ECONOMÍA

ISSN 0124-4396

BORRADORES DE INVESTIGACIÓN

No. 87. Enero 2006

Teoría del control óptimo: ¡Una guía para principiantes!

David Bardey y Hélène Bonnet

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario- 1653

Teoría del control óptimo: ¡Una guía para principiantes!

David Bardey[1] y Hélène Bonnet[2]

Febrero 2006

Resumen

El objetivo de este artículo es doble: en una primera parte, se dan las principales intuiciones de la teoría de control óptimo. En la segunda parte se expondrán las grandes familias de problemas de control óptimo, así como las teorías correspondientes. Las aplicaciones a problemas económicos de esos teoremas serán ilustrados a lo largo de todo el documento.

La teoría de control óptimo ha sido desarrollada desde principios de los años 50 por un equipo de matemáticos rusos dirigidos por Pontryagin. Esta teoría constituye una

[1] Universidad del Rosario y Gremaq, Universidad de Toulouse I.
[2] Acerp, Paris.

herramienta complementaria para resolver los problemas de optimización dinámica, integrando la teoría de cálculo de variación y el principio de optimalidad asociado a la ecuación de Bellman.

Estas teorías que abordan el mismo tema, tienen inevitablemente imbricaciones muy estrechas, incluso históricamente los desarrollos de Bellman y del equipo de Pontryagin, se han llevado a cabo de manera paralela. Sería interesante mostrar los lazos existentes entre estas tres teorías, pero este artículo se centra en presentar de manera simple la teoría de control óptimo únicamente[3].

El objetivo de este artículo es proveer los principales resultados de esta teoría con el fin de que éstos puedan ser directamente aplicados por un lector que tenga poco o ningún conocimiento de la teoría de control óptimo. Además, se intentará mostrar la diversidad de aplicaciones posibles de esta teoría, exponiendo los ejemplos tradicionales donde la dinámica es función del tiempo, así como otros más específicos traídos de la teoría de los contratos, la cual revela que el control óptimo puede ser utilizado para problemas muy diferentes.

Esta presentación de la teoría de control óptimo tiene un doble objetivo. Se exponen en una primera parte las principales intuiciones sobre la cual reposa esta teoría. Esta parte es igual o más importante que la segunda ya que no es frecuente encontrar en la literatura trabajos que aborden el control óptimo de esta manera, así mismo, permite comprender mejor el sentido de la formalización de problemas expuestos subsecuentemente. La siguiente parte constituye una guía de utilización de la teoría de control óptimo exponiendo los casos en los que se puede aplicar a problemas económicos contemporáneos, presentando los teoremas asociados a cada uno de esos casos, los cuales se ilustrarán usualmente con ejemplos.

[3] Esta escogencia se puede justificar, ya que los resultados de la teoría de cálculo de variación aparecen como casos particulares de los resultados de la teoría de control óptimo. Esta teoría necesita de condiciones sobre los espacios de definición de las variables de estado y de control los cuales son mucho más flexibles que la teoría de cálculo de variación.

1. Las intuiciones de la teoría del control óptimo

Se empieza por exponer las principales intuiciones que se derivan del principio del máximo explicando la construcción de un Hamiltoniano. Luego se exponen los teoremas proveyendo las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad que se aplican a un problema de control estándar. Enseguida se dan dos ejemplos que permiten aplicar las condiciones derivadas de esos teoremas.

1.1 Principio del Máximo e Intuiciones

La teoría de control óptimo permite resolver problemas dinámicos de naturaleza muy variada, donde la evolución de un sistema que depende del tiempo[4] puede ser controlada en parte por las decisiones de un agente. En esta parte se hablará de un sistema dinámico general sin hacer referencia a una situación precisa y donde existe un agente, denominado planificador, que toma las decisiones.

En cada momento t el sistema puede estar descrito por un **vector de estado** $X \in R^n$. El planificador escoge igualmente en cada momento un **vector de control** $U \in R^m$. La relación que une el vector de control al vector de estado esta descrita de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = m(u(t), x(t), t) \qquad (1)$$

Opciones diferentes del valor de la variable de control implican trayectorias diferentes del sistema dinámico. El planificador debe tener en cuenta esta restricción para determinar el vector de control que maximice su objetivo intertemporal:

$$V = \int_{s=0}^{s=T} F\left[u(t), x(t), t\right] dt \qquad (2)$$

Para el problema de maximización se considerarán el horizonte, las condiciones iniciales y finales como dadas. El planificador dispone de un vector de estado inicial predeterminado x_0. El problema de control óptimo consiste entonces en establecer la trayectoria óptima, es decir, la trayectoria que maximiza el objetivo del planificador, teniendo en cuenta la relación que une el vector de estado al vector de control. **El principio del máximo** elaborado por Pontryagin permite descomponer este problema en dos etapas.

La primera consiste en devolverse a un problema de optimización estática a cada instante t mientras que la segunda etapa es la solución de un sistema de ecuaciones

[4] Como lo veremos más adelante, el sistema dinámico no depende necesariamente de la variable tiempo. sin embargo por razones pedagógicas es más cómodo comenzar a explicar las intuiciones del control óptimo hablando de las dinámicas temporales.

diferenciales definido por las condiciones necesarias de optimalidad del problema estático.

La primera etapa reposa sobre la lógica siguiente: a cada instante t, el planificador dispone de un vector de estado $x(t)$ y debe escoger un vector de control $U(t)$ que determina simultáneamente el valor del objetivo al instante t, dado por $F_t(.)$ y la variación del vector de estado definido por $x(t)$. La escogencia del vector genera entonces dos efectos: un primero efecto, inmediato a través del valor instantáneo del objetivo, un segundo, al nivel de cambios de la variable de estado. Intuitivamente se sabe que si el vector de control es escogido para maximizar sólo el valor instantáneo del objetivo, esta escogencia tiene poca probabilidad de ser óptima.

Se presenta entonces un arbitraje en la determinación del vector de control óptimo entre el valor que uno puede asignar al objetivo instantáneo y la trayectoria tomada por la variable de estado que tendrá un efecto sobre los valores futuros de la función objetivo. La variación de la variable de estado puede entonces ser interpretada como una restricción. De manera similar al método utilizado para resolver un problema de optimización estática, este arbitraje es tenido en cuenta asociando un precio a esta restricción. Técnicamente ésta consiste en escribir una función objetivo modificada que tiene en cuenta estos dos efectos. $q(t)$ designa el vector de multiplicadores (o de precios) asociado a las variaciones del vector de estado (en la momento t), después la determinación del vector de control. Este objetivo modificado, llamado hamiltoniano, está definido de la siguiente manera:

$$H_t^c = H^c(u(t), x(t), q(t), t) = F_t(u_t, x_t) + q(t)m(u(t), x(t)) = F_t + q(t)\dot{x}(t) \qquad (3)$$

El primer componente del Hamiltoniano designa el efecto del vector de control sobre el valor instantáneo del objetivo. El segundo componente expresa el aumento futuro del objetivo seguido a la variación del vector de estado. Un Hamiltoniano, es entonces la suma del valor instantáneo del objetivo y de los valores futuros de este objetivo teniendo en cuenta la variación del vector de estado, ponderada por el precio asociado a esta variación.

El arbitraje anteriormente descrito aparece claramente al momento de escribir la condición de primer orden con respecto al vector de control.

$$\frac{\partial H_t^c}{\partial u_t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_t(u_t, x_t)}{\partial u_t} + q(t)\frac{\partial m_t(u_t, x_t)}{\partial u_t} = 0 \qquad (4)$$

La condición (4) muestra que el planificador debe arbitrar entre las ganancias inmediatas generadas por el valor del objetivo al instante t y la pérdida generada por la reducción de oportunidades futuras, expresado a través de los valores futuros del vector de estado.

Sin embargo, el arbitraje que se acaba de exponer sólo es óptimo si el vector de multiplicador de $q(t)$ es definido correctamente, es decir, de manera que refleje el impacto marginal del vector de estado sobre el objetivo del planificador. Se vuelve entonces intuitivo que el vector de multiplicadores debe verificar:

$$q(t) = \frac{\partial V^c(x_t, t)}{\partial x_t} \qquad (5)$$

Dicho de otra forma, el multiplicador debe ser igual al valor marginal del objetivo con respecto a la variable de estado. Adicionalmente, la variación del valor objetivo, seguido de una variación de la variable de estado en el tiempo está dada por:

$$\frac{d}{d_t}\left[x(t)q(t)\right] = q'(t)x(t) + x'(t)q(t)$$

Es conveniente maximizar el valor de esta variación de la variable de estado y del objetivo instantáneo $F_t(u_t, x_t)$ con respecto a la variable de estado.
Es decir, maximizar la siguiente expresión respecto a x_t:

$$F_t(u_t, x_t) + q'(t)x(t) + x'(t)q(t)$$

Escrito de otra forma,

$$F_t(u_t, x_t) + q'(t)x(t) + m(u(t), x(t), t)q(t)$$

Se obtiene

$$\frac{\partial F_t(u_t, x_t)}{\partial x_t} + q(t)\frac{\partial m_t}{\partial x_t} + q'(t) = 0$$

el cual se conoce generalmente bajo la forma:

$$\dot{q}(t) = -\frac{\partial H_t^c}{\partial x_t}$$

Se presenta a continuación el primer teorema relativo a las condiciones necesarias de optimalidad del problema de control óptimo siguiente:

$$\begin{cases} V^C(x_0,0) = \max \int_0^T F\left[u(t), x(t), t\right] dt \\ x(0) = x_0 \text{ donné} \\ \dot{x}(t) = m\left(u(t), x(t), t\right) \end{cases} \qquad \text{(P1)}$$

Teorema 1: Principio del Máximo de Pontryagin. *Sea* $u^*(t)$ *con* $t \in [0,T]$, *la trayectoria del vector de control que resuelve el problema P1. Entonces, existen funciones continuas* $q(t)$ *tal que para todo* $t \in [0,T]$*:*

-El vector de control maximiza el Hamiltoniano:

$$u^*(t) = \arg\max\left\{H_t^c(u,x,q,t) = F(x,u,t) + qm(x,u,t)\right\}$$

-La restricción $\dot{x}(t) = m(u^*(t), x(t), t)$ *se satisface.*
-Las funciones $q(t)$ *satisfacen la siguiente ecuación diferencial:*

$$\dot{q}_t = -\frac{\partial H_t^c}{\partial x_t}$$

El planificador está sujeto a una restricción sobre el valor del vector de estado en el momento t. Como ejemplo, en los modelos de ciclo de vida se puede tratar una restricción de no negatividad de la riqueza de un individuo al final de su vida. El principio de máximo se extiende cuando el planificador debe considerar una restricción de transversalidad. Si se considera el problema P2 que es equivalente al problema P1 con una restricción adicional sobre el valor del control de estado en el momento final $x_T \geq 0$, el teorema que determina las condiciones necesarias de optimalidad es muy similar al teorema que sigue.

Teorema 2: *Las condiciones necesarias del problema P2 son idénticas a las del teorema 1 a las cuales se les debe añadir la condición de transversalidad siguiente:*

$$q_T \geq 0 \text{ y } q_T x_T = 0 \qquad (6)$$

Esta restricción es muy similar a la restricción de exclusión encontrada en los problemas de optimización estática y se interpreta de la manera siguiente. El planificador elige la trayectoria de su vector de control de manera que de un valor positivo al vector de estado en el momento final, si el precio asociado a este valor es nulo. Inversamente, si el multiplicador asociado a la variable de estado es nulo en el momento final, esta variable será positiva.

Demostración: ver anexo**.**

Los dos teoremas que se han presentado proveen solamente las condiciones necesarias de optimalidad. De manera similar a los teoremas enunciados en los problemas de optimización estática, la optimalidad de las soluciones definidas por las condiciones necesarias depende de la concavidad de la función objetivo.

Teorema: *Consideremos el problema P1 y las condiciones necesarias* $\left(u^*(t), x^*(t), q^*(t)\right)$ *derivadas del principio de maximización enunciada en el teorema 1. Si el Hamiltoniano (3) con* $q^*(t) = q(t)$ *es cóncavo (estrictamente cóncavo) en* (u, x) *entonces* $\left(u^*(t), x^*(t), q^*(t)\right)$ *es una solución óptima y única al problema P1.*

La concavidad del Hamiltoniano no es siempre fácil de mostrar cuando la solución no es explicita. Por eso, el teorema siguiente permite relajar la condición precedente.

Teorema: Si V es cóncava en (u, x), donde $q \geq 0$ y m es cóncava en (u, x) (ó $q \leq 0$ y m es convexa en (u, x)), entonces H es cóncava en (u, x) lo que asegura la optimalidad de las soluciones $\left(u^*(t), x^*(t), q^*(t)\right)$ del teorema 1.

Seguido a los problemas no convexos encontrados en la teoría de crecimiento óptimo, Arrow (1970) propuso un teorema que permite relajar, las condiciones suficientes que se acaban de enunciar.

Teorema: Si H^* óptimo es cóncava en x entonces $\left(u^*(t), x^*(t)\right)$ es una pareja óptima donde $H\left(u^*(t), x^*(t), q^*(t), t\right) = \max\limits_{u(t)} H\left(u(t), x(t), q(t), t\right)$

Una de las ventajas de la teoría de control óptimo es su gran flexibilidad respecto a los espacios de definición de las variables de control y de los vectores de estado. El cálculo de variaciones necesita, que las variables de control sean definidas sobre el espacio de clase C^2. La teoría de control óptimo requiere unicamente que tanto las variables de control, como los multiplicadores asociados a las variables de estado, sean definidas a parte. Si las variables de control presentan discontinuidades, la trayectoria seguida por las variables de estado se determina por pasos. Imaginemos que las variables de control presentan discontinuidades en los momentos $t_1, t_2, ..., t_n$. Si en el momento t_1 la variable de estado $x(t_1)$ corresponde al valor izquierdo $u(t_1^-)$ se debe empezar de nuevo con la variable de control $u(t_1^+)$ tomando $x(t_1)$ como solución inicial. La trayectoria del vector de estado es entonces continua por construcción y continuamente diferenciable, excepto en $t_1, t_2, ..., t_n$.

1.2 Aplicación del principio de máximo.

Vamos a aplicar el principio del máximo resolviendo dos problemas diferentes: el primero estudia el problema tradicional de un consumidor que escoge su nivel de consumo y de ahorro, mientras que el segundo, retoma el análisis de Laffont y Tirole (1991), concerniente a la reglamentación de un monopolio cuando su productividad es una información privada de los gerentes y el esfuerzo de reducción de costos es inobservable.

Ejemplo 1: Problema de un consumidor

Supongamos que el objetivo de un consumidor es maximizar su utilidad intertemporal sobre un tiempo definido por el intervalo $[0,1]$. Este problema se define de la siguiente manera:

$$\max V = \int_0^1 \ln[c(t)4s(t)]dt \tag{7}$$

Teniendo en cuenta la restricción relacionada a la variación de su nivel de ahorro *s* y su consumo *c:*

$$\dot{s}(t) = 4s(t)(1-c(t)) \tag{8}$$

Las restricciones en las fronteras son $s(0)=1$ y $s(1)=e^2$.

La primera etapa consiste a escribir el hamiltoniano de este problema es igual a:

$$H(s(t),c(t),q(t)) = \ln 4 + \ln c(t) + \ln s(t) + q(t)[4s(t)(1-c(t))] \tag{9}$$

y las condiciones de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{r} \frac{\partial H}{\partial c(t)} = \frac{1}{c(t)} - 4q(t)s(t) = 0 \\ \overset{\bullet}{q}(t) = -\frac{\partial H}{\partial s(t)} = -\frac{1}{s(t)} - 4(1-c(t))s(t) \\ \overset{\bullet}{s}(t) = \frac{\partial H}{\partial q(t)} = 4s(t)(1-c(t)) \end{array} \right. \tag{10}$$

Si se omite el índice t, la primera condición se rescribe: $c = 1/(4qs)$

Sustituyendo *c* en las dos otras condiciones, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{r} \overset{\bullet}{q} = -\frac{1}{s} - 4q\left(1 - \frac{1}{4qs}\right) \\ \overset{\bullet}{s} = 4s\left(1 - \frac{1}{4qs}\right) \end{array} \right. \tag{11}$$

La segunda etapa consiste a encontrar la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales sustituyendo los valores iniciales y finales dados.

$$\left\{ \begin{array}{r} s(t) = e^{4t} - 0.865te^{4t} \\ c(t) = \frac{1}{4.624 - 4t} \end{array} \right.$$

Los cuales definen las trayectorias óptimas que deben tomar el consumo y el ahorro del consumidor para que se maximice su utilidad en el periodo de tiempo $[0,1]$.

Ejemplo 2: Reglamentación de un monopolio

El problema propuesto por Laffont y Tirole (1991) es encontrar el mecanismo de transferencia óptima que permita regular un monopolio, teniendo en cuenta que:

- Su productividad, resumida por el parámetro β, es información privada del monopolio, donde el regulador conoce únicamente la densidad de probabilidad $f(\beta)$ y una función de distribución de probabilidad $F(\beta)$ sobre el intervalo $\left[\underline{\beta}, \overline{\beta}\right]$.

- El gerente puede disminuir los costos del monopolio con una variable de esfuerzo e, inobservable por el regulador.

El costo del monopolio, observable solamente *ex post*, es $C = \beta - e$. Al monopolio le reembolsan a sus costos y el gerente recibe una transferencia de *t*. La utilidad del monopolio es entonces $U = t - \psi(e)$, donde la función ψ representa la "desutilidad" generada por el nivel de esfuerzo. Sujeto a un mecanismo de revelación (Green y Laffont, 1979), la utilidad del monopolio es $U(\beta, \beta') = t(\beta') - \psi(\beta - C(\beta'))$, donde β designa el verdadero parámetro de productividad del monopolio y β' el anuncio que éste puede hacer. La condición de primer orden que lleva a revelar el verdadero nivel de productividad $\beta' = \beta$ maximiza $U(\beta, \beta')$ se escribe entonces:

$$U_2(\beta, \beta') = 0$$

El teorema de la envolvente permite entonces escribir:

$$\dot{U}(\beta) = -\psi(\beta - C(\beta))$$

El problema del regulador consiste en maximizar un excedente utilitarista bajo las restricciones de participación y los incentivos del gerente, es decir,

$$\begin{cases} \max\limits_{e(.),U(.)} \int_{\underline{\beta}}^{\overline{\beta}} \left[S - (1+\lambda)\left[\beta - e(\beta) + \Psi(e(\beta))\right] - \lambda U(\beta)\right] dF(\beta) \\ \dot{U}(\beta) = -\Psi'(e(\beta)) \\ U(\beta) \geq 0 \end{cases} \tag{12}$$

El Hamiltoniano de este problema de maximización se escribe:

$$H = \left[S - (1+\lambda)\left[\beta - e(\beta) + \Psi(e(\beta))\right] - \lambda U(\beta)\right] f(\beta) - \mu(\beta)\Psi'(e(\beta)) \tag{13}$$

Donde μ designa el multiplicador asociado a la restricción de incentivos del gerente
El principio del máximo implica:

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial U} = \lambda f(\beta) \tag{14}$$

La restricción de transversalidad impone:

$$\mu(\underline{\beta}) = 0 \tag{15}$$

De donde,

$$\mu(\beta) = \lambda F(\beta) \tag{16}$$

Las condiciones de optimalidad se convierten en:

$$\begin{aligned} \Psi'(e(\beta)) &= 1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{F(\beta)}{f(\beta)}\Psi''(e(\beta)) && (17) \\ U^*(\beta) &= \int_{\beta}^{\bar{\beta}} \Psi'(e^*(\tilde{\beta}))d\tilde{\beta} && (18) \\ t^*(\beta) &= \Psi(e^*(\beta)) + U^*(\beta) && (19) \end{aligned}$$

Las cuales caracterizan el contrato óptimo de regulación de un monopolio en situación de selección adversa y de riesgo moral. Este contrato consiste en un mecanismo de reembolsos mixtos de los costos.

2. Diferentes problemas de control óptimo.

Los teoremas que se han expuesto hasta ahora se aplican a problemas estándares de control óptimo. Sin embargo, existe un gran número de variedades de problemas de control óptimo. En un principio, el planificador puede estar sujeto a restricciones de igualdad o de desigualdad sobre las variables de control y las variables de estado. Así mismo puede estar enfrentado a un gran número de restricciones de tranversalidad diferentes. Los problemas de control óptimo pueden también tener discontinuidades a nivel de las variables de estado y de los multiplicadores que le son asociados.

2.1 Restricciones de igualdad y de desigualdad

Primero se mostrará una técnica frecuentemente utilizada para transformar una restricción de igualdad bajo la forma de integral en una ecuación diferencial. Se estudiará enseguida los métodos que permiten resolver los problemas de control óptimo que contienen respectivamente condiciones de igualdad y desigualdad. Luego se presentarán los teoremas que proveen las trayectorias óptimas cuando esos dos tipos de restricciones se combinan.

2.1.1 Restricción de integral

Suponiendo un problema estándar de control óptimo similar al problema P1, donde se añade una restricción de igualdad en la cual uno de sus miembros es expresado en integral:

$$\int_0^T g(x(t), u(t), t)dt = \bar{G} \qquad (20)$$

Es de notar que incluso si se ha expresado esta restricción en función del tiempo, este tipo de de restricción es frecuente en los mecanismos incitativos que consideran equilibrios Nash-Bayesianos[5]. Esta restricción puede ser transformada en una ecuación diferencial que se viene a añadir a las otras restricciones de este tipo. Esta transformación es posible recurriendo a una nueva variable tal que

$$\begin{aligned} \dot{j}(t) &= g(x(t), u(t), t) \\ j(0) &= 0 \\ j(T) &= \bar{G} \end{aligned}$$

Para lo siguiente ya no es necesario restricciones en integral lo cual vuelve a suponer que ellas han estado transformadas en restricciones de ecuaciones diferenciales.

2.1.2. Restricción de igualdad

En esta sección se considera el problema P1 al cual se le añaden *m* restricciones de igualdad. Sea,

$$\left\{ \begin{array}{c} V^C(x_0, 0) = \max \int_0^T F\left[u(t), x(t), t\right] dt \\ x(0) = x_0 \text{ y } x_i(T) = x_{iT} \text{ dados} \\ \dot{x}_i\,(t) = m^i\left(u(t), x(t), t\right) \quad i = 1, 2, ..., r \\ g^j(x(t), u(t), t) = 0 \quad j = 1, 2, ..., n \end{array} \right. \qquad (\text{P3})$$

Se define primero el Hamiltoniano de este problema siendo $q(t)=(q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t))$ los multiplicadores asociados a las restricciones de ecuaciones diferenciales. Sea,

$$H^c\left(u(t), x(t), q_t, t\right) = F_t(u_t, x_t, t) + \sum_{i=1}^{r} q_i(t) m^i(u_t, x_t, t) \qquad (21)$$

A cada instante t, para los valores dados de $x_i(t)$ y $q_i(t)$, el vector de las variables de control $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t))$ debe ser escogido para maximizar el valor del Hamiltoniano, teniendo en cuenta las restricciones de igualdad que deben satisfacerse. Para hacerlo, se define un Lagrangiano con *n* multiplicadores de Lagrange λ_j asociadas a cada una de las restricciones de igualdad. Sea,

$$L = H^c\left(u(t), x(t), q_t, t\right) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) g_j(u_t, x_t, t) \qquad (22)$$

[5] Esta restricción podría por ejemplo corresponder a un problema de selección adversa con restricción de participación *ex-ante* del agente.

El teorema siguiente provee las condiciones necesarias de optimalidad del problema P3:

Teorema: Sea $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t), ..., u_r^*(t))$ una solución del problema P3 $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), ..., x_n^*(t))$ la trayectoria se las variables de estado correspondientes a esta solución. Existe entonces un vector multiplicador $q(t) = (q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t))'$ y un vector de multiplicador de Lagrange $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t))'$ tales que:

- - A cada instante t y para $x^*(t)$ et $\lambda(t)$ dados, el vector de control $u^*(t)$ debe maximizar el hamiltoniano:

$$H^c\left(u(t), x^*(t), q_t, t\right) = F_t(u_t, x_t^*, t) + \sum_{i=1}^{r} q_i(t) m^i(u_t, x_t^*, t) \tag{23}$$

de tal forma que respete las restricciones de igualdad.

- - Las funciones $q_i(t)$, $i = 1, 2, ..., r$, son continuas en t, derivables por partes (con respecto al tiempo) y satisfacen las condiciones siguientes:

$$\overset{\bullet}{q}_i\,(t) = -\frac{\partial L^*}{\partial x_i(t)};\ i = 1, 2, ..., r \tag{24}$$

las derivadas parciales de L estando evaluadas en $(x^*(t), u^*(t))$;

- - Las restricciones de las ecuaciones diferenciales son satisfechas:

$$\overset{\bullet}{x}_i\,(t) = \frac{\partial L^*}{\partial q_i(t)} = m^i\left(u(t), x(t), t\right) \tag{25}$$

y que $x^*(t)$ satisface las condiciones en las fronteras.

- - Los multiplicadores de Lagrange $\lambda_j(t)$ son continuos por partes.
- - El lagrangiano $L\left(u^*(t), x^*(t), q(t), \lambda(t), t\right)$ es una función continua en t. Para todos los intervalos donde $u^*(t)$ es continua, el lagrangiano debe ser derivable en t.

Ejemplo: un recurso no renovable

Se considera ahora el problema dinámico causado por la extracción de un recurso no renovable. La variable *s(t)* designa el stock del recurso no renovable y *x(t)* la tasa de extracción de este recurso. Básicamente, la relación entre esas dos variables se escribe:

$$\overset{\bullet}{s}_i\,(t) = -x_i(t) \tag{26}$$

La producción del bien final *F(s(t),x(t))* es una función de la tasa de extracción y del stock, con *F(.)* una función creciente positiva en cada uno de sus argumentos. Además la producción es nula para *x(t)=0* y el consumo del bien final, notado *c(t)* genera una utilidad *u(c(t)),* siendo la función *U(.)* siendo creciente y estrictamente cóncava. Se supone igualmente que la producción final no puede ser almacenada, lo cual impone la restricción siguiente:

$$F(s(t), x(t)) - c(t) = 0 \tag{27}$$

El problema del planificador se define:

$$\underset{c(t), x(t)}{Max} \ V = \int_0^T U(c(t))dt \tag{28}$$

Bajo las restricciones (27) y (28) y las condiciones finales siguientes:

$$s(0) = s_0 \text{ y } s(T) = s_T \text{ con } (s_T < s_0) \tag{29}$$

Sea *q(t)* la variable de estado asociada a la restricción (27). El Hamiltoniano de este problema es:

$$H(s(t), c(t), x(t), q(t)) = u(c(t)) - q(t)x(t) \tag{30}$$

El Lagrangiano es:

$$L = u(c(t)) - q(t)x(t) + \lambda(t)\left(F(s(t), x(t)) - c(t)\right) \tag{31}$$

Las condiciones necesarias de optimalidad se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c(t)} = u'(c(t)) - \lambda(t) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x(t)} = -q(t) + \lambda(t)F_x = 0 \\ \overset{\bullet}{q}_i\ (t) = -\frac{\partial L^*}{\partial s(t)} = -\lambda(t)F_s \\ \overset{\bullet}{s}\ (t) = \frac{\partial L^*}{\partial q(t)} = -x(t) \end{cases}$$

2.1.3 Restricciones de desigualdad

En esta sección se considera que el planificador está sujeto a *m* restricciones de desigualdad. Sea,

$$g^j\left(x_1^*(t), x_2^*(t), ..., x_n^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t), ..., u_r^*(t)\right) \geq 0,\ j = 1, 2, ..., m \tag{32}$$

El problema del planificador es ahora idéntico al problema P3 si se sustituyen las restricciones de igualdad por las restricciones (32). Las condiciones necesarias de optimalidad son, en este caso, idénticas a las enunciadas en el teorema 6 y deben satisfacerse al menos las restricciones de exclusión siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_j(t) &\geq 0,\ g^j(u^*(t), x^*(t), t) \geq 0 \\ \lambda_j(t)g^j(u^*(t), x^*(t), t) &\geq 0,\ j = 1, 2, ..., m \end{aligned} \tag{33}$$

2.1.4 Restricciones de igualdad y de desigualdad

Los problemas de control óptimo contienen a veces los dos tipos de restricciones que acabamos de observar. Se reescribirá el programa de maximización asociado a un problema, luego se darán dos teoremas que proveen respectivamente las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad.

$$\begin{cases} V^C(x_0,0) = \max \int_0^T F\left[u(t),x(t),t\right] dt \\ x(0)=x_0 \text{ y } x_i(T)=x_{iT} \text{ dados } i=1,2,...,r \\ \dot{x}_i(t) = m^i\left(u(t),x(t),t\right) \quad i=1,2,...,r \\ g^j(x(t),u(t),t)=0 \quad j=1,2,...,n' \\ g^k(x(t),u(t),t)\geq 0 \quad k=n'+1,...,n \end{cases} \tag{P4}$$

El Hamiltoniano y el Lagrangiano asociados a este problema se escriben respectivamente:

$$H^c\left(u(t),x(t),q_t,t\right) = F_t(u_t,x_t,t) + \sum_{i=1}^r q_i(t) m^i(u_t,x_t,t) \tag{34}$$

$$L\left(u(t),x(t),q_t,\lambda_t,t\right) = H^c\left(u(t),x(t),q_t,t\right) + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t)\, g^j(x(t),u(t),t) \tag{35}$$

Sea $u^*(t)$ el vector de control óptimo del problema P4 y $x^*(t)$ la trayectoria del vector de estado asociado. Existen entonces dos vectores de multiplicadores y $\lambda(t)$ tal que:

Teorema:

Para todo t y para $x^*(t)$ y $\lambda(t)$ dados, el vector de control u(t) debe maximizar el Hamiltoniano de tal manera que las restricciones de igualdad y de desigualdad sean respetadas. La condición sobre el rango de la matriz Jacobiana de las restricciones implica que existe un vector $\lambda(t)$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial u_i(t)} &= 0,\ i=1,2,...,r && (36) \\ \lambda_j(t) &\geq 0,\ g^j(x^*(t),u^*(t),t)\geq 0,\ \lambda_j(t)g^j(x^*(t),u^*(t),t)=0 && (37) \\ j &= 1,2,...,n' && (38) \\ g^k(x^*(t),u^*(t),t) &= 0,\ k=n'+1,...,n && (39) \end{aligned}$$

la derivada de L estando evaluada en $\left(x^*(t),u^*(t)\right)$; los multiplicadores $\lambda(t)$ siendo continuos por partes y continuos para cada punto de continuidad de u(t).

- *Las funciones $q_i(t)=1,2,...,r$ son continuas en t, derivables por partes (con respecto al tiempo) y satisfacen las condiciones siguientes*:

$$\dot{q}_i(t) = -\frac{\partial L^*}{\partial x_i(t)};\ i=1,2,...,r \tag{40}$$

Las derivadas parciales de L evaluadas en $\left(x^*(t), u^*(t)\right)$

- *Las restricciones de las ecuaciones diferenciales se satisfacen*:

$$\overset{\bullet}{x}_i\,(t) = \frac{\partial L^*}{\partial q_i(t)} = m^i\,(u(t), x(t), t)\,;\; i = 1, 2, ..., r \qquad (41)$$

- *El Lagrangiano* $L\left(x^*(t), u^*(t), q(t), \lambda(t), t\right)$ *es una función continua en t.*

Para todos los intervalos donde $u^*(t)$ *es continua, el lagrangiano debe ser derivable en t.*

- *Las condiciones en las fronteras deben satisfacerse.*

Teorema: *Sean* $\left(x^*(t), u^*(t)\right)$ *las trayectorias definidas para las condiciones del teorema 7. Esas condiciones de optimalidad son suficientes si el Lagrangiano es cóncavo en* $\left(x(t), u(t)\right)$. *Si el Lagrangiano es estrictamente cóncavo, esta solución es única.*

2.2 Restricciones de transversalidad

Las trayectorias óptimas calculadas a partir de la aplicación del principio de máximo dependen de la naturaleza de las condiciones que son específicas a los límites de los intervalos. Siendo importante la variedad de estas condiciones, se deben describir en detalle los diferentes problemas impuestos por las restricciones de transversalidad. En las secciones anteriores se había supuesto que los valores inicial y final del vector de estado estaban fijos de manera exógena. En esta sección, esos valores provendrán de una solución del problema de control. Se considera entonces el problema siguiente donde se modificará solamente la condición final para separar los diferentes casos que se pueden dar.

$$\begin{cases} V^C(x_0, 0) = \max \int_0^T F\,[u(t), x(t), t]\,dt \\ x(0) = x_0 \;\; i = 1, 2, ..., r \\ \overset{\bullet}{x}_i\,(t) = m^i\,(u(t), x(t), t) \quad i = 1, 2, ..., r \\ g^j(x(t), u(t), t) = 0 \quad j = 1, 2, ..., n' \\ g^k(x(t), u(t), t) \geq 0 \quad k = n' + 1, ..., n \end{cases} \qquad \text{(P5)}$$

2.2.1 Variable de estado libre en el instante T

Al principio se consideró un problema de control en el cual el valor de la variable de estado era escogido libremente en el momento final. Sea,

$$x_i(T) \text{ libro para } i = 1, 2, ..., r' \qquad (42)$$

$$x_j(T) = x_{jT} \text{ dado } j = r' + 1, ..., r \qquad (43)$$

Si el problema P5 integra las condiciones finales (42) y (43), la condición de transversalidad implique:

$$q_i^*(T) = 0,\; i = 1, 2, ..., r' \qquad (44)$$

2.2.2 Variable de estado libre y valor residual

Ahora se debe considerar que la variable de estado en el momento *t* arroja un beneficio o una pérdida (según el signo del valor residual) que se añade al valor de la función objetivo. La interpretación económica de ese tipo de residuo es que la variable de estado en el instante final constituye, la variable de inicio de un nuevo problema de maximización. El objetivo se escribe:

$$V^C(x_0, 0) = \max \int_0^T F\left[u(t), x(t), t\right] dt + \Phi(x_T, T) \tag{45}$$

En ese caso, la condición de transversalidad del problema debe integrar el impacto del valor de la variable de estado en el momento final sobre el objetivo del planificador. El arbitraje óptimo está dado por la condición enunciada en el teorema siguiente:

Teorema *Si la función objetivo incluye un valor residual en el momento final y el planificador está sujeto a las condiciones (47) y (48), entonces la condición de transversalidad equivale a:*

$$q_i(t) = \frac{\partial \Phi(x_T, T)}{\partial x_T} \tag{46}$$

2.2.3 Restricción de superioridad

En numerosas ocasiones, los problemas de control óptimo incluyen una restricción que obliga que la variable de estado deba superar un cierto valor en el momento final. Formalmente, ese tipo de restricción se escribe:

$$\begin{aligned} x_i(T) &\geq x_{iL} \text{ con } x_{iL} \text{ dado para } i = 1, 2, ..., r' && (47) \\ x_j(T) &= x_{jT} \text{ dado } j = r' + 1, ..., r && (48) \end{aligned}$$

La restricción de transversalidad de un problema de estos está dada por el teorema siguiente:

Teorema: *La condición de transversalidad de un problema idéntico a P5 con las condiciones finales (52) y (53) equivale a:*

$$\begin{aligned} q_i(T) &\geq 0,\ x_i(T) - x_{iL} \geq 0,\ q_i(T)\left[x_i(T) - x_{iL}\right] \geq 0 && (49) \\ \text{para } i &= 1, 2, ..., r' && (50) \end{aligned}$$

En la próxima sección se dará un ejemplo que permitirá ilustrar las condiciones de transversalidad del teorema 9.

Ejemplo 4: Modelo de ahorro óptimo

Se considera un individuo cuya función de utilidad es:

$$u(c) = (1-\gamma)^{-1} c^{1-\gamma} + A \tag{53}$$

con $\gamma > 0$ y *A=cste*; *c(t)* es el consumo en la momento *t*.

El stock de activos financieros del individuo es *s(t)* que genera un ingreso $\beta s(t)$ con $\beta > 0$ la tasa de interés. El salario es un flujo exógeno denotado por *w(t)*. La diferencia entre su retorno total y su consumo determina el ahorro neto del individuo, el cual se adiciona a su stock de activos financieros.

$$\dot{s}(t) = \beta s(t) + w(t) - c(t) \tag{54}$$

El stock inicial de activos financieros está dado: *s(0)*. El stock final *s(t)* está destinado a los hijos de este individuo después de su muerte. La evaluación de ese stock por el individuo es:

$$\Phi(s(T), T) = e^{-\delta T} m s(T) \tag{55}$$

Con *m>0* y $\delta > 0$ representando la tasa de descuento.
El individuo tiene la opción de *s(t)* dado que el stock es un límite inferior impuesto de manera exógena (al menos no nulo).

Se tiene entonces una restricción de inferioridad:

$$s(T) \geqslant s_L \tag{56}$$

El horizonte *T* es fijo. El problema del individuo es escoger *c(t)* y *s(t)* para maximizar:

$$\int_0^T \left\{A + (1-\gamma)^{-1} c(t)^{1-\gamma}\right\} e^{-\delta t} dt + e^{-\delta T} m s(T) \tag{57}$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} s(0) &= s_0 \quad \text{dado} & (58)\\ s(T) &\geqslant s_L \quad s_L \text{ dado} & (59) \end{aligned}$$

se impone además $s_L < s_0$.

El Hamiltoniano se escribe:

$$H = \left\{A + (1-\gamma)^{-1} c(t)^{1-\gamma}\right\} e^{-\delta t} dt + q\left[\beta s + w - c\right] \tag{60}$$

Las condiciones necesarias son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &= c^{-\gamma}e^{-\delta t} - q = 0 && (61)\\ \overset{\bullet}{q} &= -\frac{\partial H}{\partial s} = -\beta q && (62)\\ \overset{\bullet}{s} &= \frac{\partial H}{\partial q} = \beta s + w - c && (63)\\ s(0) &= s_0 && (64) \end{aligned}$$

Donde la condición de transversalidad se define:

$$\begin{aligned} q(T) - me^{-\delta T} &\geqslant 0 && (65)\\ s(T) - s_L &\geqslant 0 && (66)\\ \left(q(T) - me^{-\delta T}\right)(s(T) - s_L) &= 0 && (67) \end{aligned}$$

La primera condición necesaria implica que la utilidad marginal del consumo debe ser igual al precio actualizado del stock final de activos financieros.

Esta condición y la condición de transversalidad implican que si la restricción $s(T) \geq s_L$ no se satisface, entonces en el óptimo la utilidad marginal actualizada del consumo debe ser igual al valor marginal actualizado del rezago. Si la variable *m* es muy pequeña, entonces esta igualdad no puede ser verificada y el individuo asigna mayor importancia a su consumo que al rezago de sus hijos, y hubiera preferido utilizar su capital financiero del límite fijado por la restricción.

2.2.5 Momento final escogido por el planificador

En los teoremas anteriores se había supuesto que el horizonte del problema estaba impuesto por el planificador. Ahora se supone que él puede escoger el momento final *T* con el fin de maximizar su objetivo. En esta sección se considera que el objetivo del planificador es caracterizado por un valor residual en el momento final. Entonces, le basta con hacer la abstracción del valor residual de este valor para encontrar el caso particular sin valor residual. El teorema siguiente provee la condición necesaria de optimalidad con respecto a la variable tiempo.

Teorema: *Cuando el horizonte del problema no está determinado de manera exógena, la condición de transversalidad del problema P5 teniendo en cuenta el objetivo (36) se escribe:*

$$H^c\left(u^*(t), x^*(t), q(T^*), T^*\right) + \frac{\partial \Phi(b,T)}{\partial x_T} = 0 \qquad (68)$$

3. Conclusiones

El objetivo de esta guía para principiantes era proveer las intuiciones esenciales para la comprensión de la teoría de control óptimo y presentar los principales teoremas ligados a las restricciones de desigualdad y de transversalidad. El rigor a nivel de notaciones matemáticas ha sido a veces sacrificado con el fin de permitir una exposición más ligera para facilitar la comprensión del lector.

Referencias

(1) DE LA FUENTE, A., 2000, Methods and mathematical models for economists.

(2) DEMANGE, G. y ROCHET, J.C., Optimisation et mathématiques de la finance.

(3) DIXIT, AK., 1990, Optimization in economic theory, Oxford University Press.

(4) KAMIEN, MI. y SCHWARTZ, NL., 1981, Dynamic optimization: Te calculus of variations and optimal control in economics and management, Volume 4 of Dynamic economics: theory and applications, North-Holland.

(5) LAFFONT, J.J., y TIROLE, J., 1991, a Theory of Incentives in Procurement and Regulation, the MIT Press.

(6) LEONARD, D. y VAN LONG, N., 1992 Optimal control theory and static optimization in economics, Cambridge University Press.

Anexo

Supongamos que el tiempo es una variable discreta. Se puede utilizar el principio del máximo para escribir las condiciones de optimalidad. En un caso discreto, el problema del planificador sería:

$$\begin{cases} V(x_0, 0) = \max\limits_{u_0, T-1} \left\{ \sum\limits_{t=0}^{T-1} hF(x_t, u_t) \right\} \\ x_{t+h} = x_t + hm_t(x_t, u_t) \\ x(0) = x_0 \text{ dado y } x_T \geq 0 \end{cases}$$

De manera análoga al método de resolución sugerido por Bellman, se considera el subproblema correspondiente a la escogencia del vector de control en el momento $T-h$

Se escribe:

$$\begin{cases} V(x_{T-h}, T-h) = \max\limits_{u_{T-h}} \{hF_{T-h}(x_{T-h}, u_{T-h})\} \\ x_T = x_{T-h} + hm_{T-h}(x_{T-h}, u_{T-h}) \geq 0 \end{cases}$$

El Lagrangiano asociado a este problema de Kuhn Tucker sería:

$$L = hF(x_{T-h}, u_{T-h}) + \lambda\left[x_{T-h} + hm_{T-h}\left(x_{T-h}, u_{T-h}\right)\right]$$

La condición necesaria de optimalidad con respecto a u_{T-h} se escribe:

$$\frac{\partial L}{\partial u_{T-h}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_{T-h}(x_{T-h},u_{T-h})}{\partial u_{T-h}} + \lambda \frac{\partial m_{T-h}(x_{T-h},u_{T-h})}{\partial u_{T-h}} = 0$$

Con $x(t) \geq 0$ si $\lambda > 0$ y $\lambda \geq 0$ con $x_T > 0$.

De ahí que el teorema de la envolvente implique:

$$\begin{aligned} q_{T-h} &= \frac{\partial V(x_{T-h,T-h})}{\partial u_{T-h}} = \frac{\partial L}{\partial x_{T-h}} \\ &= h\frac{\partial F_{T-h}(x_{T-h}, u_{T-h})}{\partial x_{T-h}} + \lambda \left(1 + h\frac{\partial m_{T-h}(x_{T-h}, u_{T-h})}{\partial x_{T-h}}\right) \end{aligned}$$

Si se considera el tiempo como una variable continua, $h \to 0$, donde $q_T = \lambda$, las dos ultimas condiciones se pueden escribir de manera simplificada: $q_T \geq 0$ y $q_T x_T = 0$ Q.E.D.