

Portafolio de máxima diversificación para un mandato de renta fija global

Juan Manuel Muñoz Carvajal

Maestría en Finanzas Cuantitativas

Facultad de Economía

Universidad del Rosario

Enero de 2017

Resumen

Con base en las restricciones que se presentan para un mandato de una institución oficial, con una baja tolerancia al riesgo y un objetivo de preservar el capital, en este documento se busca evaluar formas alternativas para la construcción del portafolio de referencia a aplicar. En concreto, se busca integrar en el problema de optimización una medida de diversificación, con el fin de encontrar portafolios con un mayor retorno y que se adecuen a las restricciones de riesgo. Como medida de diversificación se va a usar la entropía cuadrática de Rao según lo expuesto por Carmichael, B., Koumou, G. B., & Moran, K. (2015). En esta se introduce el concepto de matriz de disimilitud y se exploran dos formas para su especificación con el fin de comparar sus resultados frente a otros portafolios. Se encontró que, usando la metodología en mención, la razón de riesgo retorno Sharpe de dichos portafolios resultan similares entre si y a los portafolios de máximo Sharpe y mínima varianza. Los resultados son sensibles al uso de las restricciones, pero no altera las conclusiones del ejercicio. La extensión del ejercicio, dependerá de los diferentes objetivos del inversionista institucional.

Clasificación JEL: G11. G18

1. Introducción

En el marco de un mandato de administración activa de recursos, es importante establecer un portafolio de referencia (*benchmark*) con el fin de que el administrador de portafolio asuma desviaciones con respecto a este, buscando obtener retornos superiores, los cuales, medidos como excesos frente al retorno del *benchmark* (alfa), se utilizan para evaluar la gestión del administrador.

Al establecer el portafolio de referencia se busca que este refleje adecuadamente la tolerancia al riesgo por parte del inversionista, el retorno objetivo, el horizonte de inversión, las necesidades de liquidez, entre otros aspectos.

La forma más común de abordar la construcción de un *benchmark* es empleando la aproximación de media-varianza de Markowitz, que, para diferentes combinaciones de varianzas y covarianzas de un determinado universo de activos, busca encontrar el portafolio que minimiza el riesgo para cada nivel de retorno, y posteriormente obtiene el portafolio de mercado, que es aquel que maximiza la razón de Sharpe dentro de ese conjunto de portafolios eficientes.

Esta disminución del riesgo en los portafolios se genera mediante la inversión en más de un instrumento, buscando la menor correlación posible entre estos. De esta manera es posible obtener un portafolio con una volatilidad menor que aquella de los activos individuales que lo conforman. A esta decisión de invertir en más de un instrumento se le conoce como diversificación. Este concepto es importante si se parte de la idea de que no es deseable que la totalidad de un portafolio esté concentrada en un solo activo, pues esto lo deja completamente expuesto a la volatilidad del mismo. Por el contrario, al sumar activos se logra distribuir y minimizar el riesgo de perderlo todo en caso de un evento catastrófico, especialmente si los elementos del portafolio son disímiles entre si.

Para un portafolio de renta variable, por ejemplo, se puede diversificar escogiendo acciones de diferentes sectores, o construyendo un portafolio en el que se incluyan activos tanto de renta fija como de renta variable. El caso de estudio objeto de este trabajo es el de inversionistas institucionales con un perfil de riesgo conservador, donde el objetivo principal no es tanto maximizar el rendimiento, sino más bien preservar el capital bajo un marco prudente de riesgo, con el fin de que esté disponible en el momento en que sea requerido. Por lo tanto, se pretende construir un portafolio de referencia únicamente con activos de renta fija global. Bajo este contexto, se considerarán títulos de deuda soberana de diversos gobiernos, así como de autoridades no soberanas, agencias y algunas organizaciones supranacionales.

En este documento se intenta abordar el problema de encontrar un portafolio de referencia desde la óptica de la diversificación, hallando una medida que indique qué tan diversificado se encuentra el mismo. Para lo anterior se hará uso de la Entropía Cuadrática

de Rao, siguiendo la metodología expuesta por Benoît Carmichael, mediante la cual se busca maximizar esta medida, comparando el desempeño del portafolio alcanzado frente a un portafolio construido con el objetivo de maximizar la recompensa por el riesgo asumido.

Por otra parte, en la construcción de los portafolios, las decisiones se fundamentan generalmente en los retornos históricos, con lo cual se puede incurrir en errores de estimación que afectan la construcción de los mismos. Con el fin de disminuir los posibles errores de estimación de la matriz de covarianzas se seguirá la metodología de Ledoit, O., & Wolf, M. (2003), la cual permite transformar dicha matriz para no incurrir o disminuir en lo posible este tipo de errores.

En la primera parte se hará una breve revisión de la literatura asociada a la teoría de administración de portafolios, en una segunda sección se mencionarán las restricciones particulares con las que se correrá el ejercicio de acuerdo al perfil del inversionista expuesto. Luego, se explicará la transformación que se le hará a la matriz de covarianzas, la medida de diversificación a emplear y su especificación. Finalmente, se construirá el portafolio maximizando la medida de diversificación y se compararán los resultados frente a los portafolios de mínima varianza, máximo retorno, máximo Sharpe, pesos iguales e igual contribución al riesgo en dos escenarios: un escenario sin aplicar todas las restricciones y otro activando las restricciones del inversionista expuesto.

Revisión de literatura

En esta sección se hablará primero de la teoría detrás de la administración del portafolio y cómo esta ayuda a describir y resolver el problema de la máxima diversificación. Posteriormente, dado que este trabajo está específicamente diseñado para un inversionista institucional con un perfil de riesgo conservador, se realizará una descripción de las políticas de inversión de los entes reguladores que propenden por la estabilidad del sistema financiero.

Administración de portafolios

En la teoría de portafolio moderna, mucho se ha hablado sobre las diferentes formas de optimizar los portafolios considerando diferentes aspectos tales como: funciones de aversión al riesgo, diversificación, varianza del portafolio, entre otras.

Uno de los trabajos más icónicos es el de Markowitz (1952), el cual define el proceso de selección de portafolio como un proceso de dos etapas. La primera etapa debe ser una etapa de observación y experiencia, la cual debe culminar dando luz sobre las diferentes expectativas del rendimiento de los activos.

La segunda debe tener en cuenta dichas perspectivas sobre los rendimientos a futuro para una selección adecuada de un portafolio. De este trabajo se resaltan diferentes características como: retorno esperado, varianza del retorno esperado y funciones de utilidad. La importancia de su trabajo radica en la selección del portafolio óptimo, es aquel que satisface una minimización de la varianza de los activos seleccionados de un grupo de

portafolios diversificados. Sin embargo, al no existir una medida de diversificación numérica, puede ser que dicho portafolio de mínima varianza diversificado no sea el portafolio de máxima diversificación.

De allí en adelante, existen trabajos como los de Sharpe (1972), Choueifaty y Coignard (2008), entre otros, los cuales querían incluir diferentes medidas de diversificación, pero con poco éxito, ya que las betas resultantes de sus procesos de diversificación aún estaban muy expuestos al riesgo de mercado.

Car Michael, B., Koumou, G., & Moran, K. (2015) han expuesto en su investigación una manera con la cual pueden medir de manera efectiva la diversificación de un portafolio. Mediante el uso de la Entropía Cuadrática de Rao (RQE por sus siglas en inglés), la cual se ha venido usando para medir que tanta biodiversidad existe en un medio ambiente determinado. Dicho novel de diversificación también ha tenido un gran impacto en áreas como políticas de energía, en las cuales se usan los índices RQE para medir la diversificación de la energía.

La idea principal de Carmichael, B., Koumou, G., & Moran, K. (2015 a) es maximizar una medida de diversificación de portafolios, en este caso la Entropía Cuadrática de Rao (RQE). En su trabajo, ellos demuestran que el indicador de máxima diversificación tiene en cuenta la mayoría de medidas existentes tales como: la varianza del portafolio, la razón de diversificación, portafolio con varianza normalizada, diversificación del exceso de retorno, función de utilidad de Markowitz. Cabe resaltar que los autores demuestran que la máxima diversificación usando la entropía cuadrática, puede generar que los portafolios disminuyan en gran medida su exposición a eventos catastróficos.

Una vez definida la idea principal del uso de la Entropía Cuadrática de Rao para el problema de diversificación, Carmichael, B., Koumou, G. B., & Moran, K. (2015 b) extienden su trabajo y proponen una nueva estrategia para mejorar muchas de las medidas de desempeño de los portafolios calculados. Las mejoras están relacionadas con rebalanceo de portafolio, riesgo de portafolio, ventanas de estimación, razón de diversificación y portafolio más diversificado.

Para formalizar estas premisas ellos primero muestran que el portafolio de máxima diversificación maximiza la razón entre RQE y la varianza del portafolio o, de otra manera, minimiza la varianza del portafolio sujeto a una restricción de diversificación (RQE). Esto permite clarificar, en primer lugar, el problema de la falta de una razón creíble de diversificación, pues demuestra que el RQE es un indicador robusto de esta, y además, muestra un rendimiento *out-sample* mucho mayor que el de otros portafolios diversificados. Finalmente, se demuestra que, con dicha formulación y mejoras de la máxima diversificación, estas medidas son robustas y con importancia económica.

Políticas de inversión de los entes reguladores del sistema financiero

Las entidades públicas y los entes reguladores que manejan recursos que no provienen de los impuestos de los consumidores generalmente poseen sus propias reservas, las cuales administran de manera independiente, pero con ciertas limitaciones. En términos generales,

las reservas de dichas entidades, tienen como objetivo principal proteger el sistema financiero mediante diferentes mecanismos que garanticen la eficiencia del uso de estas para cumplir los diferentes objetivos.

Para cumplir estos, las reservas deben ser suficientes y siempre deben estar disponibles para cualquier contingencia futura. Por ello, estos recursos deben ser administrados bajo los siguientes principios:

- Seguridad: los recursos deben estar invertidos de forma que se propenda por preservar el valor total del portafolio en su moneda.
- Liquidez: los recursos deben invertirse de acuerdo con las necesidades de liquidez previstas.
- Rentabilidad: los recursos deben invertirse propendiendo porque el portafolio no pierda valor cuando aumenta la probabilidad de que se requieran los recursos.
- Correlación negativa con riesgos asegurados: los recursos deben invertirse propendiendo porque el portafolio no pierda valor cuando aumenta la probabilidad de que se requieran los recursos.

Dado esto, el perfil de riesgo de estas entidades suele ser de carácter averso al riesgo, así como también lo serán las políticas de administración de portafolio.

Restricciones

De acuerdo con el perfil conservador del inversionista expuesto se estableció un conjunto de condiciones que se deben cumplir para seleccionar los índices de mercado que serán empleados con el fin de representar el universo de activos elegibles. Estas restricciones se definen en términos del nivel de riesgo de mercado del portafolio, los emisores elegibles y límites de concentración, riesgo de liquidez y riesgo crediticio de los activos:

- Se empleó como moneda base el Dólar estadounidense (USD), por lo cual los retornos de todos los índices se encuentran cubiertos 100% frente al dólar.
- Son elegibles solo índices cuyos instrumentos estén denominados en monedas de los países del G10.
- Los emisores elegibles son solo gobiernos, relacionados a gobiernos (bien sean garantizados, de propiedad o patrocinados por el gobierno o autoridades locales) y organizaciones supranacionales.
- Son elegibles solo índices cuyos instrumentos cuenten con una calificación crediticia mínima para deuda de largo plazo de A/A2

- La capitalización de mercado mínima de los índices es de 20 mil millones de dólares.
- La duración agregada de los portafolios resultantes no debe ser superior a 2.5.
- No se permiten posiciones en corto dentro del portafolio, por lo cual las participaciones de los índices deben ser no negativas.
- El portafolio debe estar completamente invertido en los activos seleccionados, por lo cual la sumatoria de las participaciones debe ser igual a 1.
- La participación máxima de cada índice dentro del portafolio resultante no debe ser superior a 15%.
- Los índices conforman 15 grupos de acuerdo a su naturaleza y ubicación geográfica, que, a su vez, no pueden tener una participación superior 15%, con excepción del grupo de Estados Unidos, cuya participación máxima es 30% (véase Anexo I).

Metodología

Con el fin de establecer el portafolio de referencia es preciso partir de un universo de activos y sus respectivos retornos. En este caso, al tratarse de un portafolio de renta fija global cuya moneda base es el Dólar estadounidense (USD), se trabajará con retornos cubiertos con el fin que la tasa de cambio no sea un factor adicional a tener en cuenta.

Para capturar el comportamiento de los activos se emplearon retornos mensuales de 51 índices de Merrill Lynch que en agregado son representativos del mercado de renta fija global de calidad crediticia alta, entre los que se encuentran títulos de gobiernos, supranacionales, agencias y MBS, obteniendo así una ventana de tiempo de 213 datos entre el primero de enero de 1999 y septiembre de 2016. Para los cálculos de la matriz de covarianzas y pesos de los portafolios se toma una ventana móvil de 120 datos, y se re balancea el portafolio obtenido cada 3 meses. De esta forma, el periodo para el cual se obtienen portafolios va desde el primero de enero de 2009 hasta septiembre de 2016.

Los índices seleccionados presentan volatilidades anuales entre 0.09% y 12.91% para el índice de corto plazo de Estados Unidos (G0Q2) y el índice de Dinamarca de largo plazo (G9M0) respectivamente. En general los índices de corto plazo presentan menores volatilidades. Aquellos con plazo menor a 3 años presentan niveles de hasta de 1.5%. Al otro lado del espectro están los índices de largo plazo con volatilidades superiores a 7.5%, exceptuando al índice de 10+ de Japón con una volatilidad de 5%.

En cuanto a los retornos de los índices, la conclusión es similar a lo que sucede con la volatilidad. Los retornos se encuentran entre 0.23% y 10.49% para el índice de 3-6 meses de Estados Unidos y el índice de Dinamarca 10+ respectivamente. Entre más largo es el plazo mayor es el retorno.

Una vez obtenidos los retornos para los índices y usando la ventana establecida de 120 datos, se obtiene la matriz de varianza-covarianza. Con el fin de minimizar los errores de estimación que puedan afectar la optimización de media-varianza, se le realiza una transformación a la matriz de varianza-covarianza muestral siguiendo la metodología de Ledoit, O., & Wolf, M. (2003).

Con esta técnica se llevan los valores más extremos de la matriz de covarianza muestral S hacia valores centrales, disminuyendo así errores de estimación. Para lograr una transformación adecuada, es importante encontrar la matriz objetivo de achicamiento (F) y la intensidad con que se van a llevar los valores originales hacia este objetivo usando la constante de achicamiento (δ), como lo expresa la siguiente ecuación.

$$\delta F + (1 - \delta)S$$

En este caso, para obtener la matriz objetivo F se utiliza el modelo de correlación constante, en donde todas las parejas de correlaciones son idénticas. Para la estimación de este modelo se toma el promedio de las correlaciones de la muestra como la constante de correlación común, y el vector de varianzas muestrales para construir la matriz F .

Una vez obtenida la matriz objetivo, solo resta encontrar la constante de achicamiento óptima, que es aquella que minimiza la distancia entre la matriz objetivo (F) y la muestral (S). Con el fin de encontrar esta constante, Ledoit, O., & Wolf, M. (2003) proponen usar como función de pérdida una función cuadrática que mide la distancia entre las matrices de covarianza muestral y estimada, basada en la norma de Frobenius, definida como:

$$L(\delta) = \|\delta F + (1 - \delta)S - \Sigma\|^2$$

El objetivo es encontrar un δ que minimice el valor esperado de esta función siendo Σ la matriz de covarianzas poblacional. Ledoit, O., & Wolf, M. (2003) prueban que bajo el supuesto de que N es fijo y T tiende a infinito, el valor óptimo de δ se comporta asintóticamente como una constante sobre T . Esta constante se obtiene de estimar la suma de varianzas asintóticas de la matriz de covarianzas muestral π , la suma de las covarianzas de la matriz objetivo con las de matriz muestral, ρ , y Υ , que mide el error de especificación. De acuerdo a la siguiente ecuación.

$$\hat{k} = \frac{\hat{\pi} - \hat{\beta}}{\hat{\gamma}}$$

Finalmente, para deducir el valor de δ se toma el máximo entre 0 y el mínimo entre k/T y 1.

$$\delta^* = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\hat{k}}{T}, 1 \right\} \right\}$$

Una vez se cuenta con los retornos históricos y la matriz de varianza-covarianza transformada se procede a obtener los pesos de los distintos portafolios a comparar. Además del portafolio de máxima diversificación usando la entropía cuadrática de Rao, se obtienen el portafolio de mínima varianza, máximo Sharpe, máxima diversificación según Choueifaty & Coignard (2008), portafolio de pesos iguales, igual contribución al riesgo y máximo retorno.

En un primer ejercicio, se obtienen los portafolios empleando únicamente las restricciones de invertir todo el capital y participaciones no negativas. Luego, se volverán a construir los portafolios teniendo en cuenta las restricciones particulares del mandato, es decir, limitando la concentración permitida por índice y por grupos, además de la restricción de duración.

Para el encontrar el portafolio de máxima diversificación se seguirá la metodología de Carmichael, B., Koumou, G. B., & Moran, K. (2015). En donde se explica cómo el objetivo de maximizar la diversificación depende del inversionista y de la información que este tiene de los activos para construir la matriz de disimilitud D , Carmichael et al. (2015) definen la Entropía Cuadrática de Rao según la ecuación:

$$H_D(w) = \frac{1}{2} w^T D w$$

Entre más alto el valor de $H_D(w)$ el portafolio está más diversificado, maximizando la ecuación anterior se puede encontrar el portafolio más diversificado, siendo D la matriz de disimilaridad definida por el inversionista.

Al introducir la diversificación en el problema de mínima varianza de Markowitz. La función objetivo no cambia, lo que se introduce es una restricción al problema de la siguiente forma.

$$w^D(h) \in \min_{\omega \in W} \omega^T \Sigma \omega$$

$$\text{s. a } W^T D W \geq h$$

La restricción es la entropía cuadrática de Rao (RQE), donde W es el vector de pesos, h es el objetivo mínimo de diversificación del inversionista, y D es la matriz de disimilaridad, la cual mide la diferencia que existe entre los distintos activos por lo que puede ser definida como una medida de distancia. Esta matriz se puede construir con distintas especificaciones dependiendo del conjunto de información que se tiene disponible, a su vez esta matriz D define el objetivo de diversificación h del inversionista.

De acuerdo con Carmichael, B., Koumou, G. B., & Moran, K. (2015) si la información disponible corresponde a la matriz de correlación, los elementos de la matriz de disimilaridad se pueden especificar como:

$$d_{ij} = (1 - \rho_{ij})$$

Donde ρ_{ij} mide la correlación entre los activos i y j , que son considerados menos disimiles entre más correlacionados estén. En este caso, la RQE sería equivalente a la varianza del portafolio y a la función de utilidad de Markowitz. Además, para este caso particular, la RQE es igual a la proporción de diversificación (DR), definida por Choueifaty and Coignard (2008) como:

$$DR_{CC} = \frac{w^T \sigma}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

En el caso que la volatilidad de los activos sea proporcional al exceso de retorno esperado, esta razón es proporcional al portafolio de máximo Sharpe.

Otra posible especificación para la matriz de disimilaridad, y la que se va a usar en este documento, se construye definiendo los términos de la matriz teniendo en cuenta tanto las correlaciones como las varianzas de los activos para medir la diferencia entre estos. En este caso la diferencia va a ser alta cuando los activos tienen una alta volatilidad y baja correlación. En concreto, los elementos de la matriz se obtienen de la siguiente ecuación.

$$\gamma_{ij} = (1 - \rho)\sigma_i\sigma_j$$

De esta forma el indicador de diversificación busca maximizar la medida de diversificación de Rao normalizada por la varianza del portafolio con la matriz de disimilaridad $D = \Gamma$ donde $\Gamma = (\gamma_{ij})$, y la matriz de covarianzas Σ ha sido transformada como se explicó anteriormente.

$$DR_{Rao} = \frac{w^T \Gamma w}{w^T \Sigma w}$$

Para encontrar los portafolios de mínima varianza y máximo retorno se construye la frontera eficiente y se seleccionan los portafolios que cumplen con las respectivas restricciones. En el caso del portafolio de pesos iguales simplemente se divide 1 entre el número de activos disponibles. Para este caso especial la restricción de duración no aplica, pues no necesariamente se logra quedar por debajo de la duración máxima permitida.

Con el fin de valorar los resultados obtenidos de una forma realista, se evalúan los resultados *out-of-sample*. Se toman los datos de los retornos de la ventana móvil de 120 datos que se tienen en t para la construcción de la matriz de covarianzas y estimación de los retornos de los índices para optimizar los portafolios a comparar.

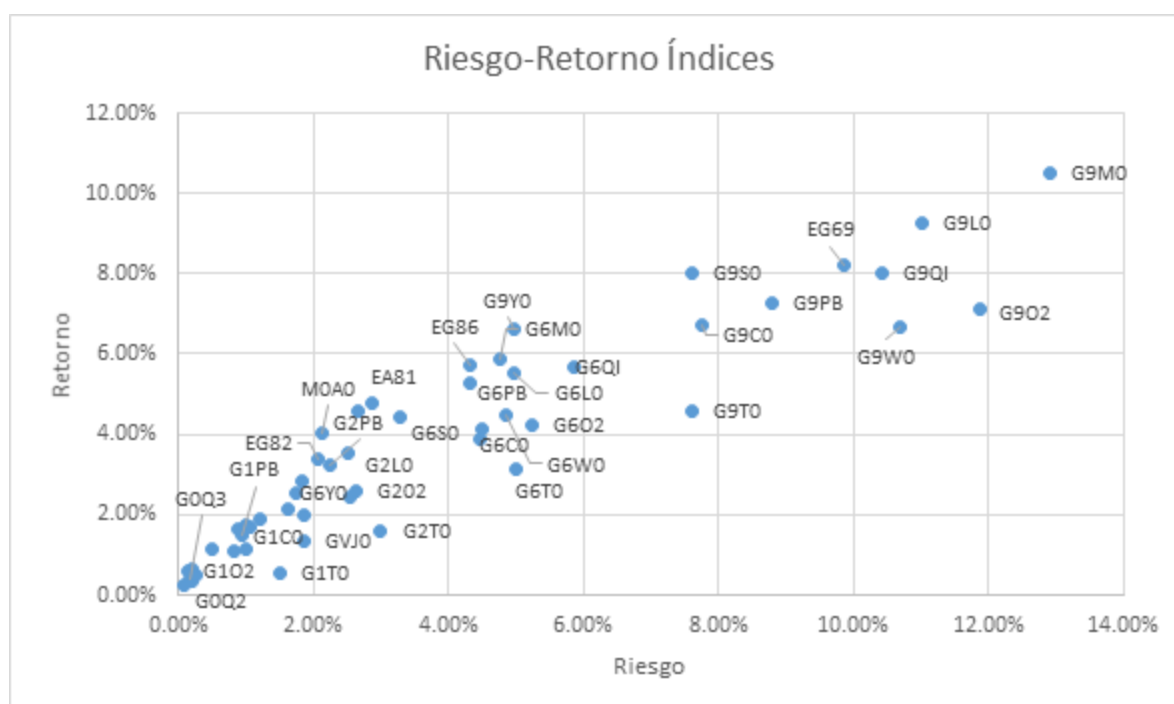
Con los pesos obtenidos de la optimización para los índices en t y los retornos de los índices para $t+1$, $t+2$ y $t+3$ se calcula el retorno del portafolio en estos periodos.

Resultados

En el primer grafico se muestran los índices del universo de elegibles en un plano riesgo-retorno. La mayor parte de los índices se concentran en la esquina inferior derecha, mostrando un bajo riesgo como es esperado para índices compuestos de títulos de renta fija de alta calificación crediticia.

En el primer ejercicio, Se calcula el portafolio de máxima diversificación de Rao usando las especificaciones tanto de Carmichael, B., Koumou, G. B., & Moran, K. (2015), como de Choueifaty and Coignard (2008) para el cálculo de la matriz de disimilaridad. Estos se comparan frente a los portafolios de mínima varianza, máximo retorno, máximo Sharpe, pesos iguales e igual contribución al riesgo.

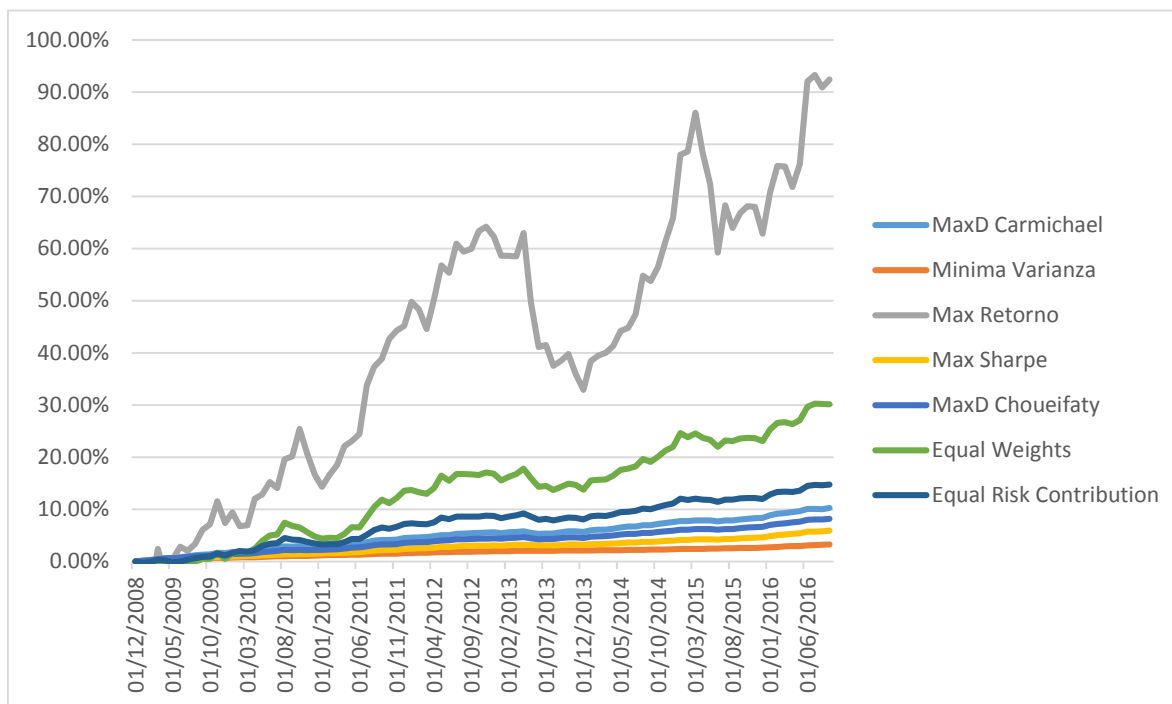
Grafico 1



Para esta comparación inicial se tiene en cuenta el universo de 51 índices elegibles y dos restricciones. En primer lugar, se debe invertir el 100% del capital, es decir, la suma de los pesos debe ser igual a 1. La otra restricción es a las ventas en corto, pues estas no están permitidas y por lo tanto todas las participaciones deben ser mayores o iguales a cero. Por último, no se tiene en cuenta una tasa libre de riesgo para este análisis.

Los retornos acumulados de los portafolios se resumen en el grafico 2

Grafico 2



En el grafico 2 se observa cómo el portafolio de máximo retorno efectivamente domina a los otros por un alto margen en términos de retorno, sin embargo, también resulta evidente que la volatilidad y las pérdidas en algunos periodos son mucho mayores comparadas con los demás portafolios. El retorno acumulado de este portafolio anualizado es de 8.81%, esto lo logra invirtiendo principalmente en los índices de más largo plazo (10+).

Por su parte el portafolio de pesos iguales también logra un retorno alto de 30% acumulado para la ventana de 9 años que se está analizando. Respecto al portafolio de máximo retorno, su riesgo anualizado, entendido como la desviación estándar anualizada, es bajo con respecto al primero (11.18% frente a 2.93%). Teniendo en cuenta la razón entre riesgo y retorno es evidente que este portafolio de pesos iguales presenta una mayor recompensa por el riesgo que se asume. Pese a tener una clara tendencia ascendente en el largo plazo se observan periodos con volatilidades y caídas más grandes que las de la mayoría de los portafolios construidos con otros objetivos.

En el caso el portafolio de iguales contribuciones al riesgo, este presenta una razón de Sharpe un poco superior a la del portafolio de pesos iguales (1.5 frente a 1.2), esto debido a un retorno de aproximadamente de la mitad, pero con una volatilidad 2.5 veces menor.

Al representar los portafolios en un plano riesgo retorno (grafico 3), resulta evidente que los tres portafolios discutidos anteriormente presentan características diferentes a los

portafolios de mínima varianza, máximo Sharpe y máxima diversificación, estando estos últimos en la misma región con características similares.

Grafico 3



Entre estos, el portafolio de máxima diversificación con la especificación de Carmichael, B., Koumou, G. B., & Moran, K. (2015) para la matriz de disimilaridad, domina a los demás portafolios en términos de retorno durante toda la ventana analizada seguido por el otro portafolio de máxima diversificación. En términos de retorno, y como era esperado, el peor portafolio resulta ser el de mínima varianza.

Comparando los portafolios por su razón de Sharpe, el de mínima varianza domina a los demás portafolios principalmente por su baja volatilidad de 0.09% anualizada, seguido por el portafolio de máximo Sharpe. Los portafolios de máxima diversificación presentan una razón muy parecida: 3.2 para la especificación de Choueifaty y 2.9 para la de Carmichael, siendo este último el que presenta el mayor retorno anualizado (1.26%) y, a su vez, la mayor volatilidad.

Las estadísticas para los portafolios se resumen a continuación en la tabla 1.

Tabla 1

Estadísticas de los portafolios optimizados sin restricciones							
Portafolio	MáxD Carmichael	Mínima Varianza	Máx Retorno	Máx Sharpe	MáxD Choueifaty	Equal weights	Equal Risk
Duración promedio	1.7	0.5	12.4	0.8	1.3	5.2	2.8
Desviación	0.13%	0.03%	3.23%	0.06%	0.09%	0.85%	0.34%
Desviación anual	0.43%	0.09%	11.18%	0.20%	0.32%	2.93%	1.17%
Retorno	10.23%	3.28%	92.45%	5.90%	8.19%	30.16%	14.73%
Retorno promedio	0.10%	0.03%	0.76%	0.06%	0.08%	0.29%	0.15%
Retorno anual	1.26%	0.42%	8.81%	0.74%	1.02%	3.46%	1.79%
Sharpe anual	2.9	4.7	0.8	3.7	3.2	1.2	1.5
VaR (95%)	-0.10%	0.01%	-4.07%	-0.02%	-0.05%	-1.10%	-0.37%
CVaR	-0.18%	0.00%	-6.14%	-0.06%	-0.13%	-1.28%	-0.48%
Máx DD	0.46%	0.02%	19.06%	0.17%	0.36%	3.49%	1.23%

En la tabla anterior se puede evidenciar cómo el portafolio de máximo retorno es el mejor en términos de retorno, pero al normalizar por el riesgo (entendido como la desviación estándar) se observa una razón de Sharpe muy inferior a la de los demás portafolios, solo comparable con los portafolios con pesos iguales y de igual contribución al riesgo, los cuales exhiben una razón retorno-riesgo baja.

Igualmente, es de resaltar el máximo *drawdown*¹ del portafolio de máximo retorno de 19% que se presentó entre diciembre de 2012 y diciembre de 2013 y que se demoró un año en recuperar. Por otro lado, los tres portafolios (máximo retorno, pesos iguales e igual contribución al riesgo), muestran duraciones altas dejando expuesto de forma importante el portafolio a posibles subidas en las tasas de interés. Esto resulta relevante dado el contexto de tasas históricamente bajas y con la perspectiva de incrementos en las mismas.

Con relación a las demás estadísticas como el VaR², CVaR³ y máximo *drawdown*, nuevamente se observa la similitud entre los portafolios de máxima diversificación siendo todas inferiores para el caso de Choueifaty, además presentando una duración y riesgo ligeramente inferior. Sin embargo, el retorno del portafolio de Carmichael es superior, por lo que al encontrar la razón de Sharpe no se encuentra una diferencia marcada. En términos de máximo *drawdown* ambos portafolios tuvieron una trayectoria similar con una diferencia entre el pico y el punto más bajo de retorno de 0.46% (Carmichael) y 0.36% (Choueifaty) entre mayo y junio de 2013.

Otra comparación que resulta interesante de este primer ejercicio es entre los portafolios de máxima diversificación y los de pesos y contribución al riesgo igual. De esta se desprende que diversificar no significa incluir a todos los activos elegibles pues esto no necesariamente disminuye el riesgo. Los portafolios que tienen en cuenta las relaciones entre los índices resultan más atractivos.

¹ El **máximo drawdown** se define como la máxima caída experimentada por un fondo en el periodo comprendido desde que se registra un máximo, hasta que vuelve a ser superado. Supone la máxima pérdida que ha sufrido una inversión en un horizonte temporal dado.

² El **Valor en Riesgo (VaR)** se define como la pérdida máxima de un portafolio en un horizonte de tiempo determinado con un nivel de confianza, generalmente 95%o 99%

³ El **Valor en Riesgo Condicional (CVaR)** se define como el promedio entre el VaR y la mayor pérdida

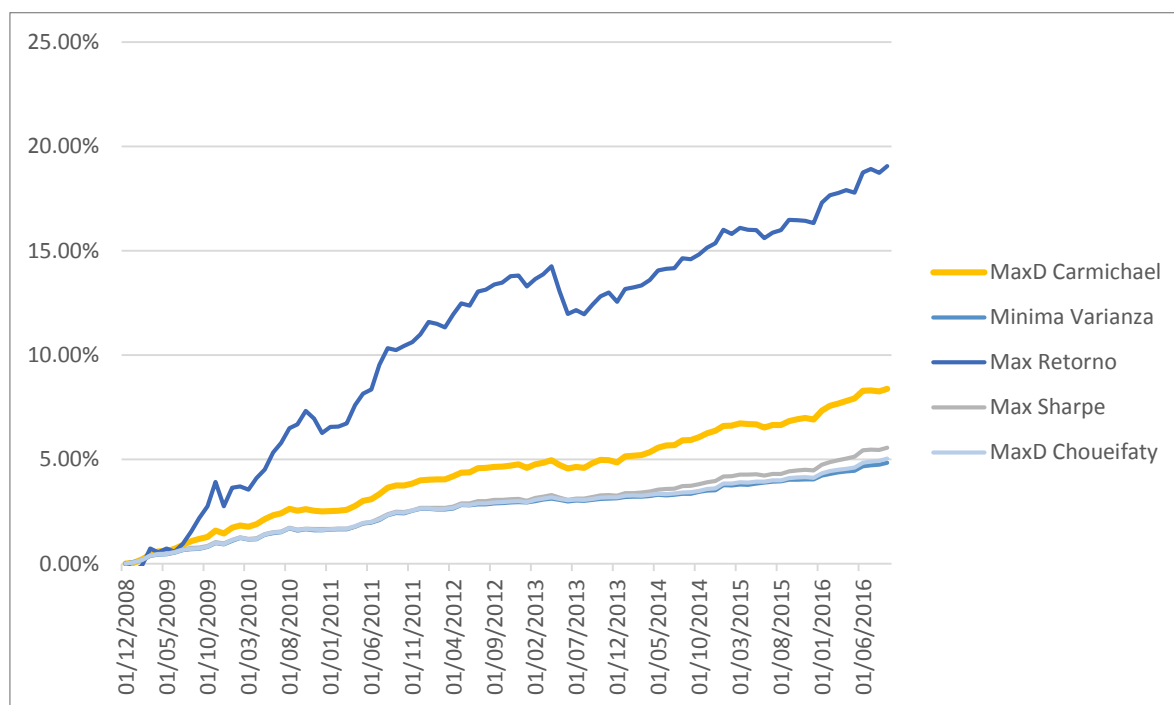
De este primer ejercicio se puede sacar como conclusión que los portafolios de máximo retorno, de pesos iguales e igual contribución al riesgo no resultan atractivos para el tipo de inversionista que se tiene en consideración en este documento debido a la alta volatilidad en sus retornos.

En un segundo ejercicio se van a comparar nuevamente el portafolio de máxima diversificación bajo las dos especificaciones discutidas para la matriz de disimilaridad, frente a los portafolios de mínima varianza, máximo retorno y máximo Sharpe, pero esta vez teniendo en cuenta las restricciones del mandato en términos de concentración por índice, por grupo y el límite de duración de 2.5.

Los otros portafolios no hacen parte de la comparación debido a que en su construcción no se pueden tener en cuenta este tipo de restricciones, en particular, garantizar una duración por debajo del límite permitido para los conjuntos de igual contribución al riesgo y pesos iguales resulta imposible. Lo anterior a causa que para estos portafolios lo que interesa es que los pesos y las contribuciones sean iguales sin importar la duración obtenida.

En el grafico 4 se muestran los retornos acumulados de los portafolios que hacen parte de esta segunda comparación.

Grafico 4



El mejor portafolio en términos de retorno sigue siendo el de máximo retorno aun incluyendo las restricciones adicionales. Con estas, se logra disminuir la duración de este

portafolio a la máxima permitida de 2.5, disminuyendo así de manera importante la volatilidad si se le compara con el escenario en que no se incluían las restricciones. Pese a esto sigue mostrando una razón de Sharpe inferior a la de los demás portafolios.

Sin tener en cuenta al portafolio de máximo retorno, el portafolio que se diferencia de los demás es el de máxima diversificación Carmichael, cuya matriz de disimilaridad especificada teniendo en cuenta tanto las correlaciones como las varianzas de los índices. Para esta especificación, vale la pena recordar que las mayores diferencias se presentan entre activos con alta volatilidad y una baja correlación.

En la tabla 2 se muestra cómo este tiene una duración superior y estadísticas de riesgo mayores, pero a su vez este mayor riesgo es recompensado con un mayor retorno dejando la razón de Sharpe en los mismos niveles para todos los portafolios.

Tabla 2

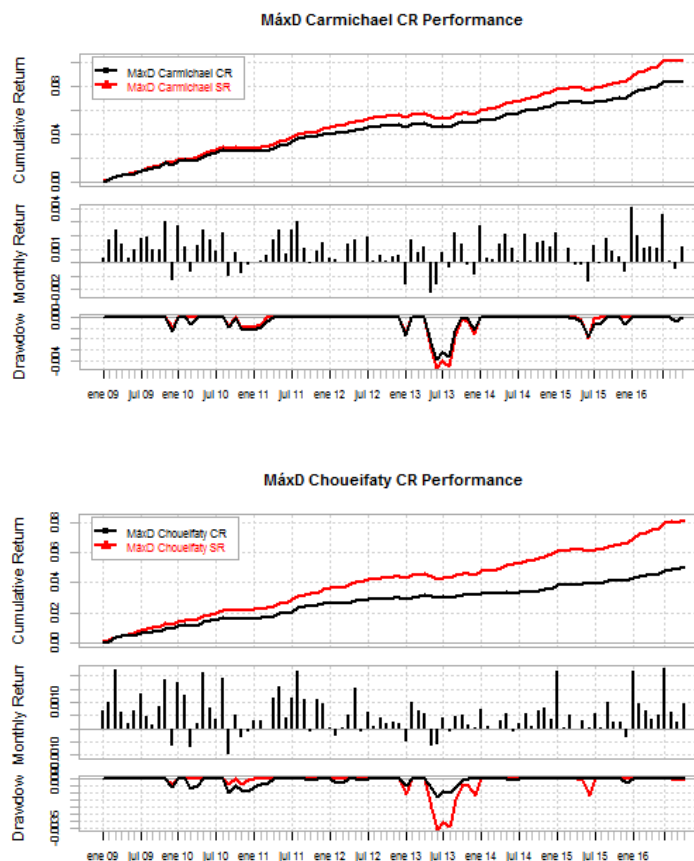
Estadísticas de los portafolios optimizados con restricciones					
Portafolio	MáxD Carmichael	Mínima Varianza	Máx Retorno	Máx Sharpe	MáxD Choueifaty
Duración promedio	1.5	0.9	2.5	1.0	1.0
Desviación	0.12%	0.07%	0.41%	0.08%	0.07%
Desviación anual	0.41%	0.24%	1.42%	0.27%	0.25%
Retorno	8.39%	4.84%	19.05%	5.56%	5.03%
Retorno promedio	0.09%	0.05%	0.19%	0.06%	0.05%
Retorno anual	1.04%	0.61%	2.28%	0.70%	0.63%
Sharpe anual	2.5	2.6	1.6	2.6	2.6
Var (95%)	-0.11%	-0.05%	-0.42%	-0.07%	-0.06%
CVaR	-0.17%	-0.08%	-0.85%	-0.10%	-0.07%
Máx DD	0.39%	0.14%	2.01%	0.22%	0.13%

Los portafolios de mínima varianza, máximo Sharpe y máxima diversificación con la matriz que solo tiene en cuenta las correlaciones, tienen unas estadísticas prácticamente iguales entre sí, con una pequeña ventaja para el portafolio de máximo Sharpe en términos de retorno.

En el grafico 4 se comparan los portafolios de máxima diversificación con y sin restricciones.

En este grafico se observa cómo al aplicar las restricciones (CR) el retorno del portafolio disminuye para los dos portafolios, aunque en menor medida para el de máxima diversificación de Carmichael. En el otro portafolio la disminución del retorno es mayor, pero además de esto resulta destacable la disminución del máximo *drawdown*.

Grafico 4



En este segundo ejercicio la restricción a la duración no resulta un factor determinante, dado que, aun cuando no estaba esta condición los portafolios obtenidos se encontraban por debajo del límite de 2.5. Sin embargo, las restricciones a la concentración individual y por grupo sí producen un cambio en estos portafolios, llevándolos a salir de índices en los que antes estaban altamente concentrados.

En el caso del portafolio de mínima varianza, este pasa de invertir en 4 índices a 10 índices obligándolo a pasar a índices con una duración más alta. Para los portafolios de máxima diversificación y Sharpe este efecto también se presenta, pero no de una forma tan marcada pues en el primer ejercicio pese a estar en menos índices, estos no tenían una concentración tan importante. Como anexo se presenta la ponderación promedio para cada uno de los índices en los distintos portafolios para los ejercicios con y sin restricciones.

Conclusiones

A la luz de los resultados obtenidos Se llega a una conclusión similar a la expuesta por Carmichael, B., Koumou, G. B., & Moran, K. (2015), en donde indican que la forma de especificar la matriz de disimilaridad afecta los resultados obtenidos y, que si esta se encuentra especificada de manera adecuada se puede llegar a portafolios con un rendimiento superior. Esto se evidencia en la comparación entre los dos portafolios de máxima diversificación, entre los cuales la única diferencia es la forma en que se define la matriz de disimilaridad.

En el caso de la matriz de disimilaridad en cuya especificación se incluyen tanto las correlaciones como las varianzas, se están escogiendo activos que tienen altas volatilidades, pero una baja correlación entre ellos. Por esta primera característica de escoger activos con alta volatilidad se entiende que este portafolio tenga riesgo más alto en comparación a los otros portafolios.

En el otro caso, la matriz de disimilaridad que esta únicamente definida con base a la correlación, los activos más disimiles son los que tienen una baja correlación, teniendo en cuenta lo anterior, se entiende que el resultado de esta especificación sea similar a la de máximo Sharpe.

Sin embargo, no se puede afirmar que estos portafolios diversificados dominen a alguno de los otros portafolios dado que, pese a obtener mayores retornos también están asumiendo un riesgo mayor. En el ejercicio del inversionista institucional averso al riesgo considerado en este documento, es decir, el ejercicio con todas las restricciones activas los resultados muestran portafolios equivalentes en términos de la razón de Sharpe con métricas de riesgo tolerables.

Por tanto, esta aproximación centrada en la diversificación para el caso de un portafolio de renta fija global con las características expuestas, no representa una mejora clara con respecto a la metodología actual. Simplemente se logra un portafolio con más riesgo que, en caso que el inversionista esté dispuesto a asumirlo le reporta mayor rendimiento en una proporción similar.

El aporte de esta metodología, por tanto, quedaría limitado a ampliar el universo de posibles portafolios elegibles, dado que se obtienen conjuntos de índices con estadísticas de riesgo tolerables y con una razón de Sharpe equivalente a la de los portafolios usualmente bajo consideración.

Bibliografía

Carmichael, B., Koumou, G., & Moran, K. (2015) (A). Unifying Portfolio Diversification Measures Using Rao's Quadratic Entropy.

Carmichael, B., Koumou, G. B., & Moran, K. (2015) (B). A New Formulation of Maximum Diversification Indexation Using Rao's Quadratic Entropy. *Cahier de recherche/Working Paper*, 15, 19.

Choueifat, Y., & Coignard, Y. (2008). Toward Maximum Diversification. *Journal of Portfolio Management*, 35(1), 40.

DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F. J., & Uppal, R. (2009). A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. *Management Science*, 55(5), 798-812.

Disatnik, D. J., & Benninga, S. (2007). Shrinking the covariance matrix. *Journal of Portfolio Management*, 33(4), 55.

Ledoit, O., & Wolf, M. (2003). Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *UPF economics and business working paper*, (691).

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.

Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, 19(3), 425-442.

ANEXO I

Indice	Id.	Duración	Calificación	Valor de mercado	Máximo	Grupo
US 3M-6M	G0Q2	0.342	Elegible	349,885.96	0.15	1
US 6M-9M	G0Q3	0.585	Elegible	364,468.25	0.15	1
US 9M-12M	G0Q4	0.835	Elegible	348,756.78	0.15	1
US 1-3	G102	1.903	Elegible	2,336,243.61	0.15	1
US 3-5	G202	3.814	Elegible	1,769,941.51	0.15	1
US 5-10	G602	6.411	Elegible	1,922,087.37	0.15	1
US 10+	G902	17.361	Elegible	1,310,060.14	0.15	1
UK 0-1	G0L0	0.675	Elegible	69,798.37	0.15	2
UK 1-3	G1L0	2.180	Elegible	154,844.80	0.15	2
UK 3-5	G2L0	3.884	Elegible	222,584.56	0.15	2
UK 5-10	G6L0	6.732	Elegible	202,427.87	0.15	2
UK 10+	G9L0	18.361	Elegible	679,400.67	0.15	2
CAD 1-3	G1C0	1.890	Elegible	117,455.09	0.15	3
CAD 3-5	G2C0	4.055	Elegible	61,139.45	0.15	3
CAD 5-10	G6C0	7.035	Elegible	61,763.66	0.15	3
CAD 10+	G9C0	16.067	Elegible	102,316.18	0.15	3
AUD 1-3	G1T0	1.862	Elegible	50,016.97	0.15	4
AUD 3-5	G2T0	3.548	Elegible	77,950.29	0.15	4
AUD 5-10	G6T0	6.658	Elegible	115,866.03	0.15	4
AUD 10+	G9T0	10.958	Elegible	86,706.85	0.15	4
AGEEUR 1-10> AA-	EA81	4.965	Elegible	232,397.18	0.15	5
DKK 1-5	GVM0	2.263	Elegible	32,910.49	0.15	6
DKK 5-10	G6M0	6.611	Elegible	47,546.78	0.15	6
DKK 10+	G9M0	17.116	Elegible	37,013.22	0.15	6
GOVERTEURTOTAL 0-1 AAA-AA	EG8A	0.555	Elegible	335,788.97	0.15	7
GOVERTEURTOTAL 1-3 AAA-AA	EG81	1.875	Elegible	731,442.56	0.15	7
GOVERTEURTOTAL 3-5 AAA-AA	EG82	3.775	Elegible	686,126.86	0.15	7
GOVERTEURTOTAL 5-10 AAA-AA	EG86	6.999	Elegible	694,251.03	0.15	7
GOVERTEURTOTAL 10+ AAA-AA	EG89	15.756	Elegible	1,227,621.17	0.15	7
SUPRA 1-3 AAA	GS1S	2.020	Elegible	144,164.58	0.15	8
SUPRAEUR + FC 1-10 > AA-	ES81	4.821	Elegible	185,895.08	0.15	8
AGE 1-3	G1PB	1.885	Elegible	213,567.03	0.15	9
AGE 3-5	G2PB	3.660	Elegible	85,738.38	0.15	9
AGE 5-10	G6PB	6.667	Elegible	38,877.25	0.15	9
AGE 10+	G9PB	11.577	Elegible	72,151.14	0.15	9
MORTG	M0A0	3.493	Elegible	3,868,937.60	0.15	9
TIPS 5-10	G6QI	5.919	Elegible	489,102.46	0.15	10
TIPS 10+	G9QI	14.359	Elegible	328,984.79	0.15	10
SEK 1-5	GVW0	3.100	Elegible	26,988.50	0.15	11
SEK 5-10	G6W0	6.519	Elegible	33,083.73	0.15	11
SEK 10+	G9W0	13.837	Elegible	20,542.93	0.15	11
NEW ZEALAND 1-5	GVZ0	2.745	Elegible	33,193.68	0.15	12
NEW ZEALAND 5-10	G6Z0	5.866	Elegible	20,948.44	0.15	12
SUIZA 1-5	GVS0	2.758	Elegible	25,172.45	0.15	13
SUIZA 5 -10	G6S0	6.817	Elegible	20,353.11	0.15	13
SUIZA 10+	G9S0	18.180	Elegible	50,091.82	0.15	13
NORUEGA 1-5	GVJ0	3.424	Elegible	20,753.68	0.15	14
JP 0-1	G0YA	0.567	Elegible	893,205.86	0.15	15
JP 1-5	GVY0	2.899	Elegible	1,697,681.93	0.15	15
JP 5-10	G6Y0	7.405	Elegible	876,806.65	0.15	15
JP 10+	G9Y0	17.360	Elegible	2,852,864.76	0.15	15

ANEXO II

ID	Indice	MaxD Rao		Max Rao C		Min Var		Max retorno		Max Sharpe	
		CR	SR	CR	SR	CR	SR	CR	SR	CR	SR
G0Q2	3-6M U\$Tr	15.00%	0.00%	15.00%	0.00%	15.00%	39.58%	0.13%	0.00%	15.00%	1.99%
G0Q3	6-9M U\$Tr	15.00%	0.00%	15.00%	0.00%	15.00%	0.00%	0.09%	0.00%	15.00%	0.00%
G0Q4	9-12M U\$Tr	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.10%	0.00%	0.00%	0.00%
G1O2	US 1-3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	3.65%	0.00%	0.00%	0.00%
G2O2	US 3-5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	8.86%	0.00%	0.00%	0.00%
G6O2	US 5-10	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G9O2	US 10+	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	3.19%	0.00%	0.00%
G1PB	AGE 1-3	0.76%	0.00%	5.00%	0.00%	5.54%	0.00%	0.41%	0.00%	3.10%	0.00%
G2PB	AGE 3-5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.01%	0.00%	0.00%	0.00%
G6PB	AGE 5-10	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.25%	0.00%	0.00%	0.00%
G9PB	AGE 10+	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G6QI	TIPS 5-10	0.13%	0.20%	0.00%	0.23%	0.00%	0.10%	9.12%	0.00%	0.05%	0.35%
G9QI	TIPS 10+	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	61.70%	0.00%	0.00%
M0A0	MORTG	7.96%	10.89%	0.00%	7.51%	0.00%	0.00%	10.88%	0.00%	1.75%	3.08%
GS1S	SUPRA 1-3 AAA	1.14%	0.03%	0.73%	0.00%	0.17%	0.00%	12.82%	0.00%	0.70%	0.00%
G1C0	CAD 1-3	6.24%	1.25%	8.66%	0.72%	9.87%	0.00%	6.90%	0.00%	8.31%	0.00%
G2C0	CAD 3-5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.76%	0.00%	0.00%	0.00%
G6C0	CAD 5-10	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G9C0	CAD 10+	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G0LA	UK 0-1	11.85%	0.00%	15.00%	0.00%	15.00%	6.44%	0.00%	0.00%	15.00%	0.00%
G1L0	UK 1-3	0.36%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	3.87%	0.00%	0.00%	0.00%
G2L0	UK 3-5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.18%	0.00%	0.00%	0.00%
G6L0	UK 5-10	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G9L0	UK 10+	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G1T0	AUD 1-3	0.00%	0.00%	0.04%	0.00%	0.23%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G2T0	AUD 3-5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G6T0	AUD 5-10	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G9T0	AUD 10+	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G0YA	JP 0-1	5.27%	47.70%	15.00%	53.91%	15.00%	31.91%	8.54%	0.00%	14.86%	56.93%
GVY0	JP 1-5	9.13%	18.50%	0.00%	9.04%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.05%
G6Y0	JP 5-10	0.20%	0.69%	0.00%	0.41%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.02%
G9Y0	JP 10+	0.40%	0.51%	0.00%	0.39%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.14%	0.24%
GVM0	DKK 1-5	0.62%	0.10%	0.81%	0.20%	0.21%	0.00%	5.39%	0.00%	1.40%	0.39%
G6M0	DKK 5-10	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G9M0	DKK 10+	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	35.11%	0.00%	0.00%
GVW0	SEK 1-5	0.59%	0.25%	0.00%	0.02%	0.00%	0.00%	2.92%	0.00%	0.00%	0.00%
G6W0	SEK 5-10	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G9W0	SEK 10+	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GVS0	SUIZA 1-5	6.04%	3.67%	4.59%	3.24%	3.84%	0.01%	1.58%	0.00%	5.84%	2.13%
G6S0	SUIZA 5 -10	0.00%	0.27%	0.00%	0.12%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
G9S0	SUIZA 10+	0.00%	0.00%	0.00%	0.02%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.03%
GVJ0	NORUEGA 1-5	0.18%	0.00%	2.00%	0.00%	2.06%	0.25%	0.96%	0.00%	1.40%	0.16%
GVZ0	NEW ZEALAND 1-5	0.06%	0.00%	2.39%	0.00%	3.08%	0.70%	0.00%	0.00%	0.63%	0.01%
G6Z0	NEW ZEALAND 5-10	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
EA81	AGEEUR 1-10> AA-	3.00%	3.19%	0.64%	2.20%	0.00%	0.03%	5.16%	0.00%	1.40%	1.04%
EG81	SUPRAEUR + FC 1-10 > AA-	1.06%	1.51%	0.12%	1.02%	0.00%	0.00%	0.48%	0.00%	0.41%	0.45%
EG8A	GOVERTEURTOTAL 0-1 AAA-AA	15.00%	11.13%	15.00%	20.94%	15.00%	20.98%	11.40%	0.00%	15.00%	33.13%
EG81	GOVERTEURTOTAL 1-3 AAA-AA	0.00%	0.11%	0.00%	0.04%	0.00%	0.00%	0.48%	0.00%	0.00%	0.00%
EG82	GOVERTEURTOTAL 3-5 AAA-AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.06%	0.00%	0.00%	0.00%
EG86	GOVERTEURTOTAL 5-10 AAA-AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
EG69	GOVERTEURTOTAL 10+ AAA-AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%