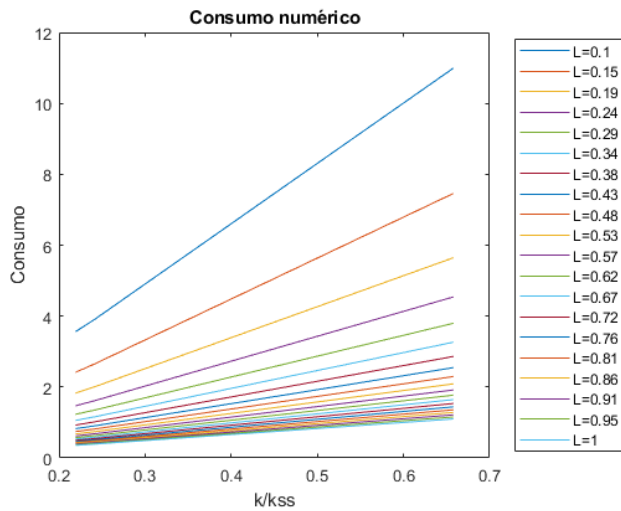


(a) Fun. Valor

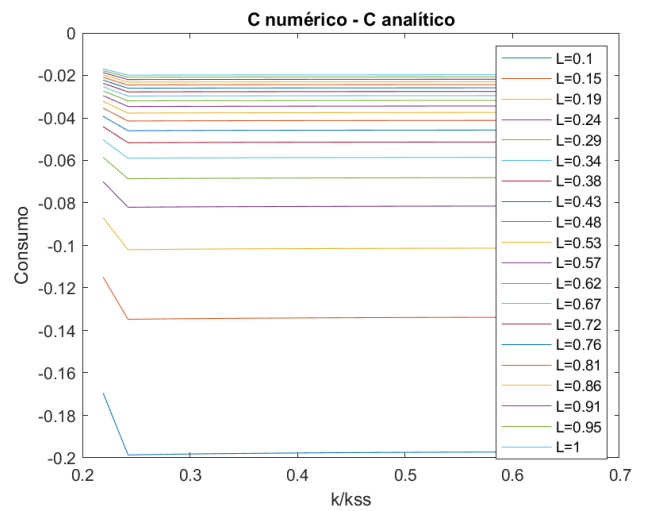


(b) Dif. Fun. Valor

Figura 2.1: Función de valor sin saltos $\lambda = 0$



(a) Fun. Consumo



(b) Dif. Fun. Consumo

Figura 2.2: Función de consumo sin saltos $\lambda = 0$ para distintos valores de L

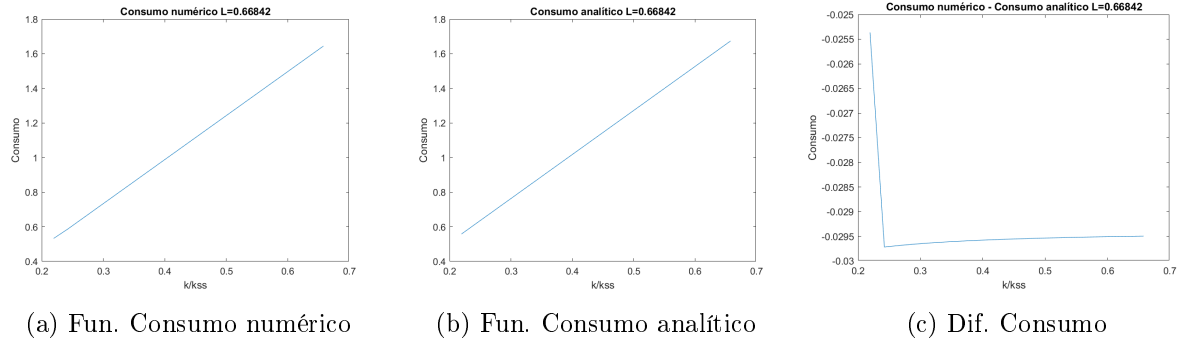


Figura 2.3: Función de consumo $L_t = 0,66842$ cte. sin saltos $\lambda = 0$

Al no incluir saltos los agentes no se exponen a choques inesperados en su riqueza, tienen un comportamiento racional en el gasto, por tanto conservan su valor y su consumo.

El resultado al incluir los saltos, para $\lambda = 0,03$ es:

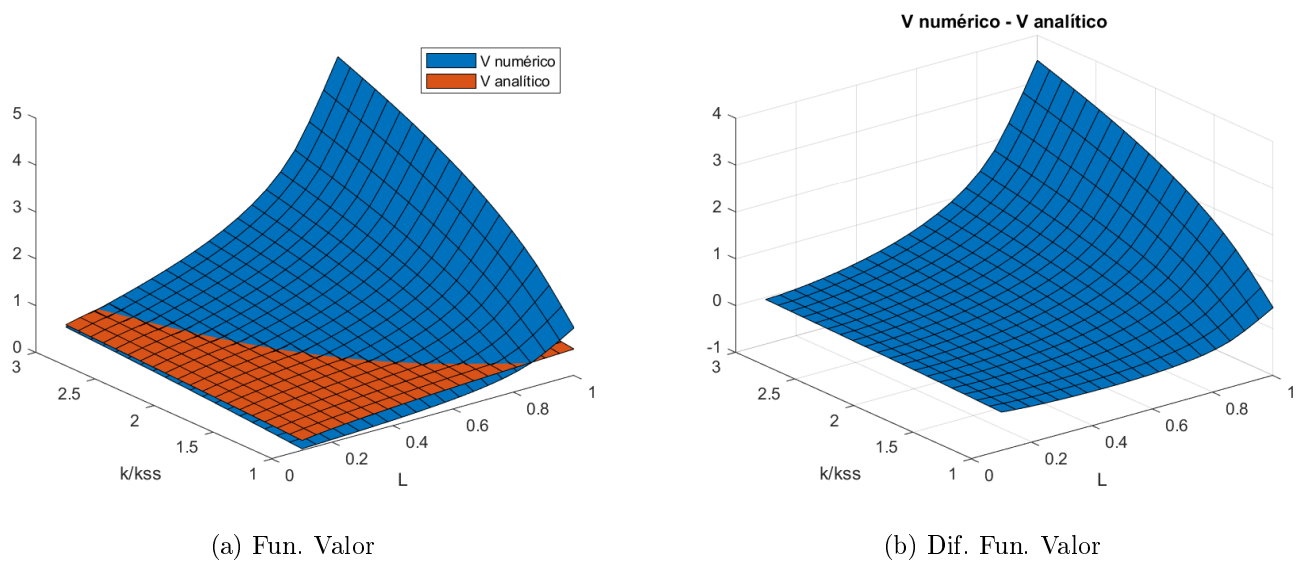


Figura 2.4: Función de valor con saltos $\lambda = 2$

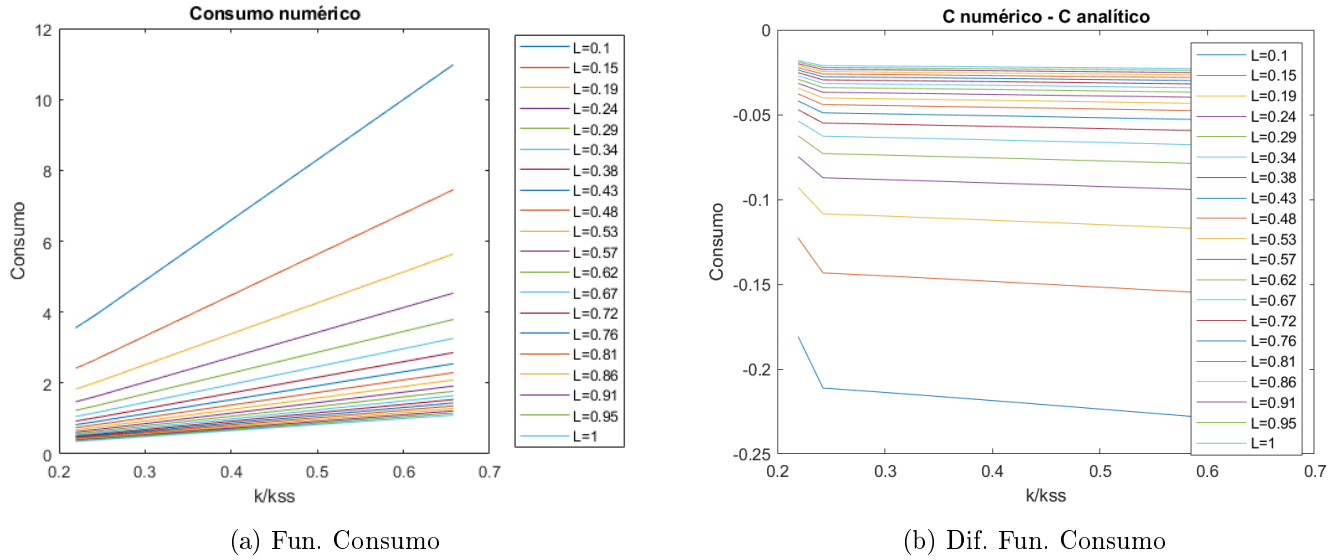


Figura 2.5: Función de consumo con saltos $\lambda = 0,03$ para distintos valores de L

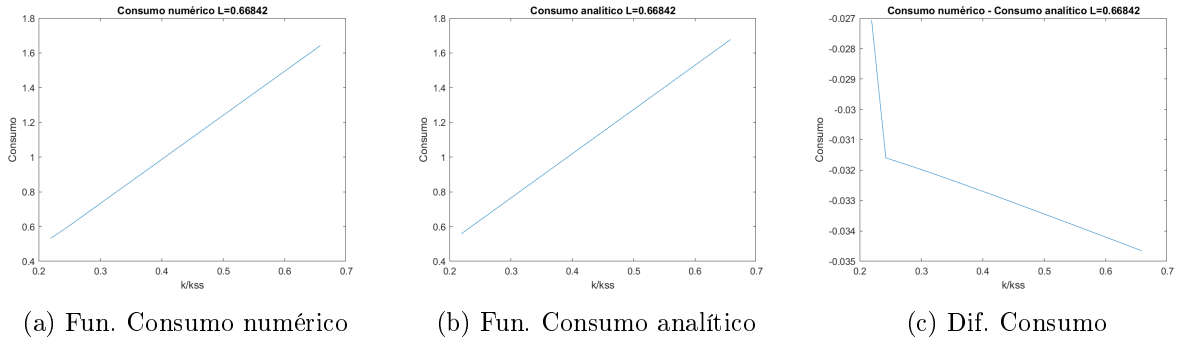


Figura 2.6: Función de consumo $L_t = 0,66842$ con saltos $\lambda = 0,03$

Los resultados muestran que al incluir un choque inesperado dado por los saltos en la dinámica del capital, los agentes se tornan más prudentes, es decir, tienen una racionalización diferente del gasto que conduce a un cambio en sus prioridades, por tanto aumentan su riqueza esperada y se presenta una disminución en la política de consumo.

Ahora se presentan los resultados con los distintos valores de la tasa de arribo de los saltos λ :

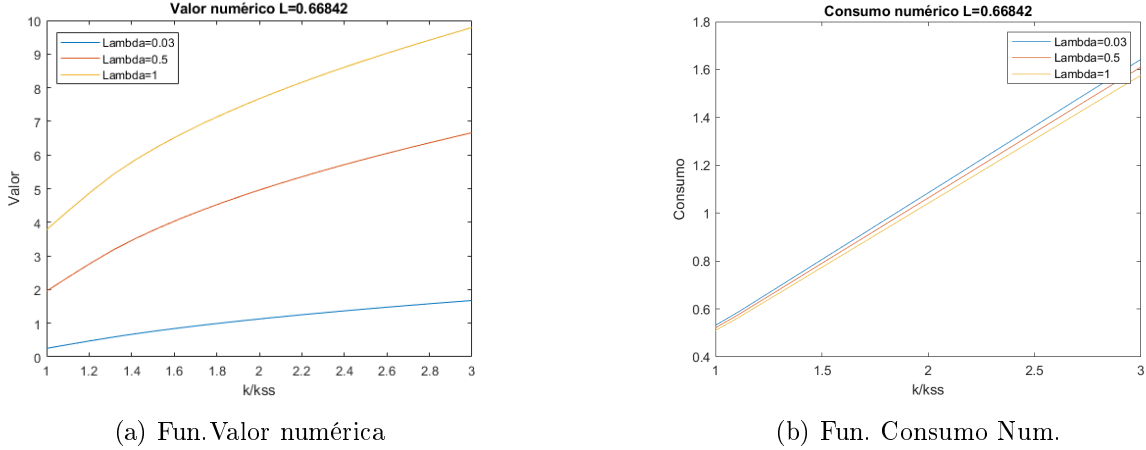


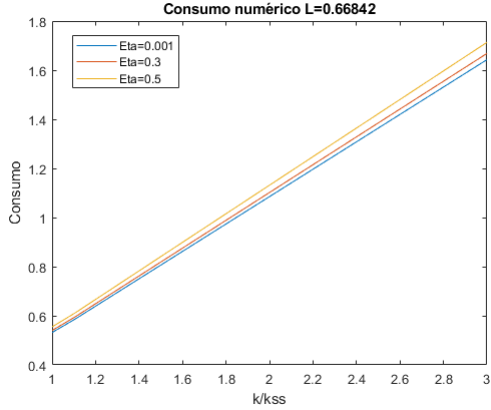
Figura 2.7: Función de valor y consumo con saltos distinto λ

Se observa que un aumento en la tasa de arribo de los saltos λ representa una disminución de la política de consumo, en ese caso los agentes tienen un comportamiento más prudente, en otras palabras, los agentes tienen un cambio en sus prioridades, frente a un choque (que pone en peligro su trabajo) deciden conservar sus activos (valor) y sacrificar el consumo en determinada magnitud, lo van a hacer dependiendo de la intensidad del choque y su duración. Analíticamente este resultado concuerda con la elasticidad del consumo con respecto a λ dado en el corolario (4).

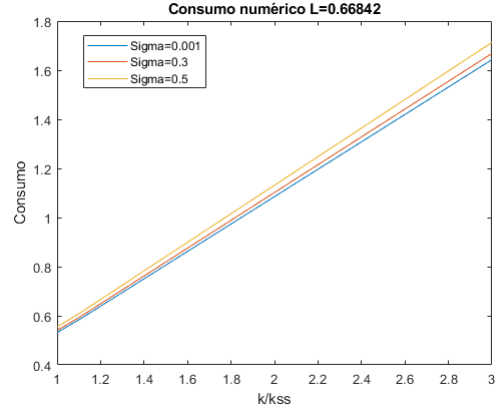
$$\frac{\partial c}{\partial \lambda} = -\frac{e^{(1-\gamma)\nu + \frac{(1-\gamma)^2 \varphi^2}{2}} - 1}{\gamma} K_t < 0$$

Las siguientes gráficas muestran el comportamiento de la política de consumo cuando se incrementan los riesgos en la dinámica de la fuerza laboral y en la dinámica del capital, específicamente se analiza el cambio en el consumo con respecto a las volatilidades η la fuerza de trabajo y σ del capital. Como la elasticidad intertemporal de sustitución (EIS)⁹ es mayor que uno, puesto que se tiene el supuesto ($\alpha = \gamma$), entonces un aumento en los riesgos hace que el ingreso disponible de los agentes en su mayoría lo deriven en consumo, es decir consumen más rápido y disminuye la tasa de crecimiento del capital.

⁹Para el caso de una función de utilidad $U(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ la $EIS = \frac{1}{\gamma}$



(a) Consumo distinto η

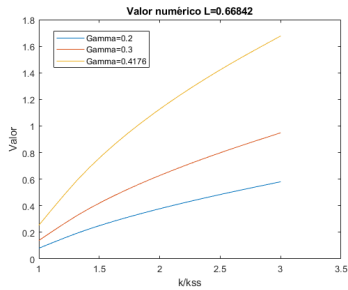


(b) Consumo distinto σ

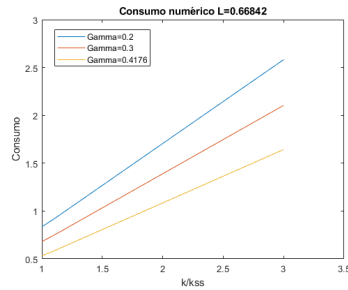
Figura 2.8: Funciones consumo numérico para distintos η, σ

De forma analítica este resultado está de acuerdo con lo presentado en el corolario (4)

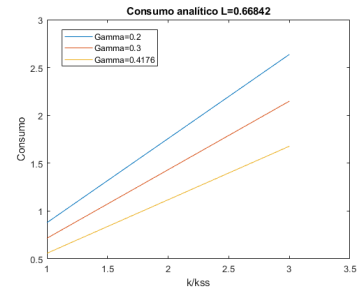
Las siguientes gráficas muestran la variación de las funciones de política cuando se toman distintos valores en el parámetro γ (aversión relativa al riesgo), considerando saltos en la dinámica de capital. Analíticamente este resultado se muestra en el corolario (4) y se cumple para cualquier función generadora de momentos $m(\xi)$ asociada a la función de densidad de los saltos, aquí se considera el caso para saltos que se distribuyen normal $N(\nu, \varphi^2)$.



(a) Fun. Valor numérica



(b) Fun. consumo Num.



(c) Fun. consumo Ana.

Figura 2.9: Funciones de valor y consumo para distinto γ incluido saltos

Al aumentar la aversión al riesgo (γ) se tiene un incremento del nivel de incertidumbre de los agentes, los individuos son más prudentes frente a un choque que pone en riesgo su trabajo y sus activos, esto implica un cambio en sus prioridades y consumen más rápidamente en el choque.

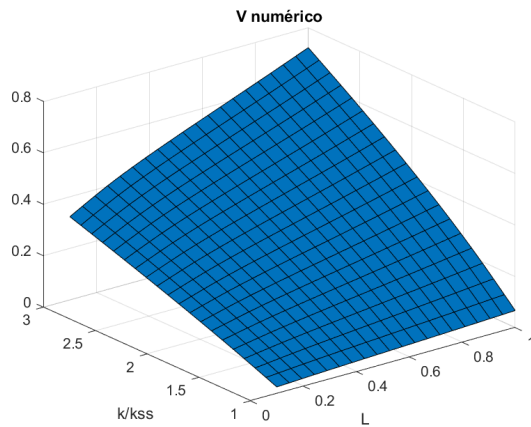
En la siguiente tabla, se muestra la solución para calibraciones distintas, donde no se cumple la condición $\alpha = \gamma$ por tanto no es comparable con la solución analítica. Esto nos permite observar que el modelo funciona para otro tipo de calibraciones distintas a las que establecen las restricciones paramétricas para la existencia de solución cerrada. Particularmente se incrementó los parámetros asociados a la incertidumbre en el factor de trabajo y en la dinámica de capital

y se observa cómo afectan estos parámetros en las decisiones óptimas de consumo. Nuevamente consideramos los saltos con una distribución normal truncada al igual que el modelo donde $\alpha = \gamma$.

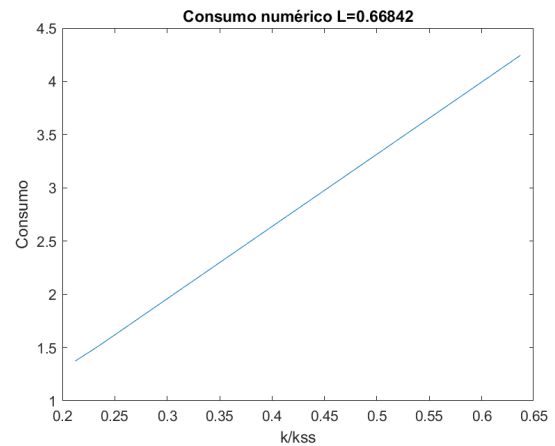
| Parámetro | Calibración 1 | Calibración 2 | Calibración 3 | Nombre |
|-------------|---------------|---------------|---------------|--------------------------|
| λ | 1 | 2 | 2 | Intensidad de los saltos |
| α | 0.3 | 0.2 | 0.2 | Elasticidad del capital |
| γ | 0.2 | 0.3 | 0.4 | Aversión al riesgo |
| ρ | 0.03 | 0.03 | 0.0105 | Factor de descuento |
| σ | 0.05 | 0.1 | 0.3 | Volatilidad del capital |
| δ | 0.05 | 0.05 | 0.1 | Depreciación del capital |
| η | 0.008 | 0.08 | 0.5 | Volatilidad en L |
| β | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Velocidad de ajuste en L |
| ν | -0.055 | -0.055 | -0.055 | Media de los saltos |
| φ^2 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | Varianza de los saltos |

Cuadro 2.3: Parámetros del modelo con L_t variable incluido saltos con $\alpha \neq \gamma$.

Los resultados son:

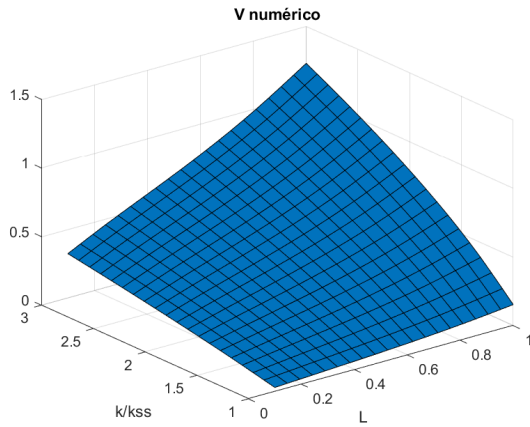


(a) Fun. Valor

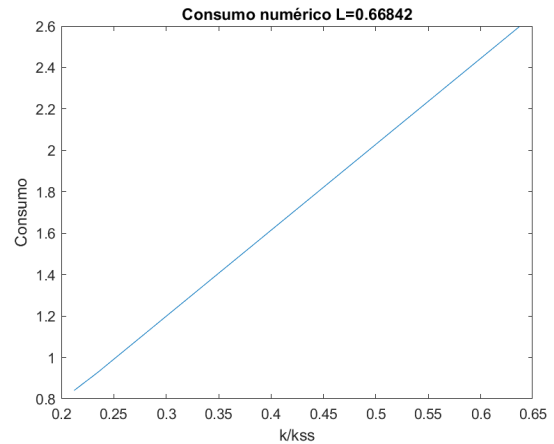


(b) Fun. Consumo Num.

Figura 2.10: Función de valor, consumo con calibración distinta 1.

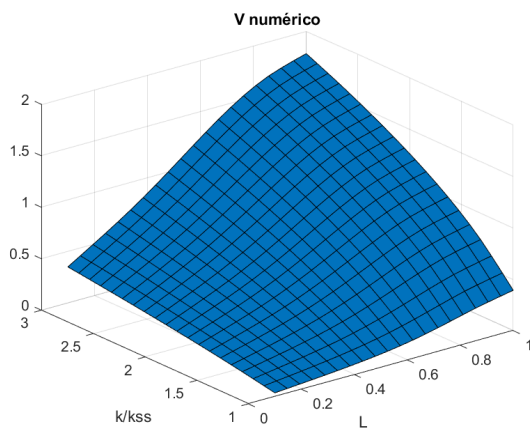


(a) Fun. Valor

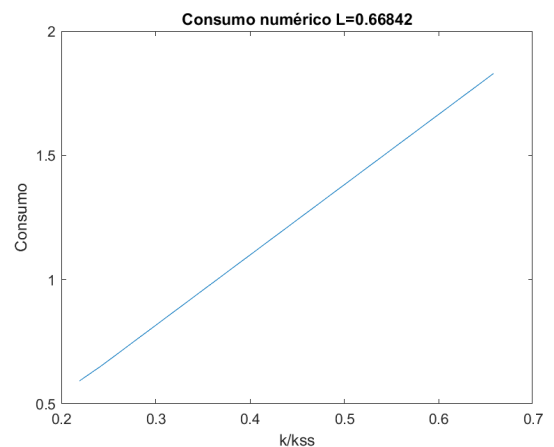


(b) Fun.Consumo Num.

Figura 2.11: Función de valor, consumo con calibración distinta 2.



(a) Fun. Valor



(b) Fun.Consumo Num.

Figura 2.12: Función de valor, consumo con calibración distinta 3.

Lo anterior nos muestra que un incremento en los parámetros de incertidumbre del modelo hace que los individuos sean mas prudentes, deciden conservar sus activos aumentando su riqueza esperada y por tanto sacrifican su consumo.

Finalmente se muestra los resultados de la función de valor y de consumo para distintas funciones de distribución de los saltos. Como ejemplo, se usa una distribución Normal truncada $\bar{N}(-0,055, 0,041)$ con valores negativos, una distribución Gamma con media $\mu = 0,1$ y $SD = 0,058$ con valores positivos, que son distribuciones con mayor evidencia empírica como lo sugiere Gourio (2012); Nakamura et al. (2013) y además se usa otro tipo de distribuciones como una normal con parámetros $N(0, 1)$, una exponencial de parámetro $\nu = 0,4$, la uniforme $U(a, b) = U(3, 7)$ y la

distribución de saltos de tamaño constante $z = 1$, para tratar de mostrar si existe algún tipo de sensibilidad con respecto a la distribución de los saltos.

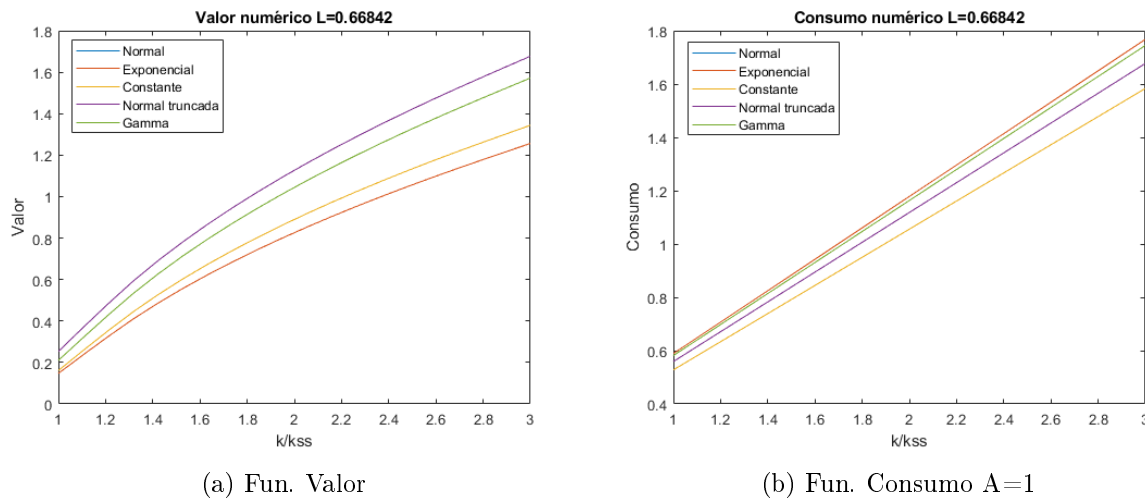


Figura 2.13: Función de valor y consumo con distintas distribuciones.

En este caso los resultados muestran que la función de valor y la política óptima de consumo tienen cierta sensibilidad a la función de distribución de los saltos. Específicamente se observa que en el caso de las distribuciones exponencial y gamma que simulan choques positivos, los agentes incrementan su consumo y para el caso de la distribución normal truncada con choques negativos el consumo en los agentes decrece.

2.4. Análisis de convergencia del modelo

2.4.1. Tasa de convergencia

Aquí se hace necesario implementar un ciclo que nos permita calcular los valores de la función de valor evaluada en cada aumento de la grilla y con esto poder hallar los cocientes que definen la tasa de convergencia y trazar la gráfica de dichas tasas manteniendo uno de los factores constantes, en nuestro caso graficamos sobre la grilla de capital y el proceso usa lo descrito en la sección (1.5) del capítulo 1.

Es de anotar que el orden teórico de convergencia de una ecuación de diferencias está dado por el orden más bajo de los términos que aparecen en la ecuación diferencial discretizada. En el caso de la ecuación de HJB el orden teórico de convergencia para (K) más pequeño lo dan las derivadas de primer orden que se tienen en las diferencias forward y backward usadas en el método upwind. Por tanto se tiene un orden de convergencia de 1 y este método permite probar que este valor de convergencia es uniforme en toda la grilla seleccionada.

Los resultados para este modelo muestra la tasa de convergencia siguiente:

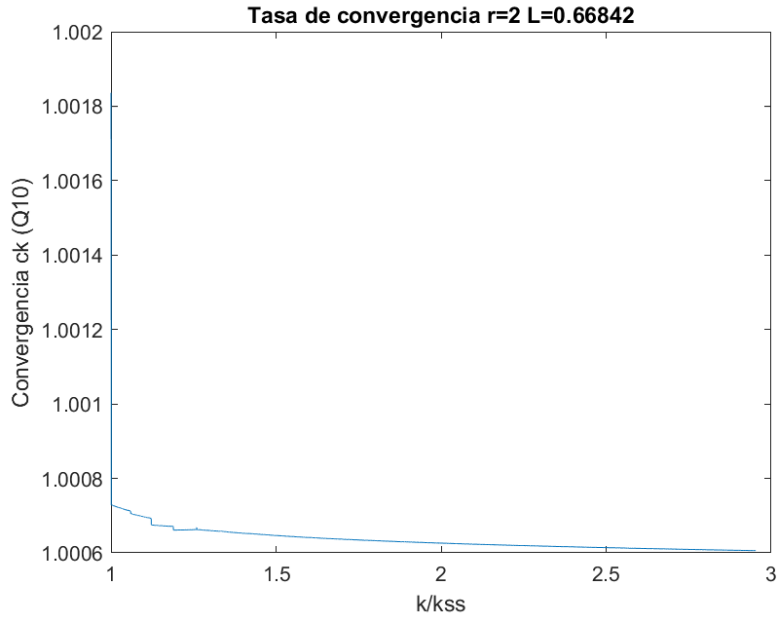


Figura 2.14: Tasa de convergencia modelo con factor de trabajo variable

2.4.2. Prueba de convergencia para el modelo con fuerza de trabajo variable

Siguiendo lo planteado en la sección (1.5.2) de análisis de convergencia del capítulo 1, se usa las soluciones analíticas de la función de valor y de consumo para compararlas con las respectivas soluciones numéricas, resolviendo el problema con grilla fina, $J=200$ puntos y grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla del capital. Se calcula el error relativo de la diferencia entre las dos soluciones (Analítica Vs Numérica), para garantizar que la solución del esquema de diferencias finitas converge a la solución de viscosidad única de la ecuación HJB, a medida que el espaciado de la cuadrícula converge a cero.

Los resultados se muestran en las siguientes figuras.

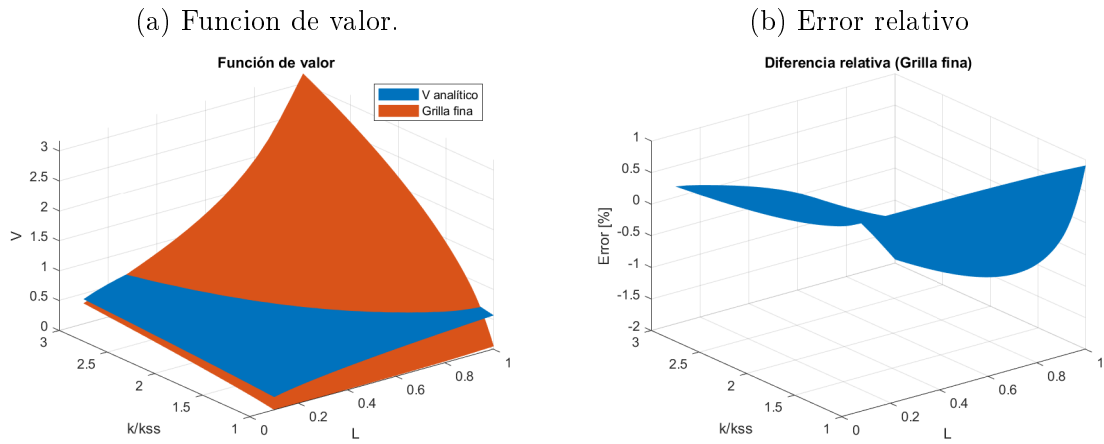


Figura 2.15: Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital.

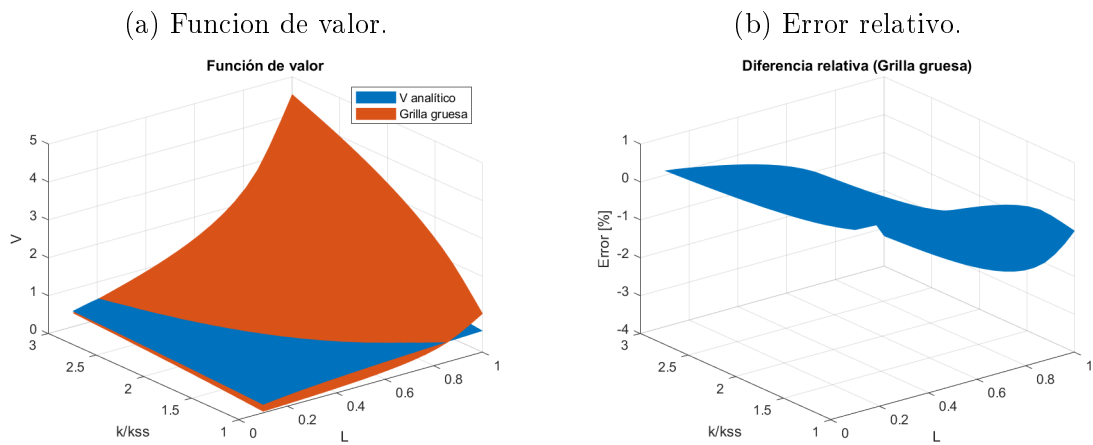


Figura 2.16: Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital.

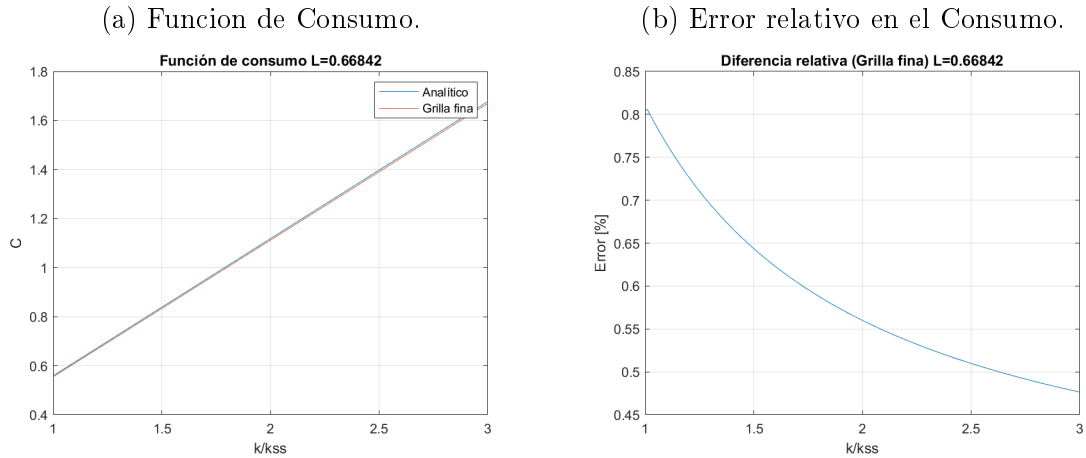


Figura 2.17: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital.

La solución numérica en la política de consumo presenta un error de aproximación en un rango del 0.5 % al 0.8 %

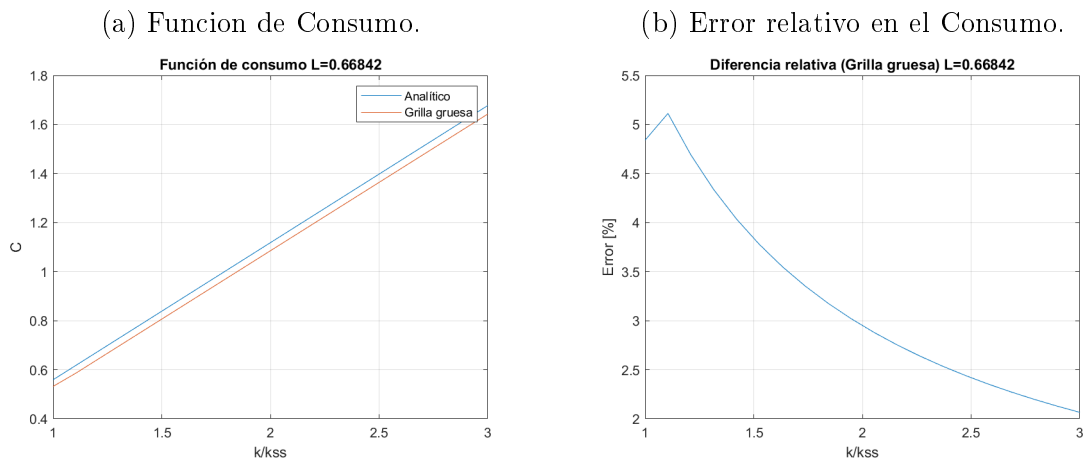


Figura 2.18: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital.

La solución numérica en la función de consumo aumenta considerablemente el error relativo de aproximación que va en un rango del 2 % al 5 %. Justificando el uso de grillas finas.

En el siguiente análisis de estabilidad del modelo, se establece una comparación entre solución numérica y la solución analítica, en términos de su velocidad y precisión. Como métrica de precisión se considera el área bajo la curva de consumo, y se establece el error porcentual en este valor con respecto al valor calculado usando la grilla fina. La siguiente tabla muestra los resultados de la comparación de las soluciones con una grilla gruesa de $J=20$ puntos y una grilla fina de $J=200$ puntos en el capital.

| Modelos | Grillas | Velocidad(seg.) | Área bajo el Consumo |
|-------------------|---------------|-----------------|----------------------|
| L variable | J=200 | 0.14027 | 17.8541 |
| | J=20 | 0.009933 | 18.2538 |
| | Fila 2/Fila 1 | 0.07081 | 1.02238 |

Cuadro 2.4: Velocidad y precisión del modelo L_t variable

Los resultados muestran que reducir el número de puntos de la grilla de 200 a 20 se presenta un aumento aproximado de doce veces en la velocidad computacional y un deterioro de la precisión del modelo en aproximadamente 2.23 %. Por tanto se justifica el uso de una grilla fina en comparación con la grilla gruesa para mejorar la estabilidad del modelo.

2.5. Discusión de resultados

Los resultados obtenidos están en la misma dirección de Smith (2006); Smith (2007) y Posch (2009). En primera instancia, cuando se tiene el supuesto de la aversión relativa al riesgo igual a la participación del capital ($\alpha = \gamma$), a diferencia del modelo planteado en el capítulo 1 con la restricción paramétrica $\rho = \bar{\rho}$ analíticamente se muestra que la política óptima de consumo depende directamente de la incertidumbre asociada al capital y a la fuerza de trabajo, el mecanismo de transmisión de la incertidumbre asociada a la efectividad del trabajo se hace de manera indirecta a través de la función de valor.

Se demuestra que las variaciones aleatorias del capital dependen de las fluctuaciones aleatorias de la fuerza laboral y de la efectividad del trabajo. Esto implica que tanto la parte determinista como la parte estocástica de la tasa de crecimiento efectiva del capital están afectadas por la fuerza laboral. Por tanto se tiene un efecto positivo sobre los niveles de la tasa de crecimiento efectiva de capital.

Bajo el supuesto de que la aversión relativa al riesgo sea igual a la participación del capital ($\alpha = \gamma$), se tiene que el compartimento del consumo depende de la magnitud de la elasticidad intertemporal de sustitución. En este caso como $\alpha \in (0, 1)$, la $EIS > 1$. Por tanto se encontró que la incertidumbre asociada a la fuerza de trabajo y al capital afectan directamente la dinámica de consumo; es decir: si aumenta la incertidumbre de la fuerza de trabajo (η) y del capital (σ), el consumo aumenta, pero se produce un deterioro del crecimiento. Al tener una $EIS < 1$ el comportamiento sería opuesto. En ese caso, se estimula el ahorro y el crecimiento.

Cuando la dinámica del capital se sometió a choques asociados a eventos raros modelados por un proceso de saltos de Poisson y se tiene un incremento de la aversión relativa al riesgo (γ), se observó un comportamiento más prudente de los agentes. Eso representó una disminución en el consumo, ya que aumenta o disminuye el consumo dependiendo si la EIS es mayor o menor

a uno. El anterior caso corresponde con el efecto de "Aversión al riesgo" de Smith (2007) y Weil (1990). Se obtiene un comportamiento similar al variar la tasa de arribo de los saltos, es decir: los individuos aumentan su valor, presentan un mayor deseo de ahorrar y estimulan la acumulación de capital.

Los agentes que se ven afectados por cierta incertidumbre en sus activos y su trabajo (en medio de una crisis) desencadenan su comportamiento incrementando sus stocks de acciones y caída consumo. Es decir: deciden irse a refugios seguros y temporales sacrificando su consumo.

La existencia de soluciones cerradas para el modelo de crecimiento neoclásico estocástico en tiempo continuo, donde las dinámicas de las variables de productividad se afectan por choques exógenos modelados por procesos de difusión y de saltos discontinuos, permiten obtener una nueva forma de analizar el efecto de cómo las no linealidades de dichas variables interactúan con el riesgo y además reflejan su efecto directo sobre la política óptima de consumo.

Se comprobó la efectividad los métodos IMEX (implícito-Explícito) de diferencias finitas, para resolver ecuaciones tipo PIDE (Ecuación Parcial Integro-Diferencial), como también la importancia de los métodos de convergencia y estabilidad desarrollados en este modelo, puesto que garantizan que tan precisa es la solución numérica en comparación con la solución analítica.

Capítulo 3

Un modelo de agentes heterogéneos en tiempo continuo con choques estocásticos en el ingreso.

Juan Carlos Zambrano *

DOCTORADO EN ECONOMÍA

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

CALLE 12 C NO. 4-60

BOGOTÁ, COLOMBIA

Resumen: En este estudio se plantea un modelo teórico de agentes heterogéneos, que resulta de una aplicación del control óptimo estocástico en tiempo continuo a la macroeconomía. El modelo involucra choques idiosincráticos no asegurables en el ingreso de los agentes, a través de procesos estocásticos de difusión y de saltos los cuales permiten acercarse a los distintos procesos de riesgo en el ingreso, y analizar sus efectos en las decisiones óptimas de consumo, ahorro y distribución conjunta de los agentes. El modelo se resuelve numéricamente por medio de diferencias finitas, el cual tiene asociado un sistema de ecuaciones acopladas dado por la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B), que decide el problema de optimización de consumo y ahorro de cada agente, y la ecuación de Kolmogorov (K.F), que caracteriza la evolución en el tiempo de la distribución de riqueza de los agentes, dadas las elecciones óptimas de los individuos. Los resultados muestran que el tamaño de los choques modelados por procesos de difusión y de saltos en el ingreso, afectan directamente la incertidumbre del modelo y las decisiones de política óptima de los agentes.

*Estudiante Doctorado en Economía Universidad del Rosario. E-mail: juan.zambrano@urosario.edu.co

3.1. Introducción

En los últimos 20 años, la investigación en macroeconomía presentó diferentes estudios sobre modelos DSGE neo-keynesianos y neoclásicos, construidos sobre el enfoque del agente representativo. Dichos modelos se caracterizan por su naturaleza dinámica y estocástica, puesto que las decisiones de los agentes son intertemporales y, a la vez, consideran perturbaciones con incertidumbre, que afectan las dinámicas de los agentes de manera continua en la economía.

Muchos de estos modelos incluyen expectativas racionales, competencia imperfecta, optimización intertemporal, costos de ajuste y rigideces de precios. Sin embargo, es relativamente nuevo el estudio de modelos de agentes heterogéneos que incluyen temas como la heterogeneidad en los consumidores y racionalidad limitada. Trabajos pioneros como el de Huggett (1993), afirmaron que la heterogeneidad afecta tanto los niveles como la dinámica de las cantidades y precios de equilibrio agregado. Heckman (2001), por su parte, hizo referencia a la importancia de cómo se determina la distribución total del capital, trabajo y consumo entre los hogares, dado a que la volatilidad a nivel de trabajadores y empresas individuales es de mayor magnitud que la volatilidad agregada. Además establece que la evaluación de los programas gubernamentales a gran escala como seguro social y subsidios, requieren modelos que tengan en cuenta los efectos de equilibrio general y el impacto heterogéneo de las políticas en toda la población.

Para Heathcote et al. (2009), los economistas carecían de herramientas para resolver modelos dinámicos con agentes heterogéneos y mercados incompletos, puesto que no existía claridad de cómo la incorporación de la heterogeneidad en los hogares y la empresa, permitiera comprender la dinámica del ciclo económico de las cantidades y los precios agregados, o el crecimiento económico a largo plazo. Además, argumentaron que los modelos de agentes heterogéneos proporcionan una síntesis útil entre el enfoque macro, basado en la teoría del equilibrio dinámico recursivo, y el enfoque micro centrado en la heterogeneidad entre los individuos, en sus características innatas, en su suerte y en sus elecciones. En el mismo sentido, Heathcote et al. (2010), afirmaron que los estudios de política fiscal relacionados con seguridad social, subsidios, cambio demográfico, estructura y dispersión salarial, sus implicaciones y bienestar, solamente pueden abordarse con modelos macroeconómicos que incluyan agentes heterogéneos.

Si tenemos en cuenta la hipótesis del ingreso permanente fue desarrollada por Friedman (1957), la cual se fundamenta en que la renta muestra una distribución uniforme a lo largo de la vida de una persona, experimentando variaciones inter temporales. De acuerdo a esta teoría, el consumo depende principalmente de la renta permanente, la cual permite a las personas mantener un hábito de consumo; y de la renta aleatoria, que puede afectar positiva o negativamente la propensión marginal a consumir, según los niveles de renta permanente. Nos interesa observar si en el caso de ingresos laborales con difusión y saltos, el comportamiento de los agentes se ajusta con dicha hipótesis.

Por otro lado, el tema de los agentes heterogéneos está ligado a diferentes choques de tipo exógeno, estudiados en mercados completos e incompletos, que afectan la dinámica en las distintas variables definidas en cada modelo. En ese sentido autores como Krusell (1998); Storesletten et al. (2001); Khan (2008); Preston (2007) y Winberry (2018), desarrollaron métodos para resolver y estimar modelos de agentes heterogéneos que están ligados a choques agregados que afectan la dinámica de las distintas variables. Otros autores como Huggett (1993); Aiyagari (1994); Heathcote et al. (2009); Guvenen (2011); Kaplan et al. (2018); Nuño (2013); Parra-Alvarez et al. (2017b); Achdou et al. (2014); Achdou et al. (2017) y Okahata et al. (2018) estudiaron métodos para resolver modelos de agentes heterogéneos que se ven afectados por choques idiosincráticos no asegurables, manejados por distintos procesos estocásticos, que al final se traducen en diferencias de consumo y riqueza, a través de las decisiones de ahorro de los agentes. En general, constituyen una herramienta para comprender los determinantes de la distribución de la riqueza de los agentes.

El estudio de modelos de agentes heterogéneos en tiempo continuo, se reduce a la solución de dos sistemas de ecuaciones diferenciales parciales acopladas. En primer lugar se resuelve la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), que se encarga de obtener las elecciones óptimas de los individuos. En segundo lugar la ecuación de Kolmogorov Forward (kF) (también conocida como ecuación de Fokker Planck) que caracteriza la evolución de la distribución conjunta del ingreso y la riqueza para los agentes, dadas las elecciones óptimas de los individuos. Estos sistemas son numéricamente resueltos con alto grado de precisión, utilizando el método de diferencias finitas descritos por Candler et al. (1998); Parra-Alvarez et al. (2017b) Y Achdou et al. (2017), y permiten caracterizar el equilibrio estacionario definido por la tasa de interés, función de valor y la distribución conjunta resultantes.

Las investigaciones sobre ahorro precautorio son recientes. Una de las pioneras es Leland (1978), quien estableció que la decisión óptima de ahorro es creciente en la incertidumbre. Kimball (1990), propuso una forma de medir el ahorro precautorio a partir de las medidas de aversión relativa y absoluta al riesgo para así obtener los coeficientes de prudencia. Otros estudios como Carroll et al. (1992) y Dynan (1993), emplearon estimaciones del coeficiente de prudencia para analizar el ahorro precautorio. Si este coeficiente es positivo, mayor incertidumbre del crecimiento del ingreso generará ahorros corrientes mayores.

Por su parte, Wang (2004) mostró que la observabilidad parcial de los componentes individuales del ingreso da lugar a un ahorro adicional de precaución, debido al riesgo de estimación en el consumo. A su vez en Wang et al. (2016) se responde a la pregunta de ¿Por qué los saltos (incluso cuando ocurren raramente y son de tamaño aceptable) generan una PMC mucho más alta que los modelos de difusión? afirman que esto se debe a que el riesgo de salto es mucho más difícil de gestionar que los choques asociados a procesos de difusión y, por lo tanto, el consumo debe ajustarse discretamente en respuesta a mercados incompletos, lo que hace que el PMC sea elevada, especialmente cuando la liquidez es baja. Además, los riesgos de salto pueden aumentar potencialmente la dispersión de la riqueza, ya que los riesgos de salto siguen siendo importantes

para los ricos y, por tanto, los motivos de ahorro de los ricos siguen siendo fuertes.

Lee and Sawada (2010) afirmaron que el sendero óptimo del consumo se ve afectado directamente por el grado de prudencia del individuo, siempre que exista incertidumbre sobre la variación de los ingresos futuros.

La línea teórica del modelo toma como referencias principales los trabajos de Huggett (1993); Achdou et al. (2014); Wang et al. (2016); Achdou et al. (2017) y Kaplan et al. (2018). El aporte que da este trabajo se manifiesta en tres aspectos. En el primero, se estudia analíticamente la solución del problema de agentes heterogéneos que consideran choques en su ingreso, asociados a eventos raros, por medio de procesos de difusión combinados con procesos de saltos no necesariamente de tamaño constante, que permiten estudiar el efecto que tiene la incertidumbre y la desigualdad del ingreso, sobre las decisiones óptimas de ahorro, consumo y distribución conjunta de los agentes. Este estudio extiende los trabajos de Achdou et al. (2017), agregando además de los choques al rededor de la media por movimientos Brownianos, un proceso de saltos que modela choques del ingreso de los agentes asociados a cambios inesperados. También extiende la forma de modelar el ingreso dada en el trabajo de Kaplan et al. (2018), quienes asumieron el ingreso sometido únicamente a un proceso de difusión discontinuo, en nuestro caso se combinan ese tipo de dinámicas en el ingreso para capturar los efectos de la incertidumbre sobre el ahorro y consumo. En segundo lugar, se construye una implementación numérica usando diferencias finitas, para resolver las ecuaciones de (HJB) y (kF), que gobiernan las dinámicas óptimas de ahorro, consumo y distribución conjunta de ingreso y riqueza. Finalmente, esta investigación permite establecer la relación existente entre la volatilidad del ingreso dada por este tipo de choques estocásticos y la teoría de ahorro precautorio.

El modelo asume que el ingreso de los agentes se ve afectado de manera simultanea por choques idiosincráticos. Dicho ingreso, a su vez, sigue un proceso estocástico de difusión browniano y un proceso de saltos de Poisson en tiempo continuo. Este tipo de choques, como puede observarse en los trabajos de Posch (2011, 2013); Venegas-Martínez (2005); Moll (2014) y Castillo-Ramírez et al. (2016), muestran un comportamiento mucho más real en la forma de modelar la incertidumbre asociada a las distintas variables económicas. En el caso particular de este documento, se usan para modelar la incertidumbre en el ingreso.

Se usaron los estudios descritos, así como la hipótesis de que los choques adversos tales como una crisis financiera, una caída de los precios internacionales del petróleo, un endurecimiento de las condiciones de financiamiento externas, una fuerte disminución en los precios de los productos básicos, un desastre natural, decisiones gubernamentales y choques individuales como el desempleo, la enfermedad o el envejecimiento, merman drásticamente los ingresos de los agentes, afectan sus decisiones de consumo, ahorro e inversión y contribuyen a que persista la desigualdad. El propósito general de esta investigación, es plantear y resolver numéricamente un modelo de agentes heterogéneos que se aproxime a los procesos de riesgo en el ingreso, para investigar el comportamiento del equilibrio estacionario de los agentes, en una economía que se ve afectada por

choques idiosincráticos, modelados por combinación de procesos estocásticos en tiempo continuo. Para ello se plantean los siguientes interrogantes:

fuertes choques macroeconómicos externos, especialmente, Como resultado de lo anterior, el ritmo

1. ¿Cómo afecta la desigualdad del ingreso a los niveles de consumo, ahorro y distribución conjunta de riqueza de los agentes cuando se modela el ingreso por un proceso de difusión y de saltos?
2. ¿Bajo qué condiciones existe un equilibrio estacionario asociado a choques conjuntos en el ingreso y a funciones de utilidad específicas?
3. ¿Cómo resolver numéricamente la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B) y la ecuación de Kolmogorov Forward (k.F) en tiempo continuo asociadas a choques conjuntos en el ingreso?

3.2. Metodología

En la primera etapa se hace la definición formal del modelo de referencia que incluye agentes heterogéneos con respecto a su ingreso. Se definieron los supuestos y formas funcionales de la estructura del modelo. En la segunda etapa se plantea el problema de control óptimo estocástico a resolver. En la tercera etapa, bajo el principio de optimalidad de Bellman y el teorema de verificación en tiempo continuo, se estudió la solución teórica del modelo; para ello es necesario plantear la ecuación de (H.J.B) en el caso de choques conjuntos brownianos y procesos discontinuos en el ingreso, que resolvieron el problema de optimización de consumo y ahorro de cada agente; a su vez se planteó la ecuación de Kolmogorov Forward (k.F) que caracteriza la evolución en el tiempo de la distribución de riqueza, dadas las elecciones óptimas de los individuos. En la cuarta etapa se establecieron las condiciones de equilibrio general de estado estacionario. En la quinta etapa, se discutieron los resultados analíticos encontrados. Y en la etapa final, se hizo uso de métodos computacionales para encontrar la solución numérica aproximada de la ecuación de (H.J.B) y de la ecuación de (k.F), para el caso conjunto de procesos brownianos y de saltos; para así poder encontrar las funciones de política óptima asociadas al modelo.

3.3. Modelo de referencia

El modelo de referencia corresponde a un modelo de equilibrio general dinámico estocástico (DSGE) con mercados incompletos y riesgos de ingresos no laborales idiosincráticos no asegurados, siguiendo los modelos estándar de agentes heterogéneos de mercado incompleto que se presentan en los estudios de Huggett (1993) y Aiyagari (1994). Especialmente, se sigue a Wang et al. (2016); Achdou et al. (2017) y Kaplan et al. (2018) quienes generalizan los modelos anteriores en tiempo

continuo y demuestran una serie de nuevos resultados teóricos sobre este tipo de modelos de agentes heterogéneos. Además sugieren que los ingresos laborales pueden estar enfrentados a choques estocásticos modelados con un proceso de difusión junto con un proceso de saltos de Poisson.

La economía está compuesta por un continuo de individuos que son heterogéneos en su riqueza a_t y en su ingreso Y_t considerado como una dotación del bien final de la economía. Los ingresos de un individuo evolucionan estocásticamente con el tiempo en el intervalo $[0, +\infty)$, siguiendo un proceso de difusión browniano que representa los choques del ingreso alrededor de la media y un proceso de Poisson que representa los saltos en la dinámica del ingreso asociados a eventos raros.

Los individuos presentan una función de utilidad estrictamente creciente y estrictamente cóncava que depende del consumo futuro c_t descontada a la tasa $\rho \geq 0$.

$$\mathbb{E} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} f(c_t) dt \quad \rho \geq 0 \quad (3.1)$$

Su riqueza a_t toma la forma de bonos y evoluciona de acuerdo a la restricción

$$da_t = (Y_t + r_t a_t - c_t) dt \quad (3.2)$$

con r_t tasa de interés, la cual es endógena al modelo y se debe calcular su valor adecuado para que se cumpla la condición de equilibrio. Los individuos presentan un nivel de endeudamiento dado por:

$$a_t \geq \underline{a} \quad \text{donde } -\infty < \underline{a} \leq 0 \quad (3.3)$$

donde \underline{a} representa la deuda efectiva del agente, sobre este valor existe una restricción, la del llamado límite natural de endeudamiento (LND), el cual se define como el nivel máximo que el agente se puede endeudar y pagar, aún en el escenario donde los ingresos y gastos se ajustan a niveles mínimos observados. De esta forma la restricción $a_t \geq \underline{a}$ se cumple mientras que la deuda efectiva de los agentes sea menor que la cantidad máxima que el agente se puede endeudar y pagar ($LND < \underline{a}$), en caso contrario, se toma al LND como el nuevo límite de endeudamiento efectivo.

Una forma de justificar esta restricción es que no hay un capital infinito por tanto los agentes deben manejar esta restricción de endeudamiento. En general garantiza que a_t nunca llegue a ser tan negativo tal que el individuo no pueda pagar su deuda, incluso si elige el consumo cero a partir de entonces.¹

¹En Aiyagari (1994) para $r > 0$ fijo, el LND se define por $a_t \geq \frac{Y_1}{r}$; Y_1 el ingreso más bajo. Para una tasa de interés variable r_t , el LND se define por $a_t \geq -Y_1 \int_t^{\infty} \exp\left(-\int_t^s r_\tau d\tau\right) ds$.

Se supone ahora un continuo de individuos que son heterogéneos en su riqueza a_t e ingresos Y_t , el estado de la economía corresponde a una distribución conjunta del ingreso y la riqueza que se denota por $g(a, Y, t)$.

Los procesos más sofisticados en la dinámica del ingreso pueden justificarse en estudios como el de Guvenen et al. (2015) quienes argumentan que los choques de los ingresos muestran desviaciones sustanciales de la normalidad logarítmica y la mayoría de los agentes experimentan choques de ingresos muy pequeños, mientras que un número pequeño pero no despreciable experimenta choques muy grandes. Por su parte el trabajo de Jacobson et al. (1993) documenta los cambios bruscos o drásticos en el ingreso de los agentes cuando se enfrentan a un desplazamiento laboral, generando lo que los autores llaman efectos "cicatrizantes". Finalmente Wang et al. (2016) argumenta que para capturar grandes choques de ingresos poco frecuentes en un período muy corto, además de pequeños choques de difusión, es necesario incorporar saltos estocásticos y define que un proceso de ingreso comúnmente utilizado el cual es capaz de capturar completamente tanto choques permanentes como transitorios, puede describirse por medio de un proceso estocástico de difusión y de saltos de tamaño constante.

Lo anterior sustenta correctamente nuestra forma de definir la dinámica del ingreso de los agentes Y_t , la cual está asociada a un proceso de difusión browniano que representa los choques del ingreso alrededor de la media y a un proceso de Poisson que representa los saltos no necesariamente de tamaño constante en la dinámica del ingreso asociados con eventos raros. Y_t es solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dY_t = \mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_{Y,t} + Y_{t-} \int (e^z - 1) N(dz, dt) \quad Y_t \geq 0 \quad (3.4)$$

Donde $dW_{Y,t}$ corresponde a un choque exógeno idiosincrático browniano, con varianza $\sigma(Y_t) > 0$ que modela las pequeñas fluctuaciones del ingreso que se observan todos los días alrededor de su tendencia $\mu(Y_t)$. El término $Y_{t-} \int (e^z - 1) N(dz, dt)$ representa la suma de todos los saltos proporcionales al ingreso anterior que ocurren en la dinámica para un intervalo de tiempo dado, donde $N(dz, dt)$ denota la medida de conteo aleatorio de un proceso de saltos en el ingreso, con compensador $\nu = \lambda F$. La medida de conteo de los saltos representa el número de veces que ocurre un salto y tiene asociado dos variables, z es la variable asociada al tamaño del salto y t representa el tiempo en que ocurre el salto. Esto es, los saltos del proceso son i.i.d con distribución $F(dz)$ e intensidad $\lambda > 0$. Los saltos se producen aleatoriamente de acuerdo al proceso de Poisson, mientras que el valor del salto es una cantidad aleatoria, con una distribución de probabilidad específica.

Así un proceso de Poisson compuesto modela los saltos bruscos e inesperados que ocasionalmente ocurren en el tamaño del ingreso de los agentes y puede parametrizarse por una intensidad ("tasa de arribo") $\lambda > 0$ y una distribución de probabilidad específica para el tamaño de los saltos F .²

²Achdou et al. (2017) establecen desde una perspectiva teórica, que el proceso (3.3) no tiene necesidad de

En este caso la ecuación (3.3) indica la evolución del ingreso en el tiempo, que cuando se somete a un choque browniano nos dice que cada cambio de ingreso es independiente de los cambios de ingreso anteriores y presentan una volatilidad de ingreso moderada. Además, el hecho de incluir saltos en la dinámica del ingreso, proporciona unas características especiales que los modelos de difusión no llegan a capturar. Por ejemplo, cuando los posibles resultados en la modelación incluyen valores positivos y negativos para el ingreso, en la forma de eventos raros como caer en un desempleo inesperado, o medidas de política que afecten directamente el ingreso de los agentes.

Específicamente, si ocurre un salto (asociado a un auge o a una caída) del ingreso en el tiempo τ_n (tiempo en el que ocurre un evento inesperado en el ingreso de los agentes) entonces el salto es proporcional al ingreso en el instante anterior Y_{τ_n-} y el capital Y_{τ_n} se puede expresar como:

$$\begin{aligned} Y_{\tau_n} &= Y_{\tau_n-} + \text{salto} \\ &= Y_{\tau_n-} + Y_{\tau_n-}(e^{z_n} - 1) \\ &= Y_{\tau_n-}e^{z_n} \end{aligned}$$

Finalmente si el ingreso está definido por:

$$dY_t = \mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_{Y,t} - Y_{t-} \int (1 - e^z) N(dz, dt) \quad Y_t \geq 0$$

se puede pensar que para cada salto realizado, la pérdida porcentual esperada de ingresos es $(1 - \mathbb{E}(e^z))$ y como se conoce que los saltos ocurren con una tasa de arribo (probabilidad) λ por unidad de tiempo, el crecimiento esperado del ingreso se reduce a $(\mu(t) - \lambda(1 - \mathbb{E}(e^z)))$. Así los saltos cambian el valor esperado de los ingresos laborales futuros y como la riqueza de los agentes es proporcional al ingreso, se tiene que los saltos reducen la riqueza esperada, lo cual debe tener un efecto para que los agentes también afecten su consumo.

El problema de control óptimo a resolver para cada individuo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \mathbb{E}_0 \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} f(c_t) dt \quad \rho \geq 0 \\ \text{s.a :} \quad & \\ da_t = & (Y_t + r_t a_t - c_t) dt \\ a_t \geq & \underline{a} \\ dY_t = & \mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_{Y,t} + Y_{t-} \int (e^z - 1) N(dz, dt) \quad Y_t \geq 0 \end{aligned}$$

restringirse a un intervalo acotado, ya que los procesos no acotados se pueden analizar fácilmente. Puesto que al final el objetivo es resolver el problema numéricamente y cualquier cálculo necesariamente requiere que el ingreso se encuentre en un intervalo acotado.

Se tiene una economía pequeña donde los hogares fijan la tasa de interés y el equilibrio estacionario del problema corresponde a la terna conformada por la tasa de interés, la función de valor óptimo y la distribución conjunta del ingreso y la riqueza $(r, V(a, Y), g(a, Y))$ para encontrar esto, se debe resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Es decir, el problema maximización de los individuos, la distribución conjunta del ingreso y la riqueza deben satisfacer las ecuaciones estacionarias de Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B) y kolmogorov Forward (k.F) (también conocida como ecuación de Fokker–Planck) en tiempo continuo asociadas al proceso de difusión browniano y al de saltos en la dinámica del ingreso. Puesto que este par de ecuaciones que resuelven el problema de optimización son acopladas, la ecuación de (H.J.B) resuelve las decisiones de optimización de cada agente, obteniendo las funciones de política óptima de consumo y ahorro, la ecuación de (k.F) por su parte caracteriza la evolución en el tiempo de la distribución de riqueza, dadas las elecciones óptimas de consumo y ahorro de los individuos.

Para el caso de la ecuación de (H.J.B), el enfoque de programación dinámica y el teorema de verificación aplicado a dinámicas que combinan procesos de difusión y de saltos de Poisson, tiene como referencias principales a (Oksendal and Sulem, 2009), (Fleming and Soner, 2006) y (Hanson, 2007) y define la siguiente función de valor óptimo:

$$V(a_t, Y_t) := \sup_{Y_t^c \geq 0} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} f(c_t) dt \right], \quad Y_0 = Y \geq 0, \quad a_0 = \underline{a} \quad (3.5)$$

con la siguiente ecuación integro-diferencial no lineal de segundo orden de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B)

$$-\rho V(a_t, Y_t) + \sup_{c_t \geq 0} \{[\mathcal{A}^{c_t} V](a_t, Y_t) + f(c_t)\} = 0, \quad Y_t \geq 0, \quad a_t > \underline{a}. \quad (\text{H.J.B})$$

Para cada $c_t \geq 0$ \mathcal{A}^{c_t} es el operador

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}^{c_t} V](a_t, Y_t) &= (Y_t + ra_t - c_t) \frac{\partial V}{\partial a_t}(a_t, Y_t) + \mu(Y_t) \frac{\partial V}{\partial Y_t}(a_t, Y_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(Y_t) \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2}(a_t, Y_t) \\ &+ \lambda \int [V(a_t, e^z Y_t) - V(a_t, Y_t)] G(z) dz. \end{aligned}$$

reemplazando la ecuación de (H.J.B) es:

$$\begin{aligned} \rho V(a_t, Y_t) &= \sup_{c_t \geq 0} \{f(c_t) + (Y_t + ra_t - c_t) \frac{\partial V}{\partial a_t}(a_t, Y_t) + \mu(Y_t) \frac{\partial V}{\partial Y_t}(a_t, Y_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(Y_t) \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2}(a_t, Y_t) \\ &+ \lambda \int [V(a_t, e^z Y_t) - V(a_t, Y_t)] G(z) dz\} \end{aligned} \quad (\text{H.J.B})$$

La ecuación de (H.J.B) resuelve el problema de optimización de cada agente, obteniendo las

funciones de política óptima de consumo y ahorro. Intuitivamente, responde a la pregunta, dada la valoración de los ingresos y la riqueza de un individuo mañana, ¿cuánto ahorrará hoy y cuál es la función de valor correspondiente hoy?

Para el caso de la ecuación de (k.F), se tiene que $g(a, Y)$ es la función de distribución conjunta del ingreso y la riqueza. La función de ahorro $s(a, Y)$ se define:

$$s(a_t, Y_t) = Y_t + ra_t - c_t(a_t, Y_t) \quad \text{donde} \quad c_t(a_t, Y_t) = (f')^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial a_t}(a_t, Y_t) \right) \quad (3.6)$$

Usando estas relaciones, la restricción de riqueza (3.2) se puede escribir así $da = S(a_t, Y_t)dt$ por tanto se tienen como restricciones:

$$\begin{aligned} da &= s(a_t, Y_t)dt \\ dY_t &= \mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_{Y,t} + Y_{t-} \int (e^z - 1) N(dz, dt) \quad Y_t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Que se puede ver como un solo vector de restricción para el caso del proceso de difusión y de saltos:

$$d \begin{pmatrix} a \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(a_t, Y_t) \\ \mu(Y_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(Y_t) \end{pmatrix} dW_t + \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{t-} \int (e^z - 1) \end{pmatrix} N(dz, dt) \quad (3.8)$$

Tomando como referencia principal Hanson (2007) capítulo 7 (pags. 195-222), la ecuación de (k.F) (también llamada ecuación Fokker-Planck) asociada a este proceso conjunto de choques browniano y de saltos, se puede escribir de la siguiente forma y caracteriza la evolución en el tiempo de la distribución de riqueza, dadas las elecciones óptimas de consumo y ahorro de los individuos.

$$\begin{aligned} 0 = & - \frac{\partial}{\partial a_t} [s(a_t, Y_t)g(a_t, Y_t)] - \frac{\partial}{\partial Y_t} [\mu(Y_t)g(a_t, Y_t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y_t^2} [\sigma^2(Y_t)g(a_t, Y_t)] - \\ & \lambda g(a_t, Y_t) + \lambda \int g(a_t, Y_t e^{-z}) G(z) dz \end{aligned} \quad (k.F)$$

Donde $\int g(a_t, Y_t e^{-z}) G(z) dz$ representa la componente de saltos asociada a la función distribución conjunta de ingreso y riqueza, en la cual, el salto adjunto correspondiente $Y_t e^{-z}$ se obtiene invirtiendo la función de amplitud del salto con respecto al ingreso, permitiendo relacionar el estado previo al salto con el estado posterior al salto.

Intuitivamente la ecuación de (k.F) responde a la pregunta, dada la distribución actual de la riqueza, las decisiones de ahorro y la evolución aleatoria de los ingresos, ¿cuál es la distribución de la riqueza en una fecha futura?

3.3.1. Equilibrio estacionario

Las ecuaciones de (H.J.B) y de (k.F) describen el comportamiento de los individuos en cuanto a sus decisiones de ahorro, consumo y de su distribución conjunta de ingreso y riqueza.

El equilibrio estacionario se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Considera las ecuaciones diferenciales parciales acopladas de (H.J.B) y (k.F) sobre $(\underline{a}, +\infty) \times [0, \infty)$ que resuelven el problema de los individuos y la distribución conjunta de ingreso y riqueza.

$$\begin{aligned} \rho V(a_t, Y_t) = \sup_{c_t \geq 0} \{ & f(c_t) + (Y_t + ra_t - c_t) \frac{\partial V}{\partial a_t}(a_t, Y_t) + \mu(Y_t) \frac{\partial V}{\partial Y_t}(a_t, Y_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(Y_t) \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2}(a_t, Y_t) \\ & + \lambda \int [V(a_t, e^z Y_t) - V(a_t, Y_t)] G(z) dz \} \end{aligned} \quad (\text{H.J.B})$$

$$\begin{aligned} 0 = - \frac{\partial}{\partial a_t} [s(a_t, Y_t)g(a_t, Y_t)] - \frac{\partial}{\partial Y_t} [\mu(Y_t)g(a_t, Y_t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y_t^2} [\sigma^2(Y_t)g(a_t, Y_t)] - \\ \lambda g(a_t, Y_t) + \lambda \int g(a_t, Y_t e^{-z}) G(z) dz \end{aligned} \quad (\text{k.F})$$

La función de ahorro es

$$s(a_t, Y_t) = Y_t + ra_t - c_t(a_t, Y_t) \quad \text{donde} \quad c(a_t, Y_t) = (f')^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial a_t}(a_t, Y_t) \right) \quad (3.9)$$

La función de valor V que satisface la restricción de estado en $a_t = \underline{a}$ y está dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial a_t}(\underline{a}, Y_t) \geq f'(Y_t + r\underline{a}) \quad \text{para todo } Y_t \quad (3.10)$$

La función de valor también satisface las condiciones de contorno en el intervalo $[\underline{Y}, \bar{Y}]$

$$\frac{\partial V}{\partial Y_t}(a_t, \underline{Y}) = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial Y_t}(a_t, \bar{Y}) = 0 \quad \text{para todo } a_t \quad (3.11)$$

Junto con las condiciones de Equilibrio

$$1 = \int_0^\infty \int_{\underline{a}}^\infty g(a_t, Y_t) da dY$$

Esto es $g(a, Y)$ es la distribución incondicional de la riqueza para una productividad dada.

En equilibrio los bonos deben estar en oferta fija:

$$S(g_t, r_t) = \int_0^\infty \int_{\underline{a}}^\infty a_t g(a_t, Y_t) da dY = B = 0 \quad (3.12)$$

Significa que la oferta neta de los bonos en la economía es cero, es decir, se itera sobre la tasa de

interés r_t hasta que se satisfaga la condición de equilibrio del mercado.

En resumen, se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas (H.J.B) y (k.F) sobre $(\underline{a}, +\infty) \times [0, +\infty)$ junto con las restricciones de estado, de contorno y la condición de equilibrio, de la siguiente forma para hallar el equilibrio estacionario:

1. Para cada iteración de r_t se resuelve la ecuación (H.J.B) partiendo de una tasa de interés r_0 y usando el método de diferencias finitas descrito en el capítulo 1 sección (1.4), la cual incluye el proceso de saltos en el ingreso. Esto nos permite calcular la función de valor $V(a, Y)$, la política óptima de ahorro $s(a_t, Y_t)$ y consumo $c(a_t, Y_t)$.
2. Una vez encontrado ahorro óptimo $s(a_t, Y_t)$ se resuelve la ecuación (k.F) para encontrar la distribución conjunta de ingreso y riqueza $g(a_t, Y_t)$ usando diferencias finitas.
3. Usando $g(a_t, Y_t)$ se calcula la oferta neta de bonos

$$S(g_t, r_t) = \int_0^\infty \int_{\underline{a}}^\infty (a_t g(a_t, Y_t)) da dY$$

4. Se verifica en cada iteración si se cumple con la condición de compensación del mercado (3.12) y la restricción $a_t \geq \underline{a}$ y esto se cumple mientras $LND < \underline{a}$. Este procedimiento se repite hasta encontrar el valor adecuado de r_t que cumpla $S(g_t, r_t) = 0$, en otras palabras si $S(g_t, r_t) > 0$ la oferta de ahorro es mayor que la demanda de inversión de los hogares y por tanto la tasa de interés r_t baja y si $S(g_t, r_t) < 0$ la oferta de ahorro es menor que la demanda de inversión y por tanto la tasa de interés r_t sube. En conclusión se itera sobre la tasa de interés hasta encontrar el valor $r_t = r_e$ que satisface la condición de equilibrio.
5. Para encontrar esta tasa de interés de equilibrio r_e se usa el método de bisección que permite subir o bajar la tasa de interés dependiendo si el ahorro agregado $S(g_t, r_t)$ es negativo o positivo, el algoritmo establece al final una tolerancia del orden de 10^{-5} para encontrar el valor de r_e .
6. Finalmente al vector (r_e, V, g) se le llama un equilibrio estacionario.

3.4. Solución numérica

Esta sección adapta los procedimientos usados por Achdou et al. (2017) y Nuño (2017) quienes toman como referencia a Achdou (2010) y Achdou (2013) para aproximar numéricamente la solución del modelo de agentes heterogéneos en tiempo continuo. Básicamente para la solución del modelo se usa el método de diferencias finitas, que resulta ser eficiente a la hora de resolver un modelo de agentes heterogéneos con un continuo de agentes y sin choques agregados.

En la discretización del sistema de equilibrio, las ecuaciones diferenciales (H.J.B) y (k.F), la

función de valor y la distribución conjunta deben aproximarse de alguna manera. En el caso de diferencias finitas el sistema de ecuaciones diferenciales parciales se transforma en un sistema matricial de ecuaciones. Se aproxima la función de valor \mathbf{V} y la función de distribución conjunta \mathbf{g} en I puntos discretos en la dimensión del espacio, a_i , con $i = 1, 2, \dots, I$ y en J puntos discretos en la dimensión del espacio Y_j con $j = 1, 2, \dots, J$. Usando esta grilla discreta de valores se denota el vector de la función de valor $\mathbf{V} = (V(a_1, Y_1), V(a_2, Y_2), \dots, V(a_I, Y_J))^T$ y el vector de la distribución conjunta $\mathbf{g} = (g(a_1, Y_1), g(a_2, Y_2), \dots, g(a_I, Y_J))^T$ que nos permiten encontrar el sistema matricial siguiente:

$$(\rho + \lambda)\mathbf{V} = \mathbf{f} + \mathbf{A}(\mathbf{V}; r)\mathbf{V} + \lambda\mathbf{I} \quad (3.13)$$

$$0 = (\mathbf{A}(\mathbf{V}; r)^T - \mathbf{I})\mathbf{g} + \lambda\mathbf{I} \quad (3.14)$$

$$B = S(\mathbf{g}; r) \quad (3.15)$$

Que respectivamente representan las ecuaciones discretizadas de (H.J.B), de (k.F) y la condición de compensación del mercado ³. $\mathbf{A}(\mathbf{V}; r)$ corresponde a la matriz de transición que captura la evolución de las variables de estado, en el espacio de estado discretizado. Este sistema matricial se puede resolver usando los pasos del algoritmo descrito anteriormente.

3.4.1. Ecuación de HJB

Para la solución de la ecuación de (H.J.B) se usa el método implícito de diferencias finitas, particularmente se usa el método upwind para aproximar las derivadas de la riqueza a y el ingreso Y . Las diferencias backward y forward se definen por:

$$V_{a,B}(a_i, Y_j) = \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta a} \quad (3.16)$$

$$V_{a,F}(a_i, Y_j) = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta a}$$

De manera similar se definen para el caso del ingreso:

$$V_{Y,B}(a_i, Y_j) = \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta Y} \quad (3.17)$$

$$V_{Y,F}(a_i, Y_j) = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta Y}$$

$$V_{Y,Y}(a_i, Y_j) = \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2}$$

³ $B = \int_{\underline{Y}}^{\bar{Y}} \int_{\underline{a}}^{\infty} (ag(a, Y))dadY.$

En este caso se necesita resolver la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$-\rho V(a_t, Y_t) + \sup_{c_t \geq 0} \{[\mathcal{A}^{c_t} V](a_t, Y_t) + f(c_t)\} = 0, \quad Y \geq 0, \quad a > \underline{a}. \quad (\text{HJB})$$

Entonces para cada a el máximo en la ecuación HJB satisface:

$$\hat{c}(a_t, Y_t) = \arg \max_{c_t \geq 0} \{[\mathcal{A}^{c_t} \hat{V}](a_t, Y_t) + f(c_t)\}$$

Así la ecuación de HJB se convierte en:

$$\rho \hat{V}(a_t, Y_t) = [\mathcal{A}^{\hat{c}(a_t, Y_t)} \hat{V}](a_t, Y_t) + f(\hat{c}(a_t, Y_t)) = 0.$$

$$\hat{c}(a_t, Y_t) = (f')^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial a_t}(a_t, Y_t) \right)$$

Por último el teorema de verificación establece que, $V = \hat{V}$ resuelve la ecuación (HJB) y garantiza la existencia de una regla de política óptima para \hat{c} . La ecuación de HJB resultante es:

$$\begin{aligned} \rho V(a_t, Y_t) = & f(\hat{c}_t(a_t, V_a)) + (Y_t + ra_t - \hat{c}_t(a_t, V_a)) \frac{\partial V}{\partial a_t}(a_t, Y_t) + \mu(Y_t) \frac{\partial V}{\partial Y_t}(a_t, Y_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(Y_t) \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2}(a_t, Y_t) \\ & + \lambda \int [V(a_t, e^z Y_t) - V(a_t, Y_t)] G(z) dz \end{aligned} \quad (3.18)$$

Considerando una función de utilidad tipo CRRA de aversión relativa al riesgo constante dada por $f(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$; $\gamma > 0$ y la condición de primer orden $\frac{\partial f}{\partial c_t} = \frac{\partial V}{\partial a_t}$

se puede encontrar que:

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= \frac{\partial V}{\partial a_t} \\ c_t &= \left(\frac{\partial V}{\partial a_t} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

Reemplazando este resultado en la función de utilidad se tiene:

$$f(c, V') = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\gamma}$$

De esta forma la ecuación de(H.J.B) es:

$$\begin{aligned} \rho V(a_t, Y_t) = & \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial a_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1-\gamma} + (Y_t + ra_t - \left(\frac{\partial V}{\partial a_t}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}) \frac{\partial V}{\partial a_t}(a_t, Y_t) + \mu(Y_t) \frac{\partial V}{\partial Y_t}(a_t, Y_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(Y_t) \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2}(a_t, Y_t) \\ & + \lambda \int [V(a_t, e^z Y_t) - V(a_t, Y_t)] G(z) dz \end{aligned}$$

Reordenando términos se tiene:

$$\begin{aligned} \rho V(a_t, Y_t) = & \frac{\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{\partial V}{\partial a_t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + (Y_t + ra_t) \frac{\partial V}{\partial a_t}(a_t, Y_t) + \mu(Y_t) \frac{\partial V}{\partial Y_t}(a_t, Y_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(Y_t) \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2}(a_t, Y_t) \\ & + \lambda \int [V(a_t, e^z Y_t) - V(a_t, Y_t)] G(z) dz \end{aligned}$$

$G(z)$ es la función de densidad de probabilidad del salto de amplitud z .

El esquema *Upwind* (contraviento o contracorriente), utiliza derivadas espaciales hacia delante y hacia atrás dependiendo del sentido de propagación. Para tratar de aproximar mejor la no linealidad que se presenta en V_a , podemos usar este esquema que cambie automáticamente el método de diferenciación en función del coeficiente local en V_a . La idea es utilizar una aproximación de diferencia hacia adelante siempre que la deriva de la variable de estado (Ahorro $s_{i,j}^n = Y_j + ra_i - c_{i,j}^n$) sea positiva y usar una diferencia hacia atrás siempre que sea negativa. Es decir, se calcula el ahorro de acuerdo con las aproximaciones de diferencia hacia atrás y hacia adelante, (Achdou et al., 2017). Ahora se puede volver al problema de programación dinámica y derivar una aproximación de diferencia finita *upwind* a la ecuación diferencial (3.18).

Para la discretización de la Ecuación Parcial Integro-Diferencial PIDE(3.18) se sigue la línea de argumentación planteada en d'Halluin et al. (2005). En donde los términos que no involucran la integral de salto en el ingreso, se manejan implícitamente por métodos estándar de discretización numérica, en combinación con métodos de integración numérica. Particularmente el término integral de la ecuación (3.18) se transforma mediante una sustitución adecuada en una integral de correlación, usando el procedimiento descrito en el capítulo 1 sección (1.4.2), esto permite una evaluación de una manera más eficiente para todos los valores del ingreso Y .

Sea

$$I(Y_t) = \int V(a_t, e^z Y_t) G(z) dz$$

Usando el cambio de variable $x = \ln(Y)$ entonces:

$$I(Y) = \int V(a, e^z e^x) G(z) dz$$

$$I(Y) = \int V(a, e^z e^x) G(z) dz = \int V(a, e^{x+z}) G(z) dz = \int \bar{V}(a, x+z) G(z) dz = \bar{V} \otimes \bar{G} \quad (3.19)$$

Donde $V(a, e^{x+z}) = \bar{V}(a, x+z)$.

Reemplazando estos resultados en (3.18) se tiene:

$$\begin{aligned} \rho V(a_t, Y_t) = & f(\hat{c}_t(a_t, V_a)) + (Y_t + ra_t - \hat{c}_t(a_t, V_a)) \frac{\partial V}{\partial a_t}(a_t, Y_t) + \mu(Y_t) \frac{\partial V}{\partial Y_t}(a_t, Y_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(Y_t) \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2}(a_t, Y_t) \\ & + \lambda I(Y_t) - \lambda V(a_t, Y_t) \end{aligned}$$

La ecuación (3.18) en forma discreta en términos de las diferencias finitas para el caso implícito, incluyendo la parte de la integral asociada a los saltos se escribe de la siguiente forma

$$\rho V_{i,j}^{n+1} = f(c_{i,j}^n) + \partial_a V_{i,j}^{n+1}(Y_j + ra_i - c_{i,j}^n) + \mu_j \partial_Y V_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2} \sigma_j^2 \partial_{YY} V_{i,j}^{n+1} + \lambda I^n(Y_j) - \lambda V_{i,j}^{n+1}.$$

Usando el esquema *upwind* implícito la ecuación anterior se puede ver así:

$$\begin{aligned} \rho V_i^{n+1} = & f(c_{i,j}^n) + \partial_{a,F} V_{i,j}^{n+1}[Y_j + ra_i - c_{i,j,F}^n]^+ + \partial_{a,B} V_{i,j}^{n+1}[Y_j + ra_i - c_{i,j,B}^n]^- \\ & + \partial_{Y,F} V_{i,j}^{n+1} \mu_j^+ + \partial_{Y,B} V_{i,j}^{n+1} \mu_j^- + \frac{1}{2} \sigma_j^2 \partial_{YY} V_{i,j}^{n+1} + \lambda I^n(Y_j) - \lambda V_{i,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

se define:

$$c_{i,j}^n = (f')^{-1}[\partial_a V_{i,j}^n]$$

$$s_{iF}^n = Y_j + ra_i - c_{i,j,F}^n$$

$$s_{iB}^n = Y_j + ra_i - c_{i,j,B}^n$$

Para algún número x , la notación $x^+ = \max\{x, 0\}$ parte positiva de x , análogamente $x^- = \min\{x, 0\}$, luego:

$$[s_{iF}^n]^+ = [Y_j + ra_i - c_{i,j,F}^n]^+ = \max\{Y_j + ra_i - c_{i,j,F}^n, 0\}$$

$$[s_{iB}^n]^- = [Y_j + ra_i - c_{i,j,B}^n]^- = \min\{Y_j + ra_i - c_{i,j,B}^n, 0\}$$

La ecuación (3.20) representa un sistema de $I \times J$ ecuaciones lineales que se puede escribir en notación matricial, al sustituir las derivadas forward y backward (3.16) y (3.17) junto con las definiciones para $[S_{iF}^n]^+$ y $[S_{iB}^n]^-$ obteniendo así la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho V_{i,j}^{n+1} = & f(c_{i,j}^n) + \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta a} (s_{i,j,F}^n)^+ + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta a} (s_{i,j,B}^n)^- + \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta Y} \mu_j^+ + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta Y} \mu_j^- \\ & + \frac{1}{2} \sigma_j^2 \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta Y)^2} + \lambda I^n(Y_j) - \lambda V_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

Se puede ver de forma equivalente a:

$$\rho V_{i,j}^{n+1} = f(c_{i,j}^n) + x_{i,j} V_{i-1,j}^{n+1} + (y_{i,j} + \nu_j) V_{i,j}^{n+1} + z_{i,j} V_{i+1,j}^{n+1} + \chi_j V_{i,j-1}^{n+1} + \varsigma_j V_{i,j+1}^{n+1} + \lambda I^n(Y_j) - \lambda V_{i,j}^{n+1}$$

donde

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= -\frac{(s_{i,j,B}^n)^-}{\Delta a} \\ y_{i,j} &= -\frac{(s_{i,j,F}^n)^+}{\Delta a} + \frac{(s_{i,j,B}^n)^-}{\Delta a} \\ z_{i,j} &= \frac{(s_{i,j,F}^n)^+}{\Delta a} \\ \nu_j &= \frac{\mu_j^-}{\Delta Y} - \frac{\mu_j^+}{\Delta Y} - \frac{\sigma_j^2}{(\Delta Y)^2} \\ \chi_j &= -\frac{\mu_j^-}{\Delta Y} + \frac{\sigma_j^2}{2(\Delta Y)^2} \\ \varsigma_j &= \frac{\mu_j^+}{\Delta Y} + \frac{\sigma_j^2}{2(\Delta Y)^2} \end{aligned}$$

Esto permite resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\rho + \lambda) V^{n+1} = f^n + \mathbf{A}^n V^{n+1} + \lambda I^n$$

$$\mathbf{A}^n = \tilde{\mathbf{A}}^n(x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) + \mathbf{D}(\nu_j, \chi_j, \varsigma_j)$$

$$(\rho + \lambda)V^{n+1} - \mathbf{A}^n V^{n+1} = f^n + \lambda I^n$$

$$[(\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n]V^{n+1} = f^n + \lambda I^n$$

$$\mathbf{B}^n V^{n+1} = \mathbf{b}^n$$

$$\mathbf{B}^n = (\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n \quad \mathbf{b}^n = f^n + \lambda I^n$$

La solución que se obtiene es:

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} \mathbf{b}^n$$

3.4.2. Ecuación de (k.F)

En la ecuación de (k.F) (k.F) el término integral se transforma mediante una sustitución adecuada en una integral de correlación, d'Halluin et al. (2005), al igual que el procedimiento usado en la discretización de la ecuación de (HJB) que permite escribir

$$I(Y_t) = \int g(a_t, e^{-z} Y_t) G(z) dz$$

Usando el cambio de variable $x = \ln(Y)$ entonces:

$$\begin{aligned} I(Y) &= \int g(a, e^{-z} e^x) G(z) dz \\ I(Y) &= \int g(a, e^{x-z}) G(z) dz = \int \bar{g}(a, x-z) G(z) dz = \bar{g} \otimes \bar{G} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Donde

$$g(a, e^{x-z}) = \bar{g}(a, x-z) \quad \bar{G}_j = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_j - \Delta z/2}^{z_j + \Delta z/2} G(z) dz$$

y con el cambio de variable se tiene $\bar{g}(a, \ln Y) = g(a, Y)$.

Se usa nuevamente el método de la Transformada rápida de Fourier FFT para calcular esta integral. Suponiendo que G es real entonces se tiene:

$$FFT(I(Y)) = (FFT(\bar{g}))(FFT(G))^* \quad (3.22)$$

Podemos calcular previamente $FFT(G)$ en la cuadrícula igualmente espaciada en las coordenadas z . Luego podemos realizar la FFT inversa para obtener los valores de la integral de correlación con lo cual la ecuación de (k.F) se escribe

$$0 = -\frac{\partial}{\partial a} [s(a_t, Y_t)g(a_t, Y_t)] - \frac{\partial}{\partial Y_t} [\mu(Y_t)g(a_t, Y_t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y_t^2} [\sigma^2(Y_t)g(a_t, Y_t)] - \lambda g(a_t, Y_t) + \lambda I(Y_t)$$

Usando el esquema *upwind* esta ecuación (k.F) se puede aproximar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{g_{i,j}(s_{i,j,F}^n)^+ - g_{i-1,j}(s_{i-1,j,F}^n)^+}{\Delta a} + \frac{g_{i+1,j}(s_{i+1,j,B}^n)^- - g_{i,j}(s_{i,j,B}^n)^-}{\Delta a} \\ & - \frac{g_{i,j}\mu_j^+ - g_{i,j-1}\mu_{j-1}^+}{\Delta Y} - \frac{g_{i,j+1}\mu_{j+1}^- - g_{i,j-1}\mu_{j+1}^-}{\Delta Y} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{j+1}^2 g_{i,j+1} - 2\sigma_j^2 g_{i,j} + \sigma_{j-1}^2 g_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} + \lambda I(Y_j) - \lambda g_{i,j} \end{aligned}$$

Se puede ver de forma equivalente a

$$x_{i-1,j}g_{i-1,j} + (y_{i,j} + \nu_j)g_{i,j} + z_{i+1,j}g_{i+1,j} + \chi_{j-1}g_{i,j-1} + \varsigma_{j+1}g_{i,j+1}^{n+1} + \lambda I(Y_j) - \lambda g_{i,j} = 0$$

donde

$$x_{i-1,j} = \frac{(s_{i-1,j,F}^n)^+}{\Delta a}$$

$$y_{i,j} = -\frac{(s_{i,j,F}^n)^+}{\Delta a} + \frac{(s_{i,j,B}^n)^-}{\Delta a}$$

$$z_{i+1,j} = -\frac{(s_{i+1,j,B}^n)^-}{\Delta a}$$

$$\nu_j = \frac{\mu_j^-}{\Delta Y} - \frac{\mu_j^+}{\Delta Y} - \frac{\sigma_j^2}{(\Delta Y)^2}$$

$$\chi_{j-1} = -\frac{\mu_{j-1}^+}{\Delta Y} + \frac{\sigma_{j-1}^2}{2(\Delta Y)^2}$$

$$\varsigma_{j+1} = \frac{\mu_{j+1}^-}{\Delta Y} + \frac{\sigma_{j+1}^2}{2(\Delta Y)^2}$$

Según la estructura de los coeficientes, la matriz asociada al sistema es:

$$\mathbf{A}_1 = \tilde{\mathbf{A}}_1(x_{i-1,j}, y_{i,j}, z_{i+1,j}) + \mathbf{D}_1(\nu_j, \chi_{j-1}, \varsigma_{j+1})$$

Que exactamente corresponde a la matriz transpuesta de la matriz de intensidad de la ecuación de (HJB)

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^T$$

Esto permite resolver entonces el siguiente sistema de ecuaciones para hallar $g(a, Y)$:

$$(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I})g + \lambda I(Y) = 0$$

Como ejemplo, en la solución numérica se usa un proceso de difusión Ornstein-Uhlenbeck para el logaritmo del ingreso de la forma:

$$dLn(Y) = -\theta Ln(Y)dt + \sigma dW_t + \int z N(dz, dt) \quad \theta > 0, \quad \sigma > 0$$

De manera equivalente $dY = d[e^{Ln(Y)}] = d[f(Ln(y))]$, con $f(x) = e^x$ al aplicar el lema de Itô se obtiene que:

$$dY_t = Y\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \theta Ln(Y)\right)dt + (\sigma Y)dW_{Y_t} + Y_{t-} \int (e^z - 1) N(dz, dt); \quad Y_t \geq 0$$

$$\mu(Y_t) = Y\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - \theta Ln(Y)\right)$$

$$\sigma(Y_t) = \sigma Y$$

Apoyados en los estudios de Gourio (2012); Nakamura et al. (2013), se considera que los saltos en el log-ingreso presentan una distribución Normal truncada $\bar{N}(\nu, \varphi^2)$ con media $\nu = -0,055$ y varianza $\varphi^2 = 0,041$ truncando los valores de $-1 \leq z \leq 1$ desde $a = -0,5$ hasta $b = 0,2$.

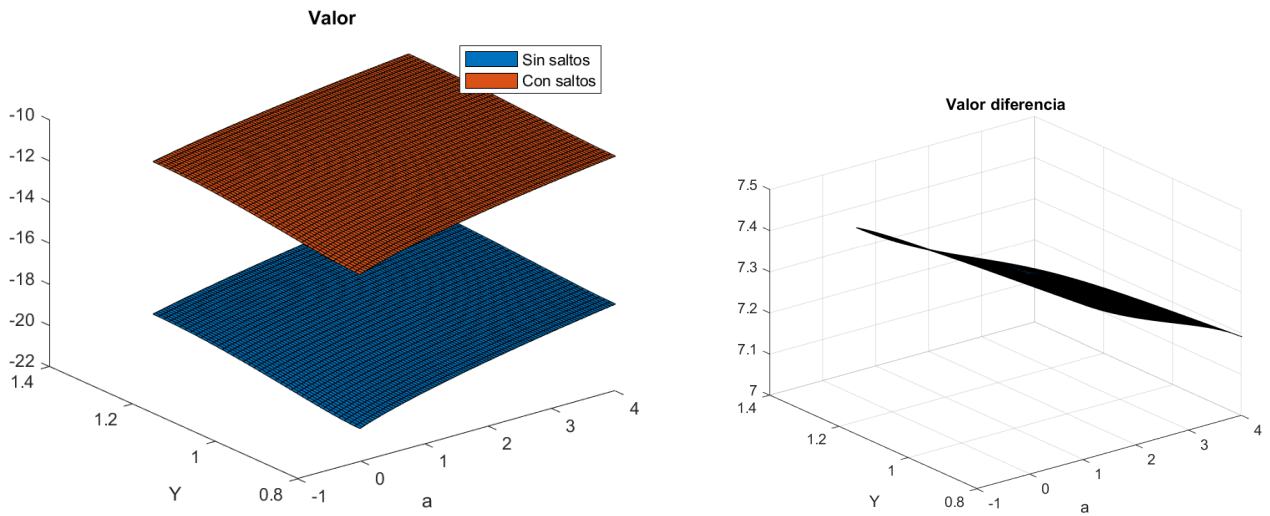
La tasa de interés es endógena al modelo y se escoge de tal forma que se cumpla la condición de equilibrio del mercado. La calibración de los parámetros en la solución numérica toma como referencia los trabajos de Achdou et al. (2017), Kaplan et al. (2018) y Nuño (2017), los valores definidos se muestran en el Cuadro siguiente:

| Parámetro | Valor | Nombre |
|-----------|--------|-------------------------|
| I | 100 | Número de puntos en a |
| J | 40 | Número de puntos en Y |
| r_0 | 0.03 | Tasa de interés inicial |
| λ | 0.03 | Intensidad de saltos |
| γ | 2 | Aversión al riesgo |
| σ | 0.1401 | Volatilidad del proceso |
| θ | 0.1054 | Velocidad de ajuste |
| ρ | 0.05 | Factor de descuento |

Cuadro 3.1: Parámetros del modelo

Las siguientes figuras muestran los resultados que se obtiene para la función de valor, la función de ahorro, consumo y la distribución conjunta de riqueza. También se incluye las diferencias con saltos y sin saltos, cuando en el ingreso es modelado por un proceso de difusión y un proceso de saltos de Poisson.

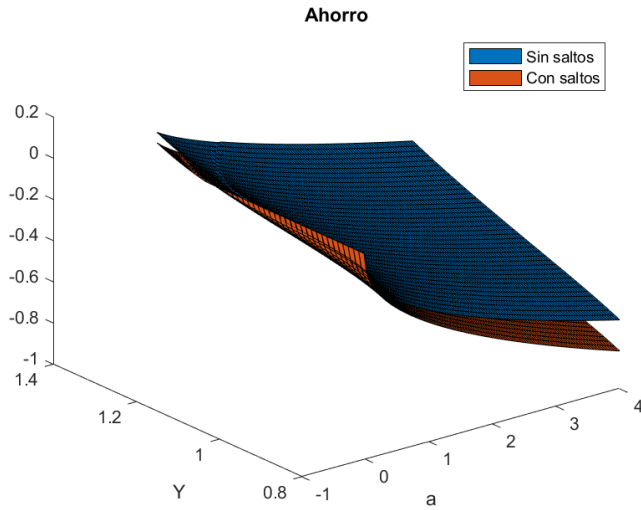
Es de anotar que el procedimiento numérico permite encontrar una tasa de interés de equilibrio $r_e = 0,0013$ con un ahorro agregado de $S(g_t, r_e) = 0,0469$ para el caso sin saltos y $r_e = 0,0078$ con un ahorro agregado de $S(g_t, r_e) = 0,002041$ para el caso con saltos en el ingreso que cumplen la condición de equilibrio en la cual el ahorro agregado $S(g_t, r_t) \approx 0$. Esto se encuentra cuando los saltos se distribuyen de forma normal truncada.



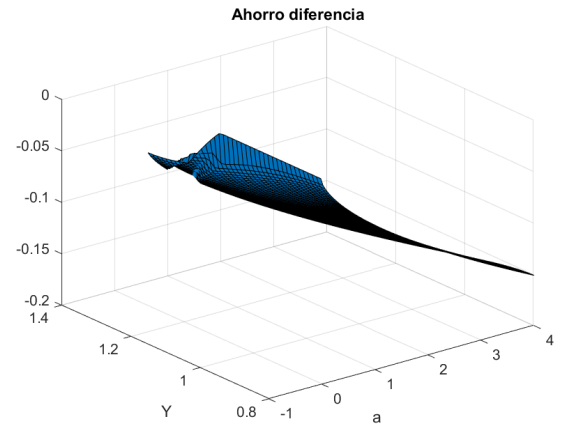
(a) Función de Valor

(b) Diferencia Fun. Valor.

Figura 3.1: Función de Valor y Diferencia.

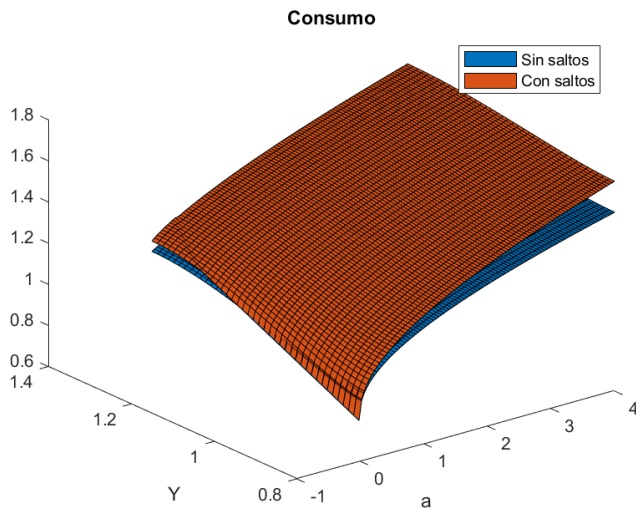


(a) Función de Ahorro

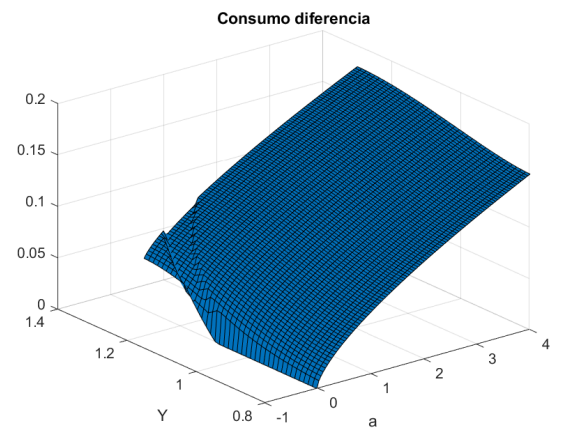


(b) Diferencia fun. Ahorro.

Figura 3.2: Función de Ahorro y Diferencia.



(a) Función de Consumo



(b) Diferencia fun. Consumo.

Figura 3.3: Función de Consumo y Diferencia.

Los resultados concuerdan con la teoría del ahorro precautorio expuesta en Fernández-Corugedo (2004), puesto que al incluir un choque inesperado al ingreso de los agentes, modelado por un proceso de saltos, hace que los agentes tengan un motivo precautorio menos fuerte con lo cual se disminuye su prudencia y esto se refleja en una disminución de su ahorro (menor deseo de ahorrar) y por tanto una menor riqueza esperada, que conduce a un incremento en el consumo. En otras palabras, se observa que todo ingreso adicional por a y en menor medida por Y se consume.

Para comprobar los efectos de los saltos en los ingresos sobre el ahorro de los agentes, se calcula la tasa de ahorro definida por $T(a, Y) = \frac{s}{(Y + ra)}$ para el caso de difusión sin saltos y se compara con el caso de difusión con saltos. La tasa de ahorro es la magnitud que trata de medir qué porcentaje de la renta se destina a ahorrar, a su vez se constituye una fuente de financiación para cualquier agente. En este sentido, cuanto más ahorren los agentes, más recursos dispone la economía a nivel interno para financiar todos los gastos e inversiones. Los resultados son:

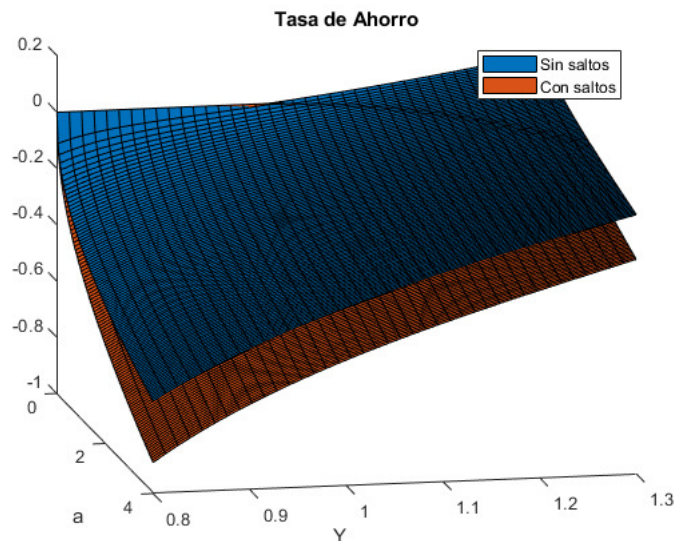
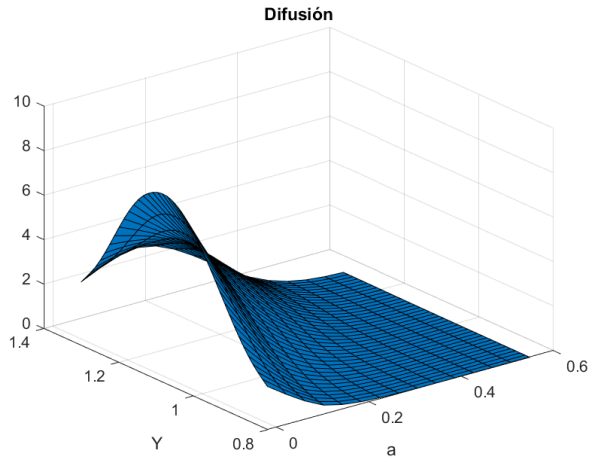


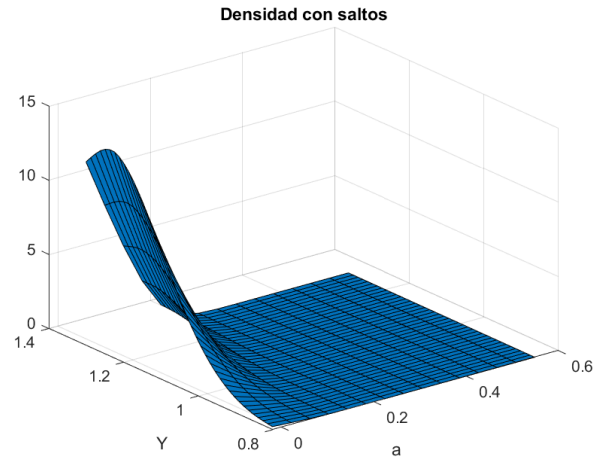
Figura 3.4: Comparación tasa de ahorro

Se observa que a pesar de los incrementos de su ingreso Y y riqueza a la tasa de ahorro de los agentes frente a los choques inesperados del ingreso dados por los saltos, decrece, esto nos dice que por un lado los agentes tienen menor riqueza esperada y por tanto incrementan su consumo durante el choque, pero en el futuro la economía de los agentes no estará en capacidad de financiar sus gastos e inversiones y por tanto deben acudir a nuevos recursos mediante la deuda.

Las siguientes figuras muestran los resultados de la distribución conjunta de ingreso y riqueza:

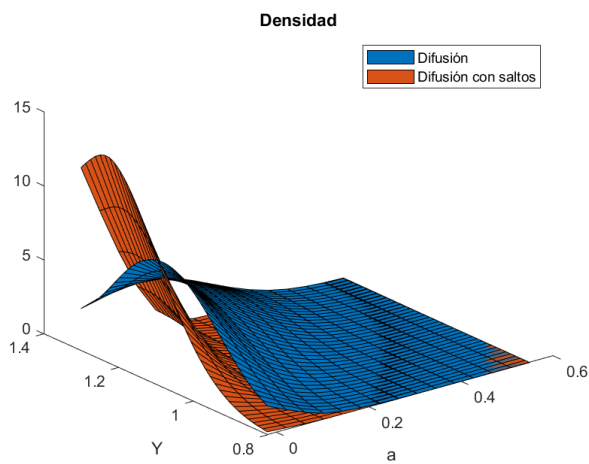


(a) Distribución Conjunta sin saltos

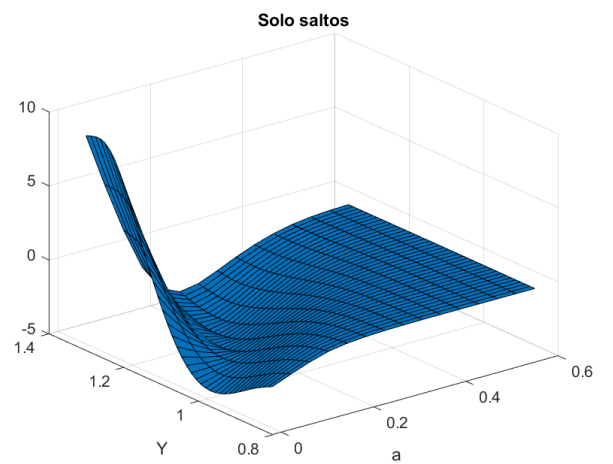


(b) Distribución Conjunta difusión con saltos.

Figura 3.5: Función de Distribución Conjunta.



(a) Distribución Conjunta



(b) Diferencia.

Figura 3.6: Función de Distribución Conjunta y Diferencia.

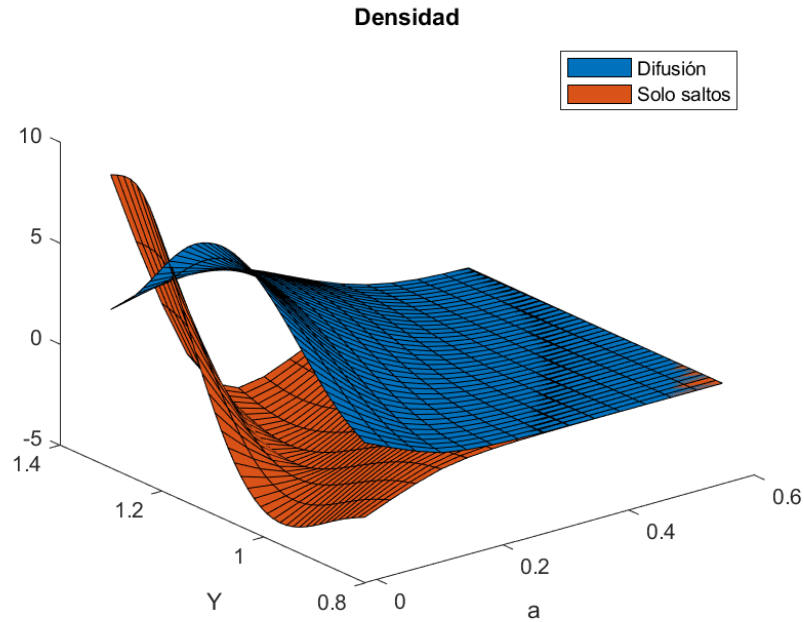
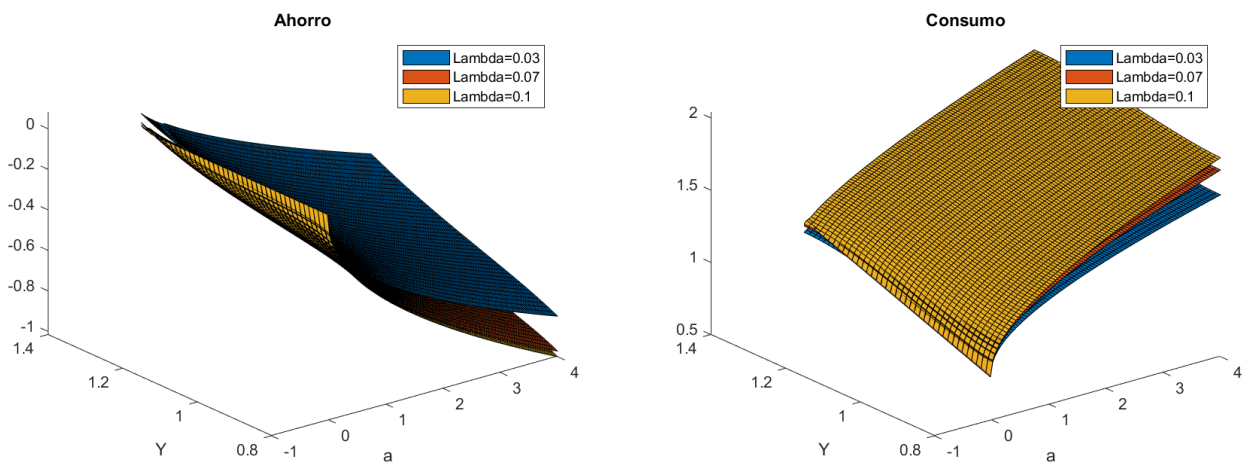


Figura 3.7: Distribución Conjunta Difusión y solo saltos

El comportamiento de disminución observado en el ahorro de los agentes, al incluir un choque inesperado en el ingreso, afecta en el mismo sentido a la distribución conjunta de ingresos y riqueza, cuando se presenta el choque de difusión con saltos y el choque de solo saltos. Puesto que en la presencia de un choque, los individuos tienen menor factor de prudencia (menor deseo de ahorrar) disminuyen su riqueza esperada y por tanto presentan un mayor consumo.

Los resultados frente a la variación de la tasa de arribo de los saltos son:



(a) Fun. Ahorro

(b) Fun. Consumo.

Figura 3.8: Funciones de Consumo y Ahorro para distinto λ .

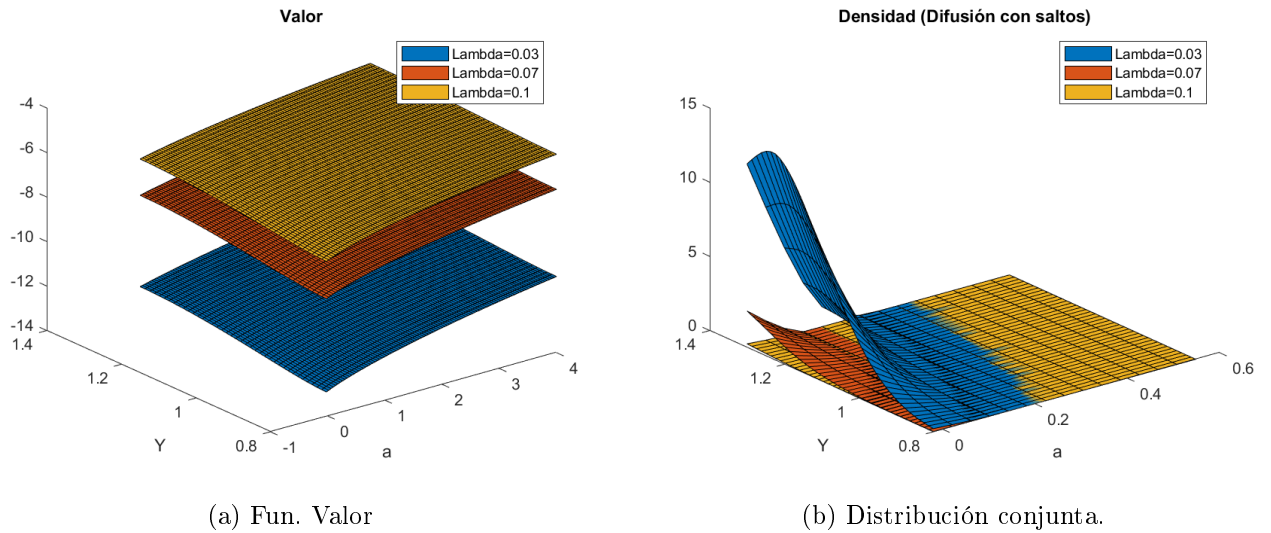


Figura 3.9: Funciones de valor y distribución conjunta para distinto λ .

Las gráficas anteriores muestra la sensibilidad de las políticas óptimas de ahorro y consumo frente al cambio de la intensidad de los saltos, en este sentido si aumenta la tasa de arribo de los saltos los individuos tienen menor precaución por tanto menor deseo de ahorrar y aumentan su consumo en el momento del choque. De igual forma los agentes tienen una distribución conjunta de ingreso y riqueza menor cuando se aumenta la tasa de arribo de los saltos.

Las siguientes graficas muestran el comportamiento frente al cambio de la aversión relativa al riesgo γ :

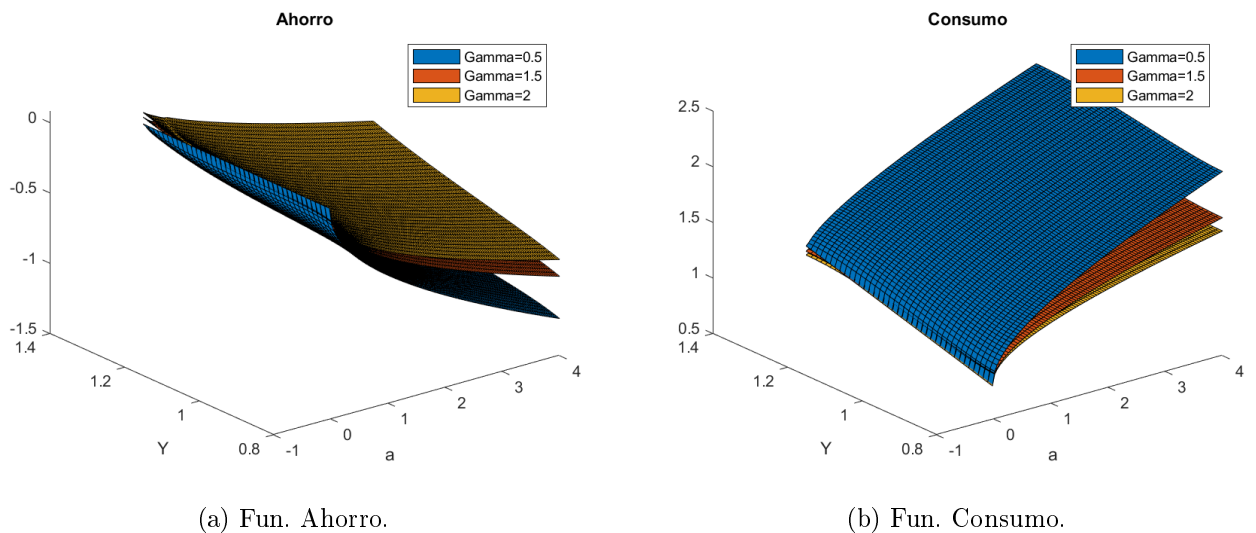


Figura 3.10: Funciones de Consumo y Ahorro para distinto γ .

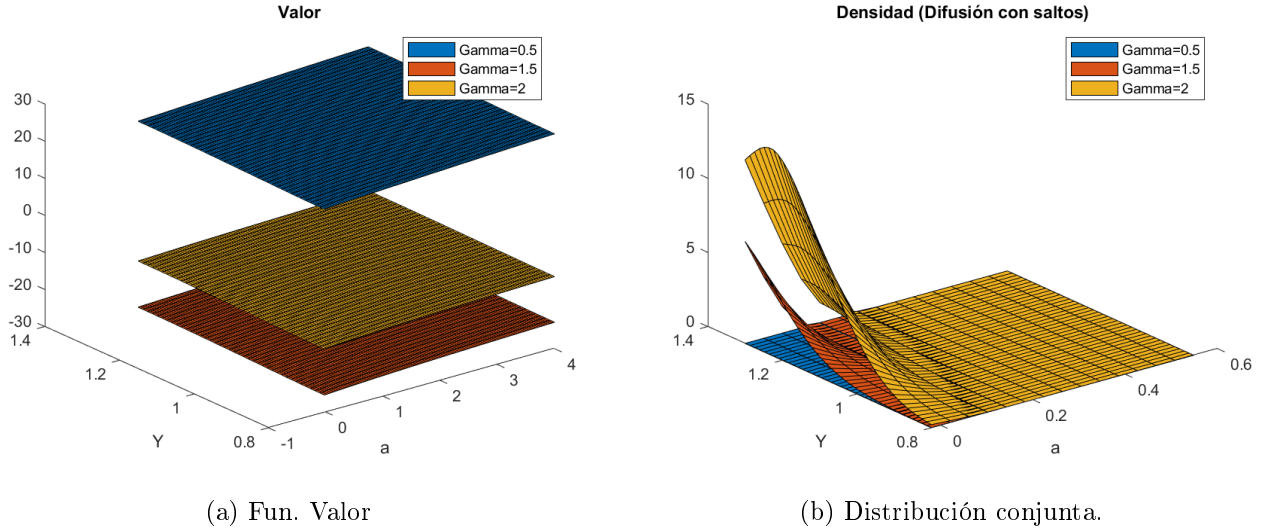


Figura 3.11: Funciones de valor y distribución conjunta para distinto γ .

El comportamiento frente a un incremento en la aversión al riesgo γ , esta relacionado con el coeficiente de prudencia relativa ($\gamma + 1$), lo que implica un mayor deseo de ahorro, un aumento de la riqueza esperada y por tanto se tiene una disminución del consumo ⁴. Resultado que concuerda con Kimball (1990) y Lee and Sawada (2010)

3.5. Análisis de precisión del esquema de diferencias finitas

El esquema de precisión del método de diferencias finitas para la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, planteado en el apéndice online del trabajo (Achdou et al., 2017), quienes toman como referencia los resultados teóricos desarrollados por (Barles and Souganidis, 1991), para garantizar que la solución del esquema de diferencias finitas converge a la solución de viscosidad única de la ecuación HJB, a medida que el espaciado de la cuadrícula converge a cero. Además el estudio de (Cont and Voltchkova, 2005), propone un esquema Implícito-Explícito (IMEX) de diferencias finitas, para resolver un problema que incluye una PIDE (Ecuación Parcial Integro-Diferencial). Esto permitió una eficiente implementación numérica y en el marco de soluciones de viscosidad, resolvió ciertas dificultades del operador, demostró la consistencia y estabilidad de este tipo de esquemas. Además mostró que el esquema es monótono, incondicionalmente estable y consistente. Sumado a lo anterior, proporcionaron las condiciones para la convergencia a la solución de la PIDE.

⁴El coeficiente de prudencia relativa para la función CRRA $f(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ es $\beta = \frac{-cf'''(c)}{f''(c)} = \gamma + 1$

3.5.1. Precisión del la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

Tomando como punto de partida la ecuación maximizada de HJB (3.18)

$$\begin{aligned} \rho V(a, Y) = & f(\hat{c}(a, V_a)) + (Y + ra - \hat{c}(a, V_a)) \frac{\partial V}{\partial a}(a, Y) + \mu(Y) \frac{\partial V}{\partial Y}(a, Y) + \\ & \sigma^2(Y) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}(a, Y) + \lambda \int [V(a, e^z Y) - V(a, Y)] G(z) dz \end{aligned}$$

Derivando la ecuación anterior con respecto a la riqueza a (condición de la envolvente) y usando la condición de primer orden

$$f'(c(a, Y)) = V_a(a, Y)$$

De donde

$$V_{aa} = f''(c(a, Y)) \frac{\partial c}{\partial a}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \rho V_a = & rV_a + (Y + ra - c)V_{aa} + \mu(Y)V_{Ya} + \frac{1}{2}\sigma^2(Y)V_{YYa} \\ & + \lambda \int V_a(a, e^z Y)G(z)dz - \lambda V_a \end{aligned}$$

Que se puede escribir como:

$$\begin{aligned} (\rho - r)V_a = & (Y + ra - c)V_{aa} + \mu(Y) \frac{\partial}{\partial Y}(V_a) + \frac{1}{2}\sigma^2(Y) \frac{\partial^2}{\partial Y^2}(V_a) \\ & + \lambda \int V_a(a, e^z Y)G(z)dz - \lambda V_a \end{aligned}$$

equivalente a la ecuación:

$$\begin{aligned} (\rho - r)f'(c) = & (Y + ra - c)f''(c) \frac{\partial c}{\partial a} + \mu(Y) \frac{\partial}{\partial Y}(f'(c)) + \frac{1}{2}\sigma^2(Y) \frac{\partial^2}{\partial Y^2}(f'(c)) \\ & + \lambda \int f'(a, e^z Y)G(z)dz - \lambda f'(c) \end{aligned}$$

de donde se obtiene la correspondiente ecuación de Euler para este problema:

$$(\rho - r)f'(c) = s \frac{\partial c}{\partial a} f''(c) + \mathcal{A}(f'(c)) \quad (3.23)$$

Donde \mathcal{A} el generador infinitesimal asociado al proceso estocástico del ingreso que combina el

proceso de difusión y de saltos:

$$\mathcal{A}(\nu) = \mu(Y) \frac{\partial}{\partial Y}(\nu) + \frac{1}{2} \sigma^2(Y) \frac{\partial^2}{\partial Y^2}(\nu) + \lambda \int \nu(a, e^z Y) G(z) dz - \lambda \nu$$

También

$$\begin{aligned} s &= (Y + ra - c) \\ \frac{\partial s}{\partial a} &= r - \frac{\partial c}{\partial a} \\ \frac{\partial c}{\partial a} &= r - \frac{\partial s}{\partial a} \end{aligned}$$

con esto la ecuación de Euler se puede escribir en la forma:

$$\left(r - \frac{\partial s}{\partial a}\right)s = \frac{(\rho - r)f'(c) - \mathcal{A}(f'(c))}{f''(c)} \quad (3.24)$$

Para establecer una comparación con la solución numérica, la solución analítica se puede encontrar en el caso particular donde se considere la restricción de estado $a \geq 0$, $r < \rho$ y el ingreso $Y > 0$ libre de incertidumbre, para lo cual se establecen todos los términos que involucran al generador \mathcal{A} iguales a cero, en otras palabras el ingreso es constante ($dY = 0$).⁵

Si se usa una función de utilidad tipo CRRA $f(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$; $\gamma > 0$ y se toma el ingreso $Y = 0$, respectivamente la ecuación de Euler y la restricción presupuestaria se transforman en:

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{1}{\gamma}(r - \rho) \\ \dot{a} &= ra - c \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene las siguientes funciones de consumo y ahorro:

$$\begin{aligned} c(a, Y) &\approx (r + \eta)a; \quad \forall y \\ s(a, Y) &\approx -\eta a; \quad \forall y \\ \eta &= \frac{\rho - r}{\gamma} \end{aligned}$$

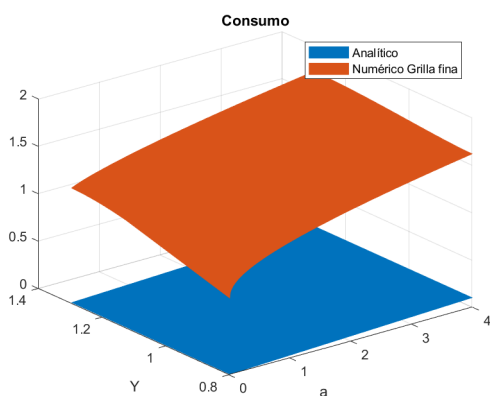
Entonces en este experimento se resuelve numéricamente la ecuación de HJB por diferencias finitas, luego se usa la solución analítica planteada de las funciones de política óptima para compararlas con la solución numérica. Para esto, primero se resuelve el problema de la ecuación de HJB con una grilla fina y se examina la compensación de precisión-velocidad que surge cuando se

⁵La proposición 1 y 7 de (Achdou et al., 2017) establecen las condiciones teóricas de existencia de solución analítica para las funciones de política óptima en el caso de usar en el ingreso un proceso de difusión continuo, definido por un movimiento browniano.

resuelve numéricamente el mismo problema con una grilla más gruesa. En este caso se comparara la función de consumo y ahorro, con una grilla fina de $J=1000$ puntos en la grilla de riqueza a , se calcula el consumo y ahorro numérico y analítico, se calcula el error relativo de la diferencia entre las dos soluciones (Analítica Vs Numérica). Posteriormente se repite el mismo proceso para el caso de una grilla más gruesa de $J=100$ puntos en la grilla de riqueza a .

Usando la función de utilidad tipo CRRA se obtienen los siguientes resultados:

(a) Función de Consumo.



(b) Error relativo en el Consumo.

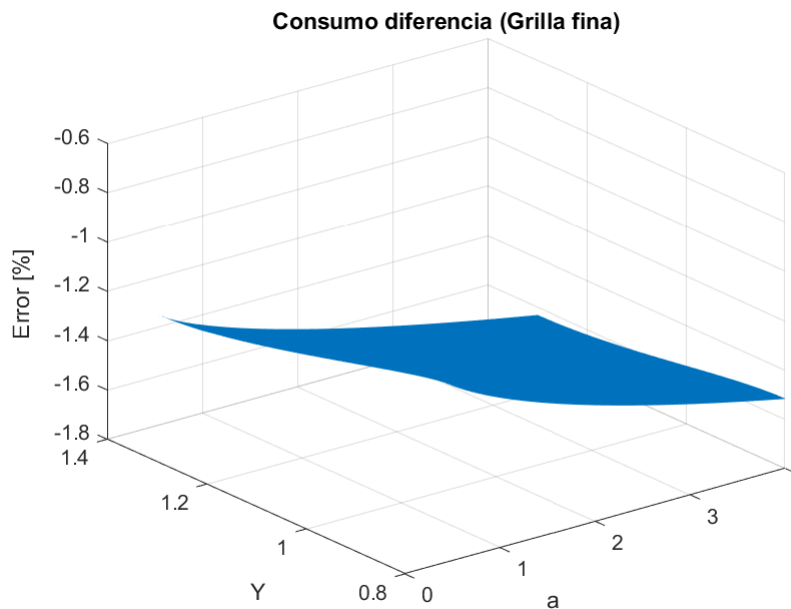
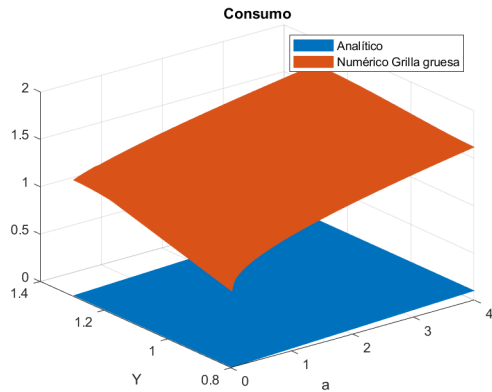


Figura 3.12: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina $J=1000$ puntos en la grilla de riqueza a .

La solución numérica del consumo al usar una grilla fina, presenta un error de aproximación en un rango desde -1.6% a -1.2% , con una diferencia de 0.4% .

(a) Función de Consumo.



(b) Error relativo en el Consumo.

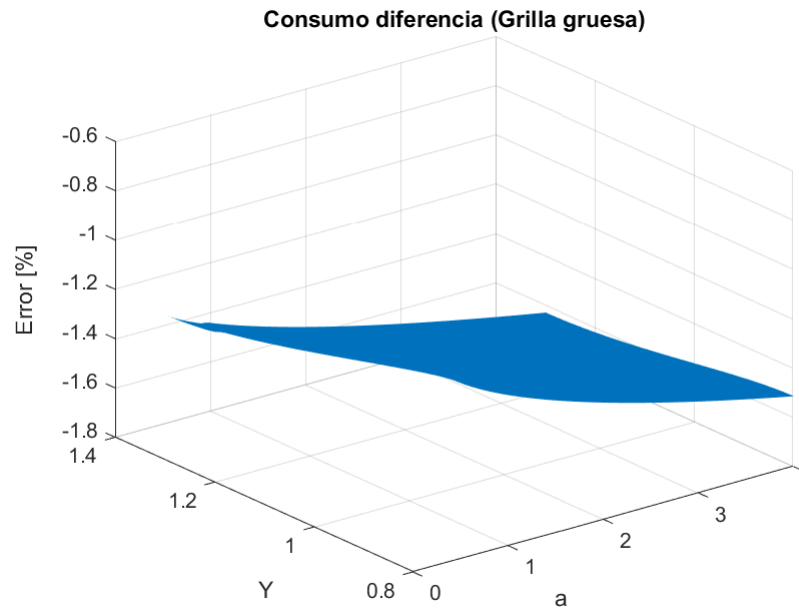
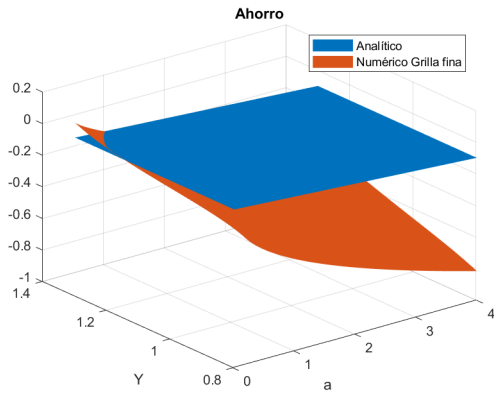


Figura 3.13: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=100$ puntos en la grilla de riqueza a .

La solución numérica del consumo para la grilla gruesa, tiene un error de aproximación que va en un rango desde -1.7% a -1.2% con una diferencia de 0.5%

(a) Función de Ahorro.



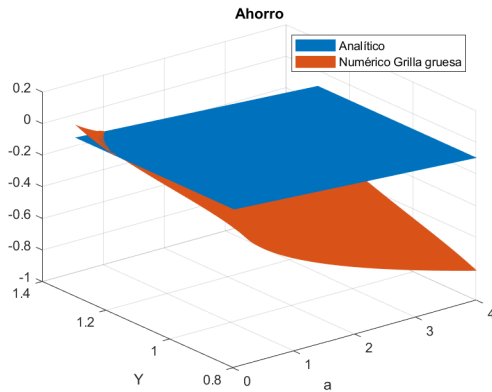
(b) Error relativo en el Ahorro.



Figura 3.14: Error de aproximación en la función de Ahorro usando diferencias finitas, grilla fina $J=1000$ puntos en la grilla de riqueza a .

La solución numérica para el ahorro en la grilla fina, presenta un error de aproximación en un rango del -0.2 % al 0.65 %

(a) Función de Ahorro.



(b) Error relativo en el Ahorro.

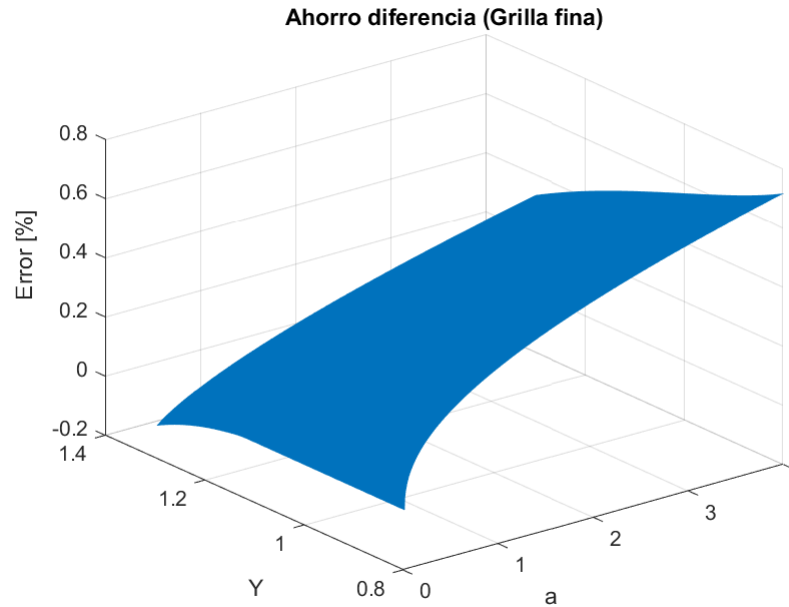


Figura 3.15: Error de aproximación en la función de Ahorro usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=100$ puntos en la grilla de riqueza a .

La solución numérica del ahorro para la grilla gruesa, tiene un error de aproximación que va en un rango del -0.25% al 0.75% .

Lo anterior nos muestra que la solución numérica de la ecuación de HJB y las funciones de política óptima de ahorro y consumo, mejoran a medida que se usa un espaciado en la grilla de riqueza (a) más pequeño (grilla fina) en comparación con una grilla gruesa.

Una nueva forma de comparación entre la solución numérica y la solución analítica, se hace en términos de su velocidad y precisión. Para este caso se considera como métrica de precisión el consumo agregado y ahorro agregado, se establece el error porcentual en el consumo y ahorro agregado con respecto al valor calculado usando la grilla fina. La siguiente tabla muestra los resultados de la comparación de las soluciones del modelo con una grilla fina de $J=1000$ puntos y una grilla gruesa de $J=100$ puntos, teniendo en cuenta que usa la tasa de interés de equilibrio del modelo que incluye saltos en el ingreso $r_e = 0,0078$ que cumple la condición de equilibrio, donde el ahorro agregado $S(g_t, r_e) \approx 0$

| Modelo | Grillas | Velocidad(seg.) | Consumo agregado | Ahorro agregado |
|--------|---------------|-----------------|------------------|-----------------|
| AH | J=1000 | 445.7475 | 2.9346 | 0.002041 |
| | J=100 | 31.66 | 2.9566 | 0.002180 |
| | Fila 2/Fila 1 | 0.07102 | 1.0074 | 1.06810 |

Cuadro 3.2: Velocidad y precisión del modelo

Los resultados muestran que reducir el número de puntos de la grilla de 1000 a 100 da como resultado un aumento aproximado de catorce veces en la velocidad computacional y un deterioro de la precisión en aproximadamente 6.81 %. Por tanto, se justifica el uso de una grilla fina en comparación con la grilla gruesa.

3.5.2. Precisión del la ecuación de kolmogorov-Forward

La solución analítica para la función de distribución conjunta de riqueza e ingreso $g(a, Y)$ se establece bajo el supuesto de ingreso libre de riesgo, $r < \rho$, $0 < a < a_{max}$ en este caso la ecuación de kolmogorov-Forward (kF) se transforma en:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial a}[s(a, Y)g(a, Y)] - \lambda g(a, Y)$$

de donde

$$g_a(a, y) = -\left(\frac{s_a(a, y)}{s(a, y)} + \frac{\lambda}{s(a, y)}\right) g(a, Y)$$

integrando con respecto de a se obtiene:

$$g(a, Y) = \frac{\kappa}{s(a, y)} \exp\left(-\int_a^{a_{max}} \frac{\lambda}{s(x, Y)} dx\right) \quad (3.25)$$

En el caso de usar una función de utilidad CRRA, la función analítica de ahorro y de distribución conjunta $g(a, Y)$ que se obtiene es:

$$s(a, Y) \approx -\eta a \quad g(a, Y) = \frac{\kappa}{-\eta a} \left(\frac{a_{max}}{a}\right)^{\frac{\lambda}{\eta}}$$

Entonces se usa las soluciones analíticas planteadas de la función de distribución conjunta para compararlas con la solución numérica de la ecuación de kF resuelta usando diferencias finitas. Para esto, primero se resuelve el problema de la ecuación de kF con una grilla fina y se examina la compensación de precisión-velocidad que surge cuando se resuelve numéricamente el mismo problema con una grilla más gruesa. En este caso se comparara la función de distribución de riqueza, con una grilla fina de J=1000 puntos en la grilla de riqueza a , se calcula el error relativo

de la diferencia entre las dos soluciones (Analítica Vs Numérica). Posteriormente se repite el mismo proceso para el caso de una grilla más gruesa $J=100$ puntos en la grilla de riqueza a .

Los resultados con la función de utilidad tipo CRRA son:

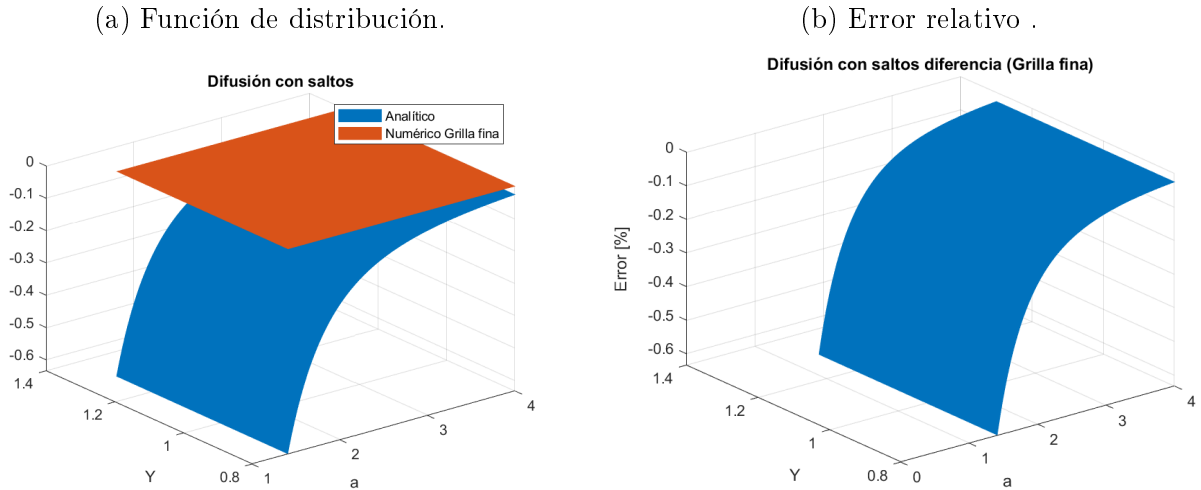


Figura 3.16: Error de aproximación en la función de distribución conjunta usando diferencias finitas, grilla fina $J=1000$ puntos en la grilla de riqueza a .

La solución numérica en la función de densidad con grilla fina presenta un error de aproximación en un rango del -0.6% al -0.03%

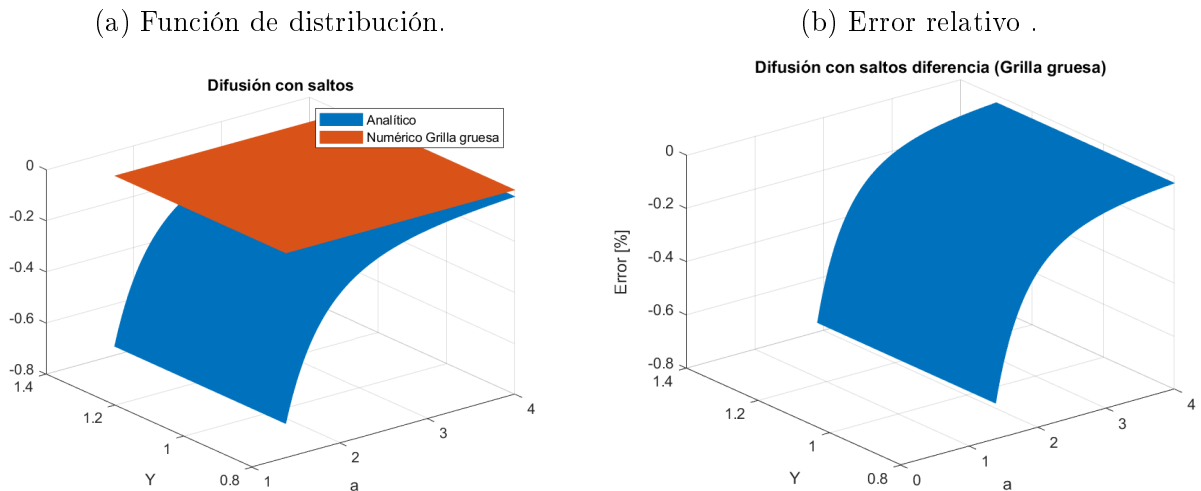


Figura 3.17: Error de aproximación en la función de distribución conjunta usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=100$ puntos en la grilla de riqueza a .

La solución numérica con grilla gruesa presenta un error de aproximación que va en un rango del -0.75% al -0.03%

Los resultados muestran que el error de aproximación de la función de distribución conjunta mejora cuando se usa grilla fina en comparación con la grilla gruesa.

Finalmente se establece una nueva comparación entre la solución numérica y la solución analítica, en términos de velocidad y precisión. Para este caso se considera como métrica de precisión la distribución acumulada, se establece el error porcentual con respecto al valor calculado usando la grilla fina. La siguiente tabla muestra los resultados de la comparación de las soluciones del modelo con una grilla fina de $J=1000$ puntos y una grilla gruesa de $J=100$ puntos.

| Modelo | Grillas | Velocidad(seg.) | Distribución acumulada |
|-----------|---------------|-----------------|------------------------|
| AH | J=1000 | 445.7475 | 4.42093 |
| | J=100 | 31.66 | 4.24750 |
| | Fila 2/Fila 1 | 0.0579 | 0.96077 |

Cuadro 3.3: Velocidad y precisión del modelo

Los resultados muestran que reducir el número de puntos de la grilla de 1000 a 100 da como resultado un aumento aproximado de catorce veces en la velocidad computacional y un ligero deterioro de la precisión en aproximadamente 3.92%. Por tanto se justifica el uso de una grilla fina en comparación con la grilla gruesa.

3.5.3. Tasa de convergencia

Para determinar la tasa de convergencia se toma como referencia la tesis doctoral de (Ramirez, 2016) "Optimal decision in illiquid hedge funds". El método consiste en incrementar en un factor r el número de pasos cada una de las dimensiones de la grilla y resolver el problema cada vez. Se muestra que la tasa de convergencia asociada a la dimensión en la que se está incrementando el número de pasos, es $\log_r(Q_i)$ donde Q_i es el i -ésimo cociente de dos diferencias consecutivas. Este procedimiento detalla en el capítulo 1 sección (1.5.1) tasas de convergencia.

Es de anotar que el orden teórico de convergencia de una ecuación de diferencias está dado por el orden más bajo de los términos que aparecen en la ecuación diferencial modificada. En el caso de la ecuación de HJB el orden teórico de convergencia para (a) más pequeño lo dan las derivadas de primer orden que se tienen en las diferencias forward y backward usadas en el método upwind. Por tanto se tiene un orden de convergencia de 1 y se debe probar que este valor es uniforme en toda la grilla seleccionada.

El resultado para la tasa de convergencia del modelo que resuelve la ecuación integro-diferencial de (H.J.B) es el siguiente y cumple con el orden teórico planteado.

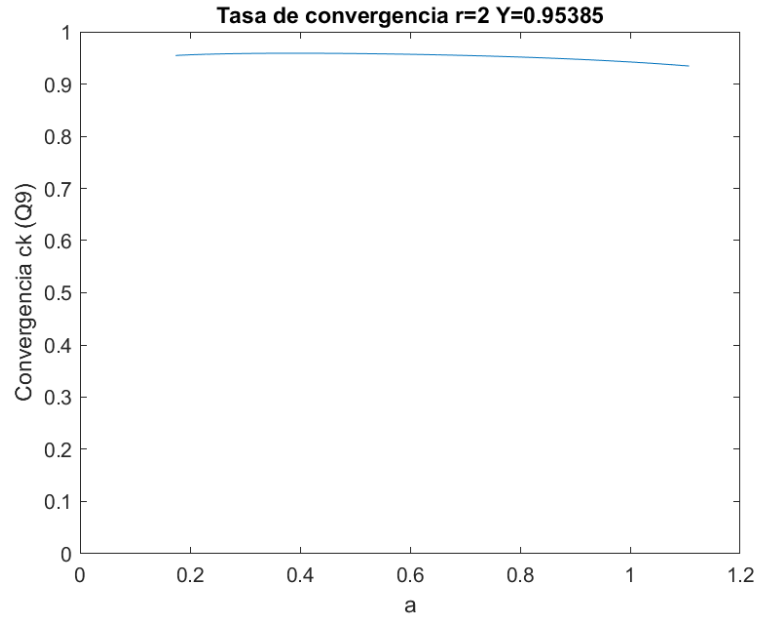


Figura 3.18: Tasa de convergencia Modelo de Agentes Heterogéneos

3.6. Discusión de resultados

Se demuestra que los saltos negativos en el ingreso reducen el ingreso esperado y la riqueza esperada de los agentes, por tanto los saltos generan una demanda adicional de ahorro precautorio, ya que el riesgo de salto no está limitado y tiene un efecto directo sobre el consumo, en consecuencia todo choque del ingreso los agentes lo dirigen hacia el consumo. En otras palabras el modelo releva que mayores niveles de incertidumbre en el ingreso están relacionados con un incremento en los niveles de consumo, existiendo fuertes motivos de ahorro precautorio con la presunción de un coeficiente de prudencia positivo, que se relaciona con consumidores que son adversos al riesgo. Resultados que concuerdan con los estudios de ahorro precautorio Lee and Sawada (2010) y Wang (2004); Wang et al. (2016)

Los resultados de la función de ahorro muestran que el ahorro crece con el ingreso, y este se ve afectado cuando, en el modelo se incluyen los choques inesperados dados por los saltos del ingreso. Muestra que el ahorro crece con a . La diferencia a favor de la estructura *sin* salto es mucho mayor que *con* salto, esto implica que los agentes son previsibles. La función de ahorro crece con Y y con a ; y además, que les gusta la estabilidad y el gradualismo, no los sobresaltos. Con trayectorias más estables, ahorran más.

El ejercicio describe que efectivamente los choques en el ingreso afectan el consumo. Un resultado nada imprevisible, pero lo que importa es que crece con a y la diferencia es positiva para *con* saltos. Eso quiere decir que, dada la trayectoria de la función de ahorro, todos los choques e ingresos

adicionales se van hacia el consumo y no hacia el ahorro. Esto es divergente con la hipótesis del ingreso permanente que respalda la idea de que todo ingreso temporal o extraordinario se ahorra. Aquí no es así. Todo ingreso adicional por a y en menor medida por Y se consume.

Encontramos que el aumento de la aversión al riesgo tiene un efecto directo sobre el factor de prudencia de los agentes, lo cual implica un aumento sustancial sobre el ahorro precautorio generando así una mayor distribución conjunta de ingresos y riqueza, y por lo tanto los agentes disminuyen su consumo. Esto muestra que los saltos pueden ser útiles para aumentar aún más los motivos de ahorro también para los agentes acreedores, ya que estos grandes choques discretos son mucho más difíciles de afrontar. En general se establece que el efecto de la incertidumbre en el comportamiento del consumo depende de si éste afecta a la utilidad marginal esperada del consumidor, provocando que las personas sean más prudentes frente a situaciones de inestabilidad. Resultados que concuerdan con los encontrados por Guvenen (2011); Guvenen et al. (2015)

Se observa que a pesar de los incrementos de su ingreso Y y riqueza a la tasa de ahorro de los agentes frente a los choques inesperados del ingreso dados por los saltos, decrece, esto nos dice que por un lado los agentes tienen menor riqueza esperada y por tanto incrementan su consumo durante el choque, pero en el futuro la economía de los agentes no estará en capacidad de financiar sus gastos e inversiones y por tanto deben acudir a nuevos recursos mediante la deuda.

En resumen, al incorporar algunas formas de heterogeneidad ex ante (Ingresos y riqueza) entre los agentes, todo choque de ingresos lo dirigen hacia el consumo, porque prefieren ahorrar sin sobresaltos, cuando las cosas están calmadas. Los deudores netos (agentes de bajos recursos) se consumen todo el choque. Y los agentes acreedores ahorran cuando existe estabilidad y cuando ven choques consumen y no acrecientan su riqueza. También es posible que se puedan generar tenencias de riqueza más concentradas por parte de los acreedores que tienen fuertes incentivos para seguir ahorrando. Resultado que concuerda con Guvenen et al. (2015); Wang et al. (2016) quienes muestran los saltos en el ingreso pueden ser útiles para aumentar aún más los motivos de ahorro también para los ricos, ya que estos grandes choques discretos son mucho más difíciles de contrarrestar.

En concordancia con Barles and Souganidis (1991) y Achdou et al. (2017), se pudo verificar que las ecuaciones de HJB, kF y las funciones de política óptima mejoran en la medida que se disminuya el espacio en la grilla de riqueza (a), es decir una grilla fina en comparación con la grilla gruesa. De la misma forma el uso de una grilla fina, contribuye a la precisión del modelo.

Conclusiones

De manera general en esta investigación se destacan los siguientes aspectos.

Se observó la importancia del control óptimo estocástico en tiempo continuo, como una herramienta principal en el análisis económico para modelos de equilibrio general en macroeconomía. Ello hizo ver que el empleo de modelos dinámicos, definidos por ecuaciones diferenciales estocásticas, representa los fenómenos económicos con dinámicas más realistas; y enriquecen el análisis en ambientes con riesgo e incertidumbre para estimar las decisiones óptimas de los agentes. Además este enfoque en tiempo continuo, permite una caracterización teórica más estricta y cálculos más eficientes que los métodos tradicionales de tiempo discreto.

Se pudo verificar la importancia de los desarrollos teóricos y de las soluciones analíticas encontradas en los distintos modelos, puesto que, al igual que que los modelos de Smith (2007); Posch (2011), Posch (2013); Hiraguchi (2014); Parra-Alvarez et al. (2017a); Achdou et al. (2017); Wang et al. (2016) y Duarte (2018), estos permiten obtener una nueva forma de analizar el efecto de cómo la incertidumbre y las no linealidades de dichas variables interactúan en las decisiones óptimas de los agentes. También se usan para verificar la precisión de los métodos numéricos empleados en la solución, midiendo hasta qué punto las aproximaciones se acercan a la verdadera solución. Además, la existencia de este tipo de soluciones permite explorar nuevos modelos de estudio.

Pudo comprobarse la importancia de los choques modelados por combinación de procesos estocásticos de difusión y saltos discontinuos, dado a que estos choques representan una mejor forma de la incertidumbre en las distintas variables económicas como la PTF, el capital, el trabajo y el ingreso; incluso inciden en la toma de decisiones óptimas en los modelos de equilibrio.

La investigación también dio cuenta de que los modelos DSGE en tiempo continuo, son bastante robustos a la hora de resolver problemas relacionados con choques modelados con procesos estocásticos, debido a que su estructura permite un análisis más detallado y acorde con el comportamiento real de las variables de interés y demuestran ser un área importante para desarrollar investigaciones futuras en macroeconomía.

También se demostró la importancia y la efectividad los métodos numéricos en la solución de problemas de control óptimo estocástico, ya que en este tipo de problemas no siempre es posible encontrar soluciones cerradas. Particularmente, el método IMEX (implícito-Explícito) de diferen-

cias finitas, es bastante robusto en convergencia y estabilidad a la hora de resolver ecuaciones tipo PIDE (Ecuación Parcial Integro-Diferencial) que gobiernan las dinámicas de modelos en economía, donde la parte local se resuelve por un método implícito, mientras que la no local lo hace por un método explícito.

Finalmente, se destaca que el aporte teórico principal de esta investigación, está relacionado con las soluciones analíticas y numéricas encontradas bajo ciertas restricciones de parámetros, para los modelos estocásticos de equilibrio general, que combinan procesos de difusión y saltos asociados a eventos raros no necesariamente de tamaño constante. En particular, las soluciones de las funciones de valor se relacionan con términos que resultan de soluciones de ecuaciones hipergeométricas confluentes y de Cauchy. Las soluciones de las funciones de política óptima de los agentes y el factor de descuento, dependen del tipo de distribución de los saltos discontinuos y de la implementación numérica, para resolver las dos ecuaciones fundamentales de HJB y kF asociadas a este tipo de problemas. Todo esto se elaboró con el objetivo de cuantificar el efecto de la incertidumbre y de las no linealidades de la PTF, del Capital, del Trabajo y del ingreso en las decisiones óptimas de los agentes.

Proyectos futuros de investigación

Tras la realización de cualquier trabajo de investigación surgen nuevas incógnitas y nuevos campos de investigación. En concreto, los proyectos inmediatos de investigación son :

- Incluir al modelo de dinámica de capital discontinua las empresas y el sector público (gobierno) que recauda impuestos para estudiar la incidencia que tienen la incertidumbre y los diferentes tipos de impuestos al consumo, la renta y el capital; sobre la utilidad, la producción y las decisiones óptimas de los agentes. teniendo en cuenta lo planteado en Isoré and Szczerbowicz (2017).
- También es interesante extender el caso para un modelo de economía abierta en tiempo continuo. Donde se incluyen bienes extranjeros que se importan, los cuales pueden ser de consumo final, afectando la función de utilidad; o de capital, afectando la función de producción. Nuevamente el interés es analizar el comportamiento de los choques estocásticos en la producción sobre las decisiones de los agentes.
- Ampliar el estudio de los modelos considerando en las distintas dinámicas, de la PTF, del trabajo, del capital y del ingreso; volatilidades estocásticas, para analizar el efecto de la incertidumbre en la respuesta óptima de los agentes. Como también extender el modelo de agentes heterogéneos donde se considere una tasa de interés estocástica junto con efectos de política monetaria y fiscal, siguiendo Kaplan et al. (2018).
- Seguir explorando nuevas metodologías para resolver modelos en tiempo continuo con choques estocásticos en las variables de estado, aplicados macroeconomía y finanzas como se

plantea en Duarte (2018); Scheidegger and Bionis (2019) y Bianchi et al. (2020). Quienes bajo supuestos adecuados, admiten soluciones cerradas y basados en el aprendizaje automático de técnicas mediante el uso de redes neuronales (*Machine Learning*), aproximan la solución del operador de Bellman para un gran número de variables de estado y comparan los resultados con las soluciones analíticas obtenidas, para analizar distintos efectos como la aproximación de la aversión al riesgo y la incertidumbre cuando varían en el tiempo.

- Estudiar los modelos de agentes heterogéneos en tiempo continuo, que relacionan la interacción y competencia del capital humano con la teoría del crecimiento, a través de la nueva formulación de los *Mean Field Games*. Donde básicamente, se modelan un continuo de individuos con salarios que no dependen sólo de su propio capital humano, sino también de la distribución total de capital. Esto con el objetivo de analizar los factores que mejoran el bienestar de los agentes. siguiendo estudios como Lasry et al. (2008); Chipeniuk et al. (2014); Gomes et al. (2015) y Achdou and Laurière (2020) .

AnexosA

Anexo 1

Planteamiento de la ecuación H.J.B.

Respectivamente las restricciones de la dinámica de capital y del factor total de producción se pueden expresar de la siguiente forma:

$$dK_t = ((r_t - \delta)K_t + w_t L_t - C_t)dt + \sigma K_t dB_{K,t} + K_{t-} \int (e^z - 1) N(dy, dt) \quad K_0 = K > 0 \quad (\text{A.1})$$

$$dK_t = (A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t)dt + \sigma K_t dB_{K,t} + K_{t-} \int (e^z - 1) N(dz, dt) \quad K_0 = K > 0 \quad (\text{A.2})$$

$$dA_t = \beta(\omega - A_t)dt + \eta \sqrt{A_t} dB_{A,t} \quad \beta \in \mathbb{R}, \omega > 0, \eta > 0. \quad A_0 = a > 0 \quad (\text{A.3})$$

Podemos unificar en un solo vector de choques las dos restricciones anteriores que presentan incertidumbre descrita por un combinación de procesos estocásticos brownianos y procesos de saltos de Poisson. En general estos choques representan cambios en los flujos de efectivo futuros esperados de la empresa que podrían subcapitalizar la empresa o Modificar su balance. Se define:

$X_t = (K_t, A_t)$ El vector de Estado. $u_t = (C_t, L_t)$ El vector de control.

$dW_t = (dB_t^K, dB_t^A)$ Vector de shocks brownianos independientes.

$N_t = N(dz, dt)$ vector de saltos en la dinámica del capital.

Así el vector de choque se expresa como

$$dX_t^i = b^i(X_t, u_t)dt + \sum_j \sigma^{ij}(X_t, u_t)dW_t^j + \phi^{ij}(X_t, u_t)N(dz, dt) \quad (\text{A.4})$$

donde sus coeficientes asociados están dados por

- $X_t^1 = K_t \quad X_t^2 = A_t$
- $b^1(K_t, A_t, C_t, L_t) = A_t K_t^\alpha l_t^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t \quad b^2(K_t, A_t, C_t, L_t) = \beta(\omega - A_t)$
- $\sigma^{11}(K_t, A_t, C_t, L_t) = \sigma K_t \quad \sigma^{22}(K_t, A_t, C_t, L_t) = \eta\sqrt{A_t}$
- $\phi^{11}(K_t, A_t, C_t, L_t) = K_t \int (e^z - 1)$

de esta forma la función de valor que resuelve el problema de control óptimo en tiempo continuo se expresa por:

$$V(X_t) = \sup_{u_t \in u} E \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{(C_t(1-L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt \right\} \quad \psi \geq 0 \quad \gamma > 0$$

S.a

$$dX_t^i = b^i(X_t, u_t)dt + \sum_j \sigma^{ij}(X_t, u_t)dW_t^j + \phi^{ij}(X_t, u_t)N(dz, dt)$$

$$Y_t = A_t K_t^\alpha l_t^{1-\alpha} \quad \alpha \in (0, 1)$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

La ecuación integro-diferencial no lineal de segundo orden de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) asociada es:

$$-\rho V(K_t, A_t) + \sup_{\{C_t, L_t\}} \{A^{C_t, L_t} V(K_t, A_t) + f(C_t, L_t)\} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Donde A^{C_t, L_t} es el operador

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}^{c, l} V](K, A) &= (AK^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K - c) \frac{\partial V}{\partial K}(K, A) + \beta(\omega - A) \frac{\partial V}{\partial A}(K, A) + \sigma^2 K^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial K^2}(K, A) \\ &\quad + \eta^2 A \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial A^2}(K, A) + \lambda \int [V(e^z K, A) - V(K, A)] F(dz). \end{aligned}$$

Para cada (K_t, A_t) encontramos $\hat{C}_t(K_t, A_t)$, $\hat{L}_t(K_t, A_t)$ tal que son solución del problema interior:

$$(\hat{C}_t, \hat{L}_t) = \arg \max_{\{C_t, L_t\}} \{A^{C_t, L_t} V(K_t, A_t) + f(C_t, L_t)\}$$

Condiciones de primer orden

Se pueden obtener las condiciones de primer orden, derivando la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) con respecto a nuestras variables de control C_t y l_t .

$$[C_t]: \quad -\frac{\partial V}{\partial K_t} + \frac{\partial f}{\partial C_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial C_t} = \frac{\partial V}{\partial K_t} \quad (\text{A.6})$$

$$[L_t]: \quad \frac{\partial V}{\partial K_t}(1-\alpha)A_tK_t^\alpha L_t^{-\alpha} + \frac{\partial f}{\partial L_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial L_t} = -\frac{\partial V}{\partial K_t}(1-\alpha)A_tK_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (\text{A.7})$$

Se conoce que la función utilidad de los agentes representativos es de tipo CRRA

$$f(C_t, L_t) = \frac{(C_t(1-L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \text{con } \psi \geq 0 \text{ y } \gamma > 0 \quad (\text{A.8})$$

Respectivamente las utilidades marginales del consumo y trabajo son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial C_t} &= \frac{(1-L_t)^\psi(1-\gamma)(C_t(1-L_t)^\psi)^{-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{(1-L_t)^\psi(1-\gamma)(C_t^\psi)^{-\gamma}}{1-\gamma} \\ \frac{\partial f}{\partial L_t} &= -\psi \frac{(C_t(1-L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1-L_t} \end{aligned}$$

Reemplazando estos resultados en las condiciones de primer orden se obtiene:

$$\frac{(1-L_t)^\psi(1-\gamma)(C_t^\psi)^{-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{\partial V}{\partial K_t} \quad (\text{A.9})$$

$$\psi \frac{(C_t(1-L_t)^\psi)^{1-\gamma}}{1-L_t} = (1-\alpha)A_tK_t^\alpha L_t^{-\alpha} \frac{\partial V}{\partial K_t} \quad (\text{A.10})$$

Estas condiciones permiten encontrar las funciones óptimas de consumo y trabajo : $C_t = C(K_t, A_t)$ y $L_t = L(K_t, A_t)$.

Por otro lado la solución del problema del planeador central se encuentra por medio de la ecuación de H.J.B. Maximizada, la cual se escribe como:

$$\begin{aligned} \rho V(K_t, A_t) &= \frac{(c(K_t, A_t)(1-L(K_t, A_t))^\psi)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + (A_tK_t^\alpha L(K_t, A_t)^{1-\alpha} - \delta K_t - c(K_t, A_t))V_K(K_t, A_t) \\ &+ (\beta\omega - A_t)V_A(K_t, A_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 K_t^2 V_{KK}(K_t, A_t) + \frac{1}{2}\eta^2 A_t V_{AA}(K_t, A_t) + \lambda \int [V(e^z K, A) - V(K, A)] G(z) dz \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Guess de la función de Valor

Para este caso es posible obtener una forma adecuada del Guess de la función de valor, a partir de las condiciones de primer orden reemplazando (A.9) en (A.10) y reescribiendo esta última, se obtiene una expresión para el consumo C_t que es proporcional al producto, dado por:

$$C_t = \frac{(1 - L_t)(1 - \alpha)}{\psi L_t} A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (\text{A.12})$$

Reemplazando este consumo en la condición de primer orden (A.9) encontramos una nueva expresión para V_K

$$V_K = \frac{(1 - L_t)^{\psi(1-\gamma)-\gamma} \psi^\gamma}{(1 - \alpha)^\gamma} A_t^{-\gamma} K_t^{-\alpha\gamma} L_t^{\alpha\gamma}$$

Demostración Proposición 1

En particular si se asume la oferta de trabajo constante $L_t = l$ e integramos la función V_K con respecto a K_t nos permite encontrar el nuevo Guess de la función de valor dado por :

$$V(K_t, A_t) = \Gamma \frac{K_t^{1-\alpha\gamma}}{1 - \alpha\gamma} A_t^{-\gamma} + g(A_t) \quad (\text{A.13})$$

Respectivamente sus derivadas son:

$$V_K = \Gamma K_t^{-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma},$$

$$V_K = -\alpha\gamma \Gamma K_t^{-\alpha\gamma-1} A_t^{-\gamma}$$

$$V_A = -\gamma \Gamma \frac{K_t^{1-\alpha\gamma}}{1 - \alpha\gamma} A_t^{-\gamma-1} + g'(A_t)$$

$$V_{AA} = \gamma(\gamma + 1) \Gamma \frac{K_t^{1-\alpha\gamma}}{1 - \alpha\gamma} A_t^{-\gamma-2} + g''(A_t)$$

$$\text{Además } V(e^\nu K_t, A_t) - V(K_t, A_t) = \frac{\Gamma}{1 - \alpha\gamma} K_t^{1-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma} (e^{(1-\alpha\gamma)\nu} - 1)$$

Reemplazando la función y sus respectivas derivadas en la ecuación de H.J.B. maximizada (A.11)

se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
& K_t^{1-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma} \left[\frac{-\rho\Gamma}{1-\alpha\gamma} - \delta\Gamma + \frac{\beta\gamma\Gamma}{1-\alpha\gamma} - \frac{1}{2}\alpha\gamma\Gamma\sigma^2 + \frac{\lambda\Gamma}{1-\alpha\gamma}(m(1-\alpha\gamma) - 1) \right] \\
& + K_t^{\alpha(1-\gamma)} A_t^{1-\gamma} \left[\frac{(1-l)^{(1-\gamma)(\psi+1)}}{1-\gamma} \left(\frac{1-\alpha}{\psi} \right)^{1-\gamma} l^{-\alpha(1-\gamma)} + \Gamma l^{1-\alpha} - \frac{(1-l)(1-\alpha)}{\psi} \Gamma l^{-\alpha} \right] \\
& + K_t^{(1-\alpha\gamma)} A_t^{-\gamma-1} \left[\frac{-\beta\omega\gamma\Gamma}{1-\alpha\gamma} + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{\gamma(\gamma+1)\Gamma}{1-\alpha\gamma} \right] \\
& - \rho g(A_t) + \beta(\omega - A_t)g'(A_t) + \frac{1}{2}\eta^2 A_t g''(A_t) = 0
\end{aligned}$$

Como se puede observar las combinaciones en K_t y A_t son linealmente independientes, luego esta igualdad implica que cada uno de los coeficientes debe ser igual a cero, por tanto:

Igualando a cero el coeficiente del primer factor $K_t^{1-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma}$, con $\psi > 0$, $\gamma \geq 0$ podemos obtener $\rho = \bar{\rho}$ el cual está dado por las siguiente expresión

$$\bar{\rho} = -(1-\alpha\gamma) \left(\delta + \frac{1}{2}\alpha\gamma\sigma^2 \right) + \beta\gamma + \lambda(m(1-\alpha\gamma) - 1) > 0 \quad (\text{A.14})$$

Igualando a cero el segundo coeficiente podemos obtener la constante Γ del Guess en la función de valor dada por:

$$\Gamma = (1 - L_t)^{\psi(1-\gamma)-\gamma} \left(\frac{\psi}{1-\alpha} \right)^\gamma \quad (\text{A.15})$$

Del tercer termino tenemos la condición adicional

$$\beta\omega = \frac{1}{2}\eta^2(\gamma+1) \quad (\text{A.16})$$

que se satisface plenamente por la definición del proceso CIR, donde el supuesto de $2\beta\omega \geq \eta^2$ implica que $\gamma \geq 0$.

También se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden para la PTF que corresponde a una Ecuación Hipergeométrica Confluente cuyos coeficientes son lineales en A_t dada por:

$$-\rho g(A_t) + \beta(\omega - A_t)g'(A_t) + \frac{1}{2}\eta^2 A_t g''(A_t) = 0 \quad (\text{A.17})$$

que se puede escribir como:

$$A_t g''(A_t) + \left(\frac{2\beta\omega}{\eta^2} - \frac{2\beta}{\eta^2} A_t \right) g'(A_t) - \frac{2\rho}{\eta^2} g(A_t) = 0 \quad (\text{A.18})$$

Dicha ecuación se puede adaptar a su forma general

$$A_t g''(A_t) + (C + DA_t)g'(A_t) + (E + FA_t)g(A_t) = 0$$

$$\text{con } C = \frac{2\beta\omega}{\eta^2} \quad D = -\frac{2\beta}{\eta^2} \quad E = -\frac{2\rho}{\eta^2} \quad \text{y } F = 0$$

En la ecuación anterior al usar la sustitución $z = \frac{1}{\sqrt{D^2 - F}} A_t$;

$$z = \frac{1}{|D|} A_t = \frac{2\beta}{\eta^2} A_t \quad \text{se obtiene} \quad A_t = \frac{\eta^2}{2\beta} z$$

Sea $H(z) := g(A_t) = g\left(\frac{\eta^2}{2\beta} z\right)$ entonces:

$$H'(z) = g'(A_t) \frac{\eta^2}{2\beta} \quad \text{de donde} \quad g'(A_t) = \frac{2\beta}{\eta^2} H'(z)$$

$$H''(z) = g''(A_t) \frac{\eta^4}{4\beta^2} \quad \text{de donde} \quad g''(A_t) = \frac{4\beta^2}{\eta^4} H''(z)$$

Reemplazando en la ecuación original (A.18) se obtiene la ecuación hipergeométrica confluyente:

$$zH''(z) + \left(\frac{2\beta\omega}{\eta^2} - z\right)H'(z) - \frac{\rho}{\beta}H(z) = 0 \quad (\text{A.19})$$

Cuya solución se expresa en términos de la función Gamma

$$H(z) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(e+n)}{\Gamma(C+n)} \frac{z^n}{n!}; \quad C = \frac{2\beta\omega}{\eta^2} \quad b = \frac{\rho}{\beta}$$

Las horas de trabajo se pueden obtener usando la condición de primer orden (A.9):

$$\frac{(1-L_t)^{\psi(1-\gamma)}}{C_t^\gamma} = \Gamma K_t^{-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma}$$

Reemplazando C_t dado por (A.12) se obtiene:

$$(1-L_t)^{\psi(1-\gamma)-\gamma} \left(\frac{1-\alpha}{\psi}\right)^{-\gamma} L_t^{\alpha\gamma} = \Gamma$$

sustituyendo la expresión de Γ (A.27) y realizando las respectivas operaciones resolvemos para l , finalmente se demuestra que la fracción de horas trabajadas es constante:

$$\hat{L}_t(K_t, A_t) = \frac{\gamma(1-\alpha)}{\gamma(1-\alpha) - \psi(1-\gamma)} \in [0, 1] \quad (\text{A.20})$$

Además el consumo óptimo es proporcional al producto:

$$\hat{C}_t(K_t, A_t) = \frac{(1-\alpha)(1-L_t)}{\psi L_t} A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (\text{A.21})$$

La constante $1 - s = \frac{(1 - \alpha)(1 - L_t)}{\psi L_t}$ denota la propensión constante a consumir de los ingresos, usando el valor óptimo \hat{L}_t se tiene que $\frac{1 - \hat{L}_t}{\hat{L}_t} = -\frac{\psi(1 - \gamma)}{\gamma(1 - \alpha)}$ reemplazando en la expresión de $1 - s$ se obtiene $1 - s = 1 - \frac{1}{\gamma}$ de donde la tasa de ahorro $s = \frac{1}{\gamma}$ es constante.

Demostración Corolario 1

Para la demostración de las elasticidades de las funciones de política de consumo y trabajo óptimas se parte de su forma analítica:

$$\hat{L}_t(K_t, A_t) = \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)}$$

si derivamos con respecto a γ se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{-\psi(1 - \alpha)}{[\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)]^2} < 0$$

La política de consumo es

$$\hat{C}_t(K_t, A_t) = \frac{(1 - \alpha)(1 - L_t)}{\psi L_t} A_t K_t^\alpha L_t^{1 - \alpha}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{\partial c}{\partial L_t} \frac{\partial L_t}{\partial \gamma} = -\frac{(1 - \alpha)}{\psi} (\alpha + (1 - \alpha)L_t) A K_t^\alpha L_t^{-\alpha - 1} \frac{\partial L_t}{\partial \gamma} > 0$$

Demostración Proposición 2

Se asume que $\alpha = \gamma$ y la oferta de trabajo constante $l_t \equiv 1$. El agente representativo maximiza su utilidad con una tasa de descuento ρ constante. Se define la función de valor óptimo de este problema como:

$$V(K_t, A_t) := \sup_{K_t^c \geq 0} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} f(C_t) dt \right], \quad K_0 = k \geq 0, \quad A_0 = A > 0 \quad (\text{A.22})$$

El teorema de verificación conecta esta función con la siguiente ecuación integro-diferencial no lineal de segundo orden de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Hanson (2007).

$$-\rho V(K_t, A_t) + \sup_{c \geq 0} \{[A^c V](K_t, A_t) + f(C_t)\} = 0, \quad k \geq 0, \quad A > 0. \quad (\text{HJB})$$

$f(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, para cada $c \geq 0$ \mathcal{A}^c es el operador

$$[\mathcal{A}^c V](K_t, A_t) = (A_t K_t^\alpha - \delta K_t - C_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t) + \beta(w - A_t) \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t) \\ + \frac{1}{2} \eta^2 A_t \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t) + \lambda \int [V(e^z K_t, A_t) - V(K_t, A_t)] G(z) dz.$$

La condición de primer orden es:

$$[C_t] : \quad -\frac{\partial V}{\partial K_t} + \frac{\partial f}{\partial C_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial C_t} = \frac{\partial V}{\partial K_t} \\ C_t^{-\gamma} = \frac{\partial V}{\partial K_t}$$

de donde

$$C_t = (V_k)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

Tomando el guess

$$V(K_t, A_t) = \Omega \frac{K_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + B(A_t)$$

Respectivamente sus derivadas son:

$$V_k = \Omega K_t^{-\gamma},$$

$$V_{kk} = -\gamma \Omega K_t^{-\gamma-1}$$

$$V_A = B'(A_t)$$

$$V_{AA} = B''(A_t)$$

$$\text{Además } V(e^\nu K_t, A_t) - V(K_t, A_t) = \frac{\Omega}{1-\gamma} K_t^{1-\gamma} (e^{(1-\gamma)\nu} - 1)$$

Reemplazando la función y sus respectivas derivadas en la ecuación de H.J.B. maximizada se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{1-\gamma} V_k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\rho \Omega}{1-\gamma} K_t^{1-\gamma} - \rho B(A_t) + (A_t K_t^\gamma - \delta K_t) V_k - V_k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \\ \beta(w - A_t) B'(A_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 V_{kk} + \frac{1}{2} \eta^2 A_t B''(A_t) + \lambda \int [V(e^z K_t, A_t) - V(K_t, A_t)] G(z) dz = 0$$

de donde

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} (\Omega K_t^{-\gamma})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\rho \Omega}{1-\gamma} K_t^{1-\gamma} - \rho B(A_t) + (A_t K_t^\gamma - \delta K_t) \Omega K_t^{-\gamma} + \\ \beta(w - A_t) B'(A_t) - \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \gamma \Omega K_t^{-\gamma-1} + \frac{1}{2} \eta^2 A_t B''(A_t) + \lambda \frac{\Omega k^{1-\gamma}}{1-\gamma} (m(1-\gamma) - 1) = 0$$

reordenando términos se tiene:

$$\Omega K_t^{1-\gamma} \left[\Omega^{\frac{-1}{\gamma}} \frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{\rho}{1-\gamma} - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \gamma + \frac{\lambda}{1-\gamma} (m(1-\gamma) - 1) \right] + \frac{1}{2} \eta^2 A_t B''(A_t) + \beta(\omega - A_t) B'(A_t) - \rho B(A_t) + \Omega A_t = 0$$

Como se puede observar las combinaciones en K_t y A_t son linealmente independientes, luego esta igualdad implica que cada uno de los coeficientes debe ser igual a cero, por tanto:

Igualando a cero el coeficiente del primer término podemos obtener:

$$\frac{2\gamma \Omega^{\frac{-1}{\gamma}} - 2\rho - 2\delta(1-\gamma) - \gamma\sigma^2(1-\gamma) + 2\lambda(m(1-\gamma) - 1)}{2(1-\gamma)} = 0$$

de donde

$$\Omega = \left(\frac{2\rho + 2\delta(1-\gamma) + \gamma\sigma^2(1-\gamma) - 2\lambda(m(1-\gamma) - 1)}{2\gamma} \right)^{-\gamma}$$

La política óptima de consumo resulta de la condición de primer orden $C_t = (v_k)^{\frac{-1}{\gamma}}$ reemplazando se obtiene:

$$C_t = (\Omega K_t^{-\gamma})^{\frac{-1}{\gamma}} = \Omega^{\frac{-1}{\gamma}} K_t$$

$B(A_t)$ resulta de resolver la ecuación diferencial no homogénea de segundo orden asociada a la PTF.

$$\frac{1}{2} \eta^2 A_t B''(A_t) + \beta(\omega - A_t) B'(A_t) - \rho B(A_t) = -\Omega A_t$$

La solución general $B_g(A_t) = B_h(A_t) + B_p(A_t)$ donde, $B_h(A_t)$ es la solución de la ecuación homogénea asociada y $B_p(A_t)$ es la solución particular.

La Ecuación homogénea asociada

$$\frac{1}{2} \eta^2 A_t B''(A_t) + \beta(\omega - A_t) B'(A_t) - \rho B(A_t) = 0$$

corresponde a una ecuación hipergeométrica confluyente cuyos coeficientes son lineales en A_t que se puede escribir en la siguiente forma:

$$A_t B''(A_t) + \left(\frac{2\beta\omega}{\eta^2} - \frac{2\beta}{\eta^2} A_t \right) B'(A_t) - \frac{2\rho}{\eta^2} B(A_t) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Dicha ecuación se puede adaptar a su forma general

$$A_t B''(A_t) + (C + DA_t) B'(A_t) + (E + FA_t) B(A_t) = 0$$

$$\text{con } C = \frac{2\beta\omega}{\eta^2} \quad D = -\frac{2\beta}{\eta^2} \quad E = -\frac{2\rho}{\eta^2} \quad \text{y } F = 0$$

En la ecuación anterior al usar la sustitución $z = \frac{1}{\sqrt{D^2 - F}} A_t$;

$$z = \frac{1}{|D|} A_t = \frac{2\beta}{\eta^2} A_t \quad \text{se obtiene} \quad A_t = \frac{\eta^2}{2\beta} z$$

Sea $B(z) := B(A_t) = B\left(\frac{\eta^2}{2\beta} z\right)$ entonces:

$$B'(z) = B'(A_t) \frac{\eta^2}{2\beta} \quad \text{de donde} \quad B'(A_t) = \frac{2\beta}{\eta^2} B'(z)$$

$$B''(z) = B''(A_t) \frac{\eta^4}{4\beta^2} \quad \text{de donde} \quad B''(A_t) = \frac{4\beta^2}{\eta^4} B''(z)$$

Reemplazando en la ecuación original (A.23) se obtiene la ecuación hipergeométrica confluyente:

$$zB''(z) + \left(\frac{2\beta\omega}{\eta^2} - z\right) B'(z) - \frac{\rho}{\beta} B(z) = 0 \quad (\text{A.24})$$

Cuya solución se expresa en términos de la función Gamma

$$B(z) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(C+n)} \frac{z^n}{n!}; \quad C = \frac{2\beta\omega}{\eta^2} \quad b = \frac{\rho}{\beta}$$

Una posible solución particular tiene la forma $B_p(A_t) = \theta A_t + \Phi$, donde $B'_p(A_t) = \theta$ y $B''_p(A_t) = 0$ reemplazando sus derivadas y la función en la ecuación diferencial no homogénea asociada a la PTF se obtiene:

$$\beta(\omega - A_t)\theta - \rho(\theta A_t + \Phi) = -\Omega A_t$$

reordenando términos

$$-\theta(\beta + \rho)A_t + \theta\beta\omega - \rho\Phi = -\Omega A_t$$

igualando coeficientes:

$$\theta = \frac{\Omega}{\beta + \rho}$$

$$\Phi = \frac{\theta\beta\omega}{\rho} = \frac{\beta\omega\Omega}{\rho(\beta + \rho)}$$

Así

$$B_p(A_t) = \frac{\Omega}{\beta + \rho} \left(A_t + \frac{\beta\omega}{\rho}\right)$$

Luego la solución general se escribe como:

$$B_g(A_t) = \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(C+n)} \frac{z^n}{n!} + \frac{\Omega}{\beta + \rho} \left(A_t + \frac{\beta\omega}{\rho}\right); \quad z = \frac{2\beta}{\eta^2} A_t \quad C = \frac{2\beta\omega}{\eta^2} \quad b = \frac{\rho}{\beta} \quad (\text{A.25})$$

Con esto se demuestra que la forma de la función de valor es:

$$V(K_t, A_t) = \Omega \frac{K_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + B_g(A_t)$$

Demostración Corolario 2

La política de consumo es:

$$C_t(K_t, A_t) = \left(\frac{2\rho + 2\delta(1-\gamma) + \gamma\sigma^2(1-\gamma) - 2\lambda(m(1-\gamma) - 1)}{2\gamma} \right) K_t$$

Derivando con respecto a λ y γ para (K_t, A_t) dados, se tiene:

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda} = -\frac{m(1-\gamma) - 1}{\gamma} K_t$$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{-\delta - \frac{\gamma^2}{2}\sigma^2 + \lambda(\gamma \frac{\partial m(1-\gamma)}{\partial \gamma}) + m(1-\gamma) - 1 - \rho}{\gamma^2} K_t$$

Demostración proposición 3

Dado que el proceso K_t es de Markov, para la solución de este problema es posible usar el método conocido como programación dinámica y el teorema de verificación.

Para esto se define la función de valor óptimo de este problema como

$$V(K_t, A_t) := \sup_{K_t^{c,l} \geq 0} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} f(C_t, K_t) dt \right], \quad K_0 = k \geq 0, \quad A_0 = A > 0$$

El teorema de verificación conecta esta función con la siguiente ecuación integro-diferencial no lineal de segundo orden de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Hanson (2007).

$$-\rho V(K_t, A_t) + \sup_{C_t \geq 0, K_t \in (0,1)} \{[\mathcal{A}^{C_t, K_t} V](K_t, A_t) + f(C_t, K_t)\} = 0, \quad k \geq 0, \quad A > 0.$$

Para cada $c \geq 0$ y $l \in (0, 1)$, $\mathcal{A}^{c,l}$ es el operador

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}^{c,l} V](K_t, A_t) &= (A_t K_t^\alpha K_t^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t) V_k(K_t, A_t) + \beta A_t V_A(K_t, A_t) \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 V_{kk}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \eta^2 A_t^2 V_{AA}(K_t, A_t) \\ &+ \lambda \int [V(e^z K_t, A_t) - V(K_t, A_t)] G(z) dz. \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden permiten establecer el Guess de la función de valor

$$V(K_t, A_t) = \Gamma \frac{K_t^{1-\alpha\gamma}}{1-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma} + g(A_t)$$

Reemplazando la función y sus respectivas derivadas en la ecuación de H.J.B. maximizada, se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & K_t^{1-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma} \left[\frac{-\rho\Gamma}{1-\alpha\gamma} - \delta\Gamma + \frac{\beta\gamma\Gamma}{1-\alpha\gamma} - \frac{1}{2}\alpha\gamma\Gamma\sigma^2 + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{\gamma(\gamma+1)\Gamma}{1-\alpha\gamma} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda\Gamma}{1-\alpha\gamma} (m(1-\alpha\gamma) - 1) \right] \\ & + K_t^{\alpha(1-\gamma)} A_t^{1-\gamma} \left[\frac{(1-l)^{(1-\gamma)(\psi+1)}}{1-\gamma} \left(\frac{1-\alpha}{\psi} \right)^{1-\gamma} l^{-\alpha(1-\gamma)} + \Gamma l^{1-\alpha} \right. \\ & \left. - \frac{(1-l)(1-\alpha)}{\psi} \Gamma l^{-\alpha} \right] \\ & - \rho g(A_t) + \beta A_t g'(A_t) + \frac{1}{2}\eta^2 A_t^2 g''(A_t) = 0 \end{aligned}$$

Como se puede observar las combinaciones en K_t y A_t son linealmente independientes, luego esta igualdad implica que cada uno de los coeficientes debe ser igual a cero, por tanto:

Igualando a cero el coeficiente del primer factor $K_t^{1-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma}$, con $\psi > 0$, $\gamma \geq 0$ podemos obtener $\rho = \bar{\rho}$ el cual está dado por las siguiente expresión

$$\bar{\rho} = -\delta(1-\alpha\gamma) + \beta\gamma - \frac{1}{2}\alpha\gamma\sigma^2(1-\alpha\gamma) + \frac{1}{2}\eta^2\gamma(\gamma+1) + \lambda(m(1-\alpha\gamma) - 1) > 0 \quad (\text{A.26})$$

Igualando a cero el segundo coeficiente podemos obtener la constante Γ del Guess en la función de valor dada por:

$$\Gamma = (1-L)^{\psi(1-\gamma)-\gamma} \left(\frac{\psi}{1-\alpha} \right)^\gamma \quad (\text{A.27})$$

Finalmente se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden para la PTF que corresponde a una Ecuación diferencial de Cauchy en A_t dada por:

$$-\bar{\rho}g(A_t) - \beta A_t g'(A_t) + \frac{1}{2}\eta^2 A_t^2 g''(A_t) = 0 \quad (\text{A.28})$$

Se puede escribir como:

$$A_t^2 g''(A_t) - \frac{2\beta}{\eta^2} A_t g'(A_t) - \frac{2\bar{\rho}}{\eta^2} g(A_t) = 0 \quad (\text{A.29})$$

La solución es de la forma $g(A_t) = A_t^r$ donde r es una solución del polinomio característico

$$r^2 - \left(\frac{2\beta}{\eta^2} + 1 \right) r - \frac{2\bar{\rho}}{\eta^2} = 0$$

La solución general se escribe $g(A_t) = C_1 A_t^{r_1} + C_2 A_t^{r_2}$; C_1 y C_2 constantes.

Para el caso de $\rho = \bar{\rho}$ el consumo óptimo es también proporcional al ingreso

$$\hat{C}_t(K_t, A_t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} A_t K_t^\alpha l^{1-\alpha} \quad (\text{A.30})$$

La fracción de horas trabajadas es constante

$$\hat{K}_t(K_t, A_t) = \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)} \in [0, 1] \quad (\text{A.31})$$

Demostración Corolario 3

Dadas las funciones de política de consumo y trabajo óptimas:

$$\hat{K}_t(K_t, A_t) = \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)}$$

si derivamos con respecto a γ se obtiene:

$$\frac{\partial \hat{K}_t}{\partial \gamma} = \frac{-\psi(1 - \alpha)}{[\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)]^2} < 0$$

La política de consumo es

$$\hat{C}_t(K_t, A_t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} A_t K_t^\alpha K_t^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial \hat{C}_t}{\partial \gamma} = \left[\frac{K_t}{\gamma^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (1 - \alpha) \frac{\partial K_t}{\partial \gamma} \right] A_t K_t^\alpha K_t^{-\alpha}$$

reemplazando K_t y $\frac{\partial K_t}{\partial \gamma}$ se obtiene:

$$\frac{\partial \hat{C}_t}{\partial \gamma} = \frac{(1 - \alpha)[\gamma(1 - \alpha) - \psi\alpha(1 - \gamma)]}{\gamma[\gamma(1 - \alpha) - \psi(1 - \gamma)]^2} A_t K_t^\alpha K_t^{-\alpha}$$

Condiciones de segundo orden

Para establecer las condiciones de segundo orden que debe satisfacer la solución del problema interior:

$$(\hat{C}_t, \hat{L}_t) = \arg \max_{c_t \geq 0, L_t \in (0,1)} [\mathcal{A}^{C_t, L_t} \hat{V}](L_t, A_t) + f(C_t, L_t)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{C_t, L_t} V](L_t, A_t) &= (A_t L_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta L_t - C_t) \frac{\partial V}{\partial L_t}(L_t, A_t) + \beta(w - A_t) \frac{\partial V}{\partial A_t}(L_t, A_t) \\
&+ \sigma^2 L_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial L_t^2}(L_t, A_t) + \eta^2 A_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(k, A) \\
&+ \lambda \int [V(e^z L_t, A_t) - V(L_t, A_t)] F(dz)
\end{aligned}$$

consideremos por notación una nueva función:

$$R(C_t, L_t) = \mathcal{A}^{C_t, L_t} V(L_t, A_t) + f(C_t, L_t)$$

Las condiciones para la existencia del máximo establecen que $R_{cc} < 0$ y $R_{cc}R_{LL} - R_{cL}R_{Lc} > 0$

Si se reemplaza la función de valor propuesta $V(L_t, A_t)$ y la función de utilidad $f(C_t, L_t)$ y las condiciones de primer orden, se puede obtener que:

$$R_{cc} = f_{cc} = -\gamma(1 - L)^{\psi(1-\gamma)c^{-\gamma-1}} < 0 \Rightarrow \gamma > 0$$

$$R_{cc}R_{LL} - R_{cL}R_{Lc} = f_{cc}\left(\frac{-1}{L}f_L + f_{LL}\right) - (f_{cL})^2 > 0$$

En esta segunda condición al reemplazar las derivadas respectivas de la función de utilidad se obtiene la siguiente restricción:

$$\frac{\gamma - \psi(1 - \gamma)}{\gamma} > \frac{1 - l}{l}$$

Equivalente a :

$$2 - \frac{\psi(1 - \gamma)}{\gamma} > \frac{1}{l}$$

En resumen las condiciones de segundo orden para existencia del máximo nos dan dos restricciones adicionales $\gamma > 0$ y $2 - \frac{\psi(1 - \gamma)}{\gamma} > \frac{1}{L}$ que se cumplen satisfactoriamente por el valor \hat{L}_t dado por (A.31).

Estado estacionario

El estado estacionario se obtiene para esta solución cerrada usando las ecuaciones (1.3), (2.3), (1.7), (A.9) y (A.10) y esta dado por las cantidades:

$$r_{ss} = \rho + \delta$$

$$A_{ss} = \omega$$

$$\begin{aligned}
L_{ss} &= \frac{1 - \alpha}{1 + \psi - \alpha - \frac{\alpha\psi\delta}{\rho + \delta}} \\
K_{ss} &= \left(\frac{\alpha A_{ss}}{\rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} l_{ss} \\
w_{ss} &= (1 - \alpha) A_{ss} (K_{ss})^\alpha (l_{ss})^{-\alpha} \\
C_{ss} &= (r_{ss} - \delta) K_{ss} + w_{ss} l_{ss} \\
V_{ss} &= \frac{(C_{ss} (1 - l_{ss})^\psi)^{1-\gamma}}{\rho(1 - \gamma)}
\end{aligned}$$

Tabla de calibración de modelos en estudios similares

| Referencia | ρ | α | γ | ψ | δ | β | ω | η | σ | λ |
|----------------------------------|--------|----------|----------|--------|----------|---------|----------|--------|----------|-----------|
| Candler (1999) | 0.05 | 0.5 | 0.5 | | 0.025 | 0.05 | 1 | 0.007 | 0 | |
| Posch(2009) | 0.03 | 0.5 | 1.0 | | 0.05 | 0.01 | | 0.02 | | 0.8 |
| | 0.03 | 0.3 | 1.0 | | 0.05 | 0.01 | | 0.02 | | 0.8 |
| Posch(2011) | 0.05 | 0.75 | 0.75 | 0 | 0.1 | 0 | | 0 | 0 | 0.017 |
| | 0.05 | 0.75 | 1 | 0 | 0.1 | 0 | | 0 | 0 | 0.017 |
| | 0.05 | 0.75 | 1.9406 | 0 | 0.1 | 0 | | 0 | 0 | 0.017 |
| Posch- Trimborn(2013) | 0.0178 | 0.5 | 2.5 | | 0.05 | | | | 0.1 | 0.2 |
| | 0.0182 | 0.5 | 2.5 | | 0.05 | | | | 0.2 | 0.1 |
| | 0.0193 | 0.5 | 2.5 | | 0.05 | | | | 0.4 | 0.05 |
| | 0.0178 | 0.5 | 0.5 | | 0.05 | | | | 0.1 | 0.2 |
| | 0.0178 | 0.5 | 0.5 | | 0.05 | | | | 0.2 | 0.1 |
| | 0.0178 | 0.5 | 0.5 | | 0.05 | | | | 0.4 | 0.05 |
| Parra-Alvarez (2017) | 0.0105 | 0.4 | 2.0 | 1.8011 | 0.0196 | 0.05 | 1 | 0.007 | 0.001 | |

Cuadro A.1: Calibración de estudios similares

AnexosB

Anexo 2

Demostración Proposición 4 cap. 2

La función de valor se denota en este caso como $V(K_t, L_t)$. La ecuación de HJB maximizada para este caso es:

$$0 = \max_{\{c_t\}} L_t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \rho V + (K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - L_t c_t) V_k + \beta L_t V_L + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 V_{kk} + \frac{1}{2} \eta^2 L_t^2 V_{LL} + \lambda \int [V(e^z K_t, L_t) - V(K_t, L_t)] G(z) dz$$

Se conoce la función de utilidad $f(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$,

La condición de primer orden es:

$$[c_t] : \quad -\frac{\partial V}{\partial K_t} + \frac{\partial f}{\partial c_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial c_t} = \frac{\partial V}{\partial K_t}$$

$$c_t^{-\gamma} = \frac{\partial V}{\partial K_t}$$

de donde

$$c_t = (V_k)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

Tomando el guess

$$V(K_t, L_t) = \Omega L_t^\gamma \frac{K_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + H L_t$$

Respectivamente sus derivadas son:

$$V_k = \Omega L_t^\gamma K_t^{-\gamma},$$

$$V_{kk} = -\gamma \Omega L_t^\gamma K_t^{-\gamma-1}$$

$$V_L = \gamma \Omega L_t^{\gamma-1} \frac{K_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + H$$

$$V_{LL} = \gamma(\gamma-1) \Omega L_t^{\gamma-2} \frac{K_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$\text{Además } V(e^\nu K_t, L_t) - V(K_t, L_t) = \frac{\Omega}{1-\gamma} L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} (e^{(1-\gamma)\nu} - 1)$$

Reemplazando la función y sus respectivas derivadas en la ecuación de H.J.B. maximizada se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & L_t V_k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{\gamma}{1-\gamma} - \rho V + (K_t^\gamma L_t^{1-\gamma} - \delta K_t) V_k + \beta L_t V_L \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 V_{kk} + \frac{1}{2} \eta^2 L_t^2 V_{LL} + \lambda \int [V(e^z K_t, L_t) - V(K_t, L_t)] G(z) dz = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{1-\gamma} \Omega^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} - \frac{\rho \Omega}{1-\gamma} L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} - \rho H L_t + \Omega L_t - \delta \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} + \\ & \frac{\beta \gamma \Omega}{1-\gamma} L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} + \beta H L_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \gamma \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} - \frac{1}{2} \eta^2 \gamma \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} + \lambda \frac{\Omega}{1-\gamma} L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} (m(1-\gamma) - 1) = 0 \end{aligned}$$

reordenando términos se tiene:

$$\begin{aligned} & \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} \left[\Omega^{\frac{-1}{\gamma}} \frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{\rho}{1-\gamma} - \delta + \frac{\beta \gamma}{1-\gamma} - \frac{1}{2} \sigma^2 \gamma - \frac{1}{2} \eta^2 \gamma + \frac{\lambda}{1-\gamma} (m(1-\gamma) - 1) \right] + \\ & + L_t (-\rho H + \Omega + \beta H) = 0 \end{aligned}$$

Como se puede observar las combinaciones en K_t y L_t son linealmente independientes, luego esta igualdad implica que cada uno de los coeficientes debe ser igual a cero, por tanto:

Igualando a cero el coeficiente del primer término podemos obtener:

$$\frac{2\gamma \Omega^{\frac{-1}{\gamma}} - 2\rho - 2\delta(1-\gamma) + 2\beta\gamma - \gamma\sigma^2(1-\gamma) - \gamma\eta^2(1-\gamma) + 2\lambda(m(1-\gamma) - 1)}{2(1-\gamma)} = 0$$

de donde

$$\Omega = \left(\frac{2\rho + 2\delta(1-\gamma) - 2\beta\gamma + \gamma(1-\gamma)(\sigma^2 + \eta^2) - 2\lambda(m(1-\gamma) - 1)}{2\gamma} \right)^{-\gamma}$$

La política óptima de consumo resulta de la condición de primer orden $c_t = (v_k)^{\frac{-1}{\gamma}}$ reemplazando se obtiene:

$$c_t = (\Omega L_t^\gamma K_t^{-\gamma})^{\frac{-1}{\gamma}} = \Omega^{\frac{-1}{\gamma}} \frac{K_t}{L_t}$$

Si se define el capital efectivo por trabajador como $K_t = \frac{K_t}{L_t}$ entonces el consumo es proporcional a dicho capital

$$c_t = \Omega^{\frac{-1}{\gamma}} K_t$$

Igualando el segundo término a cero se obtiene la constante H

$$H = \frac{\Omega}{\rho - \beta}$$

Demostración Corolario 4

La política de consumo esta dada por:

$$c_t = \left(\frac{2\rho + 2\delta(1 - \gamma) - 2\beta\gamma + \gamma(1 - \gamma)(\sigma^2 + \eta^2) - 2\lambda(m(1 - \gamma) - 1)}{2\gamma} \right) \frac{K_t}{L_t}$$

Derivando con respecto a λ , γ , σ y η para (K_t, A_t) dados, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \lambda} &= -\frac{m(1 - \gamma) - 1}{\gamma} \frac{K_t}{L_t} \\ \frac{\partial c}{\partial \gamma} &= \frac{-\delta + \frac{\gamma^2}{2}(\sigma^2 + \eta^2) + \lambda(\gamma \frac{\partial m(1 - \gamma)}{\partial \gamma} + m(1 - \gamma) - 1) - \rho}{\gamma^2} \frac{K_t}{L_t} \\ \frac{\partial c}{\partial \sigma} &= (1 - \gamma)\sigma \frac{K_t}{L_t} \\ \frac{\partial c}{\partial \eta} &= (1 - \gamma)\eta \frac{K_t}{L_t} \end{aligned}$$

Demostración Proposición 5 cap. 2

La función de valor se denota en este caso como $V(K_t, A_t, L_t)$. La ecuación de HJB maximizada para este caso es:

$$\begin{aligned} \rho V(K_t, A_t, L_t) &= L_t f(\hat{c}(K_t, V_k)) + (K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - L_t \hat{c}) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t, L_t) + \beta L_t \frac{\partial V}{\partial L_t}(K_t, A_t, L_t) + \\ &\mu A \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t, L_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t, L_t) + \frac{1}{2} \eta^2 L_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial L_t^2}(K_t, A_t, L_t) + \\ &\frac{1}{2} \nu^2 A_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t, L_t) + \lambda \int V(e^z K_t, A_t, L_t) G(z) dz - \lambda V(K_t, A_t, L_t). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Se conoce la función de utilidad $f(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$,

La condición de primer orden es:

$$[c_t]: \quad -L_t \frac{\partial V}{\partial K_t} + L_t \frac{\partial f}{\partial c_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial c_t} = \frac{\partial V}{\partial K_t}$$

$$c_t^{-\gamma} = \frac{\partial V}{\partial K_t}$$

de donde

$$c_t = (V_k)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

Tomando el guess

$$V(K_t, A_t, L_t) = \Omega K_t^{1-\gamma} L_t^\gamma + \Gamma A_t^{1-\gamma} L_t + H L_t$$

Respectivamente sus derivadas son:

$$V_k = \Omega (1-\gamma) K_t^{-\gamma} L_t^\gamma,$$

$$V_{kk} = -\gamma (1-\gamma) \Omega K_t^{-\gamma-1} L_t^\gamma$$

$$V_L = \gamma \Omega K_t^{1-\gamma} L_t^{\gamma-1} + \Gamma A_t^{1-\gamma} + H$$

$$V_{LL} = \gamma(\gamma-1) \Omega K_t^{1-\gamma} L_t^{\gamma-2}$$

$$V_A = (1-\gamma) \Gamma A_t^{-\gamma} L_t$$

$$V_{AA} = -\gamma(1-\gamma) \Gamma A_t^{-\gamma-1} L_t$$

$$\text{Además } V(e^\epsilon K_t, A_t, L_t) - V(K_t, A_t, L_t) = \Omega K_t^{1-\gamma} L_t^\gamma (e^{(1-\gamma)\epsilon} - 1)$$

Reemplazando la función de valor y sus respectivas derivadas en la ecuación de H.J.B. maximizada se obtiene la siguiente igualdad:

$$L_t \left(\frac{V_k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \gamma - 1}{1-\gamma} \right) - \rho V + (K_t^\gamma (A_t L_t)^{1-\gamma} - \delta K_t) V_k + \mu A_t V_A + \beta L_t V_L$$

$$+ \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 V_{kk} + \frac{1}{2} \nu^2 A_t^2 V_{AA} + \frac{1}{2} \eta^2 L_t^2 V_{LL} + \lambda \int [V(e^\epsilon K_t, A_t, L_t) - V(K_t, A_t, L_t)] G(z) dz = 0$$

de donde

$$\gamma(1-\gamma) \frac{-1}{\gamma} \Omega^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} - \frac{L_t}{1-\gamma} - \rho \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} - \rho \Gamma A_t^{1-\gamma} L_t - \rho H L_t + \Omega (1-\gamma) A_t^{1-\gamma} L_t - \delta (1-\gamma) \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} +$$

$$\mu (1-\gamma) \Gamma A_t^{1-\gamma} L_t + \beta \gamma \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} + \beta \Gamma A_t^{1-\gamma} L_t + \beta H L_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \gamma (1-\gamma) \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} - \frac{1}{2} \eta^2 \gamma (1-\gamma) \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} -$$

$$\frac{1}{2} \nu^2 \gamma (1-\gamma) \Gamma A_t^{1-\gamma} L_t + \lambda \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} (m(1-\gamma) - 1) = 0$$

reordenando términos se tiene:

$$\begin{aligned} \Omega L_t^\gamma K_t^{1-\gamma} \left[((1-\gamma)\Omega)^{\frac{-1}{\gamma}} \gamma - \rho - \delta(1-\gamma) + \beta\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(1-\gamma) - \frac{1}{2}\eta^2\gamma(1-\gamma) + \lambda(m(1-\gamma) - 1) \right] + \\ A_t^{1-\gamma} L_t \left[-\rho\Gamma + \Omega(1-\gamma) + \mu(1-\gamma)\Gamma + \beta\Gamma - \frac{1}{2}\nu^2\gamma(1-\gamma)\Gamma \right] + \\ L_t \left[-\rho H + \beta H - \frac{1}{1-\gamma} \right] = 0 \end{aligned}$$

Como se puede observar las combinaciones en K_t , A_t y L_t son linealmente independientes, luego esta igualdad implica que cada uno de los coeficientes debe ser igual a cero, por tanto:

Igualando a cero el coeficiente del primer término podemos obtener:

$$\Omega = \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\rho + \delta(1-\gamma) - \beta\gamma + \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)(\sigma^2 + \eta^2) - \lambda(m(1-\gamma) - 1)}{\gamma} \right)^{-\gamma}$$

Igualando el segundo término a cero se obtiene la constante Γ

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\Omega(1-\gamma)}{\rho - \mu(1-\gamma) - \beta + \frac{1}{2}\nu^2\gamma(1-\gamma)} \\ H &= -\frac{1}{(1-\gamma)(\rho - \beta)} \end{aligned}$$

La política óptima de consumo resulta de la condición de primer orden $c_t = (v_k)^{\frac{-1}{\gamma}}$ reemplazando se obtiene:

$$c_t = ((1-\gamma)\Omega L_t^\gamma K_t^{-\gamma})^{\frac{-1}{\gamma}} = ((1-\gamma)\Omega)^{\frac{-1}{\gamma}} \frac{K_t}{L_t}$$

Si se define el capital efectivo por trabajador como $K_t = \frac{K_t}{L_t}$ entonces el consumo es proporcional a dicho capital

$$c_t = ((1-\gamma)\Omega)^{\frac{-1}{\gamma}} K_t$$

AnexosC

Anexo 3

En este anexo se presenta las soluciones numéricas de los otros modelos estudiados en el capítulo 1 donde se tiene una dinámica de capital que incluye choques que combinan un proceso de difusión y de saltos. La solución numérica en cada uno de los casos siguientes se apoya en las condiciones planteadas en la sección 1.4 del capítulo 1, la cual describe en detalle los procedimientos numéricos para obtener la función de valor y las políticas óptimas en cada caso y recuerde que el termino integral correspondiente al proceso de saltos, mediante una sustitución adecuada se transforma en una integral de correlación. En el ejercicio se tomó como distribución de los saltos a una normal truncada similar al caso resuelto en el capítulo 1.

C.1. Solución para el modelo con PTF constante y trabajo constante sin saltos en el capital

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman a resolver corresponde a:

$$-\rho V(K_t) + \sup_{C_t \geq 0} \{[\mathcal{A}^{C_t} V](K_t) + f(C_t)\} = 0, \quad K_t \geq 0, . \quad (\text{HJB1})$$

Para cada $C_t \geq 0$ y $l_t \in (0, 1)$, \mathcal{A}^c es el operador

$$[\mathcal{A}^{C_t} V](K_t) = (AK_t^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t)V'(K_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 K_t^2 V''(K_t)$$

El teorema de verificación establece que, $V = \hat{V}$ resuelve la ecuación (HJB1) y garantiza la existencia de una regla de política óptima para \hat{c} . La ecuación de HJB resultante es:

$$\rho V(K_t) = f(\hat{C}_t(K_t, V_k)) + (AK_t^\alpha l_t^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t)V'(K_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 K_t^2 V''(K_t). \quad (\text{C.1})$$

La forma discreta de la ecuación a resolver es:

$$\rho V_i^{n+1} = f(c_i^n) + (AK_i^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_i - c_{iF}^n)^+(V_{iF}^{n+1})' + (AK_i^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_i - c_{iB}^n)^-(V_{iB}^{n+1}) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 (V_i^{n+1})''$$

Reemplazando las derivadas y reordenando términos se puede escribir como:

$$\rho V_i^{n+1} = f(c_i^n) + \frac{V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1}}{\Delta k} R_{iF}^{n+1} + \frac{V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1}}{\Delta k} R_{iB}^{n+1} + \frac{1}{2}\sigma^2 K_i^2 \frac{V_{i+1}^{n+1} - 2V_i^{n+1} + V_{i-1}^{n+1}}{(\Delta k)^2}$$

equivalente a:

$$\rho V_i^{n+1} = f(c_i^n) + X_i V_{i-1}^{n+1} + Y_i V_i^{n+1} + Z_i V_{i+1}^{n+1}$$

para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\rho \mathbf{I} - \mathbf{A}^n) V^{n+1} = f^n$$

$$\mathbf{B}^n V^{n+1} = f^n \quad \mathbf{B}^n = \rho \mathbf{I} - \mathbf{A}^n$$

La solución que se obtiene es:

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} f^n$$

El algoritmo tiene los siguientes pasos:

- Parte de un Guess inicial $V_i^0 = \frac{((AK_i^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_i))^{(1-\gamma)}}{(1-\gamma)}$ $i = 1, 2, \dots, I$, que corresponde a la función de utilidad evaluada en el consumo de estado estacionario.
- Calcula $(V_i^n)'$ usando el método upwind.
- Calcula c^{n+1} como $c_i^{n+1} = (f')^{-1}[(V_i^{n+1})']$
- Encuentra

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} f^n$$

- Se detiene cuando la función de valor alcanza la tolerancia indicada $\|V^{n+1}(K_i) - V^n(K_i)\|^2 < tol$, donde $10^{-4} \leq tol \leq 10^{-6}$
- Se incluyen valores del stock de capital que dependen de su estado estacionario determinista, se toman valores en el intervalo $[0.5K_{ss}, 1.5K_{ss}]$ ¹
- Se compara los resultados de la solución numérica con la solución analítica desarrollada en la proposición 2. 2

$$V(k) = \Omega \frac{K_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \theta$$

Dado que la PTF $A_t = A$ es constante se toma $\theta = \frac{\Omega A}{\rho}$ como una constante donde

$$\Omega = \left(\frac{2\rho + 2\delta(1-\gamma) + \gamma(1-\gamma)\sigma^2}{2\gamma} \right)^{-\gamma}$$

- Se calcula los errores de aproximación entre las soluciones numérica y analítica tanto para la función de valor como para la función de política.
- El número de pasos en la variable k es:

| Variable | Valor | Nombre |
|----------|-------|------------------------|
| kp | 1000 | Número de pasos en k |

Cuadro C.1: Número de pasos en k

La calibración de los parámetros del modelo α, γ, δ y σ y ρ se muestra en el siguiente Cuadro y se realizó teniendo en cuenta estudios similares como Candler et al. (1998), en el caso de A constante y l constante.

| Parámetro | Valor | Nombre |
|-----------|--------|-----------------------------------|
| L | 0.5 | Fracción de Trabajo |
| A | 2 | PTF |
| α | 0.4176 | Elasticidad del capital |
| γ | 1.3 | Aversión al riesgo |
| δ | 0.05 | Depreciación del capital |
| ψ | 0.03 | Medida de preferencia por el ocio |
| σ | 0.0092 | Volatilidad del capital |
| ρ | 0.0105 | Factor de descuento |

Cuadro C.2: Parámetros del modelo A constante sin saltos

El modelo presenta los siguientes resultados para la función de valor numérica, analítica y para

$${}^1K_{ss} = \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

la función de política cuando se tiene presencia de un choque browniano en la dinámica del capital.

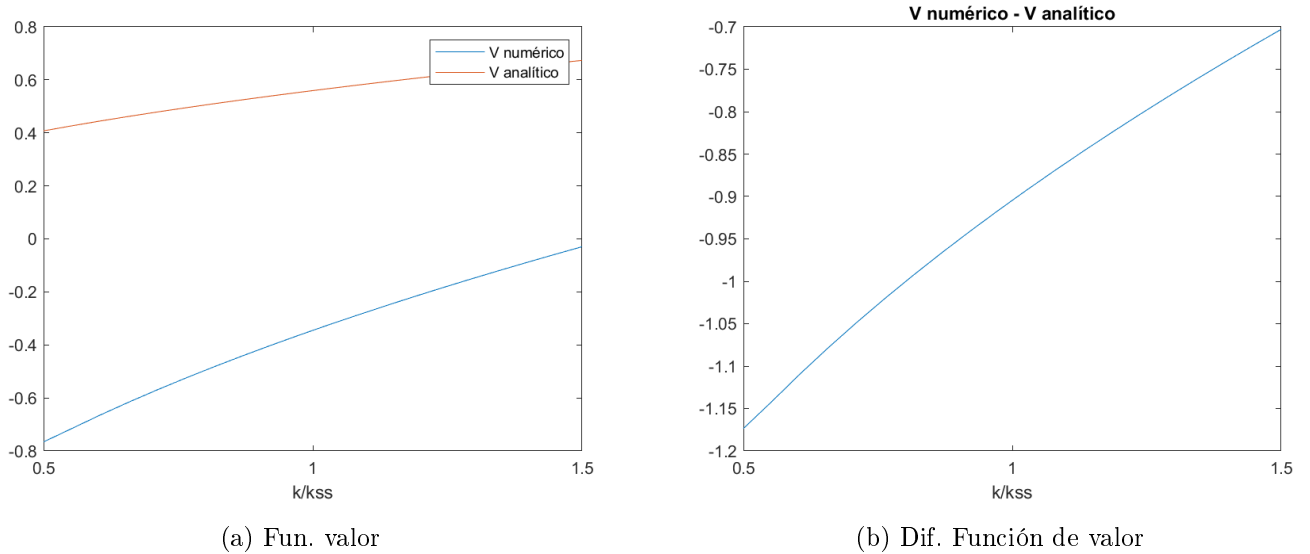


Figura C.1: Función de valor numérica y analítico $A=2$

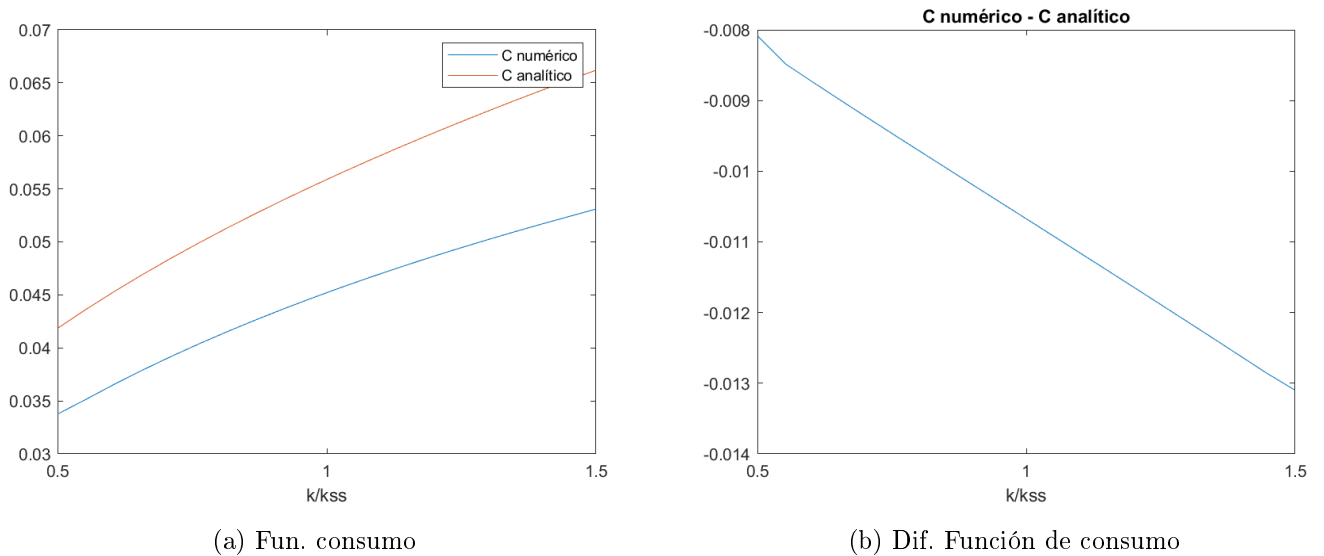


Figura C.2: Función de consumo numérica y analítico $A=2$

Los resultados muestran que para el caso sin saltos, los hogares representativos consumen más rápido en el inicio y luego tienden a estabilizar su consumo. Además la optimización de los parámetros muestra un buen comportamiento entre las soluciones analítica y numérica de la función de valor con diferencias pequeñas y en la función de consumo con diferencias que tienen un rango entre -0.014 y -0.08, las cuales dependen del tamaño de la grilla en el capital.

C.2. Solución para el modelo con PTF constante y trabajo constante.

Para este caso la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman a resolver corresponde a:

$$-\rho V(K_t) + \sup_{C_t \geq 0} \{[\mathcal{A}^{C_t} V](K_t) + f(c_t)\} = 0, \quad K_t \geq 0, \quad A > 0. \quad (\text{HJB2})$$

Para cada $C_t \geq 0$ y $l \in (0, 1)$, \mathcal{A}^{C_t} es el operador

$$[\mathcal{A}^{C_t} V](K_t) = (AK_t^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t)V'(K_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 K_t^2 V''(K_t) + \lambda \int [V(e^z K_t) - V(K_t)] G(z) dz.$$

El teorema de verificación establece que, $V = \hat{V}$ resuelve la ecuación (HJB2) y garantiza la existencia de una regla de política óptima para \hat{c} . La ecuación de HJB resultante es:

$$\rho V(K_t) = f(\hat{C}_t(K_t, V_k)) + (AK_t^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t)V'(K_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 K_t^2 V''(K_t) + \lambda \int V(e^z K_t) G(z) dz - \lambda V(K_t). \quad (\text{C.2})$$

$G(z)$ es la función de densidad de probabilidad del salto de amplitud z .

La ecuación (C.2) en forma discreta en términos de las diferencias finitas para el caso implícito, incluyendo la parte de la integral asociada a los saltos se escribe de la siguiente forma.

$$\rho V_i^{n+1} = f(c_i^n) + (AK_i^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_i - c_i^n)(V_i^{n+1})' + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 (V_i^{n+1})'' + \lambda I(K_i) - \lambda V_i^{n+1}.$$

Usando el esquema *upwind* implícito la ecuación anterior se puede ver así

$$\begin{aligned} \rho V_i^{n+1} = & f(c_i^n) + (AK_i^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_i - c_{iF}^n)^+ (V_{iF}^{n+1})' + (AK_i^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_i - c_{iB}^n)^- (V_{iB}^{n+1})' \\ & + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 (V_i^{n+1})'' + \lambda I(K_i) - \lambda V_i^{n+1} \end{aligned}$$

Reemplazando las derivadas y reordenando términos se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \rho V_i^{n+1} = & f(c_i^n) + \frac{V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1}}{\Delta k} R_{iF}^+ + \frac{V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1}}{\Delta k} R_{iB}^+ + \\ & \frac{1}{2}\sigma^2 K_i^2 \frac{V_{i+1}^{n+1} - 2V_i^{n+1} + V_{i-1}^{n+1}}{(\Delta k)^2} + \lambda I(K_i) - \lambda V_i^{n+1} \end{aligned}$$

para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[(\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n]V^{n+1} = f(c_i^n) + \lambda I(K_i)$$

$$\mathbf{B}^n V^{n+1} = \mathbf{b}^n$$

con

$$\mathbf{B}^n = (\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n \quad \mathbf{b}^n = f(c_i^n) + \lambda I(K_i)$$

La solución que se obtiene es:

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1}\mathbf{b}^n$$

El algoritmo tiene los siguientes pasos:

- Parte de un Guess inicial $V_i^0 = \frac{((AK_i^\alpha l^{1-\alpha} - \delta K_i))^{(1-\gamma)}}{(1-\gamma)} \quad i = 1, 2, \dots, I,$
- Para cada posición de z se calcula integral $I(K_i)$ usando la FFT
- Calcula $(V_i^{n+1})'$ usando el método upwind
- Calcula c^{n+1} como $c_i^{n+1} = (f')^{-1}[(V_i^{n+1})']$
- Encuentra

$$V^{n+1}(K_i) = (\mathbf{B}^n)^{-1}\mathbf{b}^n$$

- Actualiza el Guess
- Se detiene cuando la función de valor alcanza la tolerancia indicada $\|V^{n+1}(K_i) - V^n(K_i)\|^2 < tol,$ donde $10^{-4} \leq tol \leq 10^{-6}$
- Se incluyen valores del stock de capital que dependen de su estado estacionario determinista, se toman valores en el intervalo $[1K_{ss}, 3K_{ss}]$ ²
- El número de pasos en la variable k es:

| Variable | Valor | Nombre |
|----------|-------|------------------------|
| kp | 1000 | Número de pasos en k |

Cuadro C.3: Número de pasos en k

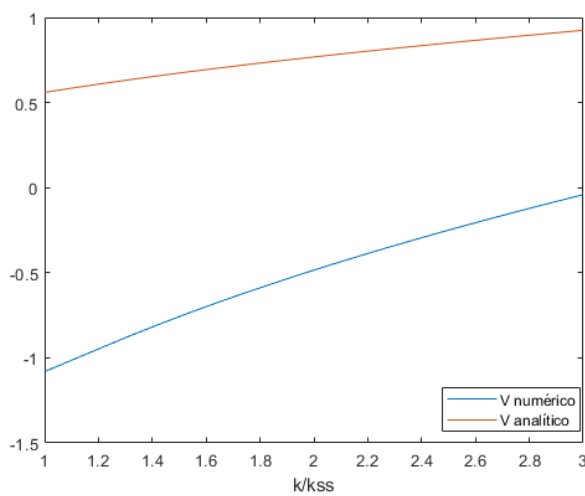
$${}^2K_{ss} = \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

La calibración de los parámetros $\alpha, \gamma, \delta, \psi, \sigma, \rho$ y λ se muestran en el siguiente (cuadro C.4), para este ejercicio los saltos se consideran con distribución normal estándar.

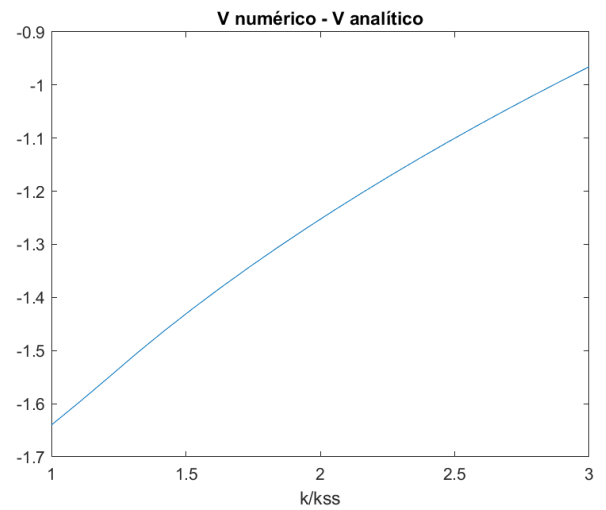
| Parámetro | Valor | Nombre |
|-------------|--------|-----------------------------------|
| A | 2 | PTF |
| L | 0.5 | Fracción de Trabajo |
| α | 0.4176 | Elasticidad del capital |
| γ | 2.0247 | Aversión al riesgo |
| ψ | 0.0005 | Medida de preferencia por el ocio |
| σ | 0.0092 | Volatilidad del capital |
| δ | 0.2212 | Depreciación del capital |
| ρ | 0.1213 | Factor de descuento |
| λ | 0.03 | Intensidad de los saltos |
| ν | -0.055 | Media de los saltos |
| φ^2 | 0.041 | Varianza de los saltos |

Cuadro C.4: Parámetros del modelo A constante con saltos

Este proceso de optimización presenta los siguientes resultados para funciones de valor y de política:

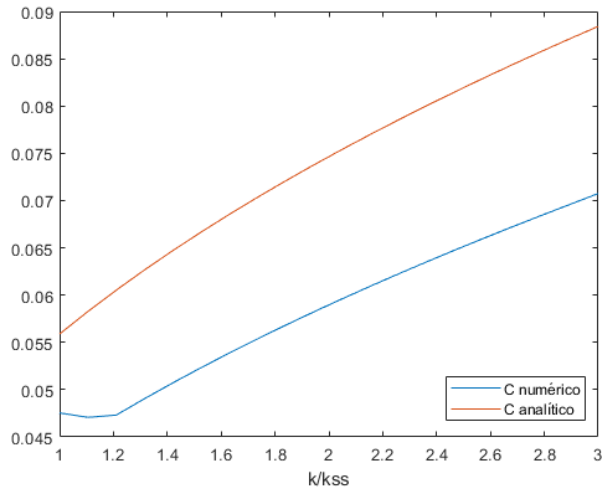


(a) Fun. Valor.

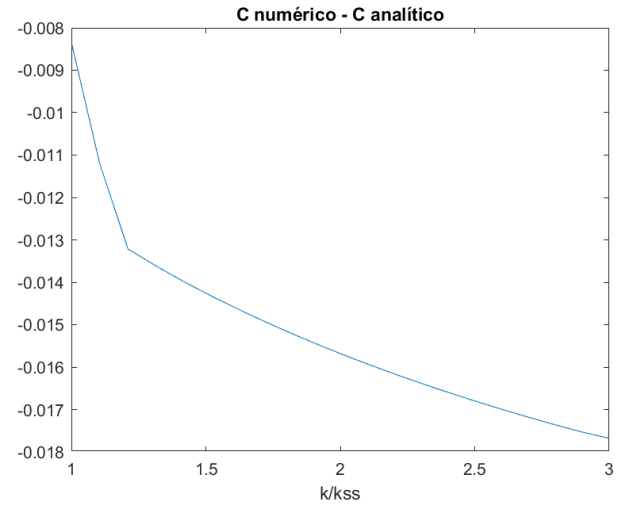


(b) Diferencia Fun. Valor.

Figura C.3: Función de valor Analítica y Numérica



(a) Fun. Consumo.

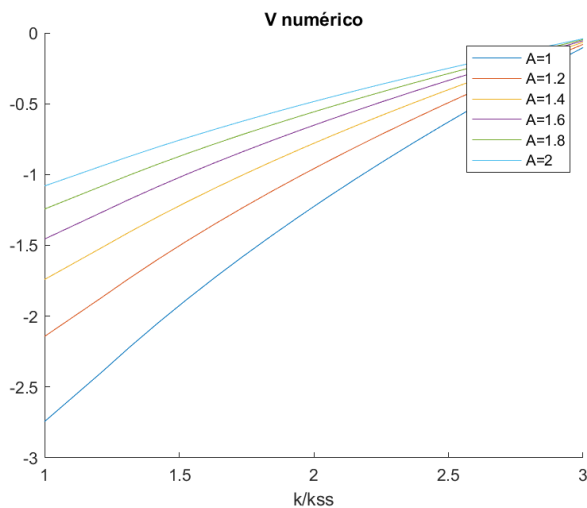


(b) Diferencia Fun. Consumo.

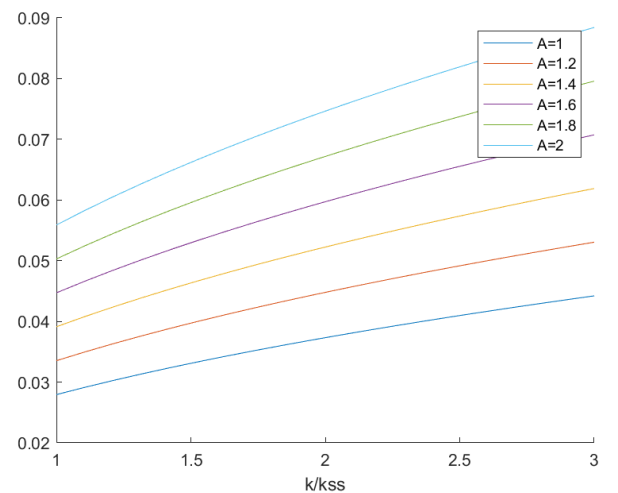
Figura C.4: Función de consumo Analítica y Numérica

En comparación con el caso sin saltos, nos muestra que al incluir un choque inesperado asociado con desastres raros en la dinámica de capital, los agentes tienden a disminuir su valor, lo que implica un aumento de su factor de impaciencia y por tanto incrementan su consumo.

A continuación se presentan los resultados de la función de valor y de consumo cuando hacemos variar la PTF A .



(a) Fun. Valor Numérica.



(b) Fun. consumo Numérica .

Figura C.5: Función de valor y consumo distinto A

Se observa un comportamiento creciente de la función de valor y del consumo a medida que se

aumenta el factor de PTF A

C.2.1. Tasa de convergencia

Los resultados para la tasa de convergencia para este modelo en la grilla de capital k son los siguientes y muestran que el orden de convergencia es consistente en la grilla y su valor coincide con el orden teórico de 1.

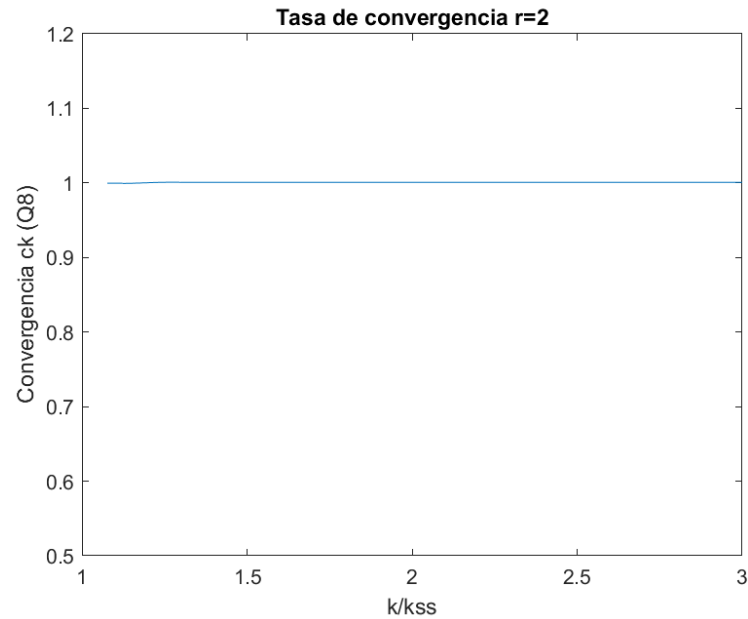


Figura C.6: Tasa de convergencia Modelo con A constante con saltos

C.2.2. Prueba de convergencia para el caso A constante L constante con saltos

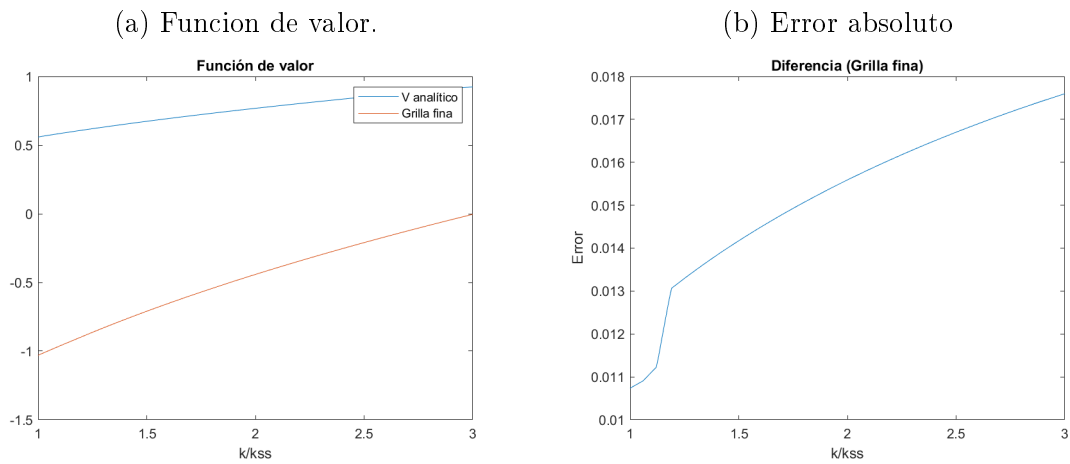


Figura C.7: Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla fina $J=10000$ puntos en la grilla de capital.

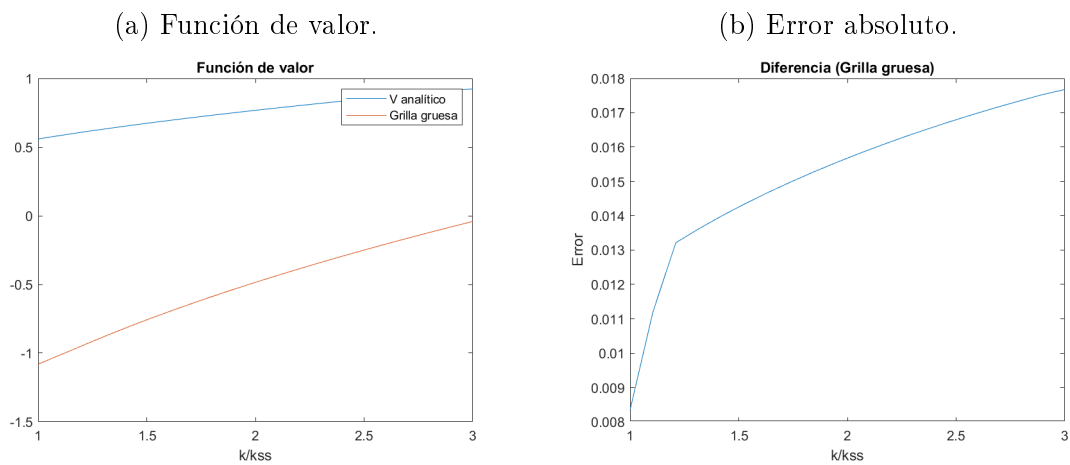


Figura C.8: Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=1000$ puntos en la grilla de capital.

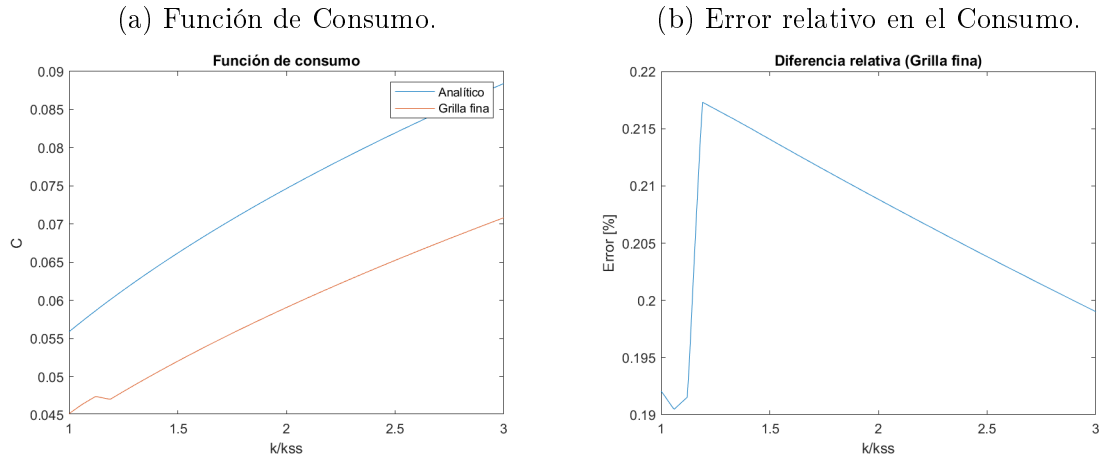


Figura C.9: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina $J=10000$ puntos en la grilla de capital.

La solución numérica en la política de consumo presenta un error relativo de aproximación en un rango del 0.19 % al 0.217 %

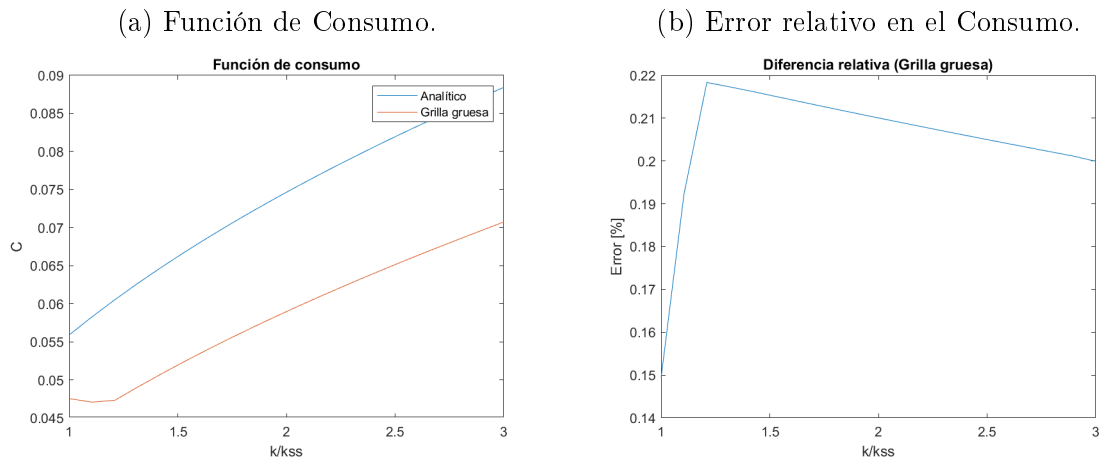


Figura C.10: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=1000$ puntos en la grilla de capital.

La solución numérica sigue con un error relativo de aproximación que va en un rango del 0.15 % al 0.22 %

Luego para cada solución numérica que se comparan con la solución analítica, se establece su velocidad y precisión. Para el caso de la métrica de precisión se considera el área bajo la curva de consumo, y se establece el error porcentual en este valor con respecto al valor calculado usando la grilla fina. La siguiente tabla muestra los resultados de la comparación de las soluciones con una grilla gruesa de $J=1000$ puntos y una grilla fina de $J=10000$ puntos.

| Modelo | Grillas | Velocidad(seg.) | Área bajo el Consumo |
|-------------|---------------|-----------------|----------------------|
| Acons,Lcons | J=10000 | 0.089005 | 0.11777 |
| | J=1000 | 0.025812 | 0.12336 |
| | Fila 2/Fila 1 | 0.29006 | 1.04746 |

Cuadro C.5: Velocidad y precisión del modelo 1.

En el primer modelo donde A es constante y L es constante, los resultados muestran que reducir el número de puntos de la grilla de 10000 a 1000 da como resultado un aumento aproximado de 3.4 veces en la velocidad computacional y un ligero deterioro de la precisión en aproximadamente 4.74 %. Por tanto se justifica el uso de una grilla fina en comparación con la grilla gruesa.

C.3. Solución para el modelo con un CIR en la PTF y trabajo constante ($l_t \equiv 1$).

Para este caso la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman a resolver corresponde a:

$$-\rho V(K_t, A_t) + \sup_{C_t \geq 0} \{[\mathcal{A}^{C_t} V](K_t, A_t) + f(C_t)\} = 0, \quad K_t \geq 0, \quad A_t > 0. \quad (\text{HJB3})$$

Para cada $C_t \geq 0$ \mathcal{A}^{C_t} es el operador

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}^{C_t} V](K_t, A_t) &= (A_t K_t^\alpha - \delta K_t - C_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t) + \beta(w - A_t) \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t) \\ &+ \frac{1}{2} \eta^2 A_t \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t) + \lambda \int [V(e^z K_t, A_t) - V(K_t, A_t)] G(z) dz. \end{aligned}$$

Entonces para cada $(K_t, A_t) \in \mathbb{R}_+^2$ el máximo en la ecuación HJB satisface:

$$\hat{c}(K_t, A_t, V_k) = \arg \max_{C_t \geq 0} [\mathcal{A}^{C_t} \hat{V}](K_t, A_t) + f(C_t)$$

Así la ecuación de HJB se transforma en:

$$-\rho \hat{V}(K_t, A_t) + \{[\mathcal{A}^{\hat{C}_t(K_t, V_k)} \hat{V}](K_t, A_t) + f(\hat{C}_t(K_t, V_k))\} = 0.$$

Por último el teorema de verificación establece que, $V = \hat{V}$ resuelve la ecuación (HJB3) y garantiza

la existencia de una regla de política óptima para \hat{C}_t . La ecuación resultante es:

$$\begin{aligned} \rho V(K_t, A_t) = & f(\hat{C}_t(K_t, V_k)) + (A_t K_t^\alpha - \delta K_t - \hat{C}_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t) + \\ & \beta(w - A_t) \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \eta^2 A_t \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t) + \quad (C.3) \\ & \lambda \int V(e^z K_t, A_t) G(z) dz - \lambda V(K_t, A_t). \end{aligned}$$

La discretización de la ecuación de Bellman maximizada (C.3), usa el esquema de diferencias finitas presentado en Achdou et al. (2017) y tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho V_{i,j}^{n+1} = & f(c_{ij}^n) + \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta k} R_{i,j,F}^{n+} + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta k} R_{i,j,B}^{n-} + \beta(w - A_j) \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta A} + \\ & \frac{1}{2} \sigma^2 K_i^2 \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta k)^2} + \frac{1}{2} \eta^2 A_j \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta A)^2} + \lambda I(K_i) - \lambda V_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

Reemplazando las derivadas y reordenando términos, se puede ver de forma equivalente a:

$$\rho V_{i,j}^{n+1} = f(c_{ij}^n) + X_{i,j} V_{i-1,j}^{n+1} + (Y_{i,j} + \nu_j) V_{i,j}^{n+1} + Z_{i,j} V_{i+1,j}^{n+1} + \chi_j V_{i,j-1}^{n+1} + \varsigma_j V_{i,j+1}^{n+1} + \lambda I(K_i) - \lambda V_{i,j}^{n+1}$$

Esto permite resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ((\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n) \mathbf{V}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \lambda I(k) \\ \mathbf{B}^n &= (\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n \quad \mathbf{b}^n = \mathbf{f}^n + \lambda I(k) \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^n \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{b}^n$$

Finalmente la función de valor se obtiene resolviendo:

$$\mathbf{V}^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} \mathbf{b}^n$$

El algoritmo tiene los siguientes pasos:

- Parte de un Guess inicial que contiene una expresión lineal en A.

$$V^0 = \frac{k^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \theta A$$
- Calcula $(V^n)'$ usando el método upwind
- Calcula c^{n+1} como $c_{i,j}^{n+1} = (f')^{-1}[(V_{i,j}^{n+1})']$

- Encuentra

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} f^n$$

- Se detiene cuando la función de valor alcanza la tolerancia indicada $\|V^{n+1}(K_i, A_j) - V^n(K_i, A_j)\|^2 < tol$, donde $10^{-4} \leq tol \leq 10^{-6}$
- Se incluyen valores del stock de capital que dependen de su estado estacionario determinista, se toman valores en el intervalo $[0.5K_{ss}, 1.5K_{ss}]$ para comparar el rendimiento del método de aproximación, usando diferencias finitas.³
- El número de pasos en cada variable es:

| Variable | Valor | Nombre |
|----------|-------|----------------------|
| kp | 20 | Número de pasos en k |
| Ap | 20 | Número de pasos en A |

Cuadro C.6: Número de pasos en las variables

Para establecer la precisión del algoritmo se compara los resultados de la solución numérica del modelo con la solución analítica obtenida en la proposición (2). Como se muestra en el anexo 1, la solución particular es también solución de la ecuación diferencial de segundo orden asociada a el factor $B(A_t)$ por tanto se puede usar dicha la solución particular $B(A_t) = \frac{\Omega}{\beta + \delta} \left(A_t + \frac{\beta\omega}{\rho} \right)$ en la función de valor:

$$V(K_t, A_t) = \Omega \frac{K_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{\Omega}{\beta + \delta} \left(A_t + \frac{\beta\omega}{\rho} \right)$$

con

$$\Omega = \left(\frac{2\rho + 2\delta(1-\gamma) + \gamma(1-\gamma)\sigma^2 - 2\lambda(m(1-\gamma) - 1)}{2\gamma} \right)^{-\gamma}$$

El siguiente cuadro muestra la calibración de los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \rho, \sigma$ y ω , el cual toma como referencia la calibración de los estudios de Parra-Alvarez (2017), Posch (2011), Achdou et al. (2017) y Moll (2014) para algunos valores de los parámetros en los distintos valores de λ .

$${}^3K_{ss} = \left(\frac{\alpha\omega}{\rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} l_{ss} \quad ; \quad l_{ss} = 1$$

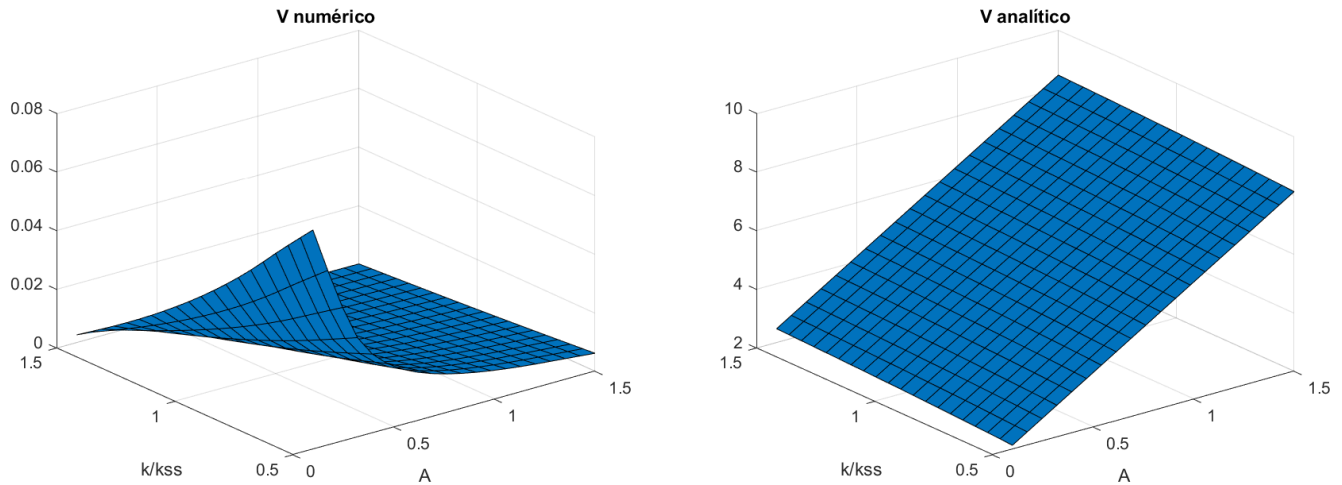
| Parámetro | Valor 1 | Valor 2 | Valor 3 | Valor 4 | Nombre |
|-------------|---------|---------|---------|---------|--------------------------|
| λ | 0 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | Intensidad de los saltos |
| L | 1 | 1 | 1 | 1 | Fracción de Trabajo |
| α | 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0.7 | Elasticidad del capital |
| γ | 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0.7 | Aversión al riesgo |
| ρ | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | Factor de descuento |
| σ | 0.40 | 0.40 | 0.4 | 0.40 | Volatilidad del capital |
| δ | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | Depreciación del capital |
| ω | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Media de largo plazo |
| η | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | Volatilidad en A |
| β | 1.0001 | 1.0001 | 1.0001 | 1.0001 | Velocidad de ajuste |
| ν | -0.055 | -0.055 | -0.055 | -0.055 | Media de los saltos |
| φ^2 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | Varianza de los saltos |

Cuadro C.7: Parámetros del modelo k y A variables $l \equiv 1$ incluido saltos.

Para establecer una comparación, se presentan los resultados de la función de valor, la función de política de consumo y sus diferencias inicialmente para el caso

sin incluir los saltos $\lambda = 0$, luego en el caso donde se incluye los saltos para $\lambda = 0,03$ y finalmente se compara la función de valor numérica y de consumo para los distintos valores de λ , asumiendo que los saltos en todos los casos se distribuyen con una normal truncada $\bar{N}(-0,055, 0,041)$.

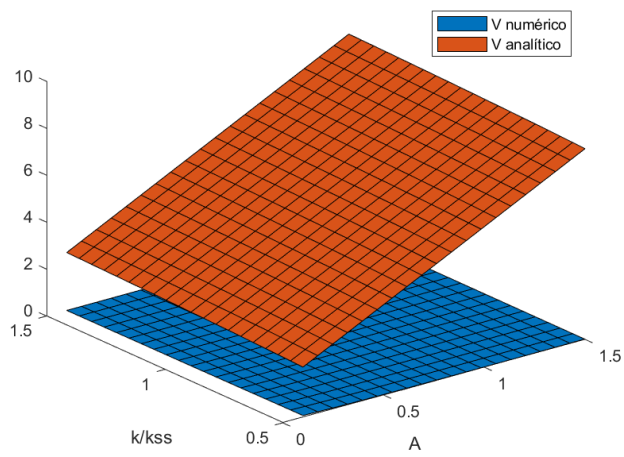
Las siguientes gráficas son el resultado de incluir solamente un choque browniano en la dinámica del capital.



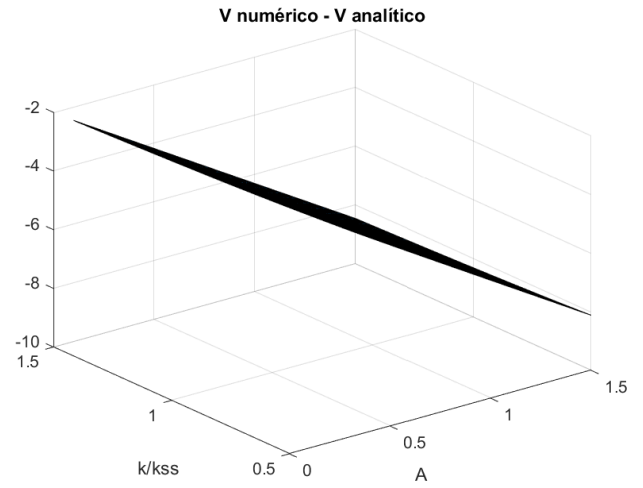
(a) Fun. Valor numérica

(b) Fun. Valor analítica

Figura C.11: Funciones de valor sin saltos

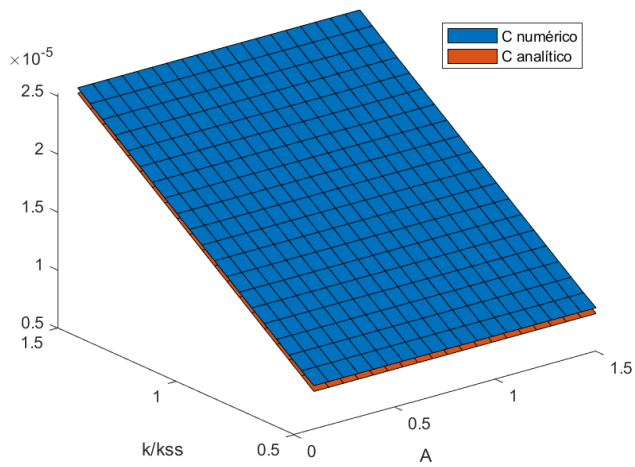


(a) Fun. Valor.

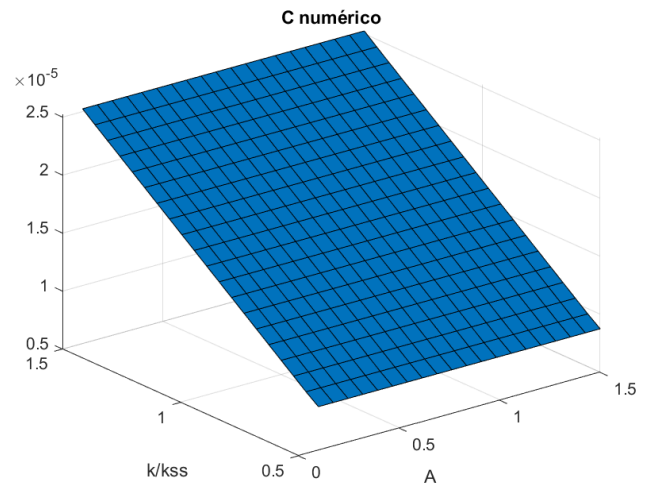


(b) Diferencia Fun. Valor

Figura C.12: Diferencia función de valor sin saltos



(a) Fun. consumo.



(b) Fun. Consumo numérico

Figura C.13: Función de consumo sin saltos

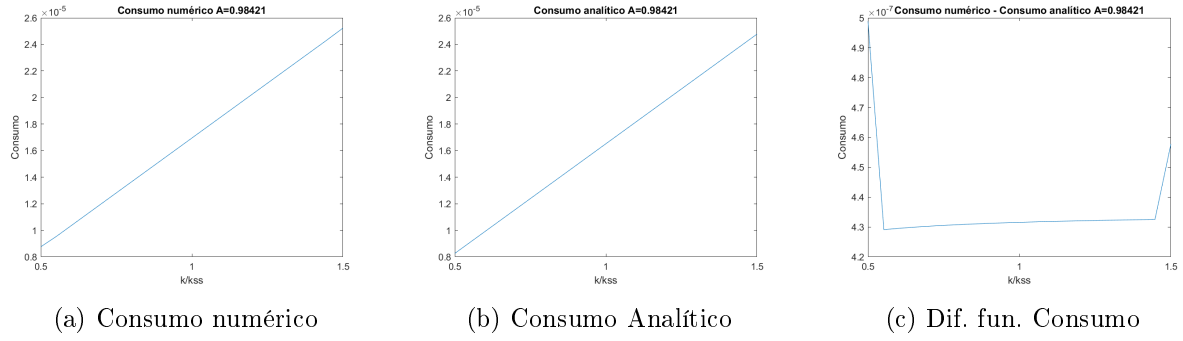


Figura C.14: Función de consumo $A=0.984$ sin saltos

Al incluir los saltos en la dinámica del capital se obtienen los siguientes resultados:

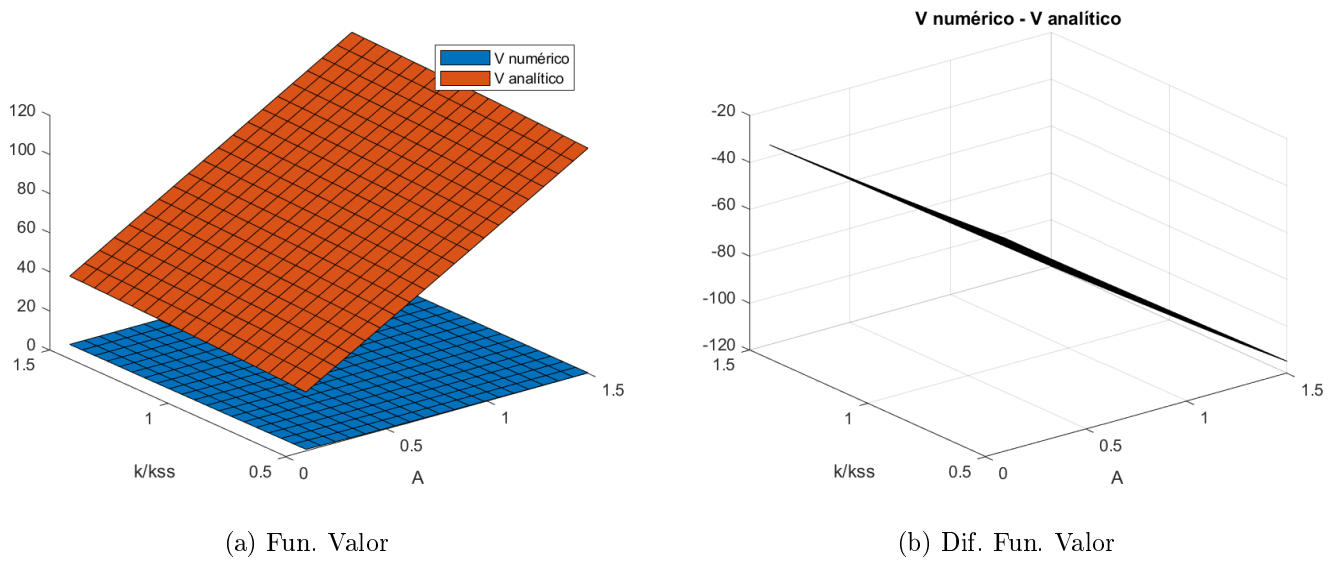
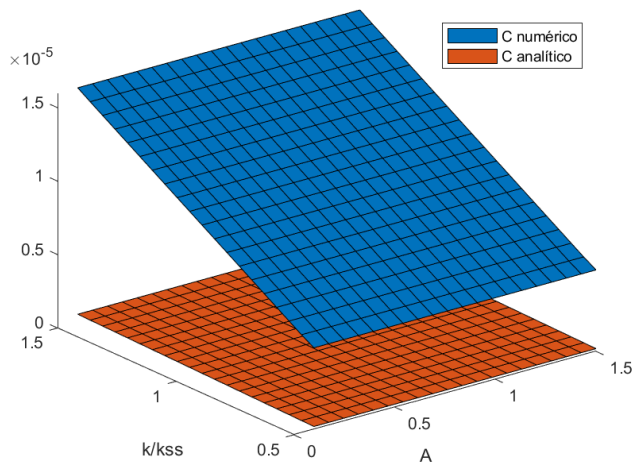
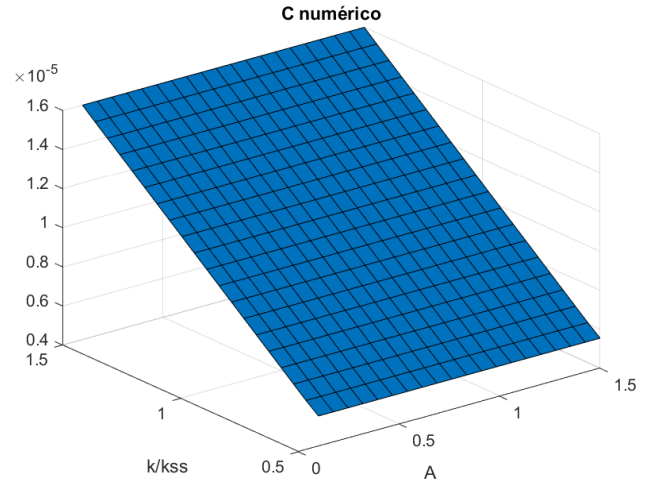


Figura C.15: Diferencia Función de valor con saltos $\lambda = 0,03$

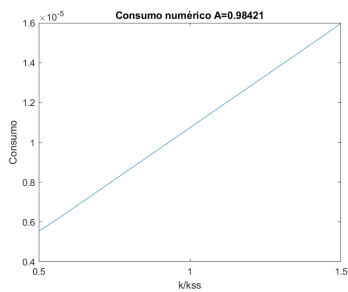


(a) Fun. Consumo

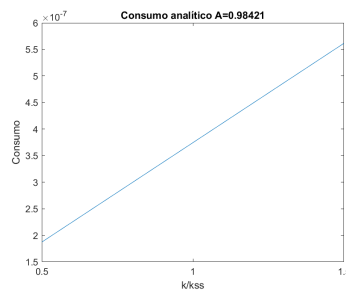


(b) Fun. Consumo numérico

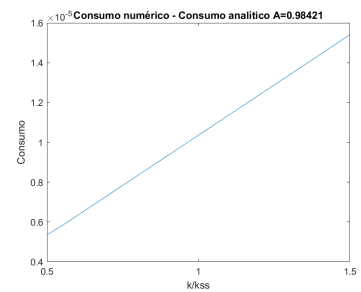
Figura C.16: Diferencia función de consumo con saltos $\lambda = 2$



(a) consumo numérico



(b) Consumo Analítico



(c) Dif. fun. Consumo

Figura C.17: Diferencia función de consumo $A=0.984$ con saltos $\lambda = 2$

Los resultados muestran que al momento de incluir un salto en la dinámica de capital los agentes al principio suavizan su consumo, se puede explicar que al incluir mayor incertidumbre debida a los saltos, los agentes tienen un cambio de prioridades, aumentan su deseo de ahorrar por tanto aumentan su riqueza esperada y por tanto disminuye su consumo.

Los resultados cuando se toman distintos valores de λ son:

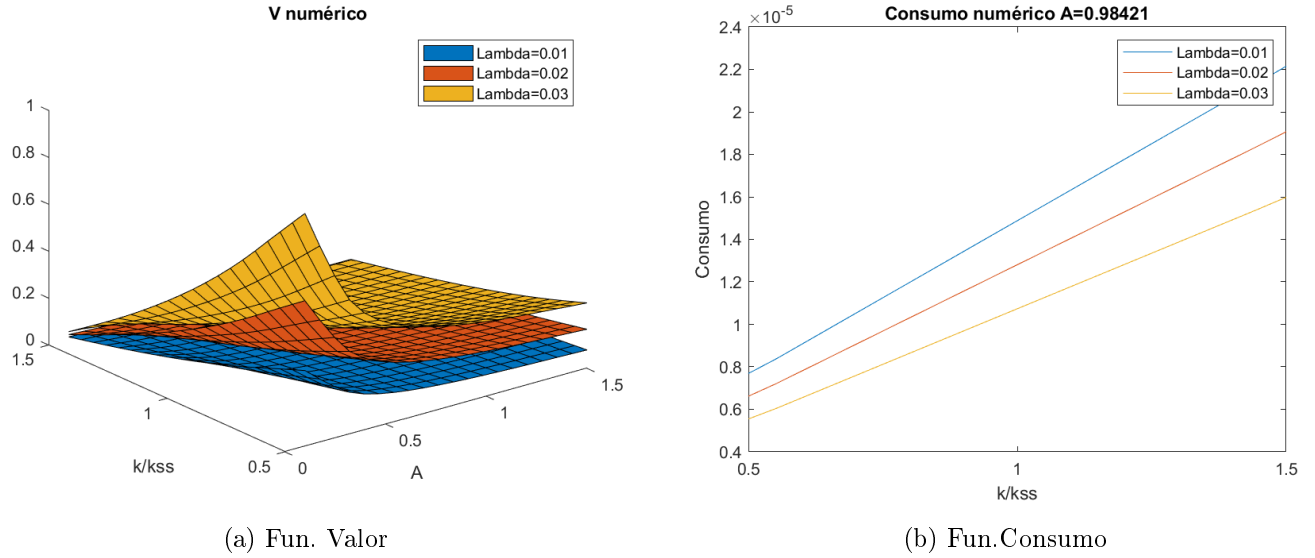


Figura C.18: Función de valor y consumo con distinto λ

En este caso cuando $\alpha = \gamma$ al aumentar la tasa de arribo de los saltos λ la política óptima de consumo disminuye, se puede decir que frente a un choque los agentes deciden conservar sus activos de valor y sacrificar consumo. Resultado que esta de acuerdo con elasticidad de la función de consumo analítica del corolario (2), con respecto a λ para saltos que se distribuyen normal $N(\nu, \varphi^2)$

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda} = -\frac{e^{(1-\gamma)\nu + \frac{(1-\gamma)^2 \varphi^2}{2}} - 1}{\gamma} K_t < 0$$

En la tabla siguiente, se muestra la solución para calibraciones distintas, donde no se cumple la condición $\alpha = \gamma$ por tanto no es comparable con la solución analítica. Particularmente se incrementó los parámetros asociados a la incertidumbre en la productividad total de los factores y en la dinámica de capital, tomando los saltos distribuidos con la normal truncada.

| Parámetro | Calibración 1 | Calibración 2 | Calibración 3 | Nombre |
|-------------|---------------|---------------|---------------|---------------------------|
| λ | 0.01 | 0.02 | 0.03 | Intensidad de los saltos |
| α | 0.5 | 0.7 | 0.4176 | Elasticidad del capital |
| γ | 0.7 | 0.6 | 0.7 | Aversión al riesgo |
| ρ | 0.05 | 0.05 | 0.05 | Factor de descuento |
| σ | 0.4 | 0.5 | 0.7 | Volatilidad del capital |
| δ | 0.05 | 0.05 | 0.05 | Depreciación del capital |
| η | 0.001 | 0.01 | 0.1 | Volatilidad en A |
| β | 1.0001 | 1.0001 | 1.0001 | Velocidad de ajuste en A |
| ω | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Media de largo plazo en A |
| ν | -0.055 | -0.055 | -0.055 | Media de los saltos |
| φ^2 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | Varianza de los saltos |

Cuadro C.8: Parámetros del modelo con L_t variable incluido saltos con $\alpha \neq \gamma$.

Los resultados para la función de valor y de consumo de las calibraciones son:

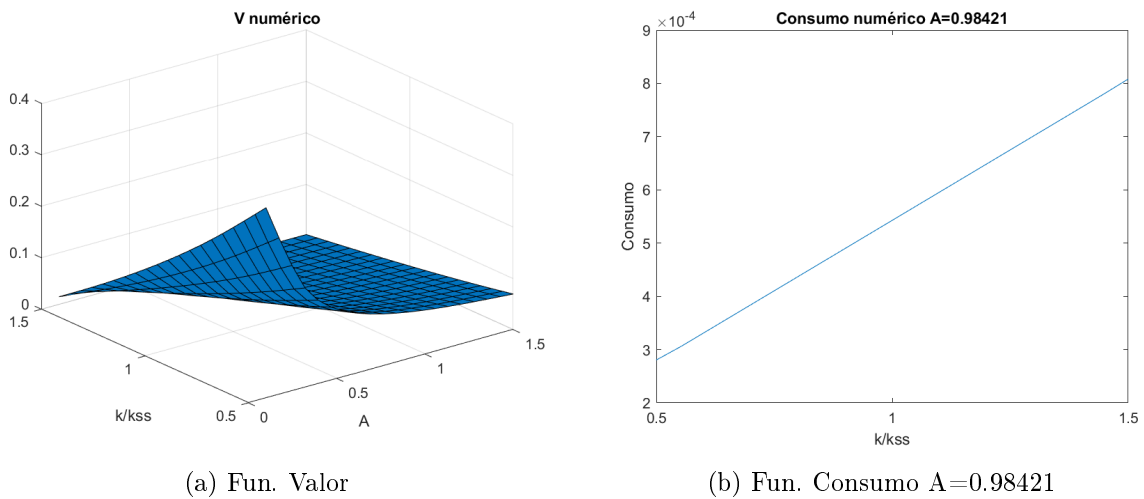


Figura C.19: Función de valor y consumo con calibración distinta 1.

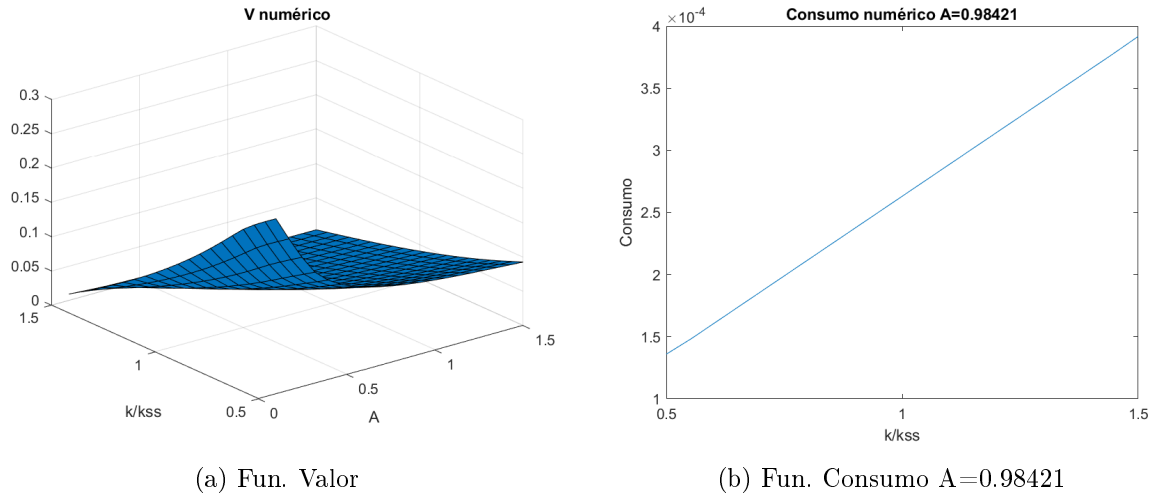


Figura C.20: Función de valor y consumo con calibración distinta 2.

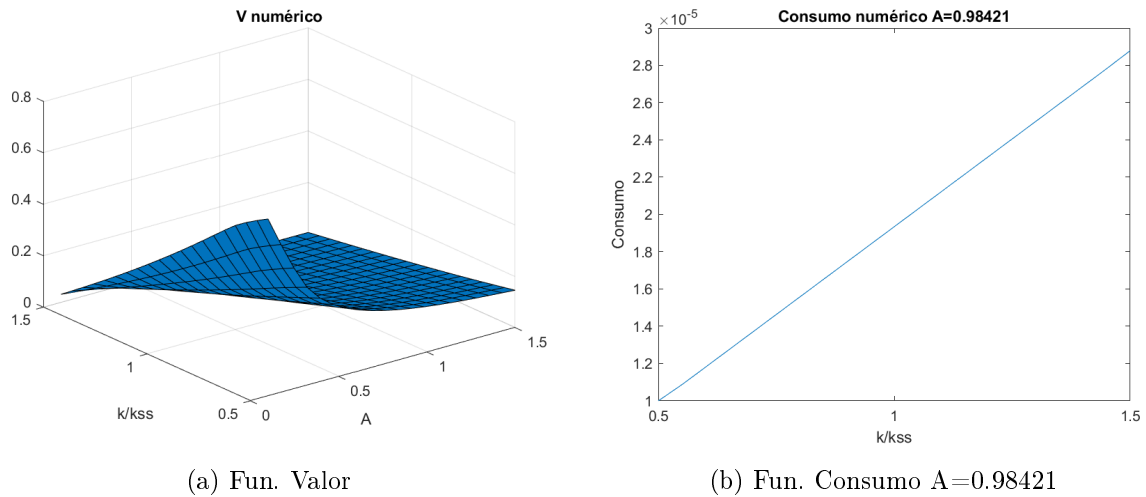


Figura C.21: Función de valor y consumo con calibración distinta 3.

Esto nos muestra que al incrementar los parámetros asociados a la incertidumbre del modelo los agentes experimentan una disminución en su consumo.

Como ejemplo, se usa una distribución Normal truncada $\bar{N}(-0,055, 0,041)$, una distribución Gamma con media $\mu = 0,1$ y $SD = 0,058$, y además se usa otro tipo de distribuciones como una normal con parámetros $N(0, 1)$, una exponencial de parámetro $\nu = 0,4$, la uniforme $U(a, b) = U(3, 7)$ y la distribución de saltos de tamaño constante $z = 1$, para tratar de mostrar si existe algún tipo de sensibilidad con respecto a la distribución de los saltos.

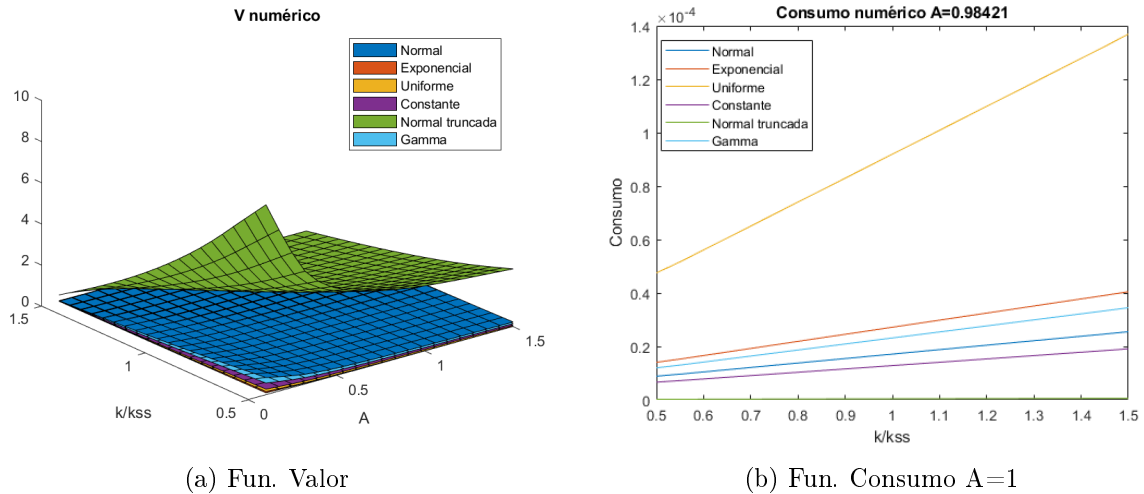


Figura C.22: Función de valor y consumo con distintas distribuciones.

Esto nos muestra que existe cierto grado de sensibilidad de la función de valor y de la política óptima de consumo con respecto al tipo de distribución de los saltos, mostrnado sierta similitud en el resultado para la distribución normal truncada, Gamma y exponencial.

C.3.1. Tasa de convergencia

Los resultados para la tasa de convergencia para este modelo en la grilla de capital k son los siguientes y muestran que el orden de convergencia es consistente en la grilla y su valor coincide con el orden teórico de 1.

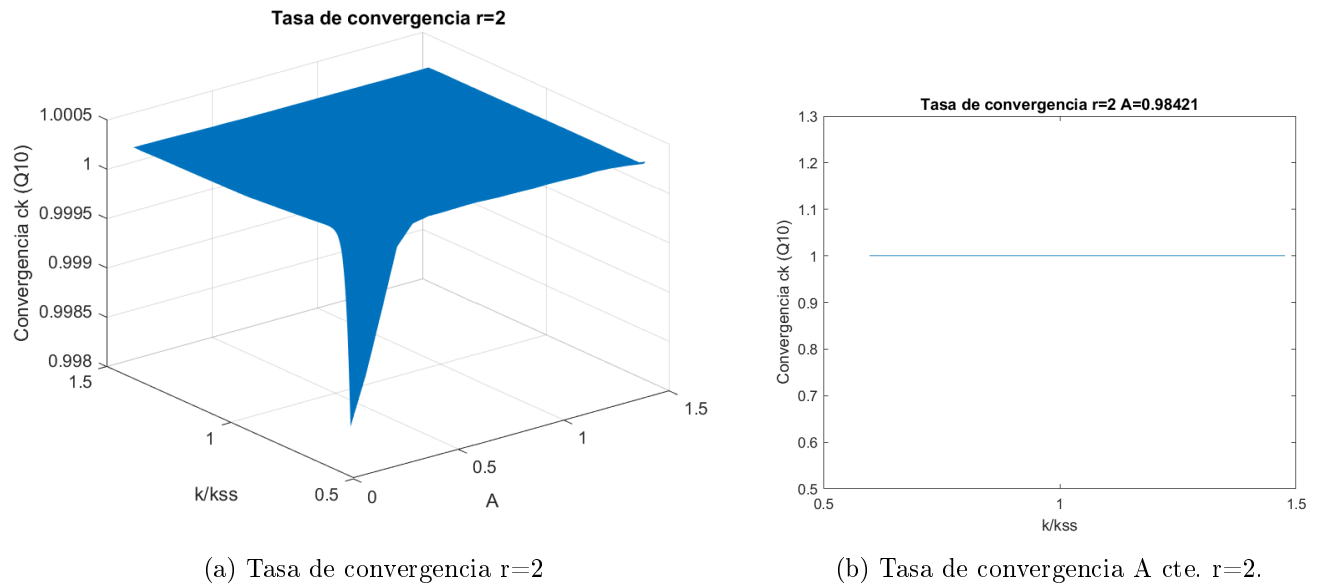


Figura C.23: Tasa de convergencia Modelo A Variable L constante.

C.3.2. Prueba de convergencia para el caso A variable $l \equiv 1$ constante incluido saltos en el capital

Los resultados en el error de aproximación que se presentan a continuación se establecen para el primer valor de $\lambda = 0,03$.

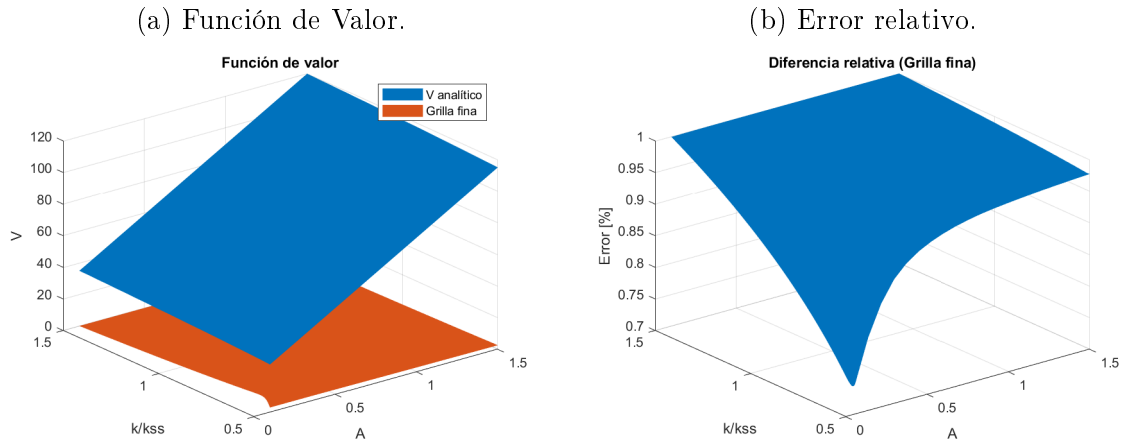


Figura C.24: Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital.

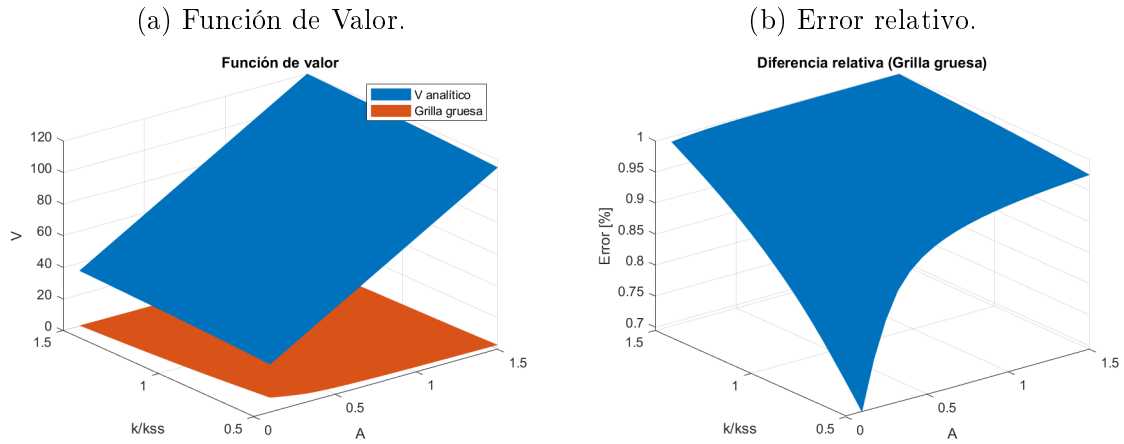


Figura C.25: Error de aproximación en la función de valor usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital.

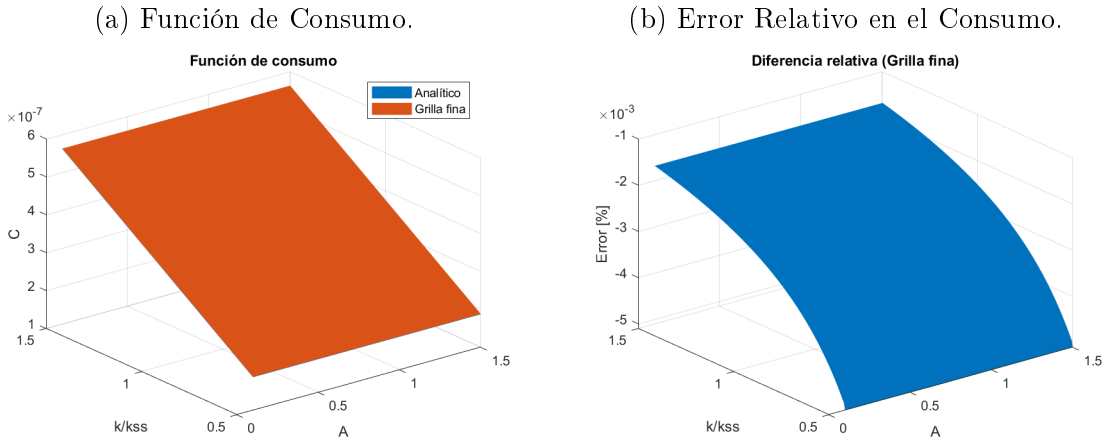


Figura C.26: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital.

La solución numérica del consumo con grilla fina presenta un error relativo de aproximación que va en un rango del -0.005% a -0.015%

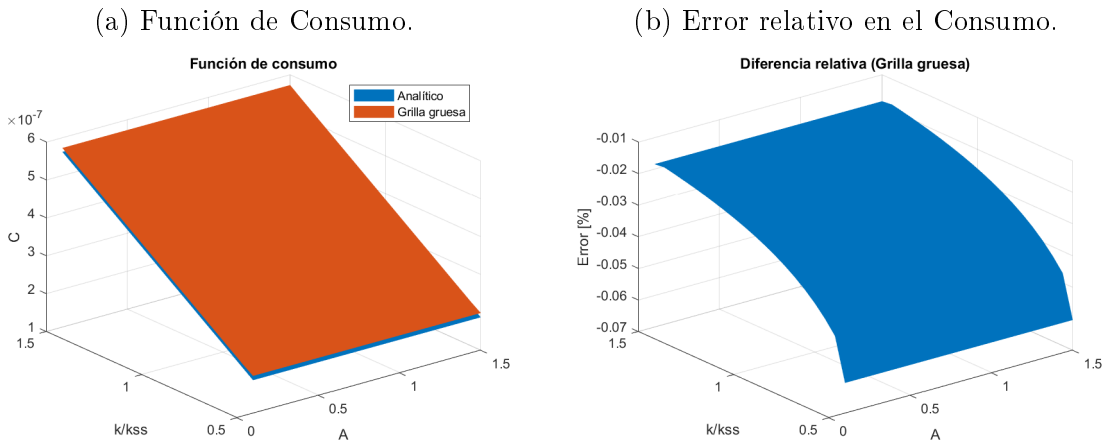


Figura C.27: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital.

El error relativo de aproximación con grilla gruesa presenta un incremento en comparación con la grilla fina, toma en un rango entre -0.07% a -0.02%

para este modelo, también se comparan los resultados en términos de velocidad y precisión, son los siguientes. Nuevamente se establece la integral sobre la función de consumo como la métrica de precisión.

| Modelo | Grillas | Velocidad(seg.) | Integral del Consumo |
|-------------|---------------|-----------------|----------------------|
| Avar, Lcons | J=200 | 0.34826 | 1.0666e-09 |
| | J=20 | 0.030456 | 1.1438e-09 |
| | Fila 2/Fila 1 | 0.08745 | 1.0723 |

Cuadro C.9: Velocidad y precisión del modelo 2

los resultados muestran que reducir el número de puntos de la grilla de 200 a 20 da como resultado un aumento aproximado de once veces en la velocidad computacional y un deterioro de la precisión en aproximadamente 7.23 %. Mostrando un mejor resultado a favor de la grilla fina.

C.4. Solución para el modelo con un Browniano geométrico en la PTF.

Para este caso la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman a resolver corresponde a:

$$-\rho V(K_t, A_t) + \sup_{C_t \geq 0, l_t \in (0,1)} \{[\mathcal{A}^{C_t, l_t} V](K_t, A_t) + f(C_t, l_t)\} = 0, \quad K_t \geq 0, A_t > 0. \quad (\text{HJB5})$$

Para cada $(K_t, A_t) \in \mathbb{R}_+^2$ el máximo en la ecuación HJB satisface:

$$(\hat{c}(K_t, A_t, V_k), \hat{l}(K_t, A_t, V_k)) = \arg \max_{C_t \geq 0, l_t \in (0,1)} [\mathcal{A}^{C_t, l_t} \hat{V}](K_t, A_t) + f(C_t, l_t)$$

Luego la ecuación de HJB se transforma en:

$$-\rho \hat{V}(K_t, A_t) + \{[\mathcal{A}^{\hat{C}_t, \hat{l}_t} \hat{V}](K_t, A_t) + f(\hat{c}(K_t, A_t, V_k), \hat{l}(K_t, A_t, V_k))\} = 0.$$

Por último el teorema de verificación establece que, $V = \hat{V}$ resuelve la ecuación (HJB5) y garantiza la existencia de una regla de política óptima \hat{C}_t y \hat{l}_t . La ecuación resultante es:

$$\begin{aligned} \rho V(K_t, A_t) = & f(\hat{C}_t, \hat{l}_t) + (A_t K_t^\alpha \hat{l}_t^{1-\alpha} - \delta K_t - \hat{C}_t) \frac{\partial V}{\partial K_t}(K_t, A_t) + \beta A_t \frac{\partial V}{\partial A_t}(K_t, A_t) + \\ & \frac{1}{2} \sigma^2 K_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K_t^2}(K_t, A_t) + \frac{1}{2} \eta^2 A_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2}(K_t, A_t) + \lambda \int V(e^z K_t, A_t) G(z) dz - \lambda V(K_t, A_t). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Al igual que en la solución planteada en el capítulo 1 sección (1.4.3), se usan las condiciones de primer orden y las restricciones planteadas sobre l_t para encontrar numéricamente las políticas óptimas de \hat{C}_t y \hat{l}_t :

$$l_t \in (0, 1)$$

$$l_t > \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - \psi(1 - \gamma)}, \text{ condición que garantiza la existencia de la inversa.}$$

Como se explico en la sección anterior (1.4.5) para ciertos casos, γ debe cumplir con las siguientes condiciones para la existencia de la política óptima \hat{l}_t :

$$\text{mín}\{\gamma > \frac{\psi}{\alpha + \psi}; \gamma > 1\}$$

Conocida \hat{l}_t se usa este resultado para hallar \hat{C}_t .

Siguiendo el esquema de diferencias finitas presentado en la sección anterior la ecuación de Bellman maximizada (C.4), su forma discreta es la siguiente:

$$\rho V_{i,j}^{n+1} = f(c_{ij}^n, l_{ij}^n) + \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta k} R_{i,j,F}^{n+} + \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta k} R_{i,j,B}^{n-} + \beta A_j \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta A} +$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 K_i^2 \frac{V_{i+1,j}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta k)^2} + \frac{1}{2} \eta^2 A_j^2 \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta A)^2} + \lambda I(K_i) - \lambda V_{i,j}^{n+1}$$

Reemplazando las derivadas y reordenando términos, se puede ver de forma equivalente a:

$$\rho V_{i,j}^{n+1} = f(c_{ij}^n, l_{ij}^n) + X_{i,j} V_{i-1,j}^{n+1} + (Y_{i,j} + \nu_j) V_{i,j}^{n+1} + Z_{i,j} V_{i+1,j}^{n+1} + \chi_j V_{i,j-1}^{n+1} + \varsigma_j V_{i,j+1}^{n+1} + \lambda I(K_i) - \lambda V_{i,j}^{n+1}$$

donde

$$X_{i,j} = \frac{\sigma^2 K_i^2}{2(\Delta k)^2} - \frac{R_{i,j,B}^{n-}}{\Delta k}$$

$$Y_{i,j} = \frac{R_{i,j,B}^{n-}}{\Delta k} - \frac{R_{i,j,F}^{n+}}{\Delta k} - \frac{\sigma^2 K_i^2}{(\Delta k)^2}$$

$$Z_{i,j} = \frac{R_{i,j,F}^{n+}}{\Delta k} + \frac{\sigma^2 K_i^2}{2(\Delta k)^2}$$

$$\nu_j = -\frac{\beta A_j}{\Delta A} - \frac{\eta^2 A_j^2}{(\Delta A)^2}$$

$$\chi_j = \frac{\eta^2 A_j^2}{2(\Delta A)^2}$$

$$\varsigma_j = \frac{\beta A_j}{\Delta A} + \frac{\eta^2 A_j^2}{2(\Delta A)^2}$$

Esto permite resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\rho + \lambda)V_{i,j}^{n+1} = f(c_{i,j}^n, l_{i,j}^n) + A^n V_{i+1,j}^{n+1} + \lambda I(K_i)$$

Donde:

$$\mathbf{A}^n = \tilde{A}(X_{i,j}, Y_{i,j}, Z_{i,j}) + D(\nu_j, \chi_j, \varsigma_j)$$

$$(\rho + \lambda)V^{n+1} - \mathbf{A}^n V^{n+1} = f(c^n, l^n) + \lambda I(k)$$

$$((\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n)V^{n+1} = f^n + \lambda I(k)$$

$$\mathbf{B}^n = (\rho + \lambda)\mathbf{I} - \mathbf{A}^n \quad \mathbf{b}^n = f^n + \lambda I(k)$$

$$\mathbf{B}^n V^{n+1} = \mathbf{b}^n$$

Finalmente la función de valor se obtiene resolviendo:

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} \mathbf{b}^n$$

El algoritmo tiene los siguientes pasos:

- Parte de un Guess inicial $V^0 = \frac{k^{1-\alpha\gamma}}{1-\alpha\gamma} A^{-\gamma}$
- Calcula $(V_{i,j}^n + 1)'$ usando el método upwind.
- Las condiciones de primer orden permiten resolver el sistema simultaneo dado por:

$$C_t = (1 - l_t) \frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma} (V_k)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

$$(1 - l_t) \frac{\psi(1-\gamma)-\gamma}{\gamma} l_t^\alpha = \frac{1-\alpha}{\psi} A_t K_t^\alpha (V_k)^{\frac{1}{\gamma}}$$

- Calcula l^n como $l_{i,j}^n = \frac{1-\alpha}{\psi} H^{-1} \left(A_j K_i^\alpha ((V_{i,j}^n)')^{\frac{1}{\gamma}} \right)$
- Calcula c^n como $c_{i,j}^n = (f')^{-1}[(V_{i,j}^n)']$

- Encuentra

$$V^{n+1} = (\mathbf{B}^n)^{-1} f^n$$

- Se detiene cuando la función de valor alcanza la tolerancia indicada $\|V^{n+1}(K_i, A_j) - V^n(K_i, A_j)\|^2 < tol$, donde $10^{-4} \leq tol \leq 10^{-6}$
- Las aproximaciones de la función de valor son calculadas en el intervalo $[0,1k,0,5K]$ para establecer la convergencia del modelo.
- El número de pasos en cada variable es:

| Variable | Valor | Nombre |
|----------|-------|----------------------|
| Kp | 20 | Número de pasos en K |
| Ap | 20 | Número de pasos en A |

Cuadro C.10: Número de pasos en las variables

La precisión del algoritmo se establece comparando los resultados de la solución numérica del modelo con la solución analítica desarrollada en la proposición (3).

$$V(K_t, A_t) = \Gamma \frac{K_t^{1-\alpha\gamma}}{1-\alpha\gamma} A_t^{-\gamma} + g(A_t)$$

con

$$\Gamma = (1-l)^{\psi(1-\gamma)-\gamma} \left(\frac{\psi}{1-\alpha} \right)^\gamma$$

En el siguiente cuadro se muestra la calibración de los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \eta, \rho, \sigma$ y ω siguiendo las calibraciones de los estudios Parra-Alvarez (2017), Posch (2011), Achdou et al. (2017) y Moll (2014).

| Parámetro | Valor 1 | Valor 2 | Valor 3 | Valor 4 | Nombre |
|-------------|---------|---------|---------|---------|-----------------------------------|
| λ | 0 | 0.03 | 0.07 | 0.1 | Intensidad de los saltos |
| α | 0.4176 | 0.4176 | 0.4176 | 0.4176 | Elasticidad del capital |
| γ | 2.1250 | 2.1250 | 2.1250 | 2.1250 | Aversión al riesgo |
| ρ | 0.0158 | 0.0350 | 0.0607 | 0.0801 | Factor de descuento |
| ψ | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | Medida de preferencia por el ocio |
| σ | 0.0092 | 0.0092 | 0.0092 | 0.0092 | Volatilidad del capital |
| δ | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | Depreciación del capital |
| ω | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Media de largo plazo |
| η | 0.0072 | 0.0072 | 0.0072 | 0.0072 | Volatilidad en A |
| β | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Velocidad de ajuste |
| ν | -0.055 | -0.055 | -0.055 | -0.055 | Media de los saltos |
| φ^2 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | Varianza de los saltos |

Cuadro C.11: Parámetros del modelo con A y l variables incluido saltos.

Los parámetros descritos para este proceso de optimización muestran los siguientes resultados

para la función de valor y las funciones de política y sus diferencias, en todos los casos los saltos se distribuyen por medio de una normal truncada con parámetros $a = -0,5$ y $b = 0,2$

Para el caso sin saltos $\lambda = 0$ son los siguientes:

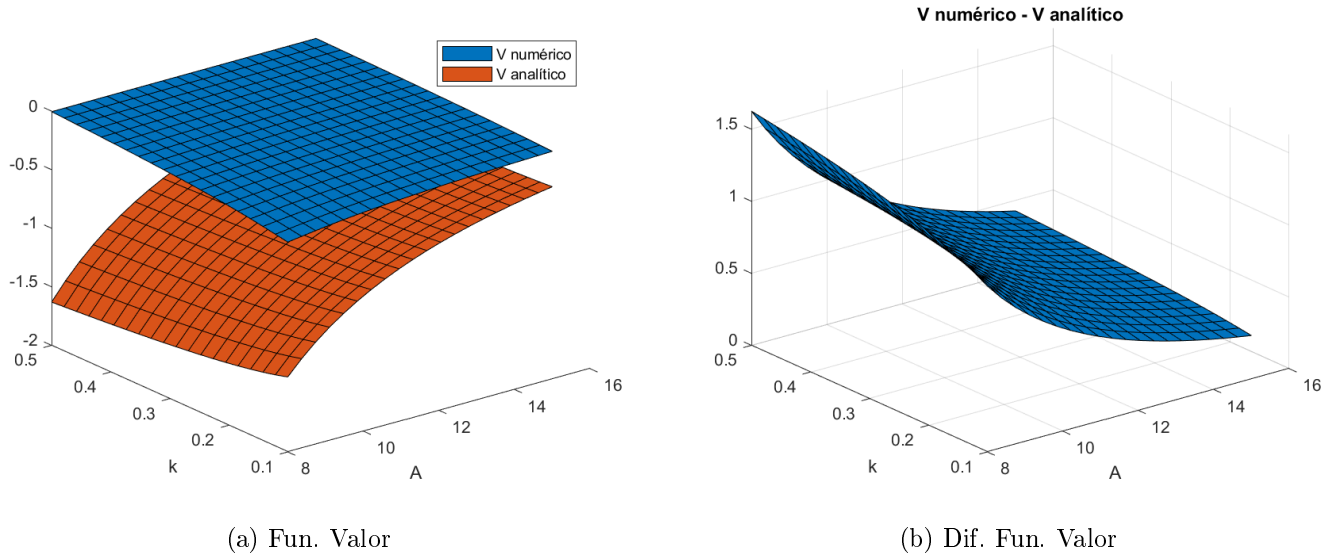


Figura C.28: Función de valor sin saltos $\lambda = 0$

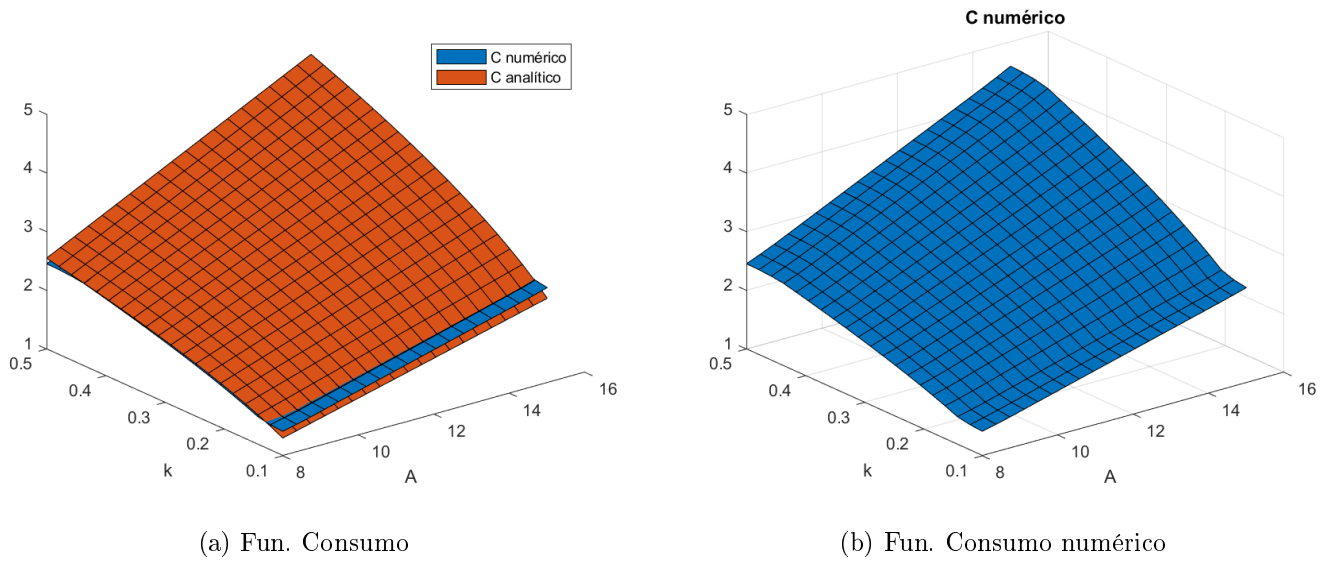


Figura C.29: Función de consumo sin saltos $\lambda = 0$

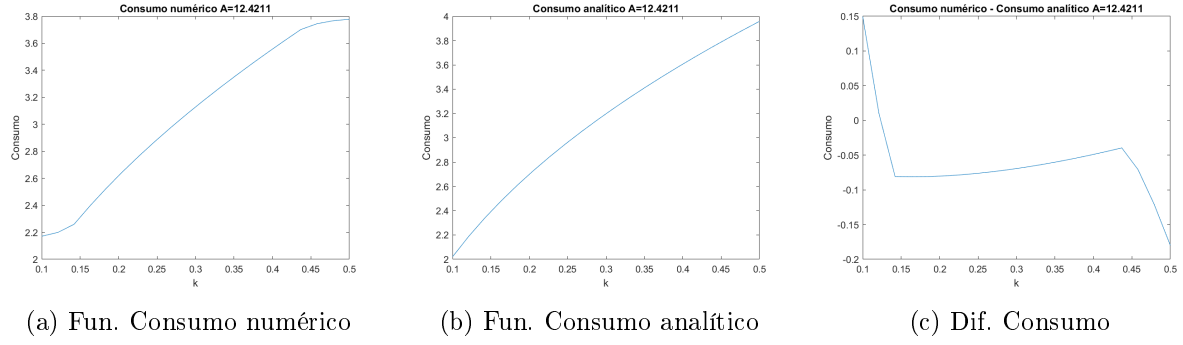


Figura C.30: Función de consumo A cte. sin saltos $\lambda = 0$

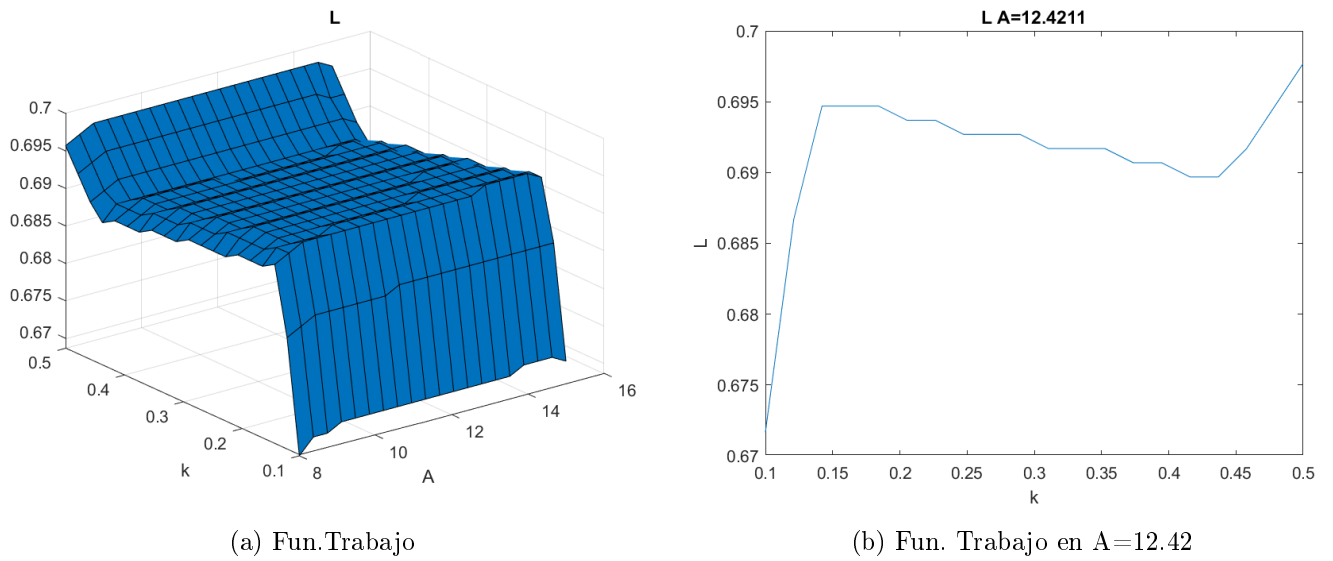
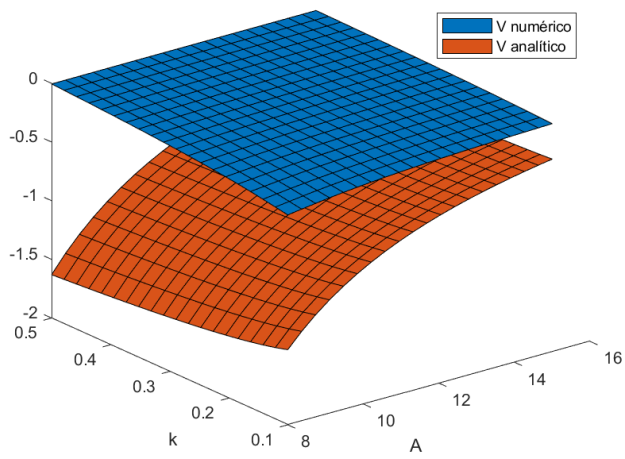
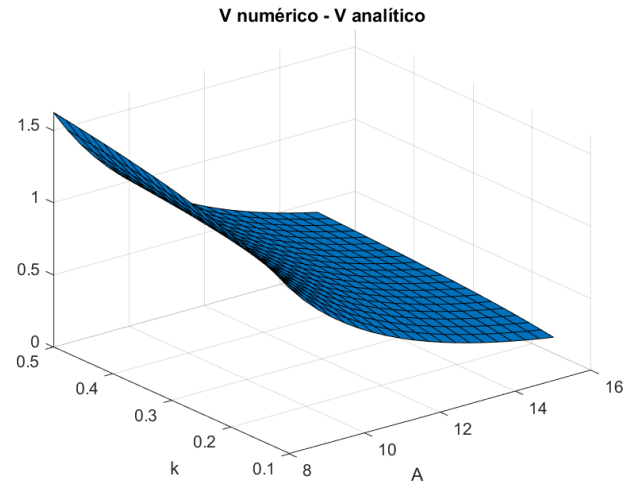


Figura C.31: Función de Trabajo sin saltos $\lambda = 0$

El resultado al incluir los saltos, para $\lambda = 0,03$ es:

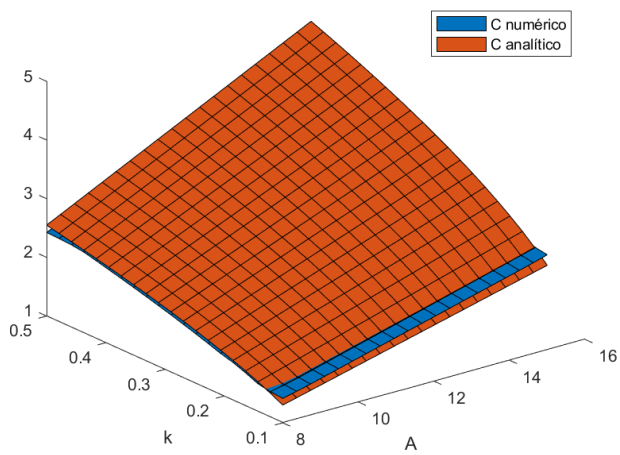


(a) Fun. Valor

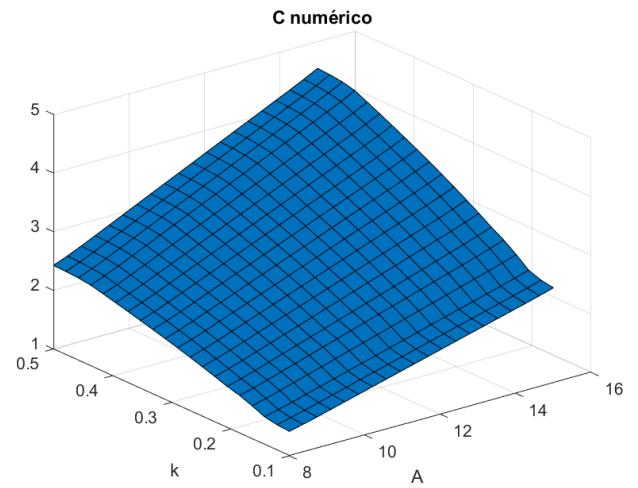


(b) Dif. Fun. Valor

Figura C.32: Función de valor con saltos $\lambda = 0,03$



(a) Fun. Consumo



(b) Fun. Consumo numérico

Figura C.33: Función de consumo con saltos $\lambda = 0,03$

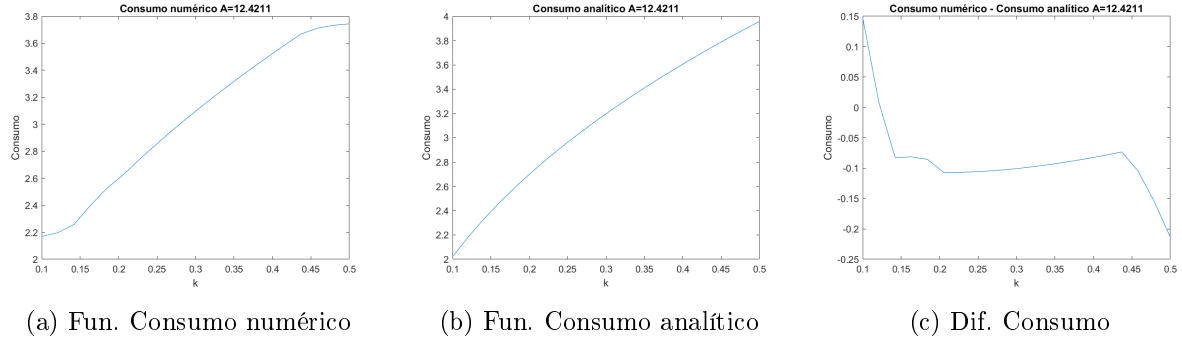


Figura C.34: Función de consumo en A cte con saltos $\lambda = 0,03$

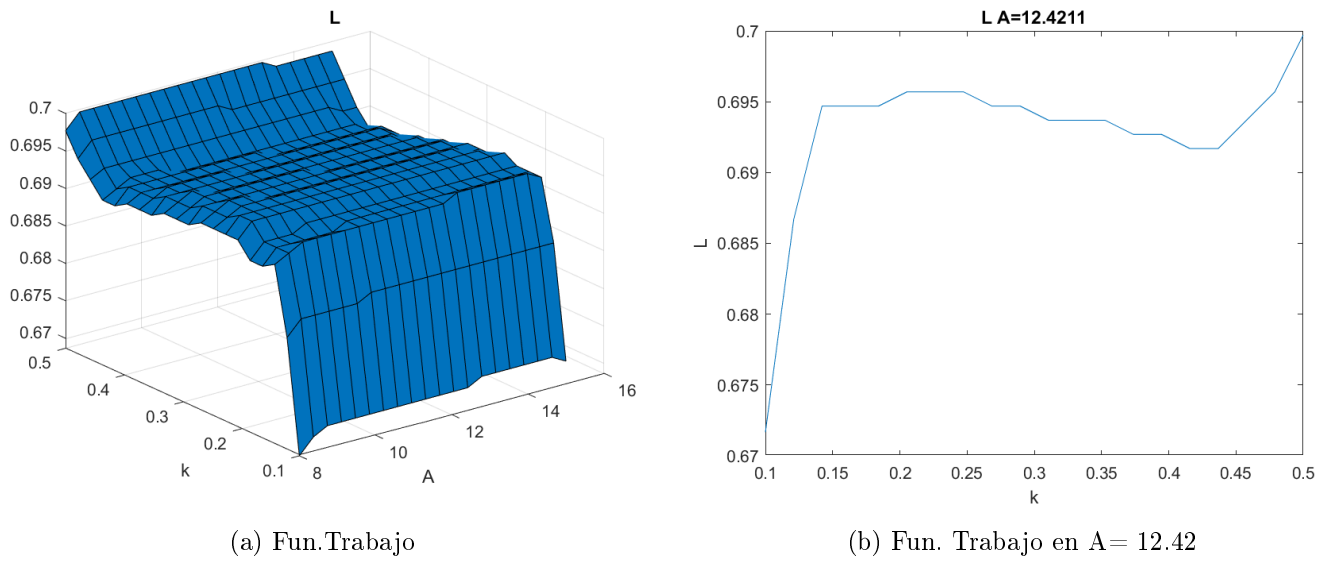
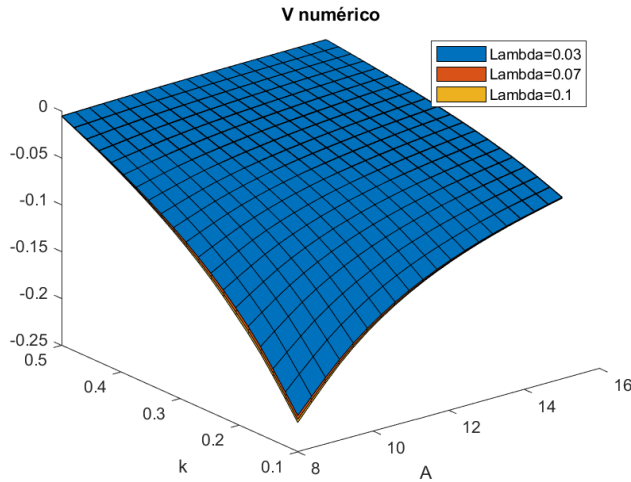


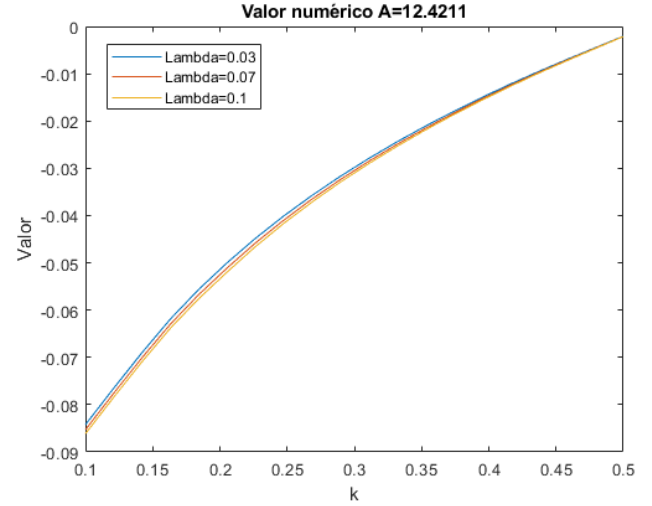
Figura C.35: Función de Trabajo con saltos $\lambda = 0,03$

Los resultados muestran que al incluir un choque inesperado dado por los saltos en la dinámica de capital, los individuos tienen un motivo precautorio mas fuerte, por tanto aumentan su riqueza esperada y se presenta una disminución en la política de consumo. La política de trabajo tiene un comportamiento constante, similar a lo que ocurre con la solución analítica.

Ahora se presentan los resultados con los distintos valores de la tasa de arribo de los saltos λ :

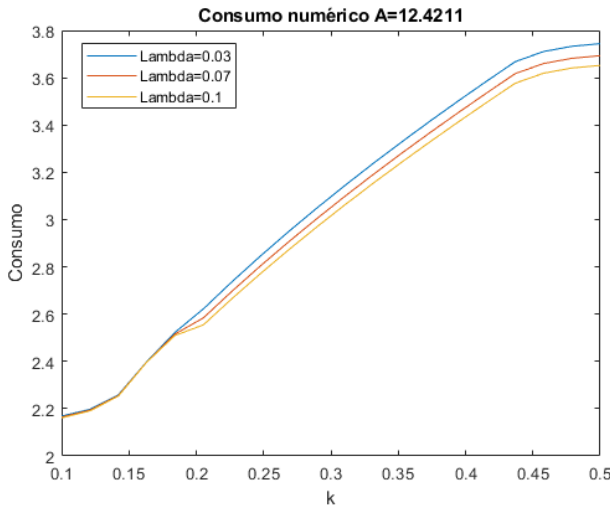


(a) Fun. Valor numérica

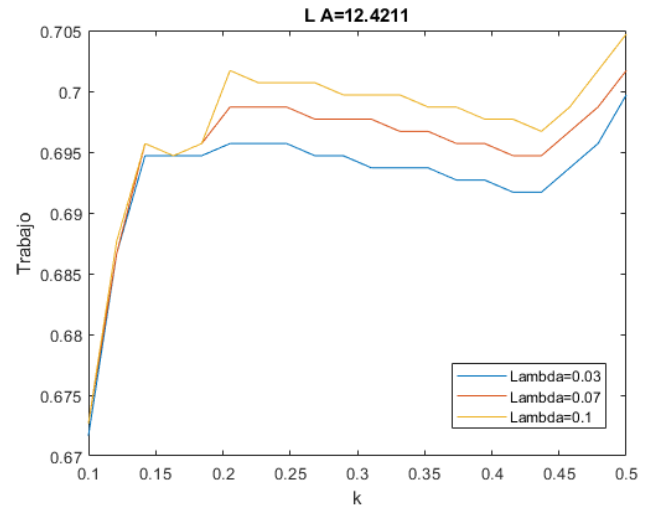


(b) Fun. Valor en $A=3.89$

Figura C.36: Función de valor con saltos distinto λ



(a) Fun. Consumo en $A=3.89$



(b) Fun. Trabajo en $A=3.89$

Figura C.37: Funciones de política con saltos distinto λ

Se observa que un aumento en la tasa de arribo de los saltos representa una disminución del la política de consumo, en ese caso los agentes tienen un comportamiento más prudente, que los lleva aumentar su deseo de ahorrar y su riqueza esperada, por tanto se tiene una disminución de su consumo. La política de trabajo mantiene su comportamiento estable.

Las siguientes gráficas muestran la variación de las funciones de política cuando se toman distintos valores en el parámetro γ (aversión al riesgo), considerando saltos en la dinámica de capital:

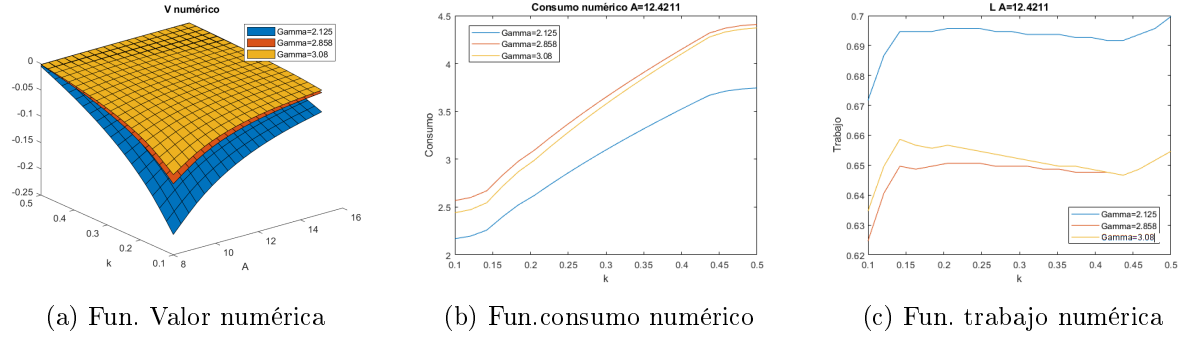


Figura C.38: Funciones de valor y política para distinto γ incluido saltos

El comportamiento del modelo es similar al que se dio cuando la PTF sigue un proceso de reversión a la media y al comportamiento analítico de las elasticidades que se muestra en el corolario (3), al aumentar la aversión al riesgo (γ) se tiene un incremento del factor de impaciencia, esto implica un incremento en el consumo. En el caso de la política de trabajo el comportamiento se da en sentido contrario.

La siguiente tabla, muestra la solución para calibraciones distintas, donde no se cumple la condición $\rho = \tilde{\rho}$ por tanto no es comparable con la solución analítica. Particularmente se incrementó los parámetros asociados a la incertidumbre en la productividad total de los factores PTF y en la dinámica de capital.

| Parámetro | Calibración 1 | Calibración 2 | Calibración 3 | Nombre |
|----------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------------------|
| λ | 0.01 | 0.02 | 0.03 | Intensidad de los saltos |
| α | 0.4176 | 0.4176 | 0.4176 | Elasticidad del capital |
| γ | 2.1250 | 2.1250 | 2.1250 | Aversión al riesgo |
| ρ | 0.0158 | 0.0286 | 0.0413 | Factor de descuento |
| $\tilde{\rho}$ | 0.1634 | 0.1735 | 0.1921 | Factor de descuento |
| ψ | 0.5 | 0.5 | 0.5 | Medida de preferencia por el ocio |
| σ | 0.0092 | 0.005 | 0.5 | Volatilidad del capital |
| δ | 0.05 | 0.05 | 0.05 | Depreciación del capital |
| η | 0.008 | 0.02 | 0.8 | Volatilidad en A |
| β | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Velocidad de ajuste en A |
| ω | 0.01 | 0.01 | 0.01 | Media de largo plazo en A |
| ν | -0.055 | -0.055 | -0.055 | Media de los saltos |
| φ^2 | 0.041 | 0.041 | 0.041 | Varianza de los saltos |

Cuadro C.12: Parámetros del modelo con A_t y L_t variable incluido saltos con $\rho \neq \tilde{\rho}$.

Los resultados de las calibraciones son:

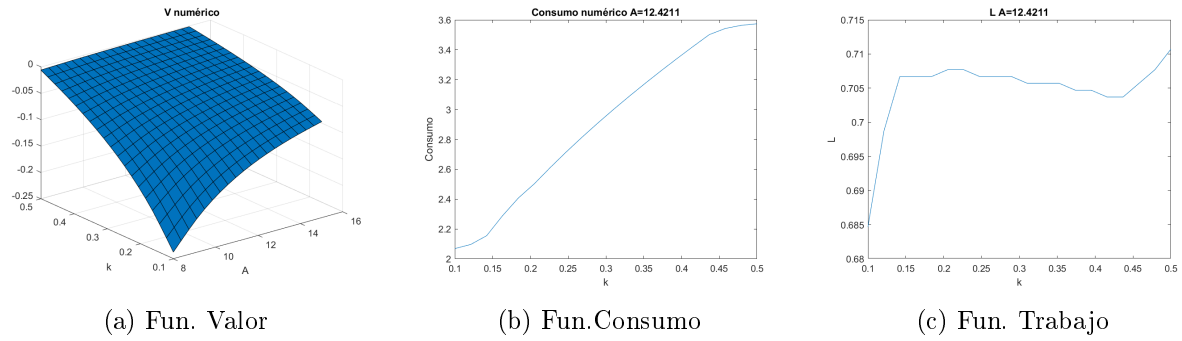


Figura C.39: Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 1.

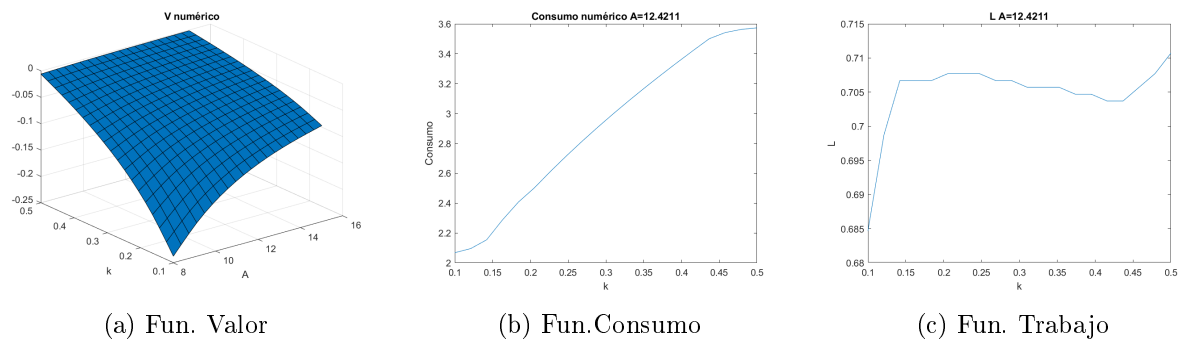


Figura C.40: Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 2.

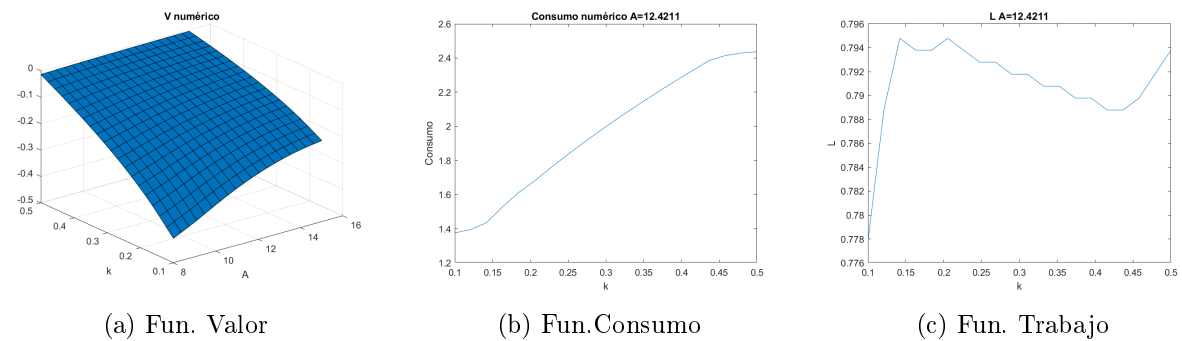


Figura C.41: Función de valor, consumo y trabajo con calibración distinta 3.

Lo anterior nos muestra que un incremento en la incertidumbre hace que los individuos aumenten su riqueza esperada y por tanto se presenta una disminución en el consumo. Se tiene un comportamiento similar a la solución analítica constante en la fuerza de trabajo.

Finalmente se muestran los resultados de la función de valor y de consumo para distintas funciones de distribución de los saltos. Como ejemplo, se usa una distribución Normal truncada $\bar{N}(-0,055, 0,041)$, una distribución Gamma con media $\mu = 0,1$ y $SD = 0,058$, y además se usa otro tipo de distribuciones como una normal con parámetros $N(0, 1)$, una exponencial de parámetro $\nu = 0,4$, la uniforme $U(a, b) = U(3, 7)$ y la distribución de saltos de tamaño constante

$z = 1$, para tratar de mostrar si existe algún tipo de sensibilidad con respecto a la distribución de los saltos.

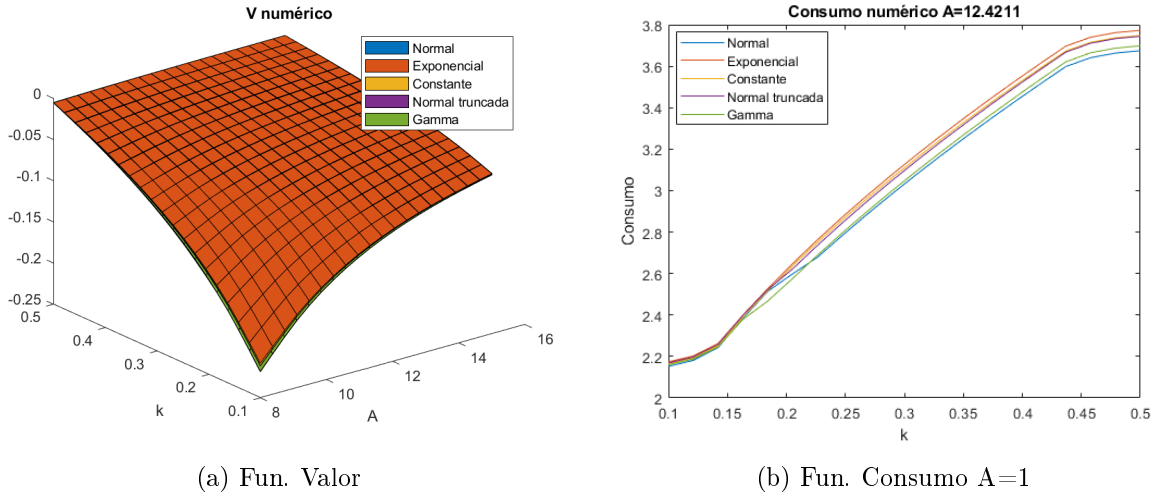


Figura C.42: Función de valor y consumo con distintas distribuciones.

En este caso los resultados muestran que con respecto al tipo de distribución de los saltos, para la función de valor y de consumo se tiene un comportamiento similar con todas las distribuciones.

C.4.1. Tasa de convergencia

La tasa de convergencia para este modelo muestra los siguientes resultados:

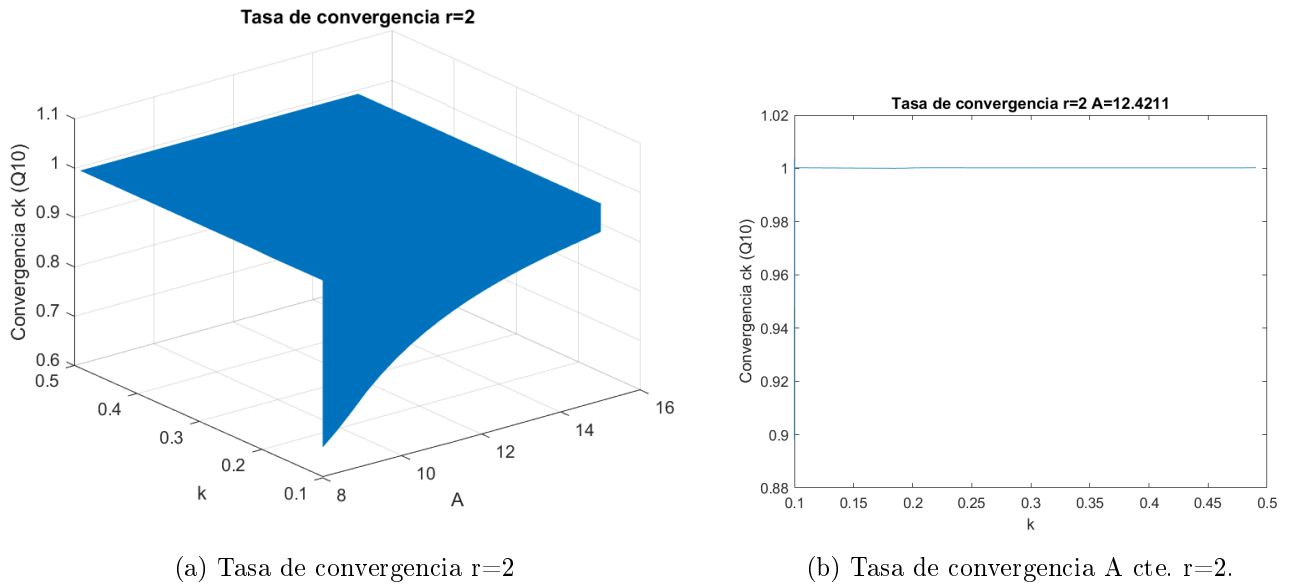


Figura C.43: Tasa de convergencia Modelo con Browniano Geométrico en PTF.

Los resultados muestran que la tasa de convergencia del modelo descrito, está alrededor de 1 y que coincide con el máximo teórico de 1.

C.4.2. Prueba de convergencia para el modelo con browniano geométrico en la PTF

Los resultados en el error de aproximación que se presentan a continuación se establecen para el valor de $\lambda = 2$, casos similares se obtienen en el otros valores de λ .

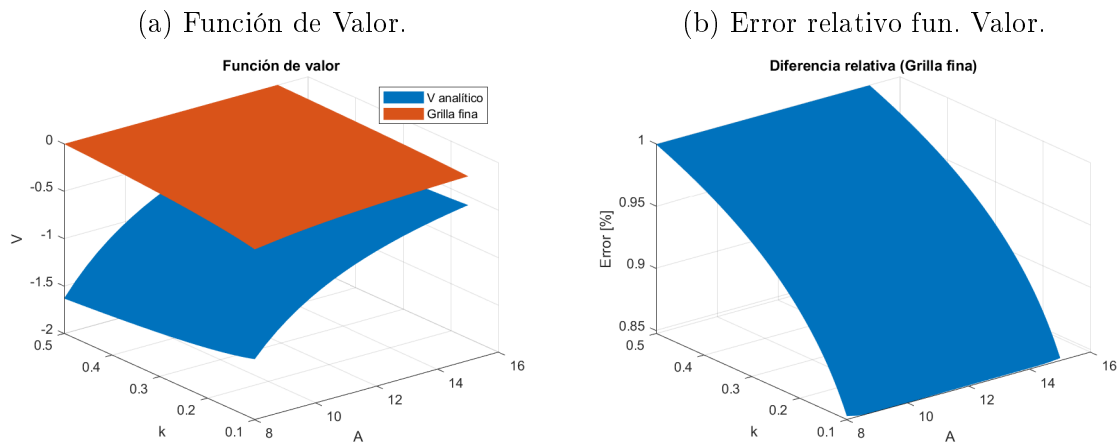


Figura C.44: Error de aproximación en la función de Valor usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital.

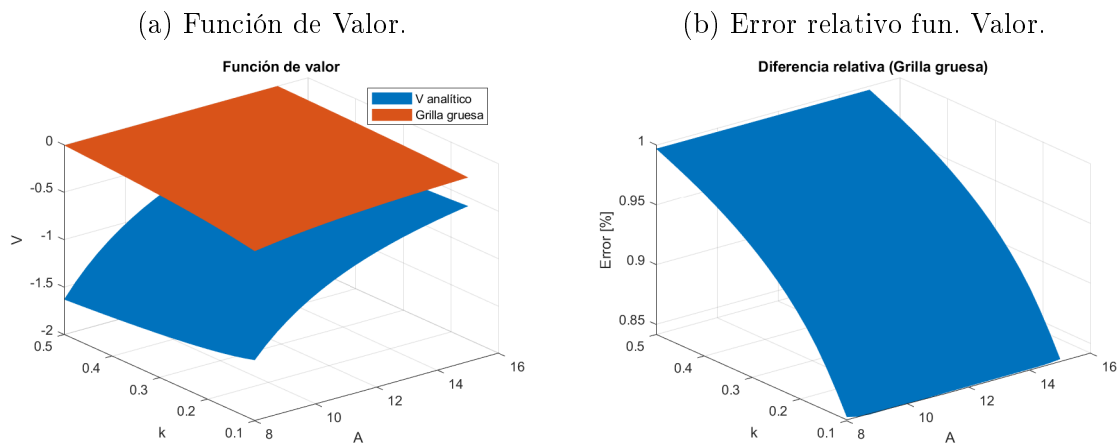


Figura C.45: Error de aproximación en la función de Valor usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital.

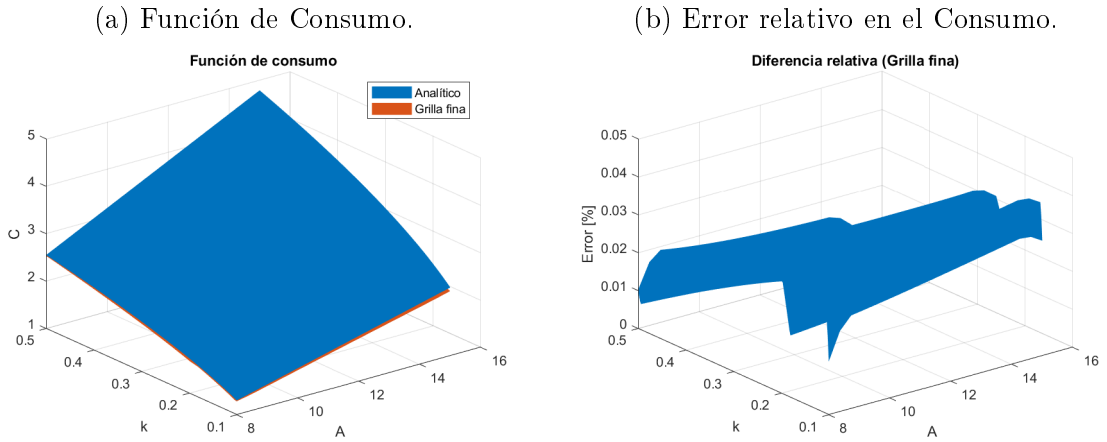


Figura C.46: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital.

La solución numérica con grilla fina es relativamente precisa con un error de aproximación que va en un rango del 0.0015 % a 0.035 %

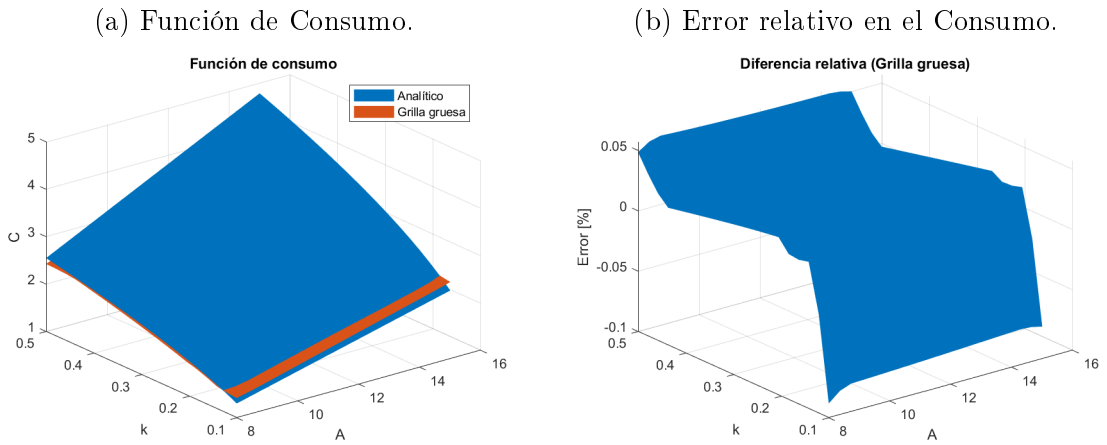


Figura C.47: Error de aproximación en la función de consumo usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital.

El error relativo de aproximación con grilla gruesa se presenta en un rango del -0.1 % a 0.05 %

El error para la política de trabajo es:

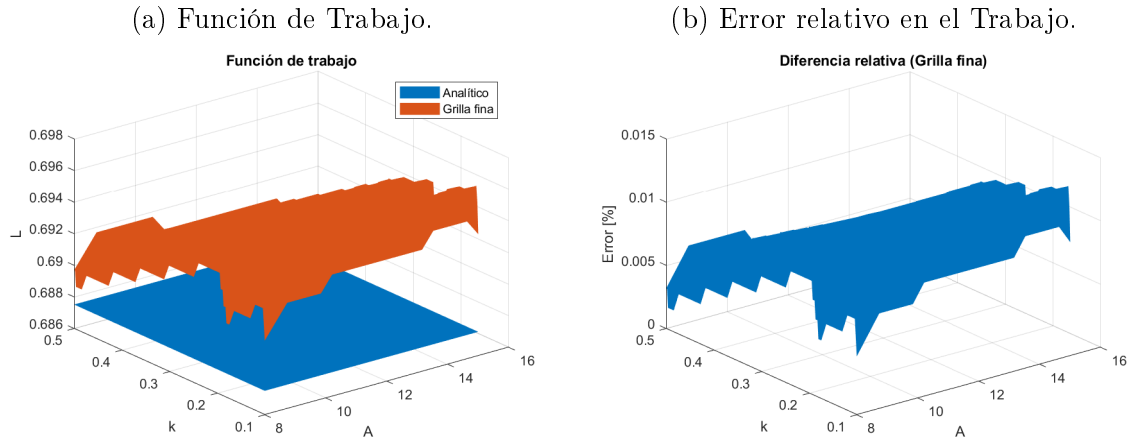


Figura C.48: Error de aproximación en la función de Trabajo usando diferencias finitas, grilla fina $J=200$ puntos en la grilla de capital.

La solución usando la grilla fina presenta un error relativo de aproximación en un rango que va del 0.002 % al 0.013 %

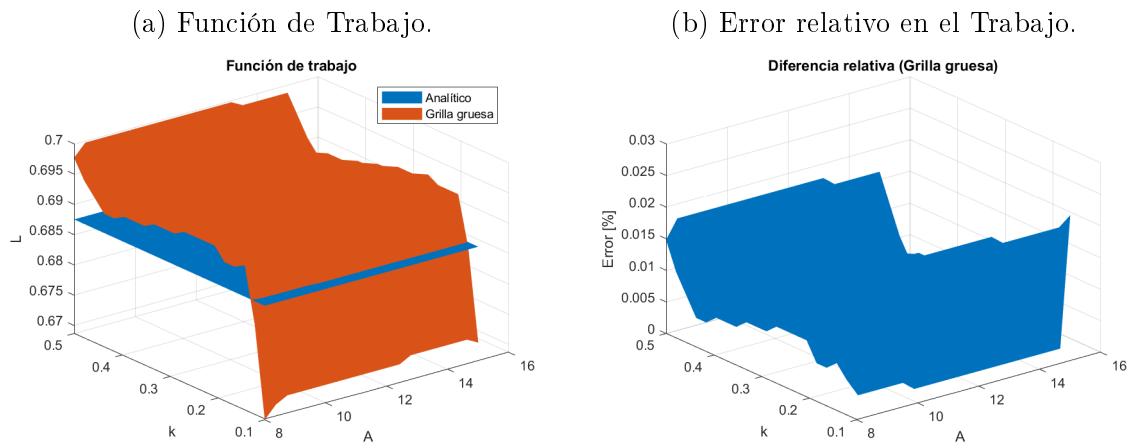


Figura C.49: Error de aproximación en la función de Trabajo usando diferencias finitas, grilla gruesa $J=20$ puntos en la grilla de capital.

El error relativo que se presenta con la grilla gruesa va aproximadamente del 0.002 % al 0.02 %
 Para este modelo, los resultados de velocidad y precisión son los siguientes. Nuevamente se establece la integral sobre el consumo como la métrica de precisión.

| Modelo | Grillas | Velocidad(seg.) | Integral del Consumo |
|-------------------|----------------|------------------------|-----------------------------|
| Avar, Lvar | J=200 | 0.49137 | 2.7123 |
| | J=20 | 0.071287 | 2.7254 |
| | Fila 2/Fila1 | 0.14507 | 1.004829 |

Cuadro C.13: Velocidad y precisión del modelo 4

los resultados muestran, que reducir el número de puntos de la grilla de 200 a 20 da como resultado un aumento aproximado de siete veces en la velocidad computacional y un ligero deterioro de la precisión en aproximadamente 0.48 %.

Bibliografía

- Achdou, Yves & Capuzzo-Dolcetta, I. (2010). Mean field games: numerical methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48(3):1136–1162.
- Achdou, Y. (2013). Finite difference methods for mean field games. In *Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications*, pages 1–47. Springer.
- Achdou, Y., Buera, F. J., Lasry, J.-M., Lions, P.-L., and Moll, B. (2014). Partial differential equation models in macroeconomics. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 372(2028):20130397.
- Achdou, Y., Han, J., Lasry, J.-M., Lions, P.-L., and Moll, B. (2017). Income and wealth distribution in macroeconomics: A continuous-time approach. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Achdou, Y. and Laurière, M. (2020). Mean field games and applications: Numerical aspects. *arXiv preprint arXiv:2003.04444*.
- Aiyagari, S. R. (1994). Uninsured idiosyncratic risk and aggregate saving. *The Quarterly Journal of Economics*, 109(3):659–684.
- Aruoba, S. B., Fernandez-Villaverde, J., and Rubio-Ramirez, J. F. (2006). Comparing solution methods for dynamic equilibrium economies. *Journal of Economic dynamics and Control*, 30(12):2477–2508.
- Barles, G. and Jakobsen, E. R. (2002). On the convergence rate of approximation schemes for hamilton-jacobi-bellman equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36(1):33–54.
- Barles, G. and Souganidis, P. E. (1991). Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic analysis*, 4(3):271–283.
- Barro, R. and Sala-i Martin, X. (2004). Economic growth second edition.
- Barro, R. J. (2006). Rare disasters and asset markets in the twentieth century. *The Quarterly Journal of Economics*, 121(3):823–866.

- Barro, R. J. (2009). Rare disasters, asset prices, and welfare costs. *American Economic Review*, 99(1):243–64.
- Barro, R. J. and Jin, T. (2011). On the size distribution of macroeconomic disasters. *Econometrica*, 79(5):1567–1589.
- Barro, R. J. and Ursúa, J. F. (2012). Rare macroeconomic disasters. *Annu. Rev. Econ.*, 4(1):83–109.
- Baten, M., Kamil, A. A., et al. (2013). Optimal consumption in a stochastic ramsey model with cobb-douglas production function. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2013.
- Baxter, M. and King, R. G. (1999). Measuring business cycles: approximate band-pass filters for economic time series. *Review of economics and statistics*, 81(4):575–593.
- Bellman, R. (1957). Dynamic programming (dp).
- Bernanke, B. S., Gertler, M., and Gilchrist, S. (1998). Credit market frictions and cyclical fluctuations. *Handbook of Macroeconomics (North-Holland, Amsterdam)*.
- Bertsekas, D. P. (1987). Dynamic programming: Deterministic and. *Stochastic Models*, pages 12–22.
- Bianchi, D., Büchner, M., and Tamoni, A. (2020). Bond risk premiums with machine learning. *The Review of Financial Studies*.
- Blanchard, O. (2009). The state of macro. *Annu. Rev. Econ.*, 1(1):209–228.
- Boucekkine, R., Pintus, P. A., and Zou, B. (2018). Mean growth and stochastic stability in endogenous growth models. *Economics Letters*, 166:18–24.
- Brunnermeier, M. K. and Sannikov, Y. (2014). A macroeconomic model with a financial sector. *American Economic Review*, 104(2):379–421.
- Candler, G. V. et al. (1998). Finite-difference methods for continuous-time dynamic programming. *QM&RBC Codes*.
- Carroll, C. D., Hall, R. E., and Zeldes, S. P. (1992). The buffer-stock theory of saving: Some macroeconomic evidence. *Brookings papers on economic activity*, 1992(2):61–156.
- Castillo-Ramírez, C. E., Venegas-Martínez, F., and López-Herrera, F. (2016). Efectos de saltos inesperados en el gasto público y variables demográficas en el crecimiento económico. el caso mexicano con un enfoque garch con saltos (1936-2012). *El trimestre económico*, 83(332):725–745.
- Chang, F.-R. (2004). *Stochastic optimization in continuous time*. Cambridge University Press.

- Chipeniuk, K., Katz, N. H., and Walker, T. (2014). Approximate aggregation in the neoclassical growth model with idiosyncratic shocks. *arXiv preprint arXiv:1404.4665*.
- Cont, R. and Voltchkova, E. (2005). A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential lévy models. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(4):1596–1626.
- Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., and Ross, S. A. (2005). A theory of the term structure of interest rates. In *Theory of Valuation*, pages 129–164. World Scientific.
- Cruz, J. H. R. (2012). Usos y limitaciones de la dinámica estocástica en el análisis macroeconómico convencional. In *Optimización-Estocástica-Recursiva-Coherente-Sistémica y sus variantes (probabilidad, econometría y estadística aplicada)*, pages 25–54. ECORFAN.
- D’Avernas, Adrien & Vandeweyer, Q. (2019). A solution method for continuous-time models.
- d’Halluin, Y., Forsyth, P. A., and Vetzal, K. R. (2005). Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 25(1):87–112.
- Duarte, V. (2018). Machine learning for continuous-time economics. *Available at SSRN 3012602*.
- Dynan, K. E. (1993). How prudent are consumers? *Journal of Political Economy*, 101(6):1104–1113.
- Economics, V. (2013). The macroeconomics of climate change, report prepared for defra. *Vivid Economics, London*.
- Fankhauser, Samuel y Tol, R. S. (2005). On climate change and economic growth. *Resource and Energy Economics*, 27(1):1–17.
- Feicht, R. and Stummer, W. (2010). Complete closed-form solution to a stochastic growth model and corresponding speed of economic recovery. Technical report, IWQW Discussion Papers.
- Fernández-Corugedo, E. (2004). Teoría del consumo. *Handbooks in Central Banking N*, 23.
- Fernández-Villaverde, J. and Levintal, O. (2018). Solution methods for models with rare disasters. *Quantitative Economics*, 9(2):903–944.
- Fernández-Villaverde, J. and Rubio-Ramírez, J. F. (2005). Estimating dynamic equilibrium economies: linear versus nonlinear likelihood. *Journal of Applied Econometrics*, 20(7):891–910.
- Fernández-Villaverde, J., Rubio-Ramírez, J. F., and Schorfheide, F. (2016). Solution and estimation methods for dsge models. In *Handbook of Macroeconomics*, volume 2, pages 527–724. Elsevier.
- Fleming, W. H. and Soner, H. M. (2006). *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, volume 25. Springer Science & Business Media.

- Fried, S. (2018). Climate policy and innovation: A quantitative macroeconomic analysis. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 10(1):90–118.
- Frische, U. and Grökl, I. (2010). New keynesian dsge models and the is-lm paradigm. Technical report, IMK Working Paper.
- Galí, J. et al. (2008). Introduction to monetary policy, inflation, and the business cycle: An introduction to the new keynesian framework. *Introductory Chapters*.
- Gaspar, J. and Judd, K. L. (1997). Solving large-scale rational-expectations models. *Macroeconomic Dynamics*, 1(1):45–75.
- Gillingham, K., Nordhaus, W. D., Anthoff, D., Blanford, G., Bosetti, V., Christensen, P., McJeon, H., Reilly, J., and Sztorc, P. (2015). Modeling uncertainty in climate change: A multi-model comparison. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Giulano, P. and Turnovsky, S. (2003). Intertemporal substitution risk aversion and economic performance in a stochastically growing economy. *Journal of International Money and Finance*, 22(4):529–556.
- Gomes, D. A., Nurbekyan, L., and Pimentel, E. (2015). Economic models and mean-field games theory. In *30o Co16quio Brasileiro de Matemática.[30th Brazilian Mathematics Colloquium]*.
- Gourio, F. (2012). Disaster risk and business cycles. *American Economic Review*, 102(6):2734–66.
- Greenwood, J., Hercowitz, Z., and Huffman, G. W. (1988). Investment, capacity utilization, and the real business cycle. *The American Economic Review*, pages 402–417.
- Group, W. B. (2018). *Iraq Reconstruction and Investment: Damage and Needs Assessment of Affected Governorates*. World Bank.
- Güvenen, F. (2011). Macroeconomics with heterogeneity: A practical guide. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Güvenen, F., Karahan, F., Ozkan, S., and Song, J. (2015). What do data on millions of us workers reveal about life-cycle earnings risk? Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Hallegatte, S y Przulski, V. (2010). The economic of floods: Concepts and methods. *World Bank Policy Research Working Paper*, 5507.
- Hambel, C., Kraft, H., and van der Ploeg, R. (2020). Asset diversification versus climate action.
- Hanson, F. B. (2007). *Applied stochastic processes and control for Jump-diffusions: modeling, analysis, and computation*, volume 13. Siam.
- Heathcote, J., Storesletten, K., and Violante, G. L. (2009). Quantitative macroeconomics with heterogeneous households. *Annu. Rev. Econ.*, 1(1):319–354.

- Heathcote, J., Storesletten, K., and Violante, G. L. (2010). The macroeconomic implications of rising wage inequality in the united states. *Journal of political economy*, 118(4):681–722.
- Heckman, J. J. (2001). Micro data, heterogeneity, and the evaluation of public policy: Nobel lecture. *Journal of political Economy*, 109(4):673–748.
- Hernández, G. (2010). El método de diferencias finitas.
- Hernández-Lerma, O. (1989). Adaptive markov control processes.
- Hiraguchi, R. (2014). A note on the analytical solution to the neoclassical growth model with leisure. *Macroeconomic Dynamics*, 18(2):473–479.
- Hirsa, A. (2016). *Computational methods in finance*. CRC Press.
- Hodrick, R. J. and Prescott, E. C. (1997). Postwar us business cycles: an empirical investigation. *Journal of Money, credit, and Banking*, pages 1–16.
- Huggett, M. (1993). The risk-free rate in heterogeneous-agent incomplete-insurance economies. *Journal of economic Dynamics and Control*, 17(5-6):953–969.
- Ireland, P. N. (2004). A method for taking models to the data. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(6):1205–1226.
- Isoré, M. and Szczerbowicz, U. (2017). Disaster risk and preference shifts in a new keynesian model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 79:97–125.
- Jacobson, L. S., LaLonde, R. J., and Sullivan, D. G. (1993). Earnings losses of displaced workers. *The American economic review*, pages 685–709.
- Judd, K. L. (1996). Approximation, perturbation, and projection methods in economic analysis. *Handbook of computational economics*, 1:509–585.
- Judd, K. L. (1998). Numerical methods in economics mit press books.
- Kalman, R. (1963). The theory of optimal control and the calculus of variations. *Mathematical optimization techniques*, pages 309–331.
- Kaplan, G., Moll, B., and Violante, G. L. (2018). Monetary policy according to hank. *American Economic Review*, 108(3):697–743.
- Kendrick, D. (1976). Applications of control theory to macroeconomics. In *Annals of Economic and Social Measurement, Volume 5, number 2*, pages 171–190. NBER.
- Kendrick, D. A. (1981). *Stochastic control for economic models*. McGraw-Hill Companies.
- Khan, Aubhik y Thomas, J. K. (2008). Idiosyncratic shocks and the role of nonconvexities in plant and aggregate investment dynamics. *Econometrica*, 76(2):395–436.

- Kimball, M. S. (1990). Precautionary saving and the marginal propensity to consume. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- King, R. G., Plosser, C. I., and Rebelo, S. T. (1988). Production, growth and business cycles: I. the basic neoclassical model. *Journal of monetary Economics*, 21(2-3):195–232.
- King, R. G. and Rebelo, S. T. (1999). Resuscitating real business cycles. *Handbook of macroeconomics*, 1:927–1007.
- Kompas, T. and Chu, L. (2012). Comparing approximation techniques to continuous-time stochastic dynamic programming problems: Applications to natural resource modelling. *Environmental modelling & software*, 38:1–12.
- Krusell, Per y Smith, J. A. A. (1998). Income and wealth heterogeneity in the macroeconomy. *Journal of political Economy*, 106(5):867–896.
- Kydland, F. E. and Prescott, E. C. (1982). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1345–1370.
- Lasry, J.-M., Lions, P.-L., and Guéant, O. (2008). Application of mean field games to growth theory.
- Lee, J.-J. and Sawada, Y. (2010). Precautionary saving under liquidity constraints: Evidence from rural pakistan. *Journal of Development Economics*, 91(1):77–86.
- Leland, H. E. (1978). Saving and uncertainty: The precautionary demand for saving. In *Uncertainty in economics*, pages 127–139. Elsevier.
- Li, Z., Qiao, Z., and Tang, T. (2017). *Numerical solution of differential equations: introduction to finite difference and finite element methods*. Cambridge University Press.
- Long Jr, J. B. and Plosser, C. I. (1983). Real business cycles. *Journal of political Economy*, 91(1):39–69.
- Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. In *Stochastic Optimization Models in Finance*, pages 621–661. Elsevier.
- Merton, R. C. (1975). An asymptotic theory of growth under uncertainty. *The Review of Economic Studies*, 42(3):375–393.
- Merton, R. C. and Samuelson, P. A. (1992). Continuous-time finance.
- Michael, W. (2003). Interest and prices: Foundations of a theory of monetary policy.
- Miranda, M. J. and Fackler, P. L. (2004). *Applied computational economics and finance*. MIT press.

- Moll, B. (2014). Productivity losses from financial frictions: Can self-financing undo capital misallocation? *American Economic Review*, 104(10):3186–3221.
- Nakamura, E., Steinsson, J., Barro, R., and Ursúa, J. (2013). Crises and recoveries in an empirical model of consumption disasters. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 5(3):35–74.
- Nuño, Galo & Moll, B. (2017). Social optima in economies with heterogeneous agents. *Review of Economic Dynamics*.
- Nuño, G. (2013). Optimal control with heterogeneous agents in continuous time.
- Nuño, G. (2015). Continuous time methods for economics and finance. *Review of Economics and Statistics*, 51(3):247–257.
- OIT, O. (2017). Perspectivas sociales y del empleo en el mundo. tendencias 2017.
- Okahata, N. et al. (2018). An alternative solution method for continuous-time heterogeneous agent models with aggregate shocks. Technical report, Mimeo New York.
- Øksendal, B. (2006). A universal optimal consumption rate for an insider. *Mathematical Finance*, 16(1):119–129.
- Øksendal, B. and Sulem, A. (2009). Applied control of jump diffusions.
- Parra-Alvarez, J. C. (2017). A comparison of numerical methods for the solution of continuous-time dsge models. *Macroeconomic Dynamics*, pages 1–29.
- Parra-Alvarez, J. C., Posch, O., and Wang, M.-C. (2017a). Identification and estimation of heterogeneous agent models: A likelihood approach.
- Parra-Alvarez, J. C., Posch, O., and Wang, M.-C. (2017b). Identification and estimation of heterogeneous agent models: A likelihood approach.
- Phillips, A. W. (1954). Stabilisation policy in a closed economy. *The Economic Journal*, 64(254):290–323.
- Phillips, A. W. (1957). Stabilisation policy and the time-forms of lagged responses. *The Economic Journal*, 67(266):265–277.
- Pindyck, R. S. and Wang, N. (2013). The economic and policy consequences of catastrophes. *American Economic Journal: Economic Policy*, 5(4):306–39.
- Pontryagin, L. (1962). Ordinary differential equations. translated from the russian by leonas kacinskas and walter b. counts. *Reading: Addison-Wesley Publishing Company*.
- Posch, O. (2009). Structural estimation of jump-diffusion processes in macroeconomics. *Journal of Econometrics*, 153(2):196–210.

- Posch, O. (2011). Risk premia in general equilibrium. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 35(9):1557–1576.
- Posch, Olaf y Trimborn, T. (2013). Numerical solution of dynamic equilibrium models under poisson uncertainty. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37(12):2602–2622.
- Prescott, E. C. (1971). Adaptive decision rules for macroeconomic planning. *Economic Inquiry*, 9(4):369–378.
- Preston, Bruce & Roca, M. (2007). Incomplete markets, heterogeneity and macroeconomic dynamics. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- Ramirez, J., H. E. (2016). *Optimal decisions in illiquid hedge funds*. PhD thesis, The University of Manchester (United Kingdom).
- Riascos, A. J. V. (2009). *Métodos matemáticos y computacionales en macroeconomía*. Universidad de los Andes, Fac. de Economía, CEDE, Ediciones Uniandes.
- Rietz, T. A. (1988). The equity risk premium a solution. *Journal of monetary Economics*, 22(1):117–131.
- Rotemberg, J. J. and Woodford, M. (1997). An optimization-based econometric framework for the evaluation of monetary policy. *NBER macroeconomics annual*, 12:297–346.
- Scheidegger, S. and Billionis, I. (2019). Machine learning for high-dimensional dynamic stochastic economies. *Journal of Computational Science*, 33:68–82.
- Schmitt-Grohé, S. and Uribe, M. (2004). Solving dynamic general equilibrium models using a second-order approximation to the policy function. *Journal of economic dynamics and control*, 28(4):755–775.
- Scott, B. (1999). *Computational methods for the study of dynamic economies*. Oxford University Press.
- Smith, W. T. (2006). An analytical solution to the ramsey model. *Contributions to Macroeconomics*, 6(1):1–28.
- Smith, W. T. (2007). Inspecting the mechanism exactly: a closed-form solution to a stochastic growth model. *The BE Journal of Macroeconomics*, 7(1).
- Steger, T. M. (2005). Stochastic growth under wiener and poisson uncertainty. *Economics Letters*, 86(3):311–316.
- Stern, Nicholas y Stern, N. H. (2007). *The economics of climate change: the Stern review*. cambridge University press.

- Stern, V., Peters, S., Bakhshi, V., et al. (2010). *The stern review*. Government Equalities Office, Home Office.
- Storesletten, K., Telmer, C. I., and Yaron, A. (2001). The welfare cost of business cycles revisited: Finite lives and cyclical variation in idiosyncratic risk. *European Economic Review*, 45(7):1311–1339.
- Strikwerda, J. C. (2004). *Finite difference schemes and partial differential equations*, volume 88. Siam.
- Swanson, E. T. (2012). Risk aversion and the labor margin in dynamic equilibrium models. *American Economic Review*, 102(4):1663–91.
- Taylor, J. B. and Uhlig, H. (1990). Solving nonlinear stochastic growth models: a comparison of alternative solution methods. *Journal of Business & Economic Statistics*, 8(1):1–17.
- Tol, R. S. (2006). The stern review of the economics of climate change: a comment. *Energy & Environment*, 17(6):977–981.
- Tsai, J. and Wachter, J. A. (2015). Disaster risk and its implications for asset pricing. *Annual Review of Financial Economics*, 7:219–252.
- Turnovsky, S. (1999). On the role of government in a stochastically growing economy, 1999. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 104:275–298.
- Turnovsky, S. J. (1993). Macroeconomic policies, growth, and welfare in a stochastic economy. *International Economic Review*, pages 953–981.
- Turnovsky, S. J. (1995). Methods of macroeconomic dynamics. *Massachusetts Institute of Technology Press, Massachusetts*.
- Turnovsky, Stephen J & Smith, W. T. (2006). Equilibrium consumption and precautionary savings in a stochastically growing economy. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30(2):243–278.
- Venegas-Martínez, F. (2001). Temporary stabilization: a stochastic analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(9):1429–1449.
- Venegas-Martínez, F. (2005). Política fiscal, estabilización de precios y mercados incompletos. *Estudios económicos*, pages 3–25.
- Venegas-Martínez, F. (2009). Un modelo estocástico de equilibrio macroeconómico: acumulación de capital, inflación y política fiscal. *Investigación económica*, 68(268):69–114.
- Venegas Martínez, F. and Polanco Gaytán, M. (2011). Macroeconomía estocástica.
- Wälde, K. (2005). Endogenous growth cycles. *International Economic Review*, 46(3):867–894.

- Wälde, K. (2011). Production technologies in stochastic continuous time models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 35(4):616–622.
- Wang, C., Wang, N., and Yang, J. (2016). Optimal consumption and savings with stochastic income and recursive utility. *Journal of Economic Theory*, 165:292–331.
- Wang, N. (2004). Precautionary saving and partially observed income. *Journal of Monetary Economics*, 51(8):1645–1681.
- Wang, N. (2007). An equilibrium model of wealth distribution. *Journal of Monetary Economics*, 54(7):1882–1904.
- Wanner, G. and Hairer, E. (1996). *Solving ordinary differential equations II*. Springer Berlin Heidelberg.
- Weil, P. (1990). Nonexpected utility in macroeconomics. *The Quarterly Journal of Economics*, 105(1):29–42.
- Winberry, T. (2018). A method for solving and estimating heterogeneous agent macro models.