

Modelo telegráfico de valoración de opciones^{*}

OSCAR JAVIER LÓPEZ ALFONSO^{**}

Director: Nikita Ratanov

Mayo de 2011

Resumen

En este trabajo construimos un modelo de mercado financiero basado en un proceso telegráfico más un proceso de saltos para la valoración de opciones Europeas. Vamos a asumir que el tamaño de los saltos es constante y después que es aleatorio, en ambos casos estos saltos ocurren cuando la tendencia del mercado cambia. Estos modelos capturan la dinámica del mercado en periodos con presencia de ciclos financieros. Mostraremos la estructura del conjunto de medidas neutrales al riesgo, además, de fórmulas explícitas para los precios de las opciones Europeas de venta y compra.

Palabras claves: Procesos telegráficos, valoración de opciones, medida martingala.

Abstract

In this work we present a class of financial market models which are based on inhomogeneous telegraph processes with jumps. It is assumed that the jumps have either deterministic or random sizes and they occur when the tendencies are switching. Such a model captures well the stock price dynamics under periodic financial cycles. We provide a closed form of the structure of the set of risk-neutral measures and the exact formulae for the European options prices.

Palabras claves: Telegraph process, option pricing, equivalent martingale measure.

Clasificación JEL: C02, G12.

^{*}Tesis de Maestría, Facultad de Economía, Universidad del Rosario, Bogotá, Colombia.

^{**}Correo electrónico: oscar.lopez@ur.edu.co

Índice

1. Introducción	3
2. Procesos telegráficos y martingalas	5
2.1. Definiciones y conceptos preliminares	5
2.2. Calculo de las densidades de probabilidad del proceso telegráfico	6
2.3. Esperanzas y martingalas	9
3. Modelo telegráfico	11
3.1. Modelo telegráfico con saltos constantes	11
3.2. Modelo telegráfico con saltos aleatorios	14
3.3. Escogencia de la medida martingala	16
3.3.1. No existe riesgo en los saltos	16
3.3.2. El riesgo en los saltos está asegurado	16
4. Calculo de las opciones Europeas de compra y venta	19

1. Introducción

Durante las últimas cuatro décadas, los investigadores y profesionales del mercado financiero han desarrollado y adoptado diferentes modelos y técnicas para la valoración de opciones. Los trabajos pioneros en esta área fueron llevados a cabo en los setenta por Black, Scholes y Merton [BS 73, M 73]. En estos artículos se supone que el precio de los activos financieros se modela a través del Movimiento Geométrico Browniano (MGB), de tal manera que con la introducción del concepto de *no-arbitraje*¹ se pueden encontrar precios únicos para las opciones Europeas y otros derivados financieros. El logro de Black, Scholes y Merton es visto como uno de los más notables por el profundo efecto que ha tenido sobre los mercados al tratar los riesgos en estos a través del uso de modelos matemáticos sofisticados.

A finales de los años setenta y principios de los ochenta Harrison, Kreps y Pliska [HK 79, HP 81, HP 83] muestran que la ausencia de oportunidades de arbitraje es equivalente a la existencia de una medida martingala. Esta relación se convierte en el llamado *primer teorema fundamental de las matemáticas financieras*². El segundo teorema fundamental de las matemáticas financieras se refiere al hecho de que si la medida es única el mercado es completo³.

Enfocados en los anteriores principios y a partir del modelo de Black-Scholes muchas generalizaciones se han hecho, las cuales podemos dividir en dos grandes grupos: por un lado modelos basados en procesos independientes del pasado, tales como: movimientos Brownianos, procesos de Poisson, procesos de Lévy, etc., algunos ejemplos de este tipo de modelos serian: el modelo de Black-Scholes, el modelo de Merton, los modelos con volatilidad estocástica y los modelos de opciones con costos de transacción, entre muchos otros⁴. Por otro lado modelos con dependencia markoviana, algunos ejemplos de estos modelos son: modelos de cambio de régimen de tipo ARIMA y GARCH⁵, el modelo de Black-Scholes con cambios de régimen⁶, entre muchos otros. La idea en estos modelos es incorporar de alguna manera información del pasado para modelar de mejor forma algunos hechos estilizados que se observan en los mercados financieros tales como el cambio de volatilidad entre los periodos de alza y los periodos de baja del precio de las acciones, las sonrisas de volatilidad no simétricas, etc.

Esta tesis esta basada en Modelos con Dependencia Markoviana (MDM) (Markov Modulated Models) también llamados Modelos Ocultos de Markov (MOM) (Hidden Markov Models) o Modelos de Cambio de Régimen (MCR) (Regime Switching Models), por lo tanto, vamos a hacer una revisión de la literatura de estos modelos.

Revisión de la literatura: Modelos de Cambio de Régimen

El concepto de cambio de régimen ha existido desde hace mucho tiempo, empezando con modelos en los cuales el cambio de régimen es conocido a modelos mas generales en donde esto no es cierto. En principio los cambios de régimen se suponian independientes, pero más recientemente, en los setenta, Lindgren, Goldfeld y Quandt [L 78, GQ 73] introducen la noción de cambios de régimen gobernados por cadenas de Markov dando lugar al término *Modelos de Cambio de Régimen* o *Modelos Ocultos de Markov*. El primero en aplicar el concepto de cambio de régimen en finan-

¹Para la definición de arbitraje véase [B 09] página 96, Definición 7.5.

²Véase por ejemplo [B 09].

³Véase por ejemplo [B 09].

⁴Para una descripción de estos modelos véase [C 10].

⁵Véase por ejemplo [LX 08].

⁶Véase por ejemplo [EH 97] y las referencias en este artículo.

zas fue Hamilton [H 89] en su artículo titulado “A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle” publicado en *Econometrica* en 1989. Después de este artículo el tema ha traído mucho interés, con diversas generalizaciones y aplicaciones en finanzas; algunos ejemplos de modelos de cambio de régimen aplicados a finanzas son⁷: Elliott y van der Hoek [EH 97] en distribución de activos, Elliott y Hinz [EH 02] en análisis de portafolios, Pliska [P 97] en modelos de tasas de interés, entre otros. En particular, en valoración de opciones tenemos: Naik [N 93], Guo [G 01], Buffington y Elliott [BE 02], Elliott et al. [ECS 05, ECS 07].

Todos los anteriores artículos en valoración de opciones excepto Naik [N 93] asumen que tanto la tendencia como la volatilidad pueden cambiar. Naik supone que si la tendencia es constante y la volatilidad cambia en el tiempo el subyacente también puede cambiar de precio. Con este enfoque y algunas suposiciones adicionales las cuales aseguran que existe una única medida martingala, el obtiene fórmulas analíticas para los precios de las opciones Europeas, además de analizar algunos ejemplos numéricos. Guo [G 01] tiene una aproximación similar, en la cual ella incorpora un activo extra, relacionado con los tiempos de cambio, con el propósito de obtener un mercado completo y por tanto un único precio para las opciones Europeas. Este trabajo fue posteriormente corregido y generalizado por Fuh et al. [FWC 02]. Por último, Buffington, Elliot, Chang y Siu [BE 02, ECS 05, ECS 07] tratan modelos que dependen de una cadena de markov oculta con n estados a través de una representación de esta como una semimartingala obteniendo un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para el precio de las opciones Europeas.

Los modelos anteriores aunque robustos en generalidad carecen de soluciones analíticas para los precios de las opciones Europeas o suponen simplificaciones que no están acordes a la realidad (como en el caso de Naik). En años recientes, Ratanov [R 07] propuso un modelo de valoración de opciones basado en procesos telegráficos (que es un proceso de cambio de régimen) en el cual se pueden obtener soluciones analíticas para los precios de las opciones Europeas, este es el campo de investigación de esta tesis.

Revisión de la literatura: Modelos basados en procesos telegráficos

El proceso telegráfico es un proceso estocástico que describe la posición de una partícula moviéndose en una dimensión sujeta a cambios en su velocidad. Este modelo fue introducido en forma discreta por Taylor [T 22] en 1922; más tarde fue estudiado en profundidad por Goldstein [G 51] en relación con cierta ecuación diferencial parcial hiperbólica (llamada ecuación telegráfica o ecuación de ondas amortiguada) describiendo la dinámica espacio-temporal del potencial en un cable de transmisión (sin fugas) [W 55]. En 1956, Kac [K 74] introdujo la versión continua del modelo telegráfico, desde entonces el proceso telegráfico y muchas generalizaciones de este han sido estudiadas en gran detalle, véase por ejemplo [G 51, O 90, O 95, R 99], con numerosas aplicaciones en física [W 02], biología [H 99, HH 05], ecología [OL 01] y más recientemente en finanzas: [MR 04] en modelos de pérdida, [DP 02, R 07, PR 09] en valoración de opciones.

En las aplicaciones del modelo telegráfico a la valoración de opciones tenemos que los modelos propuestos por Di Crescenzo y Pellerey [DP 02] y Pogorui y Rodríguez-Dagnino [PR 09] no cumplen con el primer teorema fundamental de las matemáticas financieras, es decir, poseen oportunidades de arbitraje. El único modelo que cumple con los dos teoremas fundamentales es el modelo de Ratanov [R 07] y por lo tanto este es el único modelo *viable*.

El modelo de Ratanov consiste en modelar el precio del subyacente como la exponencial estocásti-

⁷Modelos continuos.

ca del proceso telegráfico más un proceso de saltos determinísticos con dependencia markoviana. En este modelo se pueden encontrar formulas analíticas para: los precios de las opciones Europeas y el portafolio autofinanciable que replica estas opciones. Esta tesis consiste en generalizar el modelo de Ratanov al caso en donde el proceso de saltos es un proceso de Poisson compuesto en donde los tamaños de los saltos son variables aleatorias con distribuciones alternadas⁸.

Esta tesis esta organizada de la siguiente forma: en la sección 2 presentamos las definiciones y los resultados preliminares para el entendimiento del modelo telegráfico de valoración de opciones. En este modelo podemos calcular formulas exactas para los precios de las opciones Europeas de compra y venta - sección 4 - que se basan en las densidades de probabilidad del proceso telegráfico las cuales son calculadas en 2.2. En la sección 3 desarrollamos el modelo telegráfico de valoración de opciones con saltos constantes en 3.1 y con saltos aleatorios en 3.2. En el caso del modelo con saltos aleatorios existen infinitas medidas neutrales al riesgo, es decir, el modelo es incompleto; por lo tanto en 3.3 presentamos dos maneras de escoger una sola medida neutral al riesgo que nos permita valorar los precios de las opciones Europeas.

2. Procesos telegráficos y martingalas

En esta sección vamos a definir los procesos involucrados en los modelos de valoración de opciones basados en procesos telegráficos y a demostrar algunas de sus propiedades.

2.1. Definiciones y conceptos preliminares

Vamos a considerar un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y fijar un horizonte de tiempo T y una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$. En este espacio vamos a definir los siguientes dos objetos independientes:

- Un proceso de Markov $\varepsilon(t), t \in [0, T]$ continuo por la derecha, con conjunto de estados $\{0, 1\}$ y teniendo intensidades de transición alternadas $\lambda_0 > 0$ y $\lambda_1 > 0$, de acuerdo a la siguiente probabilidad de transición

$$\mathbb{P}\{\varepsilon(t + \Delta t) \neq \varepsilon(t) \mid \varepsilon(t)\} = \lambda_{\varepsilon(t)} \Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow +0. \quad (1)$$

Vamos a suponer que el proceso $\varepsilon(t)$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$. Nótese que la distribución del proceso $\varepsilon(t)$ está completamente determinada por el estado inicial $\varepsilon(0) \in \{0, 1\}$, de ahora en adelante vamos a fijar este estado inicial de la siguiente forma: $\varepsilon(0) = i, i = 0, 1$.

- Una sucesión de variables aleatorias independientes $Y_{i,1}, Y_{1-i,2}, Y_{i,3}, \dots$ con distribuciones alternadas $\Phi_0(dy)$ y $\Phi_1(dy)$ tales que

$$\mathbb{P}\{Y_{in} \in dy\} = \Phi_i(dy), \quad i = 0, 1, \quad n \geq 1. \quad (2)$$

Suponemos que

$$y_i := \mathbb{E}Y_{in} = \int_{-\infty}^{\infty} y \Phi_i(dy) < \infty. \quad (3)$$

Vamos a considerar la sucesión $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ como los tiempos de cambio del proceso $\varepsilon(t)$. Definimos $\tau_0 = 0$ y en este caso vamos a tener que los incrementos $\tau_{n+1} - \tau_n, n \geq 0$ son independientes y tienen distribución exponencial de la siguiente manera

$$\mathbb{P}(\tau_{n+1} - \tau_n > t \mid \mathcal{F}_{\tau_n}) = \exp(-\lambda_{\varepsilon(\tau_n)} t). \quad (4)$$

⁸La importancia de estos modelos en finanzas es bien conocida, por ejemplo, véase [K 02].

Sea $N(t), t \in [0, T]$ el proceso de Poisson que cuenta el número de cambios del proceso $\varepsilon(t)$, es decir

$$N(t) = \text{máx}\{n \mid \tau_n \leq t\}. \quad (5)$$

Definición 2.1. Sean $c_0 \in \mathbb{R}$ y $c_1 \in \mathbb{R}$ tales que $c_0 < c_1$, el **proceso telegráfico** esta definido como

$$\mathcal{T}(t) = \int_0^t c_{\varepsilon(s)} ds, \quad t \in [0, T]. \quad (6)$$

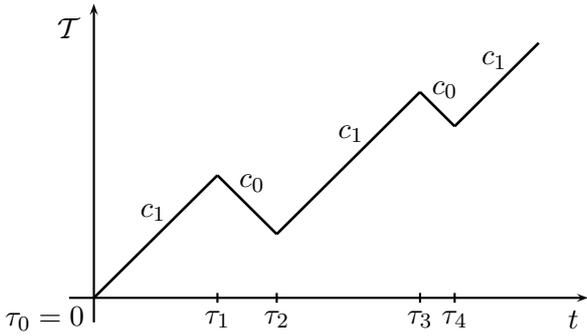
Definición 2.2. Sean $h_0 \in \mathbb{R}$ y $h_1 \in \mathbb{R}$, el **proceso de saltos constantes** esta definido como el siguiente proceso de Poisson

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} h_{\varepsilon_n}, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

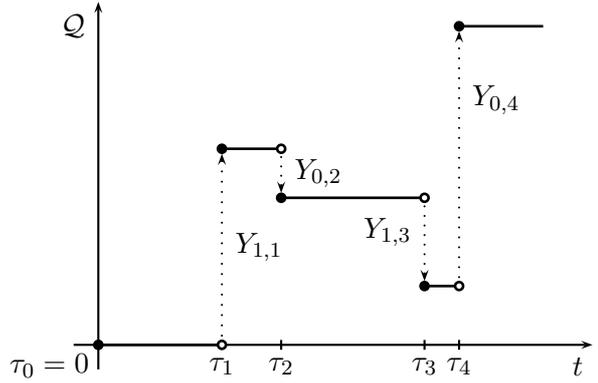
donde, $\varepsilon_n = \varepsilon(\tau_n -)$ el estado del proceso de Markov $\varepsilon(t)$ justo antes del n -ésimo cambio, $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.3. El **proceso de saltos aleatorios** esta definido como el siguiente proceso de Poisson compuesto

$$\mathcal{Q}(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_{\varepsilon_n, n}, \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$



Gráfica del proceso $\mathcal{T}(t)$ con $\varepsilon(0) = 1$.



Gráfica del proceso $\mathcal{Q}(t)$ con $\varepsilon(0) = 1$.

Al igual que con $\varepsilon(t)$ suponemos que los procesos $\mathcal{T}(t)$, $\mathcal{J}(t)$ y $\mathcal{Q}(t)$ son adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$.

2.2. Cálculo de las densidades de probabilidad del proceso telegráfico

En esta sección deseamos calcular las densidades

$$p_i(x, t) := \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}(t) \in dx\}/dx, \quad x \in (c_0 t, c_1 t), t > 0, \quad (9)$$

donde $\mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid \varepsilon(0) = i)$ es la probabilidad condicionada al estado inicial i , $i = 0, 1$.

Para calcular (9) vamos a utilizar el proceso $\mathcal{X}(t), t \in [0, T]$, el cual es definido de la siguiente forma

$$\mathcal{X}(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\varepsilon(s)=1-i\}} ds. \quad (10)$$

El proceso $\mathcal{X}(t)$ calcula el tiempo en el que el proceso $\varepsilon(t)$ pasa en el estado $1 - i$ hasta el tiempo t .

Proposición 2.1. Los procesos $\mathcal{T}(t)$ y $\mathcal{X}(t)$ están relacionados de la siguiente forma

$$\mathcal{T}(t) = \mathcal{X}(t)c_{1-i} + (t - \mathcal{X}(t))c_i. \quad (11)$$

Demostración. De las definiciones (6) y (10) tenemos que

$$\mathcal{T}(t) = \int_0^t c_{\varepsilon(s)} ds = c_i \int_0^t \mathbf{1}_{\{\varepsilon(s)=i\}} ds + c_{1-i} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\varepsilon(s)=1-i\}} ds = c_i(t - \mathcal{X}(t)) + c_{1-i}\mathcal{X}(t).$$

□

Definición 2.4. Vamos a definir las siguientes densidades condicionales:

$$f_i(s, t; n) := \mathbb{P}_i\{\mathcal{X}(t) \in ds, N(t) = n\}/ds, \quad s \in (0, t), n \geq 0, t > 0, \quad (12)$$

$$p_i(x, t; n) := \mathbb{P}_i\{\mathcal{T}(t) \in dx, N(t) = n\}/dx, \quad x \in (c_0t, c_1t), n \geq 0, t > 0. \quad (13)$$

Utilizando la ecuación (11) podemos ver que estas dos densidades están relacionadas de la siguiente forma

$$p_i(x, t; n) \equiv f_i\left(\frac{x - c_it}{c_{1-i} - c_i}, t; n\right). \quad (14)$$

Ahora, para obtener las formulas para $f_i(s, t; n)$ y $p_i(x, t; n)$ nótese que por las definiciones (10) y (12) para $n = 0$ vamos a tener que $f_i(s, t; 0) = e^{-\lambda_i t} \delta(s)$ y por la ecuación (14) tenemos que $p_i(x, t; 0) = e^{-\lambda_i t} \delta(x - tc_i)$, donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac.

Proposición 2.2. Las densidades $f_i(s, t; n)$ satisfacen el siguiente sistema de EDP para cada $n \geq 1, i = 0, 1$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}(s, t; n) = -\lambda_i f_i(s, t; n) + \lambda_i f_{1-i}(t - s, t; n - 1), \quad t > s. \quad (15)$$

Demostración. Sujeto a que máximo haya un salto sobre el intervalo de tiempo $(0, \Delta t)$ tenemos

$$f_i(s, t + \Delta t; n) = (1 - \lambda_i \Delta t) f_i(s, t; n) + \lambda_i \Delta t f_{1-i}(t - s, t; n - 1) + o(\Delta t),$$

restando a ambos lados de la anterior ecuación $f_i(s, t; n)$ y dividiendo por Δt

$$\frac{f_i(s, t + \Delta t; n) - f_i(s, t; n)}{\Delta t} = -\lambda_i f_i(s, t; n) + \lambda_i f_{1-i}(t - s, t; n - 1) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

tomando el límite en la anterior ecuación cuando $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos (15). □

Corolario 2.1. Las densidades $p_i(x, t; n)$ satisfacen el siguiente sistema de EDP para cada $n \geq 1, i = 0, 1$ y $t > 0$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}(x, t; n) + c_i \frac{\partial p_i}{\partial x}(x, t; n) = -\lambda_i p_i(x, t; n) + \lambda_i p_{1-i}(x, t; n - 1). \quad (16)$$

Demostración. De (14) obtenemos $f_i(s, t; n) = p_i((c_{1-i} - c_i)s + c_it, t; n)$, ahora derivando con respecto a t y usando (15) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t}(s, t; n) &= c_i \frac{\partial p_i}{\partial x}((c_{1-i} - c_i)s + c_it, t; n) + \frac{\partial p_i}{\partial t}((c_{1-i} - c_i)s + c_it, t; n) \\ &= -\lambda_i p_i((c_{1-i} - c_i)s + c_it, t; n) + \lambda_i p_{1-i}((c_{1-i} - c_i)(t - s) + c_it, t; n - 1) \\ &= -\lambda_i p_i((c_{1-i} - c_i)s + c_it, t; n) + \lambda_i p_{1-i}((c_i - c_{1-i})s + c_{1-i}t, t; n - 1). \end{aligned}$$

Por último utilizando (11) tenemos que $x = (c_{1-i} - c_i)s + c_it$ si i es el estado inicial y que $x = (c_i - c_{1-i})s + c_{1-i}t$ si $1 - i$ es el estado inicial, reemplazando esto en la anterior ecuación obtenemos (16). □

Las densidades $f_i(s, t; n)$ pueden ser expresadas de la siguiente manera:

Para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} f_0(s, t; 2n) &= \lambda_0^n \lambda_1^n \frac{(t-s)^n s^{n-1}}{(n-1)!n!} e^{-\lambda_1 s - \lambda_0(t-s)} \mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq t\}}, \\ f_1(s, t; 2n) &= \lambda_0^n \lambda_1^n \frac{(t-s)^n s^{n-1}}{(n-1)!n!} e^{-\lambda_0 s - \lambda_1(t-s)} \mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq t\}}, \end{aligned} \quad (17)$$

y para $n \geq 0$

$$\begin{aligned} f_0(s, t; 2n+1) &= \lambda_0^{n+1} \lambda_1^n \frac{(t-s)^n s^n}{(n!)^2} e^{-\lambda_1 s - \lambda_0(t-s)} \mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq t\}}, \\ f_1(s, t; 2n+1) &= \lambda_0^n \lambda_1^{n+1} \frac{(t-s)^n s^n}{(n!)^2} e^{-\lambda_0 s - \lambda_1(t-s)} \mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq t\}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Sumando las ecuaciones en (17) y (18) obtenemos las expresiones para las densidades $f_i(s, t) := \sum_{n=0}^{\infty} f_i(s, t; n) = \mathbb{P}_i\{\mathcal{X}(t) \in ds\}/ds, i = 0, 1$, a saber

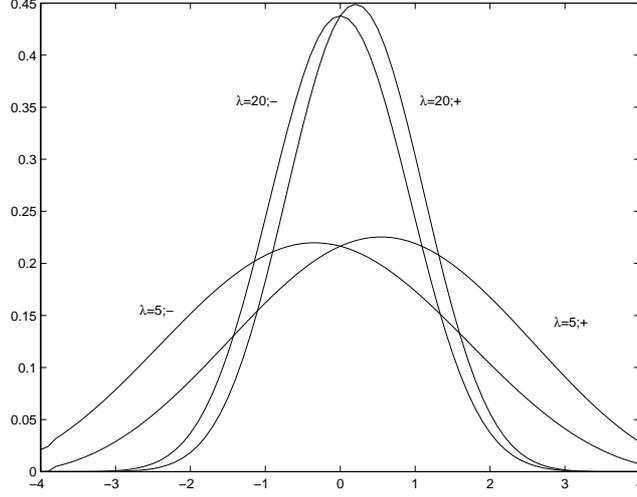
$$\begin{aligned} f_0(s, t) &= e^{-\lambda_0 t} \delta(s) + e^{-\lambda_1 s - \lambda_0(t-s)} \left[\lambda_0 I_0 \left(2\sqrt{\lambda_0 \lambda_1 s(t-s)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\lambda_0 \lambda_1} \sqrt{\frac{t-s}{s}} I_1 \left(2\sqrt{\lambda_0 \lambda_1 s(t-s)} \right) \right] \mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq t\}}, \\ f_1(s, t) &= e^{-\lambda_1 t} \delta(s) + e^{-\lambda_0 s - \lambda_1(t-s)} \left[\lambda_1 I_0 \left(2\sqrt{\lambda_0 \lambda_1 s(t-s)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\lambda_0 \lambda_1} \sqrt{\frac{t-s}{s}} I_1 \left(2\sqrt{\lambda_0 \lambda_1 s(t-s)} \right) \right] \mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq t\}}, \end{aligned} \quad (19)$$

donde $I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{(n!)^2}$ y $I_1(z) = I_0'(z)$ son funciones de Bessel modificadas.

Por último, podemos encontrar las expresiones para las densidades $p_i(x, t)$, de (14) y (19) obtenemos que

$$\begin{aligned} p_0(x, t) &= e^{-\lambda_0 t} \delta(x - c_0 t) + e^{-\left(\frac{\lambda_0 c_1 - \lambda_1 c_0}{c_1 - c_0} t + \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{c_1 - c_0} x\right)} \left[\lambda_0 I_0 \left(2\sqrt{\lambda_0 \lambda_1 \frac{(x - c_0 t)(c_1 t - x)}{\Delta c}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\lambda_0 \lambda_1} \sqrt{\frac{c_1 t - x}{x - c_0 t}} I_1 \left(2\sqrt{\lambda_0 \lambda_1 \frac{(x - c_0 t)(c_1 t - x)}{\Delta c}} \right) \right] \mathbf{1}_{\{c_0 t \leq x \leq c_1 t\}}, \\ p_1(x, t) &= e^{-\lambda_1 t} \delta(x - c_1 t) + e^{-\left(\frac{\lambda_1 c_0 - \lambda_0 c_1}{c_0 - c_1} t + \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{c_0 - c_1} x\right)} \left[\lambda_1 I_0 \left(2\sqrt{\lambda_0 \lambda_1 \frac{(x - c_1 t)(c_0 t - x)}{\Delta c}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\lambda_0 \lambda_1} \sqrt{\frac{c_0 t - x}{x - c_1 t}} I_1 \left(2\sqrt{\lambda_0 \lambda_1 \frac{(x - c_1 t)(c_0 t - x)}{\Delta c}} \right) \right] \mathbf{1}_{\{c_0 t \leq x \leq c_1 t\}}, \end{aligned} \quad (20)$$

donde $\Delta c = c_1 - c_0$.



Gráfica de las densidades de probabilidad del proceso telegráfico con saltos (la parte continua) con valores $T = 1$, $c_1 = -c_0 = 4$, $h_0 = -h_1 = 0,2$, $\lambda_1 = \lambda_0 = 5$ o $\lambda_1 = \lambda_0 = 20$.

2.3. Esperanzas y martingalas

El modelo telegráfico se basa en demostrar bajo qué condiciones el proceso $\mathcal{T}(t) + \mathcal{Q}(t)$ o el proceso $\mathcal{T}(t) + \mathcal{J}(t)$ es una martingala, para esto en esta sección vamos a encontrar expresiones para las esperanzas de los procesos $\mathcal{T}(t)$, $\mathcal{J}(t)$ y $\mathcal{Q}(t)$.

Sean $\mathbb{E}_i(\cdot) := \mathbb{E}(\cdot \mid \varepsilon(0) = i)$ la esperanza condicionada al estado inicial del proceso $\varepsilon(t)$ y $\pi_i(t; n) := \mathbb{P}_i\{N(t) = n\}$, $n \geq 1$ la probabilidad del que el proceso $N(t) = n$ en el tiempo t , dado el estado inicial del proceso $\varepsilon(t)$.

Definición 2.5. Esperanza del proceso telegráfico

$$m_i(t) := \mathbb{E}_i\{\mathcal{T}(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p_i(x, t; n) dx. \quad (21)$$

Definición 2.6. Esperanza del proceso de saltos constantes

$$n_i(t) := \mathbb{E}_i\{\mathcal{J}(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n h_{\varepsilon_k} \right] \pi_i(t; n), \quad (22)$$

Definición 2.7. Esperanza del proceso de saltos aleatorios

$$q_i(t) := \mathbb{E}_i\{\mathcal{Q}(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \int_{-1}^{\infty} y \Phi_{\varepsilon_k}(dy) \right] \pi_i(t; n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n y_{\varepsilon_k} \right] \pi_i(t; n). \quad (23)$$

Proposición 2.3. Las esperanzas $m_i(t)$ del proceso telegráfico satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{m}_0(t) &= c_0 - \lambda_0 m_0(t) + \lambda_0 m_1(t) \\ \dot{m}_1(t) &= c_1 - \lambda_1 m_1(t) + \lambda_1 m_0(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Demostración. Sujeto a que máximo haya un cambio en el intervalo de tiempo $(0, \Delta t)$ tenemos

$$m_i(t + \Delta t) = (1 - \lambda_i \Delta t)(m_i(t) + c_i \Delta t) + \lambda_i \Delta t m_{1-i}(t) + o(\Delta t),$$

restando $m_i(t)$ a ambos lados de la ecuación anterior, dividiendo por Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos (24). \square

Lema 2.1. Las probabilidades π_i satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_0(t; n) &= -\lambda_0\pi_0(t; n) + \lambda_0\pi_1(t; n-1) \\ \dot{\pi}_1(t; n) &= -\lambda_1\pi_1(t; n) + \lambda_1\pi_0(t; n-1),\end{aligned}\tag{25}$$

para $n \geq 1$. Además, las condiciones iniciales del anterior sistema son

$$\pi_0(t; 0) = e^{-\lambda_0 t}, \quad t \geq 0, \quad \pi_1(t; 0) = e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0,\tag{26}$$

$$\pi_0(0; n) = 0, \quad n \geq 1, \quad \pi_1(0; n) = 0, \quad n \geq 1.\tag{27}$$

Demostración. Sujeto a que máximo haya un salto en el intervalo de tiempo $(0, \Delta t)$ tenemos

$$\pi_i(t + \Delta t; n) = (1 - \lambda_i \Delta t)\pi_i(t; n) + \lambda_i \Delta t \pi_{1-i}(t; n-1) + o(\Delta t),$$

restando a ambos lados de la anterior ecuación $\pi_i(t; n)$, dividiendo por Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos (25). De (4) obtenemos (26) y de la definición de $\pi_i(t; n)$ obtenemos (27). \square

Proposición 2.4. Las esperanzas $q_i(t)$ del proceso de saltos satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{q}_0(t) &= \lambda_0 y_0 - \lambda_0 q_0(t) + \lambda_0 q_1(t) \\ \dot{q}_1(t) &= \lambda_1 y_1 - \lambda_1 q_1(t) + \lambda_1 q_0(t).\end{aligned}\tag{28}$$

Demostración. Sujeto a que máximo haya un salto en el intervalo de tiempo $(0, \Delta t)$ tenemos

$$q_i(t + \Delta t) = (1 - \lambda_i \Delta t)q_i(t) + \lambda_i \Delta t (q_{1-i}(t) + y_i) + o(\Delta t),$$

restando a ambos lados de la anterior ecuación $q_i(t)$, dividiendo por Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos (28). \square

Corolario 2.2. Las esperanzas $n_i(t)$ del proceso de saltos satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{n}_0(t) &= \lambda_0 h_0 - \lambda_0 n_0(t) + \lambda_0 n_1(t) \\ \dot{n}_1(t) &= \lambda_1 h_1 - \lambda_1 n_1(t) + \lambda_1 n_0(t).\end{aligned}\tag{29}$$

Si adicionamos a los sistemas (24), (28) y (29) las condiciones iniciales $m_i(0) = 0$, $q_i(0) = 0$ y $n_i(0) = 0$, $i = 0, 1$, resolviendo estos sistemas, obtenemos las siguientes soluciones:

$$m_i(t) = \frac{c_0 \lambda_1 + c_1 \lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1} t + (-1)^i \lambda_i \left(\frac{c_0 - c_1}{\lambda_0 + \lambda_1} \right) \left(\frac{1 - e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)t}}{\lambda_0 + \lambda_1} \right),\tag{30}$$

$$q_i(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 (y_0 + y_1)}{\lambda_0 + \lambda_1} t + (-1)^i \lambda_i \left(\frac{\lambda_0 y_0 - \lambda_1 y_1}{\lambda_0 + \lambda_1} \right) \left(\frac{1 - e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)t}}{\lambda_0 + \lambda_1} \right),\tag{31}$$

$$n_i(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 (h_0 + h_1)}{\lambda_0 + \lambda_1} t + (-1)^i \lambda_i \left(\frac{\lambda_0 h_0 - \lambda_1 h_1}{\lambda_0 + \lambda_1} \right) \left(\frac{1 - e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)t}}{\lambda_0 + \lambda_1} \right).\tag{32}$$

Observación 2.1. En el caso en que $\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda$ y $h_0 = h_1 = h$ tenemos

$$m_i(t) = \frac{c_0 + c_1}{2} + (-1)^i \frac{(c_0 - c_1)}{2} \frac{(1 - e^{-2\lambda t})}{2\lambda} \quad \text{y} \quad n_i(t) = \lambda h t.\tag{33}$$

Una vez obtenidos estos resultados vamos a demostrar el teorema principal de esta sección

Teorema 2.1. El proceso $\mathcal{T}(t) + \mathcal{Q}(t)$ es una martingala, si y sólo si,

$$c_0 + \lambda_0 y_0 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 + \lambda_1 y_1 = 0. \quad (34)$$

Demostración. Primero nótese que para $s, t \in [0, T]$, $s < t$ tenemos que

$$\mathbb{E}\{\mathcal{T}(t) + \mathcal{Q}(t) \mid \mathcal{F}_s\} = \mathcal{T}(s) + \mathcal{Q}(s) + m_{\varepsilon(s)}(t - s) + q_{\varepsilon(s)}(t - s). \quad (35)$$

Por lo tanto es suficiente mostrar que las igualdades $m_i(t) + q_i(t) \equiv 0$, $i = 0, 1$ son equivalentes a (34).

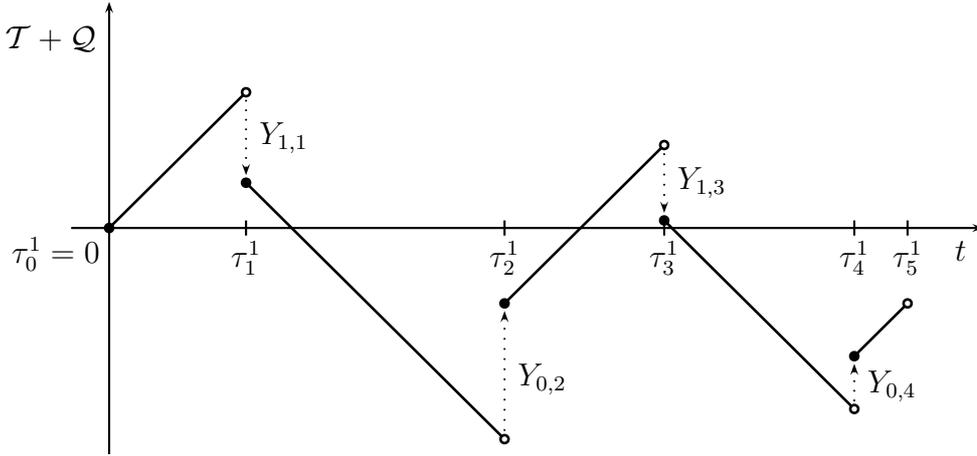
De (30) y (31) $m_i(t) + q_i(t) \equiv 0$ es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} (c_0 + \lambda_0 y_0)\lambda_1 + (c_1 + \lambda_1 y_1)\lambda_0 &= 0 \\ c_0 + \lambda_0 y_0 - (c_1 + \lambda_1 y_1) &= 0, \end{aligned}$$

el cual es equivalente a (34). □

Corolario 2.3. El proceso $\mathcal{T}(t) + \mathcal{J}(t)$ es una martingala, si y sólo si,

$$c_0 + \lambda_0 h_0 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 + \lambda_1 h_1 = 0. \quad (36)$$



Gráfica de la martingala $\mathcal{T}(t) + \mathcal{Q}(t)$.

3. Modelo telegráfico

Modelos de mercado basados en procesos telegráficos han aparecido en la literatura en varias ocasiones por ejemplo: Di Crescenzo y Pellerey [DP 02] - Pogorui y Rodríguez-Dagnino [PR 09]. Pero, hay que señalar que los modelos de valoración de opciones propuestos en estos trabajos se basan en procesos telegráficos sin saltos, lo cual hace que estos modelos siempre posean oportunidades de arbitraje (ver [R 07]). En esta sección vamos a considerar el modelo telegráfico propuesto por Ratanov en [R 07] y su generalización realizada por López y Ratanov en [LR 11].

3.1. Modelo telegráfico con saltos constantes

En esta sección vamos a describir el modelo telegráfico con saltos constantes introducido en Ratanov [R 07]. Este modelo tiene características interesantes, en primer lugar el modelo no tiene arbitraje, es decir, posee medidas neutrales al riesgo, en segundo lugar, el modelo es completo, es

decir, que existe una única medida neutral al riesgo. En este modelo se pueden calcular al igual que en el modelo de Black-Scholes los precios de las opciones Europeas de forma explícita así como las estrategias de cobertura.

Sean $\mathcal{T}(t), t \in [0, T]$ el proceso telegráfico y $\mathcal{J}(t), t \in [0, T]$ el proceso de saltos constantes definidos en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Vamos a construir nuestro modelo de mercado financiero con dos activos.

Asumimos que el precio del activo riesgoso se mueve de acuerdo a la exponencial estocástica de $\mathcal{T}(t) + \mathcal{J}(t)$, es decir

$$S(t) = S_0 \mathcal{E}_t(\mathcal{T} + \mathcal{J}) = S_0 \exp\{\mathcal{T}(t)\} \prod_{n=1}^{N(t)} (1 + h_{\varepsilon_n}), \quad (37)$$

donde $S(0) = S_0 > 0$ es el precio inicial del activo subyacente. Suponemos que los tamaños de los saltos son tales que $h_0 > -1$ y $h_1 > -1$.

El otro activo de nuestro modelo es la cuenta bancaria $B(t), t \in [0, T]$ que nos da rendimientos alternados con tasas de interés $r_0 > 0$ y $r_1 > 0$, así que

$$B(t) = \exp\{\mathcal{R}(t)\}, \quad (38)$$

donde $\mathcal{R}(t) = \int_0^t r_{\varepsilon(s)} ds$.

El modelo (37)-(38) no tiene oportunidades de arbitraje si el proceso

$$B(t)^{-1} S(t) = S_0 \exp\{\mathcal{T}(t) - \mathcal{R}(t)\} \prod_{n=1}^{N(t)} (1 + h_{\varepsilon_n}),$$

es una martingala con respecto a alguna medida equivalente de probabilidad \mathbb{P}^* .

Nótese que el proceso $\mathcal{T}(t) - \mathcal{R}(t), t \in [0, T]$ es un proceso telegráfico con velocidades $\bar{c}_0 := c_0 - r_0$ y $\bar{c}_1 := c_1 - r_1$ las cuales cambian de acuerdo al proceso de Markov $\varepsilon(t), t \in [0, T]$.

Para encontrar la medida neutral al riesgo, vamos a considerar constantes $c_0^* \in \mathbb{R}, c_1^* \in \mathbb{R}, h_1^* \in \mathbb{R}$ y $h_0^* \in \mathbb{R}$, tales que $h_0^* > -1, h_1^* > -1, c_0^* = -\lambda_0 h_0^*$ y $c_1^* = -\lambda_1 h_1^*$. Ahora, definimos el proceso telegráfico $\mathcal{T}^*(t)$ como en (6) con velocidades c_0^* y c_1^* en lugar de c_0 y c_1 , y el proceso de saltos constante $\mathcal{J}^*(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} h_{\varepsilon_n}^*$ con valores de los saltos iguales a h_0^* y h_1^* .

Debido al Corolario 2.3 el proceso $\mathcal{T}^* + \mathcal{J}^*$ es una martingala. Sea $Z = Z(t)$ la exponencial estocástica de este proceso

$$Z(t) := \mathcal{E}_t(\mathcal{T}^* + \mathcal{J}^*) = e^{\mathcal{T}^*(t)} \prod_{n=1}^{N(t)} (1 + h_{\varepsilon_n}^*). \quad (39)$$

Vamos a transformar la medida de probabilidad \mathbb{P} en una medida equivalente \mathbb{P}^* sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ por medio de la densidad

$$\left. \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = Z(t). \quad (40)$$

Teorema 3.1. Bajo la medida de probabilidad \mathbb{P}^* tenemos

- i) El proceso $N(t), t \in [0, T]$ es un proceso de Poisson con intensidades $\lambda_0^* = \lambda_0 - c_0^* = \lambda_0(1 + h_0^*)$ y $\lambda_1^* = \lambda_1 - c_1^* = \lambda_1(1 + h_1^*)$.
- ii) El proceso $\mathcal{T}(t), t \in [0, T]$ es un proceso telegráfico con tendencias c_0 y c_1 e intensidades λ_0^* y λ_1^* .

Demostración. Sea $\pi_i^*(t; n) := \mathbb{P}_i^*(N(t) = n)$. Notese que $\mathcal{T}^*(t) = b_*t + a_*\mathcal{T}(t)$, donde $a_* = \frac{c_1^* - c_0^*}{c_1 - c_0}$ y $b_* = \frac{c_0^*c_1 - c_1^*c_0}{c_1 - c_0}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\pi_i^*(t; n) &= \mathbb{E}_i\{Z(t)\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}}\} \\ &= \kappa_n^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} p_i(x, t; n) dx,\end{aligned}$$

donde $\kappa_n^* = \prod_{k=1}^n (1 + h_{\varepsilon_k}^*)$. Derivando tenemos

$$\dot{\pi}_i^*(t; n) = b_*\kappa_n^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} p_i(x, t; n) dx + \kappa_n^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} \frac{\partial p_i}{\partial t}(x, t; n) dx.$$

Utilizando (16)

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_i^*(t; n) &= b_*\kappa_n^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} p_i(x, t; n) dx - c_i\kappa_n^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} \frac{\partial p_i}{\partial x}(x, t; n) dx \\ &\quad - \lambda_i\kappa_n^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} p_i(x, t; n) dx + \lambda_i\kappa_n^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} p_{1-i}(x, t; n-1) dx.\end{aligned}$$

Usando integración por partes en el segundo miembro del lado izquierdo de la anterior igualdad tenemos

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_i^*(t; n) &= b_*\kappa_n^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} p_i(x, t; n) dx + c_i a_* \kappa_n^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} p_i(x, t; n) dx \\ &\quad - \lambda_i \kappa_n^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} p_i(x, t; n) dx \\ &\quad + \lambda_i (1 + h_i^*) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + h_{1-\varepsilon_k}^*) \int_{-\infty}^{\infty} e^{b_*t + a_*x} p_{1-i}(x, t; n-1) dx,\end{aligned}$$

de donde

$$\dot{\pi}_i^*(t; n) = (b_* + a_*c_i - \lambda_i)\pi_i^*(t; n) + \lambda_i(1 + h_i^*)\pi_{1-i}^*(t; n-1).$$

Como $b_* + a_*c_i - \lambda_i = c_i^* - \lambda_i = -\lambda_i^*$ y $\lambda_i(1 + h_i^*) = \lambda_i^*$, lo que resulta en

$$\dot{\pi}_i^*(t; n) = -\lambda_i^*\pi_i^*(t; n) + \lambda_i^*\pi_{1-i}^*(t; n-1),$$

por lo tanto el proceso $N(t), t \in [0, T]$ es un proceso de Poisson con intensidades λ_i^* . \square

Teorema 3.2. El modelo (37)-(38) posee una medida martingala equivalente \mathbb{P}^* , si y sólo si,

$$\bar{c}_0 + \lambda_0^* h_0 = 0 \quad \text{y} \quad \bar{c}_1 + \lambda_1^* h_1 = 0. \quad (41)$$

Demostración. Como $\lambda_0^* > 0$ y $\lambda_1^* > 0$ entonces por (41) tenemos que $-\bar{c}_0/h_0 > 0$ y $-\bar{c}_1/h_1 > 0$. Sean $c_0^* := \lambda_0 + \bar{c}_0/h_0$, $c_1^* := \lambda_1 + \bar{c}_1/h_1$, $h_0^* := -c_0^*/\lambda_0$ y $h_1^* := -c_1^*/\lambda_1$, entonces $h_0^* = -1 - \bar{c}_0/(\lambda_0 h_0) > -1$ y $h_1^* = -1 - \bar{c}_1/(\lambda_1 h_1) > -1$. Por lo tanto con estos valores de c_0^* , c_1^* , h_0^* y h_1^* el proceso $Z(t)$ que define la nueva medida de probabilidad está definido de manera correcta.

Por el Teorema 3.1 el proceso $\mathcal{T}(t) - \mathcal{R}(t)$ es un proceso telegráfico (con respecto a \mathbb{P}^*) con tendencias \bar{c}_0 y \bar{c}_1 e intensidades λ_0^* y λ_1^* . Por lo tanto, por el Corolario 2.3 el proceso $\mathcal{T}(t) - \mathcal{R}(t) + \mathcal{J}(t)$ es una \mathbb{P}^* -martingala, si y sólo si, (41) se tiene.

Como $B(t)^{-1}S(t) = S_0 \mathcal{E}_t(\mathcal{T} - \mathcal{R} + \mathcal{J})$ y la exponencial estocástica de una martingala es martingala, tenemos que $B(t)^{-1}S(t)$ es una \mathbb{P}^* -martingala, si y sólo si, (41) se tiene. \square

3.2. Modelo telegráfico con saltos aleatorios

En esta sección vamos a considerar el modelo telegráfico en donde los tamaños de los saltos ahora son variables aleatorias, este modelo corresponde al modelo introducido en López y Ratanov [LR 11]. A diferencia del modelo con saltos constantes, este modelo es incompleto, es decir, existen infinitas medidas neutrales al riesgo. Presentamos aquí dos formas de escoger de cierta manera razonable una medida neutral al riesgo única que nos permita valorar los precios de las opciones Europeas de compra y venta.

Sean $\mathcal{T}(t), t \in [0, T]$ el proceso telegráfico y $\mathcal{Q}(t), t \in [0, T]$ el proceso de saltos aleatorios definidos en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Vamos a construir nuestro modelo de mercado financiero con dos activos.

En este caso asumimos que el precio del activo subyacente se mueve de acuerdo a la exponencial estocástica de $\mathcal{T}(t) + \mathcal{Q}(t)$, es decir

$$S(t) = S_0 \mathcal{E}_t(\mathcal{T} + \mathcal{Q}) = S_0 \exp\{\mathcal{T}(t)\} \prod_{n=1}^{N(t)} (1 + Y_{\varepsilon_n, n}), \quad (42)$$

donde $S(0) = S_0 > 0$ es el precio inicial del activo subyacente. Suponemos que las variables aleatorias Y_{in} tienen rango contenido en $(-1, \infty)$, $i = 0, 1, n \in \mathbb{N}$.

El otro activo, la cuenta bancaria $B(t), t \in [0, T]$ nos da rendimientos alternados con tasas de interés $r_0 > 0$ y $r_1 > 0$, así que

$$B(t) = \exp\{\mathcal{R}(t)\}, \quad (43)$$

donde $\mathcal{R}(t) = \int_0^t r_{\varepsilon(s)} ds$.

El modelo (42)-(43) no tiene oportunidades de arbitraje si el proceso

$$B(t)^{-1}S(t) = S_0 \exp\{\mathcal{T}(t) - \mathcal{R}(t)\} \prod_{n=1}^{N(t)} (1 + Y_{\varepsilon_n, n}),$$

es una martingala con respecto a alguna medida de probabilidad equivalente $\tilde{\mathbb{P}}$.

Teorema 3.3. El modelo (42)-(43) posee una medida martingala equivalente $\tilde{\mathbb{P}}$, si y sólo si, existen un par de funciones positivas integrables φ_0 y φ_1 tales que

$$\bar{c}_0 + \int_{-1}^{\infty} y\varphi_0(y)\Phi_0(dy) = 0 \quad y \quad \bar{c}_1 + \int_{-1}^{\infty} y\varphi_1(y)\Phi_1(dy) = 0. \quad (44)$$

Bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$ las intensidades del proceso de Poisson están dadas por

$$\lambda_0^* = \int_{-1}^{\infty} \varphi_0(y)\Phi_0(dy) \quad y \quad \lambda_1^* = \int_{-1}^{\infty} \varphi_1(y)\Phi_1(dy), \quad (45)$$

y los valores de los saltos están distribuidos de acuerdo a

$$\Phi_0^*(dy) = \frac{\varphi_0(y)}{\lambda_0^*}\Phi_0(dy) \quad y \quad \Phi_1^*(dy) = \frac{\varphi_1(y)}{\lambda_1^*}\Phi_1(dy). \quad (46)$$

Demostración. Vamos a construir una medida equivalente de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ en dos pasos.

Primer paso. Consideremos constantes $c_0^* \in \mathbb{R}$, $c_1^* \in \mathbb{R}$, $h_0^* \in \mathbb{R}$ y $h_1^* \in \mathbb{R}$ tales que $h_0^* > -1$, $h_1^* > -1$, $c_0^* = -\lambda_0 h_0^*$ y $c_1^* = -\lambda_1 h_1^*$. Ahora, definiendo el proceso telegráfico $\mathcal{T}^*(t)$ con velocidades c_0^* y c_1^* y el proceso de saltos constantes $\mathcal{J}^*(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} h_{\varepsilon_n}^*$ con valores de los saltos iguales a h_0^* y h_1^* , podemos definir $Z(t)$ como en (39).

Como primer paso, vamos a transformar la medida de probabilidad \mathbb{P} en una medida equivalente \mathbb{P}^* sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ por medio de la densidad

$$\left. \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = Z(t). \quad (47)$$

Sabemos por el Teorema 3.1 que bajo la nueva medida \mathbb{P}^* las intensidades de cambio del proceso $\varepsilon(t)$ se convierten en $\lambda_0^* = \lambda_0 - c_0^* = \lambda_0(1 + h_0^*)$ y $\lambda_1^* = \lambda_1 - c_1^* = \lambda_1(1 + h_1^*)$, por lo tanto, podemos cambiar las intensidades λ_0 , λ_1 por intensidades arbitrarias $\lambda_0^* > 0$ y $\lambda_1^* > 0$.

Segundo paso. Vamos a encontrar las nuevas distribuciones de los tamaños de los saltos $\Phi_0^*(dy)$ y $\Phi_1^*(dy)$ de la siguiente manera

$$\Phi_0^*(dy) = \varphi_0^*(y)\Phi_0(dy) \quad y \quad \Phi_1^*(dy) = \varphi_1^*(y)\Phi_1(dy), \quad (48)$$

donde $\varphi_0^*(y)$ y $\varphi_1^*(y)$ son funciones positivas integrables tales que

$$\int_{-1}^{\infty} \varphi_0^*(y)\Phi_0(dy) = 1 \quad y \quad \int_{-1}^{\infty} \varphi_1^*(y)\Phi_1(dy) = 1. \quad (49)$$

La composición de estos dos pasos nos permitir obtener la nueva medida $\tilde{\mathbb{P}}$ la cual es equivalente a la medida original \mathbb{P} .

Usando el Teorema 2.1 podemos ver que los procesos $\mathcal{T} - \mathcal{R} + \mathcal{J}$ así como $B^{-1}S$ son $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingalas, si y sólo si,

$$\bar{c}_0 + \lambda_0^* \int_{-1}^{\infty} y\varphi_0^*(y)\Phi_0(dy) = 0 \quad y \quad \bar{c}_1 + \lambda_1^* \int_{-1}^{\infty} y\varphi_1^*(y)\Phi_1(dy) = 0. \quad (50)$$

Por lo tanto el modelo (42)-(43) posee una medida equivalente de probabilidad, si y sólo si, el sistema (44) tiene integrables soluciones $\varphi_0(y)$ y $\varphi_1(y)$.

Esta medida es construida de la siguiente manera: en el primer paso seleccionamos las nuevas intensidades λ_0^* y λ_1^* , en el segundo paso, cambiamos las distribuciones de los saltos utilizando las funciones φ_0^* y φ_1^* definidas por $\varphi_0^*(y) = \varphi_0(y)/\lambda_0^*$ y $\varphi_1^*(y) = \varphi_1(y)/\lambda_1^*$ utilizando (46).

Por último, integrando las dos últimas igualdades con respecto a las distribuciones $\Phi_0(dy)$ y $\Phi_1(dy)$ tenemos que

$$\lambda_0^* = \int_{-1}^{\infty} \varphi_0(y) \Phi_0(dy) \quad \text{y} \quad \lambda_1^* = \int_{-1}^{\infty} \varphi_1(y) \Phi_1(dy). \quad (51)$$

□

Observación 3.1. En el caso particular cuando los valores de los saltos son constantes, es decir $\Phi_0(dy) = \delta(y - h_0)dy$ y $\Phi_1(dy) = \delta(y - h_1)dy$, las ecuaciones en (44) tienen la forma $\bar{c}_0 + \lambda_0^* h_0 = 0$ y $\bar{c}_1 + \lambda_1^* h_1 = 0$. Por lo tanto, en este caso el Teorema 3.3 es equivalente al Teorema 3.2.

3.3. Escogencia de la medida martingala

En esta sección presentamos dos formas de escoger una única medida martingala, en primer lugar suponemos que la distribución del tamaño de los saltos no cambia 3.3.1; en segundo lugar suponemos que la distribución del tamaño de los saltos cambia pero que conserva la misma forma 3.3.2.

3.3.1. No existe riesgo en los saltos

Siguiendo los argumentos de R. Merton (ver [M76] y [ECS07]) vamos a asumir que el componente telegráfico $\mathcal{T}(t)$ y el componente de saltos $\mathcal{Q}(t)$ representan riesgo sistemático y riesgo no sistemático del activo subyacente. Así que vamos a suponer que *bajo el cambio de medida la distribución de los saltos es invariante*. Esta suposición parece bastante razonable puesto que en el caso de saltos constantes el modelo telegráfico bajo la única medida martingala cambia solo las intensidades del proceso de Markov $\varepsilon(t)$.

Si las distribuciones de los valores de los saltos no cambian, esto significa que consideramos solo soluciones constantes de las ecuaciones en (44) $\varphi_0 = \lambda_0^*$ y $\varphi_1 = \lambda_1^*$, donde $\lambda_0^* = -\bar{c}_0/y_0$ y $\lambda_1^* = -\bar{c}_1/y_1$. En este caso, la medida neutral al riesgo \mathbb{P}^* está definida por (40), y el proceso de Markov $\varepsilon(t)$ bajo esta medida tiene intensidades λ_0^* y λ_1^* .

3.3.2. El riesgo en los saltos está asegurado

Para hacer otra elección de la medida neutral al riesgo vamos a adicionar a nuestro modelo un tercer activo el cual aumenta su valor en una tasa fija en cada momento en el que hay un cambio de estado

$$\hat{S}(t) = \prod_{n=1}^{N(t)} (1 + \hat{h}_{\varepsilon_n}). \quad (52)$$

El proceso $\hat{S}(t)$, $t \in [0, T]$ es gobernado por el mismo proceso de Poisson $N(t)$ y tiene saltos constantes con valores $\hat{h}_0 > 0$ y $\hat{h}_1 > 0$. Este activo puede considerarse como un contrato de

seguro que ayuda a compensar las pérdidas y/o ganancias producidas por el valor de los saltos en cada instante de cambio de estado.

El mercado formado por $\{B(t), S(t), \hat{S}(t)\}, t \in [0, T]$ es típicamente incompleto, aunque ahora podemos hacer una escogencia razonable de la medida neutral al riesgo de la siguiente forma: primero cambiamos la medida con respecto a las intensidades del proceso $\varepsilon(t)$, para esto utilizamos $\hat{S}(t)$. Por el Teorema 3.2 y el Teorema 3.3 podemos definir de manera única las intensidades de cambio como $\lambda_0^* = r_0/\hat{h}_0$ y $\lambda_1^* = r_1/\hat{h}_1$. Entonces, hacemos un cambio más de medida esta vez conservando la forma de las distribuciones de los saltos Y_{in} .

Damos ahora algunos ejemplos que ilustran este enfoque.

Ejemplo 3.1 (Distribución exponencial). Supongamos que $\bar{c}_0 < 0$ y $\bar{c}_1 < 0$ y que las distribuciones de los tamaños de los saltos (bajo la medida \mathbb{P}) son exponenciales con densidades dadas por $\Phi_0(dy) = \eta_0 e^{-\eta_0 y} \mathbf{1}_{\{y>0\}} dy$ y $\Phi_1(dy) = \eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y>0\}} dy$, $\eta_0 > 0$, $\eta_1 > 0$.

Asumiendo que las distribuciones bajo la medida martingala $\tilde{\mathbb{P}}$ vuelven a ser exponenciales, definimos $\varphi_0(y) = \alpha_0 e^{-a_0 y} \mathbf{1}_{\{y>0\}}$ y $\varphi_1(y) = \alpha_1 e^{-a_1 y} \mathbf{1}_{\{y>0\}}$, donde $a_0 > -\eta_0$, $a_1 > -\eta_1$, $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 > 0$.

De la ecuación en (44) tenemos que

$$a_0 = -\eta_0 + \sqrt{-\alpha_0 \eta_0 / \bar{c}_0} \quad \text{y} \quad a_1 = -\eta_1 + \sqrt{-\alpha_1 \eta_1 / \bar{c}_1}.$$

Bajo la medida martingala $\tilde{\mathbb{P}}$ las nuevas intensidades de cambio son $\lambda_0^* = \sqrt{-\bar{c}_0 \eta_0 \alpha_0}$ y $\lambda_1^* = \sqrt{-\bar{c}_1 \eta_1 \alpha_1}$ (ver (45)), y las distribuciones de los saltos se definen de acuerdo a (46). Por lo tanto, $\alpha_0 = \frac{\lambda_0^{*2}}{-\bar{c}_0 \eta_0}$, $\alpha_1 = \frac{\lambda_1^{*2}}{-\bar{c}_1 \eta_1}$ y las nuevas distribuciones de los saltos son

$$\Phi_0^*(dy) = \eta_0^* e^{-\eta_0^* y} \mathbf{1}_{\{y>0\}} dy \quad \text{y} \quad \Phi_1^*(dy) = \eta_1^* e^{-\eta_1^* y} \mathbf{1}_{\{y>0\}} dy,$$

donde $\eta_0^* = -\lambda_0^*/\bar{c}_0$ y $\eta_1^* = -\lambda_1^*/\bar{c}_1$. En este caso tenemos que $\lambda_0^* = r_0/\hat{h}_0$ y $\lambda_1^* = r_1/\hat{h}_1$ nos permiten encontrar los valores de α_0 , α_1 , a_0 y a_1 .

Ejemplo 3.2 (Distribución log-exponencial). Supongamos que la distribución de $V_{in} = \log(1 + Y_{in})$ es exponencial.

Mas precisamente, si $\bar{c}_i < 0$ entonces la distribución de V_{in} es exponencial. En el caso de $\bar{c}_i > 0$ vamos a asumir que la distribución de $-V_{in}$ es exponencial. En ambos casos establecemos la distribución de la variable aleatoria V_{in} es $\Phi_i(dy) = \eta_i e^{-\eta_i y} \mathbf{1}_{\{y>0\}} dy$, $\eta_i > 0$, $i = 0, 1$.

Caso $\bar{c}_i < 0$.

Supongamos que $\eta_i > 1$. En este caso tenemos que la distribución de los saltos Y_{in} es $\Phi_i(dy) = \eta_i (1+y)^{-(1+\eta_i)} \mathbf{1}_{\{y>0\}} dy$ y que la esperanza $y_i = \mathbb{E}Y_{in} = \frac{1}{\eta_i - 1}$. Asumiendo que las distribuciones de Y_{in} bajo la medida neutral al riesgo $\tilde{\mathbb{P}}$ son de la misma forma, definimos $\varphi_i(y) = \alpha_i (1+y)^{-a_i} \mathbf{1}_{\{y>0\}}$, $a_i > 1 - \eta_i$, $\alpha_i > 0$.

De la ecuación en (44) obtenemos que

$$a_i = -\eta_i + \frac{1 + \sqrt{\Delta_i}}{2},$$

donde $\Delta_i = 1 + 4\alpha_i \eta_i / |\bar{c}_i|$.

Bajo la medida martingala las nuevas intensidades de cambio son $\lambda_i^* = \frac{\alpha_i \eta_i}{a_i + \eta_i} = \frac{2\alpha_i \eta_i}{1 + \sqrt{\Delta_i}}$. Por lo tanto, $\alpha_i = \lambda_i^*(1 + \lambda_i^*/|\bar{c}_i|)/\eta_i$ y los tamaños de los saltos Y_{in} son distribuidos como antes con $\Phi_i^*(dy) = \eta_i^*(1+y)^{-(1+\eta_i^*)} \mathbf{1}_{\{y>0\}} dy$, donde $\eta_i^* = \alpha_i \eta_i / \lambda_i^* = 1 + \lambda_i^*/|\bar{c}_i|$ y $\lambda_i^* = r_i/\hat{h}_i$.

Caso $\bar{c}_i > 0$ y $\lambda_i^ = r_i/\hat{h}_i > \bar{c}_i$.*

Ahora la distribución de los saltos Y_{in} es $\Phi_i(dy) = \eta_i(1+y)^{\eta_i-1} \mathbf{1}_{\{-1<y<0\}} dy$ y la esperanza $y_i = \mathbb{E}Y_{in} = -\frac{1}{1+\eta_i}$, $\eta_i > 0$. De nuevo asumiendo que las distribuciones de los saltos bajo la medida martingala son de la misma forma, definimos $\varphi_i(y) = \alpha_i(1+y)^{a_i} \mathbf{1}_{\{-1<y<0\}}$, $a_i > -\eta_i$, $\alpha_i > 0$.

Repetiendo los cálculos en el caso $\bar{c}_i < 0$ tenemos que $a_i = -\eta_i + \frac{-1+\sqrt{\Delta_i}}{2}$. Las nuevas intensidades son $\lambda_i^* = \frac{\alpha_i \eta_i}{a_i + \eta_i} = \frac{2\alpha_i \eta_i}{-1+\sqrt{\Delta_i}}$. Por lo tanto, $\alpha_i = \lambda_i^*(\lambda_i^*/\bar{c}_i - 1)/\eta_i > 0$ y los tamaños de los saltos Y_{in} estan distribuidos como $\Phi_i^*(dy) = \eta_i^*(1+y)^{\eta_i^*-1} \mathbf{1}_{\{-1<y<0\}} dy$, donde $\eta_i^* = \alpha_i \eta_i / \lambda_i^*$ and $\lambda_i^* = r_i/\hat{h}_i > \bar{c}_i$.

Caso $\bar{c}_i > 0$ y $\lambda_i^ = r_i/\hat{h}_i < \bar{c}_i$. Arbitraje.*

En este caso el modelo posee oportunidades de arbitraje. Si las nuevas distribuciones de los tamaños de los saltos tienen la misma estructura, entonces $\tilde{y}_i = \tilde{\mathbb{E}}Y_{in} = -1/(1+\eta_i^*) > -1$. Por lo tanto en este caso vamos a tener que $\bar{c}_i + \lambda_i^* \tilde{y}_i > 0$. Debido al Teorema 3.3 esto significa la ausencia de medidas neutrales al riesgo.

Ejemplo 3.3 (Distribución log-normal). Supongamos que la distribución de $V_{in} = \log(1 + Y_{in})$ es normal, $V_{in} \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$.

Caso $\bar{c}_i < \lambda_i^ = r_i/\hat{h}_i$.*

En este caso la distribución de los saltos Y_{in} es

$$\Phi_i(dy) = \frac{1}{(1+y)\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\log(1+y) - m_i]^2}{2\sigma_i^2}\right\} \mathbf{1}_{\{y>-1\}} dy, \quad (53)$$

y la esperanza $y_i = \mathbb{E}Y_{in} = \exp\{m_i + \sigma_i^2/2\} - 1$.

Vamos a cambiar la medida asumiendo que las nuevas distribuciones de $1 + Y_{in}$ son de nuevo log-normales con la misma σ_i . Para hacer esto, definimos $\varphi_i(y) = \alpha_i(1+y)^{a_i} \mathbf{1}_{\{y>-1\}} = \alpha_i e^{a_i \log(1+y)} \mathbf{1}_{\{y>-1\}}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$.

De la ecuación en (44) obtenemos que

$$a_i = \frac{\log(1 - \bar{c}_i/\lambda_i^*) - m_i - \sigma_i^2/2}{\sigma_i}.$$

Las nuevas intensidades en este caso son

$$\lambda_i^* = \alpha_i \exp\left\{m_i a_i + \frac{\sigma_i^2 a_i^2}{2}\right\}.$$

De donde, $\alpha_i = \lambda_i^* \exp\left\{-m_i a_i - \frac{\sigma_i^2 a_i^2}{2}\right\}$, $\lambda_i^* = r_i/\hat{h}_i > \bar{c}_i$ y los saltos Y_{in} estan distribuidos de la siguiente forma

$$\Phi_i^*(dy) = \frac{1}{(1+y)\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\log(1+y) - (m_i + \sigma_i^2 a_i)]^2}{2\sigma_i^2}\right\} \mathbf{1}_{\{y>-1\}} dy.$$

Por lo tanto $V_{in} \sim \mathcal{N}(m_i + \sigma_i^2 a_i, \sigma_i^2)$.

Caso $\bar{c}_i > \lambda_i^* = r_i/\hat{h}_i$. Arbitraje.

En este caso el modelo posee oportunidades de arbitraje. Si las nuevas distribuciones de los tamaños de los saltos tienen la misma estructura, entonces $\tilde{y}_i = \tilde{\mathbb{E}}Y_{in} = \exp\{m_i + \sigma_i^2 a_i + \sigma_i^2/2\} - 1 > -1$. Por lo tanto en este caso vamos a tener que $\bar{c}_i + \lambda_i^* \tilde{y}_i > 0$. De nuevo por el Teorema 3.3 esto significa la ausencia de medidas neutrales al riesgo.

4. Calculo de las opciones Europeas de compra y venta

En esta sección vamos a encontrar la fórmula del precio de la opción Europea de compra

$$c = \tilde{\mathbb{E}}_i \{ B(T)^{-1} (S(T) - K)^+ \}, \quad (54)$$

donde K es el precio de ejercicio, T la fecha de vencimiento del contrato y $\tilde{\mathbb{E}}_i$ es la esperanza condicional con respecto a la medida martingala.

Podemos escribir c de la siguiente forma

$$\begin{aligned} c &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbb{E}}_i \{ B(T)^{-1} (S(T) - K)^+ \mathbf{1}_{\{N(T)=n\}} \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbb{E}}_i \{ B(T)^{-1} (S(T) - K) \mathbf{1}_{\{N(T)=n\}} \mathbf{1}_{\{S(T)>K\}} \}. \end{aligned}$$

La anterior ecuación se puede escribir como

$$c = S(0)\Psi_i(z, T) - K\psi_i(z, T), \quad (55)$$

donde

$$\Psi_i(z, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_i(z, T; n) \quad \text{y} \quad \psi_i(z, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_i(z, T; n).$$

Las funciones $\Psi_i(z, T; n)$ y $\psi_i(z, T; n)$ están definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Psi_i(z, T; n) &= \\ &\int_{-1}^{\infty} \cdots \int_{-1}^{\infty} \int_{z - \sum_{k=1}^n \log(1+y_k)}^{\infty} \prod_{k=1}^n (1+y_k) e^{-b_r t - a_r x + x} p_i^*(x, t; n) dx \Phi_i^*(dy_1) \cdots \Phi_{\varepsilon_n}^*(dy_n) \end{aligned}$$

y

$$\psi_i(z, T; n) = \int_{-1}^{\infty} \cdots \int_{-1}^{\infty} \int_{z - \sum_{k=1}^n \log(1+y_k)}^{\infty} e^{-b_r t - a_r x} p_i^*(x, t; n) dx \Phi_i^*(dy_1) \cdots \Phi_{\varepsilon_n}^*(dy_n),$$

donde $z = \log(K/S(0))$, $p_i^*(x, t; n)$ es la densidad del proceso telegráfico dados n saltos y $\Phi_i^*(dy)$ es la distribución de los tamaños de saltos ambas bajo la medida neutral al riesgo. Además, a_r y b_r son constantes tales que $\mathcal{R}(t) = b_r t + a_r \mathcal{T}(t)$, es decir, $a_r = \frac{r_1 - r_0}{c_1 - c_0}$ y $b_r = \frac{r_0 c_1 - r_1 c_0}{c_1 - c_0}$.

Sean

$$\begin{aligned} U_i(z, t; n) &= \tilde{\mathbb{E}}_i \left\{ e^{\mathcal{T}(t) - \mathcal{R}(t)} \prod_{k=1}^n (1+y_k) \mathbf{1}_{\{\mathcal{T}(t) > z, N(t)=n\}} \right\} \\ &= \kappa_n^* e^{-b_r t} \int_z^{\infty} e^{-a_r x + x} p_i^*(x, t; n) dx, \end{aligned} \quad (56)$$

donde $\kappa_n^* = \prod_{k=1}^n (1 + y_k)$ y

$$\begin{aligned} u_i(z, t; n) &= \tilde{\mathbb{E}}_i \left\{ e^{-\mathcal{R}(t)} \mathbf{1}_{\{T(t) > z, N(t) = n\}} \right\} \\ &= e^{-b_r t} \int_z^\infty e^{-a_r x} p_i^*(x, t; n) dx. \end{aligned} \quad (57)$$

De estas definiciones tenemos que

$$\Psi_i(z, T; n) = \int_{-1}^\infty \cdots \int_{-1}^\infty U_i(z - \log \kappa_n^*, T; n) \Phi_i^*(dy_1) \cdots \Phi_{\varepsilon_n}^*(dy_n) \quad (58)$$

y

$$\psi_i(z, T; n) = \int_{-1}^\infty \cdots \int_{-1}^\infty u_i(z - \log \kappa_n^*, T; n) \Phi_i^*(dy_1) \cdots \Phi_{\varepsilon_n}^*(dy_n). \quad (59)$$

Nótese que por (16) las funciones $U_i(z, t; n)$, $n \geq 1$ satisfacen el sistema

$$\frac{\partial U_i(z, t; n)}{\partial t} + c_i \frac{\partial U_i(z, t; n)}{\partial z} = -(\lambda_i^* + r_i - c_i) U_i(z, t; n) + \lambda_i^* (1 + y_i) U_{1-i}(z, t; n - 1), \quad (60)$$

y las funciones $u_i(z, t; n)$, $n \geq 1$ satisfacen el sistema

$$\frac{\partial u_i(z, t; n)}{\partial t} + c_i \frac{\partial u_i(z, t; n)}{\partial z} = -(\lambda_i^* + r_i) u_i(z, t; n) + \lambda_i^* u_{1-i}(z, t; n - 1). \quad (61)$$

Aditamos a (61) las condiciones iniciales $u_i(z, 0; n) = 0$, $n \geq 1$ y $u_i(z, t; 0) = e^{-(\lambda_i^* + r_i)t} \delta(z - c_i t)$. Para todo n , $u_i(z, t; n) \equiv 0$ si $z > c_1 t$, y

$$u_i(z, t; n) \equiv \rho_n^{(i)}(t) = e^{-b_r t} \int_{-\infty}^\infty e^{-a_r x} p_i^*(x, t; n) dx \quad (62)$$

si $z < c_0 t$. En el último caso, el sistema (61) toma la forma

$$\frac{d\rho_n^{(i)}}{dt}(t) = -(\lambda_i^* + r_i) \rho_n^{(i)}(t) + \lambda_i^* \rho_{n-1}^{(1-i)}(t), \quad n \geq 1, \quad (63)$$

$\rho_0^{(i)}(t) = e^{-(\lambda_i^* + r_i)t}$ y $\rho_n^{(i)}(0) = 0$, $n \geq 1$, $i = 0, 1$.

Lema 4.1. La solución del sistema (63) puede ser representada de la forma

$$\rho_n^{(i)}(t) = e^{-(\lambda_0^* + r_0)t} \Lambda_n^{(i)} P_n^{(i)}(t), \quad n \geq 0 \quad i = 0, 1,$$

donde $\Lambda_n^{(i)} = (\lambda_i^*)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (\lambda_{1-i}^*)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ y las funciones $P_n^{(i)}$ son definidas como:

$$\begin{aligned} P_0^{(1)} &= e^{-at}, & P_0^{(0)} &\equiv 1, \\ P_n^{(i)} &= P_n^{(i)}(t) = \frac{t^n}{n!} \left[1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(m_n^{(\sigma)} + 1)_k}{(n+1)_k} \cdot \frac{(-at)^k}{k!} \right], \quad n \geq 1, \quad i = 0, 1, \end{aligned} \quad (64)$$

donde

$$\begin{aligned} m_n^{(1)} &= \lfloor n/2 \rfloor, & m_n^{(0)} &= \lfloor (n-1)/2 \rfloor, \\ (m)_k &= m(m+1) \cdots (m+k-1), & a &= \lambda_1^* - \lambda_0^* + r_1 - r_0. \end{aligned}$$

Demostración. Nótese que en el caso particular $\lambda_1^* = \lambda_0^* = \lambda$ y $r_1 = r_0 = 0$, la solución del sistema (63) es conocida: $\rho_n^{(i)}(t) = \pi(t; n) = \mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$. Aplicamos el siguiente cambio de variables

$$\rho_n^{(i)}(t) = e^{-(\lambda_0^* + r_0)t} \Lambda_n^{(i)} P_n^{(i)}(t).$$

En estas notaciones, tenemos $P_0^{(1)}(t) = e^{-at}$, $a = (\lambda_1^* + r_1) - (\lambda_0^* + r_0)$; $P_0^{(0)}(t) = 1$; $P_n^{(i)}|_{t=0} = 0$, $n \geq 1$ y el sistema

$$\begin{cases} \dot{P}_n^{(1)} + aP_n^{(1)} = P_{n-1}^{(0)} \\ \dot{P}_n^{(0)} = P_{n-1}^{(1)} \end{cases}, \quad n \geq 1. \quad (65)$$

El último sistema tiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned} P_{2n+1} &\equiv P_{2n+1}^{(i)} = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)\dots(n+k)}{(2n+2)\dots(2n+k+1)} \cdot \frac{(-at)^k}{k!} \right], \\ P_{2n}^{(0)} &= \frac{t^{2n}}{(2n)!} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{(2n+1)\dots(2n+k)} \cdot \frac{(-at)^k}{k!} \right], \\ P_{2n}^{(1)} &= \frac{t^{2n}}{(2n)!} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)\dots(n+k)}{(2n+1)\dots(2n+k)} \cdot \frac{(-at)^k}{k!} \right], \end{aligned}$$

que coincide con (64). □

Observación 4.1. Las formulas en (64) pueden ser expresadas usando las funciones hipergeométricas:

$$P_n^{(i)}(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot {}_1F_1(m_n^{(i)} + 1; n + 1; -at), \quad m_n^{(1)} = \lfloor n/2 \rfloor, \quad m_n^{(0)} = \lfloor (n-1)/2 \rfloor.$$

Una función hipergeométrica ${}_1F_1(\alpha; \beta; z)$ está definida como

$${}_1F_1(\alpha; \beta; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!(\beta)_n} z^n.$$

Además, usando (66), podemos comprobar fácilmente que $P_{2n}^{(0)} - P_{2n}^{(1)} = aP_{2n+1}$, $n \geq 0$.

Definimos los coeficientes $\beta_{k,j}$, $j < k$: $\beta_{k,0} = \beta_{k,1} = \beta_{k,k-2} = \beta_{k,k-1} = 1$,

$$\beta_{k,j} = \frac{(k-j)_{\lfloor j/2 \rfloor}}{[j/2]!}, \quad (66)$$

y las funciones $\varphi_{k,n}$: $\varphi_{0,n} = P_{2n+1}$ y

$$\varphi_{k,n} = \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} \beta_{k,j} P_{2n-j}^{(0)}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (67)$$

Para los números positivos p, q , definimos $v_0^{(0)} \equiv 0$, $v_0^{(1)} = e^{-ap}$, $v_1^{(i)} = P_1(p)$, para $n \geq 1$ y $i = 0, 1$

$$\begin{aligned} v_{2n+1}^{(i)} &= v_{2n+1}^{(i)}(p, q) = P_{2n+1}(p) + \sum_{k=1}^n \frac{q^k}{k!} \varphi_{k,n}(p), \\ v_{2n}^{(0)} &= v_{2n}^{(0)}(p, q) = P_{2n}^{(0)}(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q^k}{k!} \varphi_{k+1,n}(p), \\ v_{2n}^{(1)} &= v_{2n}^{(1)}(p, q) = P_{2n}^{(1)}(p) + \sum_{k=1}^n \frac{q^k}{k!} \varphi_{k-1,n-1}(p). \end{aligned} \quad (68)$$

Ahora encontramos expresiones para $u_i(z, t; n)$ en los intervalos $c_0t < z < c_1t$.

Teorema 4.1. El sistema (61) admite una solución única de la forma

$$u_i(z, t; n) = \begin{cases} 0, & z > c_1t, \\ w_n^{(i)}(p, q), & c_0t \leq z \leq c_1t, \\ \rho_n^{(i)}(t), & z < c_0t, \end{cases} \quad i = 0, 1, \quad (69)$$

donde $w_n^{(i)} = e^{-(\lambda_1^* + r_1)q - (\lambda_0^* + r_0)p} \Lambda_n^{(i)} v_n^{(i)}(p, q)$, $p = \frac{c_1t - z}{c_1 - c_0}$, $q = \frac{z - c_0t}{c_1 - c_0}$, $n \geq 0$; las funciones $\rho_n^{(i)}$ son expresadas en el Lema 4.1.

Demostración. Evidentemente, $u_i(z, t; n) \equiv 0$, si $p < 0$, y $u_i(z, t; n) \equiv \rho_n^{(i)}(t)$, si $q < 0$. Para $p, q > 0$ tenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial v_n^{(1)}}{\partial q} = v_{n-1}^{(0)}, \\ \frac{\partial v_n^{(0)}}{\partial p} = v_{n-1}^{(1)} \end{cases}, \quad n \geq 1 \quad (70)$$

con

$$v_0^{(1)} = e^{-ap} \delta(p), \quad v_0^{(0)} = e^{aq} \delta(-q), \quad v_n^{(i)}|_{p < 0} \equiv 0$$

y

$$v_n^{(i)}|_{q < 0} = e^{aq} P_n^{(i)}(p + q). \quad (71)$$

Aquí $a = (\lambda_1^* + r_1) - (\lambda_0^* + r_0)$ and $P_n^{(i)}$, $n \geq 0$, $i = 0, 1$ son definidos en (64).

Es posible comprobar que la representación exacta de la solución de (70) para $p, q > 0$ tiene la forma (68) con $\varphi_{0,n} = P_{2n+1}$, $\varphi_{1,n} = P_{2n}^{(0)}$ y

$$\varphi'_{k,n} = \varphi_{k-1,n-1}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (72)$$

La prueba será terminada con la proposición siguiente.

Proposición 4.1. La solución del sistema (72) tiene la forma (67):

$$\varphi_{k,n} = \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} \beta_{k,j} P_{2n-j}^{(0)}.$$

Demostración. De (67) y (65) se sigue:

$$\varphi'_{k,n} = \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} \beta_{k,j} P_{2n-j-1}^{(1)}.$$

Por las identidades $P_{2n+1}^{(1)} = P_{2n+1}^{(0)}$ y $P_{2n}^{(0)} - P_{2n}^{(1)} = aP_{2n+1}$, $n \geq 0$ (ver Observación 4.1), tenemos

$$\begin{aligned} \varphi'_{k,n} &= \sum_{j \geq 0, j \text{ es par}} a^{k-j-1} \beta_{k,j} P_{2n-j-1} \\ &+ \sum_{j \geq 0, j \text{ es impar}} a^{k-j-1} \beta_{k,j} P_{2n-j-1}^{(0)} - \sum_{j \geq 0, j \text{ es impar}} a^{k-j} \beta_{k,j} P_{2n-j}. \end{aligned}$$

□

Para terminar la prueba es suficiente aplicar las identidades $\beta_{k,2m+1} = \beta_{k-1,2m}$, $\beta_{k,2m} - \beta_{k,2m+1} = \beta_{k-1,2m-1}$, las cuales se siguen evidentemente de $\beta_{k,n}$ (ver (66)). □

Observación 4.2. Si $\lambda_1^* = \lambda_0^* = \lambda$, $r_1 = r_0 = r$, entonces $P_n^{(i)} = \frac{t^n}{n!}$, $\pi_i(t; n) \equiv \pi(t; n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$, $\rho_n^{(i)} = e^{-rt} \pi_i(t; n)$ y $\varphi_{k,n} = P_{2n-k+1}^{(i)} = \frac{t^{2n-k+1}}{(2n-k+1)!}$. Además,

$$v_n^{(i)} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{m_n^{(i)}} \binom{n}{k} q^k p^{n-k}.$$

Observación 4.3. De (69) se tiene que las funciones $u_0(z, t; 0)$ y $u_1(z, t; 0)$ son discontinuas en $q = 0$ y $p = 0$ respectivamente. Todas las otras funciones $u_i(z, t; n)$, $n \geq 1$, definidas en (69), son continuas. Los puntos de discontinuidad en las derivadas están concentrados en las líneas $p = 0$ y $q = 0$. Por ejemplo, para $u_i(z, t; 1)$, $i = 0, 1$, tenemos

$$\left. \frac{\partial u_i(z, t; 1)}{\partial q} \right|_{q=+0} - \left. \frac{\partial u_i(z, t; 1)}{\partial q} \right|_{q=-0} = \lambda_i^* e^{-(\lambda_1^* + r_1)p},$$

y

$$\left. \frac{\partial u_i(z, t; 1)}{\partial p} \right|_{p=+0} - \left. \frac{\partial u_i(z, t; 1)}{\partial p} \right|_{p=-0} = \lambda_i^* e^{-(\lambda_1^* + r_1)q}.$$

Además, usando (69) es posible demostrar que $u_i(z, t; n) \in \mathcal{C}^{n-1}$.

Observación 4.4. Nótese que de (60) y (61) obtenemos la representación siguiente

$$U_i(z, t; n, \lambda_i^*, c_i, r_i) = u_i(z, t; n, \bar{\lambda}_i, c_i, \bar{r}_i), \quad (73)$$

donde $\bar{\lambda}_i = \lambda_i^*(1 + y_i)$ y $\bar{r}_i = r_i - c_i - \lambda_i^* y_i$.

En el caso de saltos constantes obtenemos la representación

$$U_i(z, t; n, \lambda_i^*, c_i, r_i) = u_i(z, t; n, \bar{\lambda}_i, c_i, 0), \quad (74)$$

donde $\bar{\lambda}_i = \lambda_i^*(1 + h_i) = \lambda_i^* + r_i - c_i$.

Observación 4.5. En el caso de saltos constantes las formulas en (55) tienen una estructura que depende del signo de $\ln(1 + h_0)(1 + h_1)$.

- i) Si $(1 + h_0)(1 + h_1) < 1$, entonces $\ln(1 + h_0) + \ln(1 + h_1) < 0$ y $\log \kappa_n^* \rightarrow -\infty$. El precio de la opción de venta es dado por la formula (55) con

$$\psi_i(z, T) = u_i(z, T) = \sum_{k=0}^{n_0^{(i)}} \rho_k^{(i)}(T) + \sum_{k=n_0^{(i)}+1}^{n_1^{(i)}} u_i(z - \log \kappa_k^*, T; k, \lambda_i^*, c_i, r_i),$$

y

$$\Psi_i(z, T) = U_i(z, T) = u_i(z, T; \bar{\lambda}_i, c_i, 0),$$

donde $z = \log(K/S(0))$,

$$n_0^{(i)} = \min \{n \mid z - \log \kappa_n^* > c_0 T\} \quad \text{y} \quad n_1^{(i)} = \min \{n \mid z - \log \kappa_n^* > c_1 T\}.$$

- ii) Si $(1 + h_0)(1 + h_1) > 1$, entonces $\ln(1 + h_0) + \ln(1 + h_1) > 0$ y $\log \kappa_n^* \rightarrow +\infty$. Denotaremos

$$m_0^{(i)} = \max \{n \mid z - \log \kappa_n^* > c_0 T\},$$

$$m_1^{(i)} = \max \{n \mid z - \log \kappa_n^* > c_1 T\}.$$

El precio de la opción de venta es dado por la formula (55) con

$$\psi_i(z, T) = u_i(z, T) = \sum_{k=m_1^{(i)}}^{m_0^{(i)}} u_i(z - \log \kappa_k^*, T; k, \lambda_i^*, c_i, r_i) + \sum_{k=m_0^{(i)+1}}^{\infty} \rho_k^{(i)}(T),$$

y

$$\Psi_i(z, T) = U_i(z, T) = u_i(z, T; \bar{\lambda}_i, c_i, 0),$$

donde $z = \log(K/S(0))$.

Para encontrar el precio de la opción de venta c primero obtenemos los valores de $u_i(z, T; n)$ y $U_i(z, T; n)$ utilizando el Teorema 4.1 y la Observación 4.4, reemplazamos estos valores en (58) y (59) para obtener $\Psi_i(z, T; n)$ y $\psi_i(z, T; n)$ y por tanto $\Psi_i(z, T)$ y $\psi_i(z, T)$. Evaluando estas dos últimas funciones en $z = \log(K/S(0))$ obtenemos el valor de c .

El precio p de la opción de venta puede ser encontrado a través de la condición de paridad

$$p + S(0) = c + Ke^{-\mathcal{R}(T)}.$$

Referencias

- [B 09] BJÖRK T. Arbitrage theory in continuous time. Thrid edition. *Oxford University Press*, 2009.
- [BS 73] BLACK F. AND SCHOLES M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659.
- [BE 02] BUFFINGTON J. AND ELLIOTT R.J. (2002), Regime switching and European Options. In *Stochastic theory and control, Proceedings of a workshop*, Lawrence K.S. *Springer*, 73-81.
- [C 10] CONT R. (Ed.) Encyclopedia of quantitative finance. *Wiley*, 2010.
- [DP 02] DI CRESCENZO A. AND PELLERREY F. (2002). On prices' evolutions based on geometric telegrapher's process. *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.* **18**, 171-184.
- [DR 87] DYBVIG, PH. AND ROSS, S. (1987). Arbitrage. In: J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman (eds.), *The new Palgrave dictionary of economics*, **1**, 100-106, Macmillan, London.
- [EH 02] ELLIOTT, R. J. AND HINZ J. (2002). Portfolio analysis, hidden Markov models and chart analysis by PF-Diagrams. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. **5**, 385-399.
- [EH 97] ELLIOTT, R. J. AND VAN DER HOEK, J. (1997). An application of hidden Markov models to asset allocation problems. *Finance and Stochastics*. **3**, 229-238.
- [ECS 05] ELLIOTT, R. J., CHANG, L. AND SIU, T. K. (2005). Option pricing and Esscher transform under regime switching. *Annals of Finance*, **1**, 423-432.
- [ECS 07] ELLIOTT, R. J., CHANG, L. AND SIU, T. K. (2007). Pricing Options under a generalized Markov-Modulated Jump-Diffusion Model. *Stoch. Anal. Appl.*, **25**, 821-843.
- [FWC 02] FUH C-D. WANG R-H. AND CHENG J-C. (2002). Option pricing in a Black-Scholes model with Markov switching. Working Paper. *Institute of Statistical Science*. Taipei.

- [GQ 73] GOLDFELD S.M. AND QUANDT R.E. (1973). A Markov model for switching regressions. *Journal of Econometrics*. **1**, 3-15.
- [G 51] GOLDSTEIN S. (1951). On diffusion by discontinuous movements and on the telegraph equation. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **4**, 129-156.
- [G 01] GUO X. (2001). Information and option pricings. *Quantitative Finance*. **1**, 38-44.
- [H 99] HADELER, K.P. (1999). Reaction transport systems in biological modelling, in: V. Capasso, O. Diekmann (Eds.), *Mathematics Inspired by Biology*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1714, Springer, Berlin, 95-150.
- [H 89] HAMILTON, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*. **57**, 357-384.
- [HK 79] HARRISON, J.M. AND KREPS, D.M.(1979). Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, **20**, 381-408.
- [HP 81] HARRISON, J.M. AND PLISKA, S.R. (1981). Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and their Applications*, **11**, 215-260.
- [HP 83] HARRISON, J.M. AND PLISKA, S.R. (1983). A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, **15**, 313-316.
- [HH 05] HILLEN, T. HADELER, K.P. (2005). Hyperbolic systems and transport equations in mathematical biology, in: G. Warnecke (Ed.), *Analysis and Numerics for Conservation Laws*. Springer. Berlin, 257-279.
- [K 74] KAC, M. (1974). A stochastic model related to the telegrapher's equation, *Rocky Mountain J. Math.* **4**, 497-509 (1974)
Reprinted from: KAC, M. Some stochastic problems in physics and mathematics, Colloquium lectures in the pure and applied sciences, No. 2, hectographed, Field Research Laboratory, Socony Mobil Oil Company, Dallas, TX, 102-122 (1956).
- [K 02] KOU S.G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science* **48**, 1086-1101.
- [K 81] KREPS, D.M. (1981). Arbitrage and Equilibrium in Economics with infinitely many Commodities. *Journal of Mathematical Economics*, **8**, 15-35.
- [LX 08] LAI T.L. AND XING H. Statistical models and methods for financial markets. *Springer Texts in Statistics*. 2008.
- [L 78] LINDGREN G. (1978). Markov regime models for mixed distributions and switching regressions. *Scandinavian Journal of Statistics* **5**, 81-91.
- [LR 11] LÓPEZ, O. AND RATANOV, N. (2011). Option pricing driven by telegraph process with random jumps. *Working paper*.
- [M 63] MANDELBROT, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*. **36**, 394-419.
- [MR 04] MAZZA C. AND RULLIÈRE (2004). A link between wave governed random motions and ruin processes. *Insurance: Mathematics and Economics*. **35**, 205-222.

- [M 73] MERTON, R. C. (1973). The theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* **4**, 141-183.
- [M 76] MERTON, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *The Journal of Financial Economics* **3**, 125-144.
- [N 93] NAIK, R. C. (1993). Option valuation and hedging strategies with jumps in the volatility of asset returns. *Journal of Finance* **48**, 1969-1984.
- [OL 01] OKUBA, A., LEVIN, S.A. (2001) Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives, 2nd edition, *Interdisciplinary Applied Mathematics*, vol. 14, Springer, Berlin.
- [O 90] ORSINGHER E. (1990). Probability law, flow function, maximum distribution of wave-governed random motions and their connections with Kirchoff's laws. *Stochastic Process. Appl.* **34**, 49-66.
- [O 95] ORSINGHER E. (1995). Motions with reflecting and absorbing barriers driven by the telegraph equation. *Random Oper. Stochastic Equations.* **3**, 9-21.
- [P 97] PLISKA S.R. Introduction to mathematical finance. *Blackwell Publishing.* 1997.
- [PR 09] POGORUI, A. A. AND RODRÍGUEZ-DAGNINO, R. M. (2009). Evolution process as an alternative to diffusion process and Black-Scholes formula. *Random Operators Stoch. Eqs.* **17**, 61-68.
- [S 65] SAMUELSON P.A. (1965), Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, **6**, 41-50.
- [R 99] RATANOV, N. (1999). Telegraph evolutions in inhomogeneous media. *Markov Process. Related Fields.* **5** 53-68.
- [R 07] RATANOV, N. (2007). A jump telegraph model for option pricing. *Quantitative Finance.* **7**, 575-583.
- [T 22] TAYLOR G.I. (1922). Diffusion by continuous movements. *Proc. London Math. Soc.* **20**, 196-212.
- [W 55] WEBSTER A.G. Partial differential equations of mathematical physics. 2nd corr. ed. *Dover*, New York. 1955.
- [W 02] WEISS, G.H. (2002). Some applications of persistent random walks and the telegrapher's equation. *Physica A.* **311** 381-410.