



Transformadas de Fourier sobre grupos

Autor
Juan Jeronimo Manriquez

Director
David Andrade

Codirector
Cristian Martínez

Profesional en Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Escuela de Ciencias e Ingeniería
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Bogotá - Colombia
2026

Resumen

La transformada de Fourier es una herramienta matemática versátil que se utiliza en múltiples ámbitos de las matemáticas como objeto de estudio y por sus aplicaciones prácticas, sin embargo, la forma estándar en la cual se define la transformada de Fourier solo permite realizarla sobre funciones con dominio real.

Se puede generalizar la transformada de Fourier a los grupos abelianos finitos a partir de la teoría de caracteres, la cual permite realizar la transformada de Fourier sobre las funciones cuyo dominio es el espacio de Hilbert inducido por estos mismos grupos abelianos finitos. En el texto se introduce la teoría de caracteres, desarrollando esta teoría hasta poder realizar la transformada de Fourier y su inversa sobre grupos abelianos finitos a partir de conceptos a nivel de pregrado de álgebra abstracta, álgebra lineal y análisis funcional.

Adicionalmente, se presentan algunas implicaciones que conlleva la teoría de caracteres para las aplicaciones prácticas de las transformadas de Fourier, construyendo una base bajo la cual se puede utilizar la transformada de Fourier en dominios más amplios que los números reales.

Abstract

The Fourier transform is a versatile mathematical tool that's used in multiple branches of mathematics, both as a concept to study and for its practical applications, however, the standard way the Fourier transform is defined only permits its application on functions whose domain is the set of real numbers.

It is possible to generalize the Fourier transform to finite abelian groups through character theory, where the use of character theory allows the application of the Fourier transform on functions with domains over the Hilbert spaces induced by finite abelian groups. This text introduces character theory and develops a conceptual basis for the Fourier transform and inverse Fourier transform over finite abelian groups, through the usage of undergraduate level abstract algebra, linear algebra and functional analysis.

Additionally, some applications of character theory to the practical use of the Fourier transform are derived, constructing a framework that allows the use of the Fourier transform in a wider domain than the standard Fourier transform.

Palabras claves: Transformada de Fourier, caracteres, dualidad.

Keywords: Fourier transform, characters, duality.

1 Introducción

Durante el análisis de la distribución del calor, Joseph Fourier postuló que toda función continua y periódica se podía descomponer en una serie de senos y cosenos, lo cual en conjunto con la fórmula de Euler permite escribir a una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua de periodo L de forma

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix2\pi/L} + c_2 e^{ix4\pi/L} + \dots, \quad c_i \in \mathbb{C} \quad (1.1)$$

Esta serie se denomina la *serie de Fourier de f* y los coeficientes complejos c_i se denominan los *coeficientes de Fourier de f* .

El método para conseguir los coeficientes de Fourier de una función f se llama la *Transformada de Fourier*, donde para todo número real $k \in \mathbb{R}$ el coeficiente de Fourier $c_k \in \mathbb{C}$ de una función de periodo L está dado por la integral

$$c_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cdot \exp(2\pi i \cdot kx) dx. \quad (1.2)$$

Como la transformada de Fourier de una función f se puede realizar sobre todo número real, esta se suele ver como una aplicación $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que le asigna su coeficiente de Fourier en f a cada número real.

La transformada de Fourier y por tanto la aplicación \mathcal{F} es lineal e invertible, esta invertibilidad se expresa a través de una transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual acepta un conjunto de coeficientes de Fourier y genera una función real.

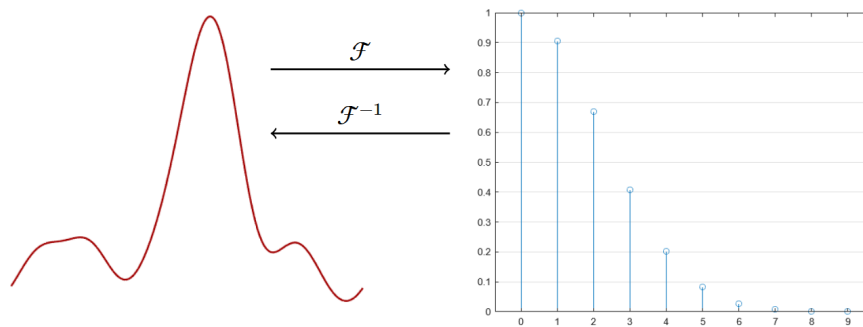


Figura 1: Una función periódica y la magnitud de sus primeros coeficientes de Fourier.

Además de su linealidad e invertibilidad, la transformada de Fourier contiene otras características, como su capacidad de aproximar funciones, aunque estas no sean periódicas, o su interacción con la convolución hacen que esta sea una herramienta crucial para aplicaciones como el procesamiento de señales o la resolución de ciertas funciones diferenciales, e incluso se realiza su estudio matemático a través del análisis armónico.

La transformada de Fourier tiene una gran variedad de aplicaciones en múltiples ámbitos, pero por su definición solo se puede realizar sobre las funciones cuyo dominio se encuentra en el conjunto de los números reales, \mathbb{R} . Sin embargo, los conceptos que subyacen a la transformada de Fourier permiten generalizar esta operación a otros espacios.

El enfoque principal de este texto es describir la teoría necesaria para realizar la transformada de Fourier sobre las funciones que operan en grupos, la cual se conoce como la teoría de caracteres.

La importancia de la teoría de caracteres no es únicamente matemática, ya que el estudio de esta teoría funciona como una base sobre la cual se pueden desarrollar aplicaciones prácticas. Entre estas aplicaciones se encuentra la definición formal de la transformada discreta de Fourier y su versión computacionalmente eficiente, la transformada rápida de Fourier (FFT), un algoritmo fundamental en las ciencias de la computación.

Otra aplicación de la transformada de Fourier sobre grupos involucra la compresión de imágenes que realiza el formato JPEG, este formato interpreta una imagen como 3 funciones (Rojo, verde y azul), las cuales tienen como dominio un grupo del tamaño de la imagen, de modo que se utiliza el decaimiento y la invertibilidad de la transformada de Fourier para comprimir imágenes al remover los coeficientes de Fourier pequeños.

Las fuentes principales usadas para la realización del texto fueron [5], [8], [9] sobre los cuales se construyó y desarrolló, con un énfasis particular en la teoría descrita en los primeros capítulos de [9].

2 Transformada de Fourier sobre grupos

En esta sección se realizará una introducción a la teoría de caracteres, la cual es la base teórica que será usada para la realización de la transformada de Fourier en grupos.

Para los fines de este texto, se denotará por $U \subset \mathbb{C}$ el círculo unitario, siendo este el conjunto de los números complejos de modulo 1. U es un grupo abeliano bajo la multiplicación estándar en \mathbb{C} .

Además, para todo número natural N , se denotará por U_N el subgrupo abeliano de U compuesto de las N raíces de la unidad.

2.1 Caracteres

Definición 2.1 (Carácter). Sea A un grupo arbitrario, un *carácter* $\chi^* : A \rightarrow U$ es un homomorfismo de grupos de A en U , es decir, que para todo $a, b \in A$ se cumple que

$$\chi^*(a \cdot b) = \chi^*(a) \cdot \chi^*(b) \quad (2.1)$$

Los caracteres en este texto serán denotados con el superíndice $*$. También se denotará la acción de un carácter sobre un $a \in A$ de la forma $\langle a, \chi^* \rangle = \chi^*(a)$.

Definición 2.2 (Grupo dual). El *conjunto de los caracteres* sobre A se denota A^* y se denomina el *dual de A* , con definición

$$A^* = \{\chi^* : A \rightarrow U \mid \chi^* \text{ es un homomorfismo de grupos}\}. \quad (2.2)$$

A^* es un grupo bajo la siguiente operación, dado $a \in A$ fijo y dos caracteres $x^*, y^* \in A^*$ se define

$$\langle a, x^* \cdot y^* \rangle = (x^* \cdot y^*)(a) = x^*(a) \cdot y^*(a) = \langle a, x^* \rangle \langle a, y^* \rangle. \quad (2.3)$$

El elemento neutro de A^* es el carácter 1^* , el cual envía todo elemento $a \in A$ al número $1 \in \mathbb{C}$, de tal modo que

$$\langle a, 1^* \rangle = 1, \quad a \in A. \quad (2.4)$$

Como A^* es un grupo, cada carácter x^* posee un carácter inverso, el cual será denotado $\overline{x^*}$, de forma

$$\langle a, \overline{x^*} \rangle = \overline{\langle a, x^* \rangle} = \overline{\chi^*(a)} \quad (2.5)$$

En particular, este carácter inverso se define a partir del conjugado, ya que para todo $a \in A$, la acción de un carácter $x^* \in A^*$ sobre a , $\langle a, x^* \rangle$ se encuentra en los números complejos, dando las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \langle a, x^* \cdot \overline{x^*} \rangle &= \langle a, x^* \rangle \langle a, \overline{x^*} \rangle = \langle a, x^* \rangle \overline{\langle a, x^* \rangle} \\ &= \langle a, x^* \rangle \langle a, x^* \rangle^{-1} = \langle a, 1^* \rangle = 1. \quad \forall a \in A \end{aligned} \quad (2.6)$$

Adicionalmente, nótese que para todo grupo A , A^* es un grupo abeliano, ya que los caracteres envían elementos de A a $U \subset \mathbb{C}$, y la multiplicación en \mathbb{C} es conmutativa.

Proposición 2.1. Sea A un grupo finito de orden N y χ^* un carácter sobre A , entonces $\text{Im}(\chi^*(A))$ es un subgrupo de U_N .

Demostración. Como A es finito, todo elemento $a \in A$ tiene orden finito. Sea n el orden de un elemento $a \in A$, n divide N y $a^n = e$, por lo que

$$\langle a, \chi^* \rangle^n = \langle a^n, \chi^* \rangle = \langle e, \chi^* \rangle = 1.$$

Por la definición de las raíces de la unidad, la imagen de χ^* es una de las n raíces de la unidad, donde U_n es un subgrupo de U_N . \square

Proposición 2.2. Sea e el elemento neutro de un grupo A , entonces

$$\langle e, a^* \rangle = 1, \quad a^* \in A. \quad (2.7)$$

Demostración. Sea $a^* \in A^*$

$$\langle e, a^* \rangle = \langle ee, a^* \rangle = \langle e, a^* \rangle \langle e, a^* \rangle.$$

Para que se mantenga la igualdad, $\langle e, a^* \rangle = 1$. □

Observación. En este texto, cuando un grupo A es abeliano y finito, su elemento neutro se denotará por 0, se utilizará N para denotar el orden de A , y la operación se denotará con $+$ en vez de \cdot . Es decir, las acciones de los caracteres se escribirán de la siguiente forma

$$\langle a \cdot b, x^* \rangle = \langle a + b, x^* \rangle = \langle a, x^* \rangle \langle b, x^* \rangle \quad (2.8)$$

$$\langle a, \overline{x^*} \rangle = \overline{\langle a, x^* \rangle} = \langle -a, x^* \rangle. \quad (2.9)$$

Definición 2.3. \mathbb{Z}_N es el grupo cíclico, este grupo es abeliano y finito de orden N , compuesto de los números enteros modulo N con suma, donde $N \in \mathbb{N}$. Si $N > 1$, \mathbb{Z}_N es generado por un solo elemento $\langle 1 \rangle$ y se cumplirá que $N \cdot 1 = 0$.

Proposición 2.3. El grupo dual de todo grupo cíclico $A = \mathbb{Z}_N$ es isomorfo a sí mismo, de modo que $\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{Z}_N^*$. Esta demostración está basada en el teorema dado en [3].

Demostración. Como 1 genera todos los elementos de \mathbb{Z}_N , un carácter $\chi^* : \mathbb{Z}_N \rightarrow U$ va a ser determinado unicamente por el valor de $\langle 1, \chi^* \rangle$, ya que todo elemento de \mathbb{Z}_N se puede escribir como el producto de $n \cdot 1$ para algún n , donde por el homomorfismo de los caracteres

$$\langle n \cdot 1, \chi^* \rangle = \langle 1, \chi^* \rangle^n = 1$$

Por la proposición 2.1, $\langle 1, \chi^* \rangle \in U_N$ y como solo existen N raíces de la unidad, a lo sumo existen N caracteres, tal que $|A^*| \leq N$.

Luego, es posible definir una fórmula que le asigna un carácter a cada elemento $c \in \mathbb{Z}_N$, este carácter será denotado por χ_c^* y se define como

$$\chi_c^*(a) = \exp\left(2\pi i \cdot \frac{ca}{N}\right), \quad a \in \mathbb{Z}_N. \quad (2.10)$$

Cada carácter generado por esta fórmula le asigna un valor distinto a $\langle 1, \chi_c^* \rangle \in U_N$, de tal forma que existen al menos N caracteres, por lo que $N \leq |A^*|$.

Siguiendo estas desigualdades, $N = |A^*|$, por lo que existen N caracteres y $|\mathbb{Z}_N| = |\mathbb{Z}_N^*|$. Finalmente, como la fórmula 2.10 define un homomorfismo de grupos, el cual le asigna un carácter único a todo $c \in \mathbb{Z}_N$, entonces este es un homomorfismo inyectivo y por ende es un isomorfismo, por ello, se concluye que $\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{Z}_N^*$. □

Ejemplo 2.1. Basándose en la fórmula 2.10 de la proposición anterior, es posible realizar una tabla que muestra cómo actúan los caracteres de \mathbb{Z}_N^* sobre los elementos de \mathbb{Z}_N . Por ejemplo, la tabla de caracteres de \mathbb{Z}_4 es la siguiente

	0	1	2	3
χ_0^*	1	1	1	1
χ_1^*	1	i	-1	$-i$
χ_2^*	1	-1	1	-1
χ_3^*	1	$-i$	-1	i

Ejemplo 2.2. Los grupos dihedrales, denotados por D_n , son aquellos que codifican la simetría de rotaciones y reflexiones de un polígono regular de n vértices. Estos grupos son de orden $2n$, siendo generados por una rotación r y una reflexión f , los cuales tienen la siguiente presentación

$$D_n = \langle r, f \mid r^n = f^2 = e, r^{-1}f = fr \rangle.$$

Se examinarán los caracteres del grupo dihedral D_3 , nótese que en este grupo existen múltiples elementos de orden dos, siendo estos $(f)^2 = (fr)^2 = (fr^2)^2 = e$, lo cual imposibilita asignarle un carácter único a cada elemento de D_3 , ya que en U_6 solo existe un elemento de orden dos, $(-1)^2 = 1$.

Un carácter sobre D_3 entonces debe enviar estos elementos de orden dos a -1 o 1 , enviando los elementos que no sean de orden dos a 1 . Por ende, solo existen dos caracteres, ya que esta es la única decisión que se puede realizar, sea χ_1^* el carácter no trivial, este enviara a f, rf y r^2f a -1 , generando los caracteres de la siguiente forma.

	e	f	r	rf	r^2	r^2f
χ_e^*	1	1	1	1	1	1
χ_1^*	1	-1	1	-1	1	-1

En general, es imposible asignarle un carácter único a cada elemento de un grupo dihedral cuando $n \geq 3$, ya que en estos casos D_n es no abeliano. Después se demostrará que la importancia de los grupos abelianos es que esta propiedad permite que sus caracteres separen puntos, lo cual no ocurre en este caso.

Ejemplo 2.3. Se puede comprobar que el grupo dual de \mathbb{R} es si mismo, de tal forma que $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^*$. El procedimiento que subyace a este ejemplo se ha basado en la página 229 de [4].

Para este fin, se utilizara la identidad de los caracteres y se comprobara que para cualquier número real $x \in \mathbb{R}$, existe un carácter $\chi_x^* \in \mathbb{R}^*$.

Sea $\chi^* : \mathbb{R} \rightarrow U$ un carácter continuo arbitrario y sea $y \in \mathbb{R}$, por la proposición 2.2, $\langle 0, x^* \rangle = 1$, de tal forma que por la continuidad de los caracteres debe existir un elemento $\delta > 0$ suficientemente pequeño que asegure que la integral de 0 hasta δ no sea 0, tal que

$$\int_0^\delta \chi^*(a) da = t, \quad t \neq 0$$

Subsecuentemente, se puede ver que

$$\begin{aligned} t\chi^*(y) &= \chi^*(y) \int_0^\delta \chi^*(a) da \\ &= \int_0^\delta \chi^*(y+a) da = \int_y^{y+\delta} \chi^*(a) da \end{aligned}$$

Despejando χ^* , la continuidad de los caracteres permite obtener

$$\chi^*(y) = t^{-1} \int_y^{y+\delta} \chi^*(a) da = \frac{\int_y^{y+\delta} \chi^*(a) da}{\int_0^\delta \chi^*(a) da}. \quad (2.11)$$

Ahora, para esta ecuación, la definición de la derivada resulta en

$$(\chi^*(y))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\chi^*(y+h) - \chi^*(y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \chi^*(y) \left(\frac{\chi^*(h) - 1}{h} \right) \quad (*)$$

Por el teorema fundamental del cálculo, la derivada de $*$ debe existir, ya que se expresó su anti derivada. Esto asegura que la siguiente expresión existe y es igual a una constante c , donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\chi^*(h) - 1}{h} = c.$$

Siendo así, la derivada de la ecuación * indica que

$$(\chi^*)' = c\chi^* \quad (2.12)$$

Por [2], la única ecuación diferencial que cumple con esta identidad es

$$\chi^*(y) = A \cdot \exp(cy) \quad (2.13)$$

Como $\chi^*(0) = 1 = A \cdot 1$, entonces $A = 1$, tal que $\chi^*(y) = \exp(cy)$.

Ya que la imagen de los caracteres debe estar en el círculo de la unidad, el exponente de χ^* debe contener al número imaginario i . En virtud de esto, la fórmula de los caracteres permite escoger cualquier constante $c = ia$, donde $a \in \mathbb{R}$, de modo que se genera un carácter distinto por cada real, por lo que $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^*$.

Finalmente, como existe un isomorfismo de los reales a los reales cuando se multiplica por un escalar, es usual añadir un factor de 2π a la fórmula de los caracteres, de modo que para todo $a \in \mathbb{R}$, su carácter esta dado por

$$\chi_a^*(y) = \exp(2\pi i \cdot a \cdot y), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Ejemplo 2.4. El ejemplo anterior funcionara como una base para encontrar el grupo dual de otros grupos, por ejemplo, nótese que $U \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, por lo que es posible enviar los elementos de \mathbb{R} a U utilizando el mapeo natural asociado al grupo cociente. Por ende, para todo $c \in \mathbb{R}$, su mapeo a U es $c \mapsto c \text{ mód } 2\pi\mathbb{Z}$.

La composición de los caracteres con este mapeo genera caracteres $\chi_c^* : U \rightarrow U$ donde para un $c \in \mathbb{R}$, el carácter χ_c^* tiene formula

$$\chi_c^*(a) = \exp(2\pi i \cdot ca), \quad a \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \quad (2.15)$$

Acorde con esta fórmula, para todo $a \in \mathbb{R}$ entero, $\chi_c^*(a) = 1 = \exp(2\pi i \cdot c)$, tal que $c \in \mathbb{Z}$, como consecuencia, únicamente los caracteres que son generados por un numero entero son únicos, indicando que $U^* \cong \mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.5. El ejemplo anterior servirá como una base para encontrar los caracteres de \mathbb{Z} . Para esto, sea $x \in \mathbb{Z}$, este se mapeará a \mathbb{R} a través de la identidad, de tal forma que un entero es enviado a sí mismo en \mathbb{R} .

A partir de esto, se puede utilizar la fórmula de los caracteres de los números reales para generar los caracteres de \mathbb{Z} , siguiendo el mismo procedimiento que se ha hecho hasta el momento.

No obstante, no todos los números reales producen un carácter distinto de \mathbb{Z} , ya que, por la fórmula de los caracteres, al generar el carácter de un $c \in \mathbb{R}$, este sera igual a $c + Z$ para todo $Z \in \mathbb{Z}$. Por ende, para generar los caracteres se escoge un intervalo de tamaño 1 sin cota superior, sea $c \in [0, 1)$ este intervalo, la fórmula de los caracteres es

$$\chi_c^*(a) = \exp(2\pi i \cdot ca), \quad a \in \mathbb{Z}. \quad (2.16)$$

Finalmente, el conjunto $[0, 1)$ que genera los caracteres es isomorfo a U , así $\mathbb{Z}^* \cong U$.

Ejemplo 2.6. En el caso de los caracteres sobre los números complejos, nótese que se si se definen los caracteres sobre todos los números complejos, tal que existen $\chi^* : \mathbb{C} \rightarrow U$, es posible limitar estos caracteres a los números reales, donde $\chi^*|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow U$.

Como se ha visto anteriormente estos caracteres estarían dados por la ecuación

$$\chi^*|_{\mathbb{R}}(a) = \exp(2\pi i \cdot ca), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Luego, siguiendo el teorema de extensión de funciones reales a complejas, dado en la página 102 de [1], una extensión de los caracteres reales a todos los complejos únicamente puede estar dada por

$$\chi^*|_{\mathbb{R}}(a) = \exp(2\pi i \cdot ca \cdot z), \quad c \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$$

Sin embargo, el único número complejo que asegura que la imagen de los caracteres este en U es 0, por lo que todo carácter actuara sobre los $x \in \mathbb{C}$ de forma $\langle \chi^*, x \rangle = 1$. Por ende, el dual de \mathbb{C} es el carácter neutro 1^* .

Proposición 2.4. Sea A un grupo finito de orden N y sea $x^* \in A^*$, entonces

$$\sum_{a \in A} \langle a, x^* \rangle = \begin{cases} N, & \text{si } x^* = 1^* \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. En el caso que $x^* = 1^*$, todo elemento sera enviado a 1, y por tanto la suma dará N .

En el otro caso, si $x^* \neq 1^*$, existe algún elemento $a_0 \in A^*$ tal que

$$\langle a_0, x^* \rangle \neq 1$$

Antes de realizar la suma, es necesario construir un mapeo $h : A \rightarrow A$, que envía los elementos de forma $a \mapsto a + a_0$, la importancia de h proviene de su capacidad de desplazar los elementos sin cambiar el resultado de la suma, ya que por su definición este es un isomorfismo de A en A . Utilizando a h , se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} \langle a, a^* \rangle &= \sum_{a \in A} \langle h(a), a^* \rangle = \sum_{a \in A} \langle a \cdot a_0, a^* \rangle \\ &= \sum_{a \in A} \langle a_0, a^* \rangle \langle a, a^* \rangle = \langle a_0, a^* \rangle \sum_{a \in A} \langle a, a^* \rangle \end{aligned}$$

Como $\langle a_0, a^* \rangle$ es un numero diferente de 1, y pertenece al círculo unitario, de modo que no es 0, la igualdad entre el primer y último término de la formula anterior solo se podrá mantener si

$$\sum_{a \in A} \langle a, a^* \rangle = 0$$

Habiendo verificado ambos casos, se comprueba la proposición. \square

Para los fines de este texto también es necesario comprobar un teorema análogo al teorema anterior, con la diferencia que se realiza la suma de los caracteres de A^* . Sin embargo, la prueba de este teorema tiene una sutileza que la hace más compleja que la prueba anterior, requiriendo comprobar algunas propiedades de los caracteres antes de poder demostrar el resultado principal.

Los siguientes resultados, que comprenden las proposiciones 2.5, 2.6, 2.7, el teorema 2.1 y el corolario 2.1 fueron realizados basándose en el texto [3].

Proposición 2.5. Sea A un grupo abeliano finito, H un subgrupo propio de A y $\chi^* : H \rightarrow U$ un carácter, entonces para todo elemento $a \in A - H$, se puede extender el dominio del carácter de forma $\chi^* : \langle H, a \rangle \rightarrow U$.

Aquí, se está usando la notación $\langle H, a \rangle \leq G$, la cual también se puede ver como $\langle H \rangle \cup \langle a \rangle \leq G$ para describir al subgrupo de A compuesto de la unión de los elementos de H y el subgrupo generado por $\langle a \rangle$.

Demostración. Para realizar esta demostración, el primero paso que se realizara es mostrar como las propiedades de los elementos de A permiten construir la extensión, siendo así, partiendo de que A es un grupo finito, para algún n se debe cumplir que $n \cdot a = 0$, por lo que

$$\langle a, \chi^* \rangle^n = \langle n \cdot a, \chi^* \rangle = \langle 0, \chi^* \rangle = 1 \quad (*)$$

Como $0 \in H$ y el producto de $n \cdot a = 0$, existe un n tal que $n \cdot a \in H$, como n puede ser cualquier número donde $n \cdot a = 0$, se usara d para denotar el menor número que $d \cdot a = 0$.

Ademas de esto, es importante que al realizar el grupo cociente de $H/\langle H, a \rangle$, este solo tendrá $d = |H/\langle H, a \rangle|$ elementos, ya que cada elemento generado por un $i \cdot a \in \langle a \rangle$ para todos los $i = 0, 1, \dots, d-1$ generara su propio grupo cociente.

Con esto, se puede empezar a definir la extensión de χ^* , sea $\tilde{\chi}^* : \langle H, a \rangle \rightarrow U$ esta extensión, la ecuación * obliga a $\langle a, \tilde{\chi}^* \rangle$ a ser un elemento de U_d , ya que de lo contrario no se cumpliría que

$$\langle d \cdot a, \tilde{\chi}^* \rangle = \langle a, \tilde{\chi}^* \rangle^d = \langle d \cdot a, \chi^* \rangle = \langle 0, \chi^* \rangle = 1 \quad (2.17)$$

Hasta el momento, se mostró que cualquier extensión de χ^* debe asignarle un valor dentro del círculo unitario a $\langle a, \tilde{\chi}^* \rangle$, y cabe destacar que únicamente con este hecho se puede crear la extensión de χ^* , ya que el producto de dos elementos del círculo unitario caerá en el círculo unitario, permitiendo para crear la extensión con formula

$$\tilde{\chi}^*(h + i \cdot a) = \chi^*(h) \cdot \tilde{\chi}^*(a)^i. \quad (2.18)$$

Sin embargo, no se ha demostrado que $\tilde{\chi}^*$ está bien definida, y más aún, que no importe cual selección de elemento en el círculo unitario de $\langle a, \tilde{\chi}^* \rangle \in U_d$ se realice, por lo que es necesario comprobar que para cada forma de generar un elemento de $\langle H, a \rangle$, por lo que se definen dos generadores para este elemento, $h + i \cdot a$ y $j \cdot h + i' \cdot a$ tal que $h + i \cdot a = j \cdot h + i' \cdot a$.

Para comprobar la consistencia, se parte de la igualdad de los generadores, de modo que

$$h + d \cdot a = j \cdot h + i' \cdot a \rightarrow h + (i - i')a = j \cdot h \rightarrow (i - i')a \in H$$

Por ende, se sabe que este elemento está en H , de tal forma que $i' \equiv i \pmod{d}$. Además, al despejar de las variables restantes, se encuentra que $i' = i + dd'$ y $h = j \cdot h + (i' - i)a = j \cdot h + (dd')a$, las cuales se usaran para mostrar la consistencia de $\tilde{\chi}^*$, donde

$$\begin{aligned} \chi^*(j \cdot h) \tilde{\chi}^*(a)^{i'} &= \chi^*(j \cdot h) \tilde{\chi}^*(a)^{i+dd'} = \chi^*(j \cdot h) \tilde{\chi}^*(a)^i \tilde{\chi}^*(a)^{dd'} \\ &= \chi^*(j \cdot h) \tilde{\chi}^*(a)^i \chi^*(d \cdot a)^{d'} = \chi^*(j \cdot h + (dd')a) \tilde{\chi}^*(a)^i \\ &= \chi^*(h) \tilde{\chi}^*(a)^i. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Esta igualdad asegura que la ecuación está bien definida sin importar cual raíz de la unidad de U_d se seleccione para representar la acción de $\langle a, \tilde{\chi}^* \rangle$, lo que comprueba que este es un método valido para extender los caracteres. \square

Proposición 2.6. Sea A un grupo abeliano finito, H un subgrupo de A , y $\chi^* : H \rightarrow U$ un carácter, entonces a este carácter se le puede extender el dominio a todo A , es decir, existe $\tilde{\chi}^* : A \rightarrow U$ tal que $\tilde{\chi}^*(h) = \chi^*(h)$, para cada $h \in H$.

Demostración. Como A es finito, existe un conjunto finito compuesto por los elementos

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = A - H$$

A partir de estos elementos se puede ir construyendo una secuencia de subgrupos, añadiéndole un generador a H , de forma que obtenemos una secuencia de forma

$$H \leq \langle H, a_1 \rangle \leq \dots \leq \langle H, a_1, \dots, a_k \rangle = A$$

Esta secuencia permite puede aplicar el resultado de la proposición 2.5 de forma iterativa, aumentando el dominio de un carácter χ^* a un subgrupo más grande, hasta que el dominio de χ^* sea todo A , tal que $\chi^* : A \rightarrow U$. \square

Proposición 2.7. Sea A un grupo abeliano finito y H un subgrupo de A , entonces se pueden extender los caracteres de H a A de $|A/H|$ maneras distintas.

Demostración. Esta prueba se realizará por inducción. El caso base se da cuando $|A/H| = 1$, en esta situación $A = H$, donde es aparente que solo existe una manera trivial de extender los caracteres, ya que no se hace nada.

Como hipótesis de inducción, se asumirá que se cumple la condición para todos los subgrupos G de A tal que $|A/G| < |A/H|$, por lo que existen $|A/G|$ formas de extender a $\chi^* : G \rightarrow U$.

Sea $a \in A - H$, para comprobar la inducción se debe recordar el procedimiento que se realizó en la proposición 2.5. En este, d es el menor número tal que $d \cdot a \in H$ y la extensión de χ^* debe estar en U_d tal que $\langle a, \tilde{\chi}^* \rangle \in U_d$.

Se mostró que todas las opciones para extender los caracteres son válidas, por lo que existen $d = |A/H|$ maneras distintas de extender el dominio de $\chi : H \rightarrow U$, donde cada opción crea un carácter $\tilde{\chi}^* : \langle H, a \rangle \rightarrow U$.

Como $|A/\langle H, a \rangle| < |A/H|$, por la hipótesis de inducción existen $|A/\langle H, a \rangle|$ formas de extender a $\chi^* : \langle H, a \rangle \rightarrow U$ a todo el grupo A . Además, como existen d formas de realizar la extensión de $\chi^* : H \rightarrow U$ a el subgrupo $\langle H, a \rangle$, donde la cantidad total de extensiones de H se encontrará realizando el producto de estas extensiones, tal que

$$|A/\langle H, a \rangle| \cdot d = |A/\langle H, a \rangle| \cdot |\langle H, a \rangle/H| = |A/H|.$$

Se ha comprobado que el paso inductivo es verdadero, de modo que el teorema es verdadero por el principio de inducción. \square

Teorema 2.1. *Sea A un grupo abeliano finito, entonces para todo elemento $a \in A$, donde $a \neq 0$, existe un carácter χ_0^* tal que*

$$\langle a, \chi_0^* \rangle \neq 1 \quad (2.20)$$

Demostración. Sea $a \in A$, como A es finito y $a \neq 0$ existe un N tal que $N \cdot a = 0$, donde $N > 1$. Además, considerando que el subgrupo cíclico generado por $\langle a \rangle$ es isomorfo a su dual $\langle a \rangle^*$ por la proposición 2.3, deben existir caracteres que actúan sobre $\langle a \rangle$.

Luego, por la proposición 2.6 se puede extender el dominio de los caracteres $\chi_0^* : \langle a \rangle \rightarrow U$ sobre $\langle a \rangle$ a todo A , donde el método para realizar la extensión asegura que existe una extensión donde $\langle a, \chi_0^* \rangle \neq 1$. \square

Observación. Como este teorema solo aplica para los grupos abelianos finitos, a partir de este punto se asumirá que todos los grupos en este texto son abelianos y finitos, a menos que se mencione lo contrario.

Corolario 2.1. Si A es un grupo abeliano finito, entonces su dual A^* es del mismo orden que A .

Demostración. El elemento neutro 0 es un subgrupo de A , los caracteres de este subgrupo se pueden extender a todo el grupo A de $|A/0| = |A|$ formas distintas por la proposición 2.7, por lo que existen $|A|$ caracteres distintos de A y por ende, $|A| = |A^*|$. \square

Observación. Como los grupos \mathbb{Z}_N son abelianos y finitos, se cumplen todas las proposiciones que se plantearon, como la igualdad de tamaño entre un grupo y su dual, lo cual permitirá realizar la transformada de Fourier sobre estos.

En cambio, en otros grupos no se tienen estas garantías, nótese que para los grupos no abelianos no aplica el teorema 2.1. Por ejemplo, volviendo al caso de D_3 , no existe un carácter que mande a los elementos no triviales $\{r, r^2\}$ a algún número además de 1.

De manera similar, estar en grupos finitos asegura que se cumpla el corolario 2.1, el cual se usará para realizar las transformadas de Fourier en este texto. Esto se puede ejemplificar con los duales de \mathbb{Z} y U respectivamente, ya que $|U| \neq |\mathbb{Z}|$ aunque sean duales entre si.

Teorema 2.2. *Sea A un grupo abeliano finito de orden N y sea $a \in A$, entonces*

$$\sum_{x^* \in A^*} \langle a, x^* \rangle = \begin{cases} N, & \text{si } a = 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. De manera análoga a la proposición 2.4, se examinara este teorema por casos.

Si $a = 0$, por la proposición 2.2, la acción de todos los caracteres con a es 1, adicionalmente, el corolario 2.1 asegura que la cantidad de elementos de A es igual a la de A^* . En consecuencia, la suma será igual a $|A^*| = |A| = N$.

En el otro caso, si $a \neq 0$, el teorema 2.1 asegura que existe un $x_0^* \in A^*$ donde $\langle a, x_0^* \rangle \neq 1$. Como en la proposición 2.4, se define un isomorfismo $h : A^* \rightarrow A^*$ que envía a los caracteres $x^* \mapsto x^* \cdot x_0^*$ que preserva la suma, por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{x^* \in A^*} \langle a, x^* \rangle &= \sum_{x^* \in A^*} \langle a, h(x^*) \rangle = \sum_{x^* \in A^*} \langle a, x^* \cdot x_0^* \rangle \\ &= \sum_{x^* \in A^*} \langle a, x_0^* \rangle \langle a, x^* \rangle = \langle a, x_0^* \rangle \sum_{x^* \in A^*} \langle a, x^* \rangle \end{aligned}$$

Como $\langle a, x_0^* \rangle$ es un numero diferente de 1, y pertenece al círculo unitario, de modo que no es 0, la igualdad entre el primer y último término de la formula anterior solo se podrá mantener si

$$\sum_{x^* \in A^*} \langle a, x^* \rangle = 0.$$

□

2.2 El espacio $L^2(A)$

Habiendo establecido los caracteres, para realizar la transformada de Fourier es necesario tener la capacidad de trabajar con las funciones definidas sobre un grupo A , lo cual se realizará a través del espacio $L^2(A)$.

Definición 2.4. Sea A un grupo, el espacio vectorial de dimensión finita $L^2(A)$ es aquel definido por

$$L^2(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{a \in A} |f(a)|^2 < \infty\} \quad (2.21)$$

Sobre $L^2(A)$ se está utilizando la norma L^2 , de manera que una función pertenece al espacio si su norma es finita, la norma de toda función $f \in L^2(A)$ es

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{a \in A} |f(a)|^2}. \quad (2.22)$$

En $L^2(A)$, definimos el *producto interno* para las funciones $f, g \in L^2(A)$ como

$$(f, g) = \sum_{a \in A} f(a) \overline{g(a)} \quad (2.23)$$

Como $L^2(A)$ es un espacio con norma L^2 dotado con un producto interno, este es un espacio de Hilbert.

Recordando que únicamente se están usando grupos abelianos finitos, esto implica que la norma L^2 de cualquier función en $L^2(A)$ se realizará a partir de una suma finita de valores finitos, por lo que todas las funciones tendrán una norma finita y por ende pertenecerán a $L^2(A)$.

Esto incluye a todos los caracteres $L^2(A)$ y en particular, que el producto interno entre caracteres $x^*, y^* \in A^*$ es

$$(x^*, y^*) = \sum_{a \in A} \langle a, x^* \rangle \overline{\langle a, y^* \rangle} = \sum_{a \in A} \langle a, x^* \cdot \overline{y^*} \rangle. \quad (2.24)$$

Definición 2.5 (Base ortogonal). Sea A un grupo, y $L^2(A)$ el espacio de Hilbert que A induce, una base ortogonal (e_n) es una secuencia (e_1, e_2, \dots, e_N) en $L^2(A)$, de tal forma que los elementos de esta secuencia deben ser ortogonales entre si, lo cual implica su independencia lineal.

Como $L^2(A)$ es un espacio con producto interno, se sabe que dos elementos son ortogonales si su producto interno es igual a cero, es decir

$$(e_i, e_k) = 0, \text{ para todo } i \neq k. \quad (2.25)$$

Además, todo elemento $x \in L^2(A)$ debe poderse escribir como una combinación lineal

$$x = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \quad (2.26)$$

Esta forma de escribir a x a partir de los elementos de la base ortogonal se llama la *expansión de x* , además de este término, los escalares $\alpha_k \in \mathbb{C}$ que conforman x se llaman sus *coeficientes de la expansión*. Como $L^2(A)$ es un espacio de Hilbert, todo coeficiente se puede obtener a través del producto interno, donde

$$\alpha_k = (x, e_k). \quad (2.27)$$

Observación. Las bases ortogonales no son únicas, de modo que se puede encontrar más de una base ortogonal de $L^2(A)$, sin embargo, todas las bases ortogonales de $L^2(A)$ deben ser de orden $\dim L^2(A)$.

La base ortogonal más simple de $L^2(A)$ para un grupo finito A está dada por $(e_0, e_1, \dots, e_{N-1})$, donde cada e_k es

$$e_k(a_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j \\ 0, & \text{si } k \neq j \end{cases} \quad (2.28)$$

La cardinalidad de la base ortogonal (e_k) es igual al orden de A , lo cual permite asegurar que $\dim(L^2(A)) = |A|$, lo cual será importante al desarrollar el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Sea A un grupo, entonces su dual A^* es una base ortogonal de $L^2(A)$.*

Demostración. El corolario 2.1 asegura que $|A| = |A^*| = \dim L^2(A)$, por lo que para demostrar que A^* es una base ortogonal solo es necesario demostrar que los elementos del dual son ortogonales entre sí.

Para este fin, sean $x^*, y^* \in A^*$ dos caracteres donde $x^* \neq y^*$, se puede verificar su ortogonalidad a través del producto interno

$$(x^*, y^*) = \sum_{a \in A} \langle a, x^* \rangle \overline{\langle a, y^* \rangle} = \sum_{a \in A} \langle a, x^* \cdot \overline{y^*} \rangle \quad (2.29)$$

La proposición 2.4 indica que la suma se cancela como $x^* \neq y^*$, de modo que la suma del producto interno es $(x^*, y^*) = 0$, comprobando que estos caracteres son ortogonales.

Como este hecho aplica para todo $x^* \neq y^*$, se puede concluir que todos los caracteres son ortogonales entre sí.

Habiendo comprobado la ortogonalidad de los caracteres, se puede comprobar la norma de estos a través del producto interno, sea $x^* = y^*$, entonces $\langle a, x^* \cdot \overline{y^*} \rangle = 1$, para todo $a \in A$, tal que

$$(x^*, y^*) = \sum_{a \in A} \langle a, x^* \cdot \overline{y^*} \rangle = N. \quad (2.30)$$

□

Observación. A partir de esto se puede ver que A^* no es una base ortonormal, ya que la norma de todos los caracteres es $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{N}$, lo cual se tomará en cuenta al momento de realizar la transformada de Fourier.

Ejemplo 2.7. Siguiendo que todo elemento en $L^2(A)$ se puede escribir a partir de la suma de los caracteres A^* , es natural que los elementos de la base ortogonal $(e_0, e_1, \dots, e_{N-1})$ también puedan escribirse a partir de una expansión de A^* .

Empezando con e_0 , nótese que la fórmula dada por el teorema 2.2 permite realizar la expansión de e_0 como

$$e_0(0) = \frac{1}{N} \sum_{x^* \in A^*} \langle 0, x^* \rangle = 1 \quad (2.31)$$

$$e_0(a) = \frac{1}{N} \sum_{x^* \in A^*} \langle a, x^* \rangle = 0, \quad a \in A, a \neq 0 \quad (2.32)$$

Efectivamente, la expansión de e_0 es simplemente la evaluación de los caracteres en A^* , con un factor de normalización aplicado para mantener el resultado de $e_0(0)$ en 1.

Teniendo esto en mente, se pueden generar los demás elementos de la base a través de un desplazamiento, sea e_i algún elemento de la base ortogonal y $a \in A$, por el teorema 2.1 la expansión de e_i es

$$e_i(a) = \frac{1}{N} \sum_{x^* \in A^*} \langle a - e_i, x^* \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } a = e_i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.33)$$

2.3 Transformada de Fourier

Siguiendo el teorema 2.3, toda función $f \in L^2(A)$ se puede escribir como una expansión en la base ortogonal A^* .

Estas expansiones están compuestas de un coeficiente y un carácter $a^* \in A^*$. Denotando el coeficiente de la expansión correspondiente a a^* como $\alpha_f(a^*) \in \mathbb{C}$, la función $f \in L^2(A)$ se escribirá como

$$f = \sum_{a^* \in A^*} \alpha_f(a^*) \cdot a^* \quad (2.34)$$

Esta expansión a partir de la base ortogonal A^* se llama la *expansión de Fourier de f* , en la cual los $\alpha_f(a^*)$ se llaman los *coeficientes de Fourier*.

Para un $a \in A$ fijo, el uso de la expansión de Fourier permite escribir $f(a)$ de forma

$$f(a) = \sum_{a^* \in A^*} \alpha_f(a^*) \cdot a^*(a) = \sum_{a^* \in A^*} \alpha_f(a^*) \langle a, a^* \rangle. \quad (2.35)$$

Como $L^2(A)$ es un espacio de Hilbert, se puede utilizar el producto interno para obtener el coeficiente de Fourier de un carácter $c^* \in A^*$, tal que

$$\begin{aligned} (f, c^*) &= \left(\sum_{a^* \in A^*} \alpha_f(a^*) \cdot a^*, c^* \right) = \sum_{a^* \in A^*} \alpha_f(a^*) \cdot (a^*, c^*) \\ &= \alpha_f(c^*) \cdot (c^*, c^*) = N \cdot \alpha_f(c^*) \end{aligned}$$

Despejando α_f , se tiene que

$$\alpha_f(c^*) = \frac{1}{N} (f, c^*) \quad (2.36)$$

Por ende, por la definición del producto interno sobre $L^2(A)$, la fórmula para obtener el coeficiente de Fourier correspondiente a c^* es

$$\alpha_f(c^*) = \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a) \overline{\langle a, c^* \rangle}. \quad (2.37)$$

Como en el ejemplo 2.7, se está realizando una normalización a través de la división por un factor de N , realizar este procedimiento es la practica estándar al obtener los coeficientes de Fourier.

Antes de definir la transformada de Fourier, se debe recordar que se está trabajando con grupos abelianos y finitos, por ello, se sabe que el dual A^* también es abeliano y finito, asegurando que existe el espacio de funciones $L^2(A^*)$ que cumple con todas las propiedades de los espacios L^2 que se dieron en la sección 2.2.

Definición 2.6 (Transformada de Fourier). La transformada de Fourier $F_A : L^2(A) \rightarrow L^2(A^*)$ es un operador cuyo dominio son las funciones $f \in L^2(A)$, tal que

$$F_A f = \alpha_f \quad (2.38)$$

La imagen de f bajo la transformada de Fourier es una función $\alpha_f \in L^2(A^*)$ que codifica los coeficientes de Fourier de f , de tal forma que para un carácter $a^* \in A^*$, la función α_f retornará su coeficiente de Fourier

$$F_A f(a^*) = \alpha_f(a^*) = \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a) \overline{\langle a, a^* \rangle}. \quad (2.39)$$

Ejemplo 2.8. Para visualizar el funcionamiento de la transformada de Fourier, sea $A = \mathbb{Z}_7$ y $f : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{R}$ una función, la cual se gráfica en la figura 2.

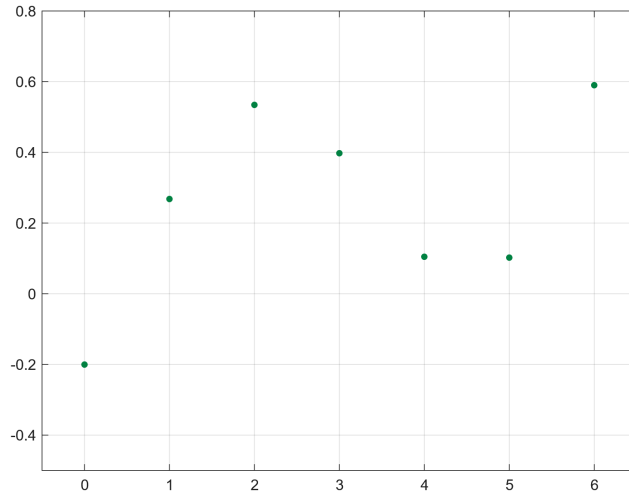


Figura 2: La gráfica de f en los números naturales entre 0 y 6.

Siguiendo que la transformada de Fourier de f , $F_A f$ es una función que le asigna un coeficiente de Fourier a cada carácter de A^* , estos coeficientes se pueden visualizar, ya que se encuentran en el plano complejo. Nótese que existe una simetría vertical en los coeficientes de Fourier, esta simetría siempre existirá si la función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es real. En cambio, si la función es compleja, tal que $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, esta simetría nunca existirá.

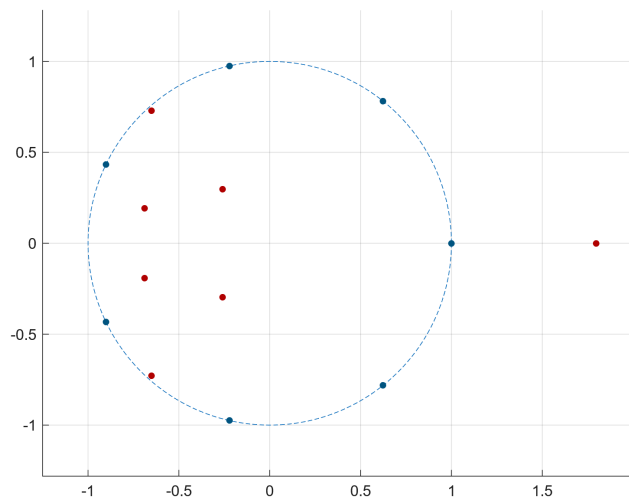


Figura 3: Las raíces de la unidad en azul y los coeficientes de Fourier α_f en rojo.

Teorema 2.4. $F_A : L^2(A) \rightarrow L^2(A^*)$ es un operador lineal, es decir, que para $f, g \in L^2(A)$, $x, y \in \mathbb{C}$, entonces

$$F_A(xf + yg) = x \cdot F_A(f) + y \cdot F_A(g) \tag{2.40}$$

Demostración. Sea $a^* \in A^*$

$$\begin{aligned}
F_A(xf + yg)(a^*) &= \frac{1}{N} \sum_{a \in A} (xf + yg)(a) \cdot \overline{\langle a, a^* \rangle} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{a \in A} (x \cdot f(a) \overline{\langle a, a^* \rangle} + y \cdot g(a) \overline{\langle a, a^* \rangle}) \\
&= x \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a) \overline{\langle a, a^* \rangle} + y \frac{1}{N} \sum_{a \in A} g(a) \overline{\langle a, a^* \rangle} \\
&= x \cdot F_A f(a^*) + y \cdot F_A g(a^*).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

□

Teorema 2.5. F_A preserva el producto interno, es decir, que para dos funciones $f, g \in L^2(A)$ se cumple que

$$(F_A f, F_A g) = (f, g) \tag{2.42}$$

Demostración. Sea $a^* \in A^*$, para fines de esta prueba se realizara el producto interno en el espacio $L^2(A^*)$ entre las funciones $F_A f, F_A g$ y se demostrará la igualdad con el producto interno entre f y g

$$\begin{aligned}
(F_A f, F_A g) &= \sum_{a^* \in A^*} \langle a^*, F_A f \rangle \overline{\langle a^*, F_A g \rangle} = \sum_{a^* \in A^*} F_A f(a^*) \cdot \overline{F_A g(a^*)} \\
&= \sum_{a^* \in A^*} \left(\sum_{a \in A} \frac{1}{N} f(a) \overline{\langle a, a^* \rangle} \cdot \overline{\sum_{b \in A} \frac{1}{N} g(b) \overline{\langle b, a^* \rangle}} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} \sum_{a^* \in A^*} f(a) g(b) \overline{\langle a, a^* \rangle} \langle b, a^* \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} f(a) \overline{g(b)} \sum_{a^* \in A^*} \overline{\langle a, a^* \rangle} \langle b, a^* \rangle
\end{aligned}$$

Examinando en detalle la suma interior, nótese que

$$\sum_{a^* \in A^*} \overline{\langle a, a^* \rangle} \langle b, a^* \rangle = \sum_{a^* \in A^*} \langle a, \overline{a^*} \rangle \langle b, a^* \rangle. \tag{*}$$

El carácter $\overline{a^*}$ es el inverso de a^* , por ende, el homomorfismo de los caracteres asegura que $\langle a, \overline{a^*} \rangle = \langle a^{-1}, a^* \rangle$. Para el caso que $a \neq b$, el teorema 2.2 implica que *

$$\sum_{a^* \in A^*} \langle a^{-1}, a^* \rangle \langle b, a^* \rangle = \sum_{a^* \in A^*} \langle a^{-1} + b, a^* \rangle = 0.$$

En el otro caso que $a = b$, entonces

$$\langle a^{-1} + b, a^* \rangle = \langle a^{-1} + a, a^* \rangle = 1$$

En este caso también se utiliza el teorema 2.2, el cual indica que el resultado de la suma * cuando $a = b$ es N .

Finalmente, la suma se reduce a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} f(a) \overline{g(b)} \sum_{a^* \in A^*} \overline{\langle a, a^* \rangle} \langle b, a^* \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a) \overline{g(a)} \sum_{a^* \in A^*} \overline{\langle a, a^* \rangle} \langle a, a^* \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{a \in A} N \cdot f(a) \overline{g(a)} = \frac{N}{N} \sum_{a \in A} f(a) \overline{g(a)} = (f, g).
\end{aligned}$$

□

Hasta este punto se ha definido una transformada de Fourier F_A que opera sobre grupos abelianos finitos la cual preserva algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier real, como la linealidad.

La invertibilidad se obtiene a partir de los resultados anteriores, para verificar esto, como $L^2(A)$ es un espacio de Hilbert, F_A preserva la norma, ya que esta se realiza sobre el producto interno en $L^2(A)$. En particular, como los dos espacios $L^2(A)$ y $L^2(A^*)$ son espacios de Hilbert, donde $\|F_{A^*}f\|_2 = \|f\|_2$, F_A es una isometría. En conjunto con el hecho que $\dim L^2(A) = |A| = |A^*| = \dim L^2(A^*)$, F_A es un isomorfismo entre los espacios de Hilbert $L^2(A)$ y $L^2(A^*)$.

Este isomorfismo implica la existencia de una función inversa a la transformada de Fourier, tal que F_A también preserva esta propiedad, aunque la forma en la que se demostró esta invertibilidad no proporciona la forma de la transformada inversa, la cual se dará en la sección 4.

3 Ejemplos de la transformada sobre grupos abelianos y finitos

En la sección anterior se estableció la teoría general de la transformadas de Fourier sobre los grupos abelianos finitos. Ahora, se examinará la transformada en algunos grupos específicos.

3.1 Transformada de Fourier sobre \mathbb{Z}_N

Las transformadas de Fourier más simples son aquellas que se realizan sobre \mathbb{Z}_N , donde volviendo a la caracterización que se dio en el ejemplo 2.1, el carácter correspondiente a $c \in A$ se da por

$$\chi_c = \exp\left(\frac{2\pi i \cdot ca}{N}\right), \quad a \in \mathbb{Z}_N. \quad (3.1)$$

Fijar la generación de caracteres de esta manera permite estandarizar la fórmula de la transformada de Fourier, ya que al utilizar la formula 2.39 sobre esta forma caracterización de los caracteres, se puede ver que para todo grupo \mathbb{Z}_N , sus coeficientes de Fourier estarán dados de forma

$$\alpha_f(c^*) = \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a) \exp\left(-\frac{2\pi i \cdot ca}{N}\right), \quad a \in \mathbb{Z}_N. \quad (3.2)$$

Observación. Esta ecuación también se obtiene al realizarse una aproximación por la regla del trapecio de la integral que define la transformada de Fourier estándar sobre los números reales, la cual implica separar la integral en N trapecios, que permiten obtener N coeficientes de Fourier. El uso de la regla del trapecio se debe a que esta forma de aproximar la integral siempre aumenta su precisión cuando la cantidad de muestras crece.

Es posible representar esta transformada de Fourier de forma matricial, específicamente, la matriz que codifica este proceso se llama la *matriz de la transformada de Fourier* y se denota con \mathcal{F} . Para el caso de \mathbb{Z}_N la matriz de la transformada de Fourier es

$$[\mathcal{F}(N)]_{N,N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}, \quad \omega = \overline{\exp(2\pi i/N)}.$$

Utilizar esta matriz para obtener los coeficientes de Fourier requiere codificar los valores de la función f en una forma vectorial, tal que sea \mathbf{f} el vector que contiene los valores de la función, los coeficientes de Fourier de f se obtiene a partir del producto matricial

$$\alpha_f = \frac{1}{N} [\mathcal{F}(N)]\mathbf{f}. \quad (3.3)$$

El vector α_f que resulta de este producto matricial contiene N elementos, los cuales codifican los coeficientes de Fourier de f .

Ejemplo 3.1. Para demostrar el funcionamiento de la transformada de Fourier matricial sobre \mathbb{Z}_{16} , este ejemplo se basará en una función real periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual se utilizará para definir el valor de $f(a)$ para todo $a \in \mathbb{Z}_{16}$, donde cada valor corresponderá a una de las muestras equidistantes de la función en un intervalo de \mathbb{R} .

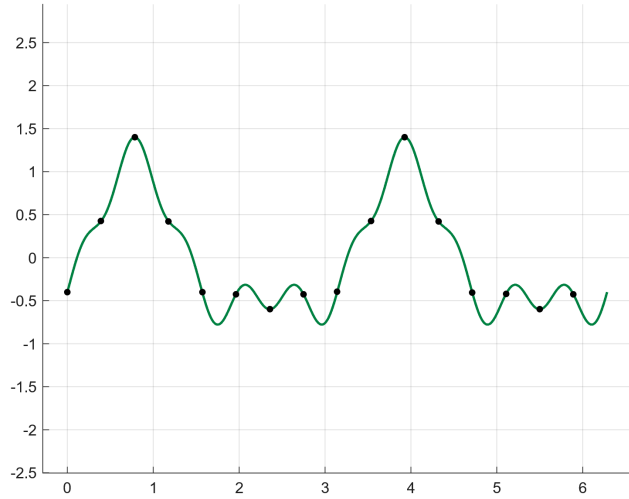


Figura 4: En verde tenemos el gráfico de la función $f(x)$. Cada punto es una muestra de f y representa a la función en \mathbb{Z}_{16} .

Por ende, para realizar la transformada de Fourier matricial de f únicamente se necesitan los valores de f sobre \mathbb{Z}_{16} , los cuales se codificarán en el vector \mathbf{f} , el cual contiene 16 elementos.

La transformada de Fourier entonces involucra el producto matricial de este vector \mathbf{f} con la matriz de la transformada de Fourier \mathcal{F} , la cual es de tamaño 16×16 .

Ahora se mostrará como se obtiene el cuarto coeficiente de Fourier de f , el cual también se puede ver como el cuarto elemento del vector α_f . Siguiendo el funcionamiento de las operaciones matriciales, este coeficiente es el resultado del producto punto de \mathbf{f} con la cuarta fila de $[\mathcal{F}(N)]$, donde esta fila es aquella que contiene la información asociada al coeficiente del carácter χ_3^* .

$$\frac{1}{N} \cdot \mathbf{f} \cdot (\mathcal{F}(N)^T)_4 = \frac{1}{N} \cdot (-0.4, \quad 0.46, \quad 1.31, \quad 0.34, \quad \dots) \cdot \begin{pmatrix} 1, \\ 0.91 - 0.46i, \\ 0.66 - 0.74i, \\ -0.30 - 0.95i, \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha_f(\chi_3^*)$$

Es posible representar este proceso visualmente, haciéndose en la figura 5. El punto rojo es el coeficiente de Fourier $\alpha_f(\chi_3^*)$, el cual es el resultado de realizar la suma de los puntos negros, que representan cada uno de los números generados por el producto matricial entre \mathbf{f} y $(\mathcal{F}(N)^T)_4$.

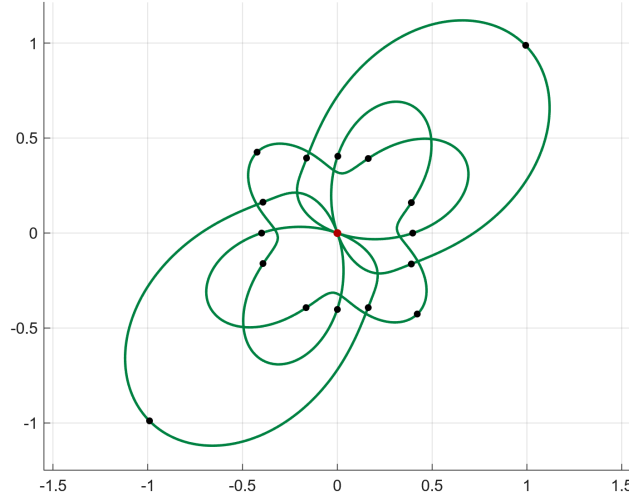


Figura 5: La función que se integraría para obtener el coeficiente de Fourier real (en verde) y los puntos que se suman para conformar $\alpha_f(\chi_3^*)$

3.2 Transformada de Fourier del producto directo de \mathbb{Z}_N

Después de la transformada de Fourier anterior también se puede considerar el grupo obtenido al realizar el producto directo de múltiples grupos \mathbb{Z}_{N_i} , donde los $N_i \in \mathbb{N}$, estos grupos están dados por

$$A = \mathbb{Z}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{N_k} \quad (3.4)$$

El orden de A es igual a $N = N_1 \cdot N_2 \dots \cdot N_k$. Siguiendo la definición del producto directo, los elementos de A son de forma (a_1, a_2, \dots, a_k) , donde $a_i \in \mathbb{Z}_{N_i}$.

Para cada $c \in A$, la fórmula del carácter correspondiente a c es

$$\chi_c = \exp\left(2\pi i \sum_{r=1}^k c_r a_r / N_r\right), \quad a \in A. \quad (3.5)$$

Análogamente a \mathbb{Z}_N , definir los caracteres de esta forma permite estandarizar la transformada de Fourier para estos grupos

$$\alpha(c)_f = \frac{1}{N} \sum_{a_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{a_k=0}^{N_k-1} f(a_1, \dots, a_k) \left(\exp\left(-\frac{2\pi i c_1 a_1}{N_1}\right) \dots \exp\left(-\frac{2\pi i c_k a_k}{N_k}\right) \right) \quad (3.6)$$

No es sorprendente que el procedimiento de la transformada de Fourier matricial para estos grupos sea similar al de \mathbb{Z}_N , con la excepción de la forma en la cual se representan α y \mathbf{f} , los cuales no se pueden representar con vectores y matrices debido a la naturaleza multidimensional de los datos, y es necesario representarlos con tensores, los cuales se operan con la siguiente fórmula para obtener los coeficientes de Fourier

$$[\alpha_f] = \frac{1}{N} [\mathcal{F}(N_1)] \otimes \dots \otimes [\mathcal{F}(N_k)] \otimes \mathbf{f} \quad (3.7)$$

Esta operación no utiliza el producto matricial, ya que se está trabajando con tensores, sino que en cada paso se utiliza el producto de Kronecker, realizando un procedimiento similar al producto matricial, pero que opera sobre los tensores, escogiendo un elemento como base y realizando el producto tensorial, con el fin de generar un tensor que contiene a todos los coeficientes de Fourier.

Ejemplo 3.2. Debido a la naturaleza del producto tensorial, este es complejo de ejemplificar, de manera que en este ejemplo se obtendrán los coeficientes de Fourier usando el producto punto tensorial, sea $f \in L^2(A)$ una función sobre el grupo $A = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$, donde f es

$$\begin{array}{ccc} & 0 & 1 & 2 \\ e & -1 & -0.15 & -0.09 \\ x & -0.54 & 0.30 & 0.36 \end{array}$$

El producto punto tensorial involucra realizar el producto de Kronecker de $[\mathcal{F}(3)] \otimes \mathbf{f}$ y realizar una suma del resultado de forma que se preserve la dimensión de \mathfrak{f} , lo cual no es posible con el producto de Kronecker, ya que no preserva la dimensión, esto retorna el tensor

$$\begin{array}{ccc} \chi^* & 0 & 1 & 2 \\ e & -1.24 & -0.87 + 0.05i & -0.87 - 0.05i \\ x & 0.12 & -0.87 + 0.05i & -0.87 - 0.05i \end{array}$$

Este mismo procedimiento se realiza entre $\mathcal{F}(2)$ y el tensor resultante del paso anterior, permitiendo obtener el tensor $[\alpha_f]$, es decir, en este caso $F_A f$ es igual a

$$\begin{array}{ccc} \chi^* & 0 & 1 & 2 \\ e & -1.11 & -1.75 + 0.11i & -1.75 - 0.11i \\ x & -1.37 & 0 & 0 \end{array}$$

3.3 Transformada de Fourier de otros grupos abelianos finitos

Aunque solo se hayan dado las fórmulas explícitas para hacer la transformada de Fourier para dos tipos de grupos, no es necesario examinar todas las familias de grupos abelianos y finitos por separado, gracias a un teorema estándar del álgebra abstracta, siendo este el teorema de representación.

Teorema 3.1. *Sea G un grupo abeliano y finito, entonces este es isomorfo a un $\mathbb{Z}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{N_k}$, donde los $N_i \in \mathbb{N}$ son primos [6].*

Estos isomorfismos preservan las propiedades de las transformadas de Fourier, por lo que todo grupo abeliano y finito se puede tratar utilizando una de las formas de \mathbb{Z}_n de forma equivalente a este, esta forma de representar a un grupo abeliano finito se llama su *presentación*.

El teorema 3.1 no implica que una presentación de $A \cong \mathbb{Z}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{N_k}$ sea única, por lo que algunos grupos pueden tener presentaciones distintas.

Dos presentaciones son distintas si los coeficientes N_1, N_2, \dots, N_k que conforman estas presentaciones son distintos y si los coeficientes de la presentación son coprimos entre sí.

Ejemplo 3.3. Sea A un grupo abeliano de orden 12, este grupo tiene dos presentaciones distintas $\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$. Otras presentaciones como $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ tendrán que ser equivalentes a una de estas presentaciones, ya que 6 y 2 no son coprimos.

Si A es un grupo abeliano de orden primo n , este únicamente puede ser un grupo cíclico C_n , por lo que solo se puede presentar como \mathbb{Z}_n .

4 Dualidad

En esta sección se deducirá la fórmula de la transformada de Fourier inversa que se mencionó en la sección 2.3, encontrar esta fórmula requiere elucidar una propiedad de las transformadas de Fourier conocida como la *dualidad*.

Para este fin, si A es un grupo abeliano finito, su grupo dual A^* también será abeliano y finito, de tal modo que es coherente definir el grupo *dual de A^** , este es un grupo abeliano finito, el cual es denotado por A^{**} , y está dado por

$$A^{**} = \{\chi^{**} : A^* \rightarrow U \mid \chi^{**} \text{ es un homomorfismo}\}. \quad (4.1)$$

Para derivar la fórmula de la transformada de Fourier inversa es necesario tener una forma de asignarle elementos de A a elementos de A^{**} , por lo que se define el mapeo $\Theta : A \rightarrow A^{**}$ donde $a \mapsto \Theta_a$

$$\Theta_a(x^*) = \overline{\langle a, x^* \rangle}, \quad x^* \in A^*. \quad (4.2)$$

Para todo $a \in A$, $\Theta_a : A^* \rightarrow U$ es un carácter del grupo de los caracteres A^{**} , ya que es una función que le asigna un valor en el círculo unitario a un elemento de A^* . Por ende, Θ es un mapeo que le asigna un carácter $\Theta_a \in A^{**}$ a todo a en A .

Proposición 4.1. Θ es un isomorfismo entre A y A^{**} .

Demostración. Primero, se debe comprobar que Θ es un homomorfismo. Para esto, sean $a, b \in A$, y $x^* \in A^*$, entonces

$$\begin{aligned} \Theta_{a \cdot b}(x^*) &= \overline{\langle a \cdot b, x^* \rangle} = \overline{\langle a, x^* \rangle \langle b, x^* \rangle} \\ &= \overline{\langle a, x^* \rangle} \cdot \overline{\langle b, x^* \rangle} = \Theta_a(x^*) \Theta_b(x^*) \end{aligned}$$

A partir de esto, se examinará el núcleo de Θ , el cual está dado por

$$\ker \Theta = \{a \in A : \Theta_a(x^*) = 1, \forall x^* \in A^*\} \quad (4.3)$$

La combinación de los resultados del teorema 2.4 y la proposición 2.2 implica que si para todo carácter $x^* \in A^*$, $\langle a, x^* \rangle = 1$, entonces $a = 0$, ya que en otro caso existirá un carácter χ_0^* donde $\langle a, \chi_0^* \rangle \neq 1$.

Entonces, el único $a \in A$ donde para todo $x^* \in A^*$, $\Theta_a(x^*) = 1$ es 0, tal que $\ker(\theta) = \{0\}$, indicando que Θ es inyectivo.

El corolario 2.1 implica que $|A| = |A^*| = |A^{**}|$, esto, en conjunto con el hecho que Θ es un mapeo inyectivo y A es finito, implica que Θ es sobreyectivo por el principio del palomar. Por este motivo, Θ es un homomorfismo biyectivo, haciéndolo un isomorfismo. \square

Continuando con la teoría detrás de la transformada inversa, nótese que por la sección 2.2 el grupo de caracteres A^{**} es una base ortogonal de $L^2(A^*)$, permitiendo realizar la expansión de Fourier de las funciones $f \in L^2(A^*)$ a partir de los caracteres de A^{**} .

Es por esto que al realizar la transformada de Fourier sobre las funciones $\alpha \in L^2(A^*)$, esta sera $F_{A^*} : L^2(A^*) \rightarrow L^2(A^{**})$. Esta transformada de Fourier es igual a la de la sección 2.3, exceptuando que se realiza sobre $L^2(A^*)$.

Con esto en mente, se mostrará que la transformada de Fourier inversa $F_A^{-1} : L^2(A^*) \rightarrow L^2(A)$ se puede generar a partir de la transformada de Fourier $F_{A^*} : L^2(A^*) \rightarrow L^2(A^{**})$. Para esto, se realiza una composición de funciones definida por

$$(F_A)^{-1} = (\psi \circ F_{A^*}) = L^2(A^*) \xrightarrow{F_{A^*}} L^2(A^{**}) \xrightarrow{\psi} L^2(A) \quad (4.4)$$

El mapeo $\psi : L^2(A^{**}) \rightarrow L^2(A)$ es aquel que se utiliza para tratar $L^2(A)$ y a $L^2(A^{**})$ como espacios isomorfos para los fines de la transformada de Fourier. Sea $\phi : A^{**} \rightarrow \mathbb{C}$ una función, el mapeo ψ actúa sobre esta de forma

$$\phi \mapsto \psi(\phi) = \phi(\Theta_a) \quad (4.5)$$

Específicamente, se está enviando la función $\phi \in L^2(A^{**})$ a una función $\psi(\phi)$, la cual utiliza el isomorfismo Θ_a para asignarle un valor complejo a ϕ en cada $a \in A$. Es decir, realizar este proceso convierte a $\phi : A^{**} \rightarrow \mathbb{C}$ en una función $\psi(\phi) : A \rightarrow \mathbb{C}$, la cual por definición es un elemento de $L^2(A)$.

Proposición 4.2. ψ es un isomorfismo.

Demostración. Primero, como se ha demostrado que la transformada de Fourier es un isomorfismo, sigue que $L^2(A)$ y $L^2(A^{**})$ son del mismo tamaño, de modo que para demostrar que ψ es isomorfa solo es necesario demostrar que el núcleo de ψ es igual a la función identidad.

Esto es sencillo, únicamente se debe notar que Θ es un isomorfismo que le asigna a cada $a \in A$ un carácter Θ_a distinto, indicando que si $\phi(\Theta_a) = 0$ para todo a , entonces ϕ es la función que le asigna 0 a todos los caracteres, por lo que $\ker \psi = \{0\}$. \square

A partir de este resultado se comprueba que este método para generar a $F_A^{-1} = (\psi \circ F_{A^*})$ es un isomorfismo, ya que es la composición de dos isomorfismos.

La existencia de ψ permite tratar a A y su doble dual como conjuntos completamente isomorfos para el fin de la transformada de Fourier, lo cual también aplica para el doble dual de A^* .

En el dominio de las transformadas de Fourier, esta relación entre A y A^* se conoce como *dualidad*, lo cual se puede ver en los ejemplos dados para grupos abelianos en la sección 2.1, especialmente con el dual de \mathbb{Z} y U , ya que estos son duales entre si, donde esta relación se da aunque la teoría desarrollada en este texto no permita realizar la transformada de Fourier en estos grupos.

Finalmente, se obtendrá la fórmula de la transformada inversa a partir de esta composición, sea $\alpha \in L^2(A^*)$ y $c^{**} \in A^{**}$ el carácter cuyo coeficiente de Fourier se va a obtener, entonces

$$F_{A^*}^{-1} = (\psi \circ F_{A^*})(\alpha)(c^{**}) = \psi \left(\frac{1}{N} \sum_{a^* \in A^*} \alpha(a^*) \overline{\langle a^*, c^{**} \rangle} \right) \quad (4.6)$$

Como ψ es lineal, para todo $a \in A$ esto es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{a^* \in A^*} \alpha(a^*) \cdot \psi(\overline{\langle a^*, c^{**} \rangle}) &= \frac{1}{N} \sum_{a^* \in A^*} \alpha(a^*) \cdot \psi(\overline{c^{**}(a^*)})(a) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a^* \in A^*} \alpha(a^*) \cdot \overline{\langle \Theta_a(a^*) \rangle} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a^* \in A^*} \alpha(a^*) \cdot \langle a, a^* \rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Se clarificarán algunas propiedades de la transformada de Fourier inversa. Primero, la notación de la transformada de Fourier inversa usualmente es $F_{A^*} : L^2(A^*) \rightarrow L^2(A)$, ya que la composición de isometrías que permite realizar esta operación es un detalle técnico de la dualidad.

Además, es necesario tener en cuenta que diferentes fuentes suelen tratar con la constante $1/N$ de la transformada de manera distinta, poniéndola en la transformada estándar, en la transformada inversa o en ciertos casos ignorándola completamente. En este texto se pondrá a $1/N$ en la ecuación de la transformada de Fourier estándar e inversa.

Por ende, la fórmula de la transformada de Fourier inversa $F_A^{-1} = (\psi \circ F_{A^*})$, denotada por $F_{A^*} : L^2(A^*) \rightarrow L^2(A)$ es

$$F_{A^*} \alpha_f(a) = f(a) = \frac{1}{N} \sum_{a^* \in A^*} \alpha_f(a^*) \langle a, a^* \rangle. \quad (4.8)$$

Teorema 4.1. F_{A^*} es el inverso de F_A , es decir, que para una función $f \in L^2(A)$, entonces

$$(F_{A^*} \circ F_A)f(a) = \frac{1}{N} f(a), \quad a \in A \quad (4.9)$$

Demostración. Sea $a \in A$

$$\begin{aligned} (F_{A^*} \circ F_A)f(a) &= F_{A^*}(F_A f(a)) = \frac{1}{N} \sum_{a^* \in A^*} ((F_A f(a))(a^*)) \langle a, a^* \rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a^* \in A^*} \left(\frac{1}{N} \sum_{c \in A} f(c) \overline{\langle c, a^* \rangle} \right) \langle a, a^* \rangle \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{c \in A} \sum_{a^* \in A^*} f(c) \overline{\langle c, a^* \rangle} \langle a, a^* \rangle \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{c \in A} f(c) \sum_{a^* \in A^*} \overline{\langle c - a, a^* \rangle} \end{aligned}$$

Por la proposición 2.2 la suma interior se cancela a menos que $a = c$, luego, la ecuación anterior es igual a

$$\frac{1}{N^2} f(a) \sum_{a^* \in A^*} \overline{\langle a - a, a^* \rangle} = \frac{1}{N^2} f(a) \cdot N = \frac{1}{N} f(a)$$

□

Para entender el funcionamiento de la transformada inversa, véase a la transformada de Fourier como un proceso que toma una función $f \in L^2(A)$ y retorna la función $\alpha_f \in L^2(A^*)$ que contiene los coeficientes de Fourier de f . Similarmente, la transformada inversa toma como argumento una función de coeficientes de Fourier $\alpha_f \in L^2(A^*)$ y retorna una función $f \in L^2(A)$.

5 Operaciones sobre la transformada de Fourier

Habiendo definido la transformada de Fourier sobre grupos abelianos finitos, se presentarán algunas operaciones que interactúan con la transformada de Fourier.

5.1 Traslación, multiplicación y convolución

Definición 5.1 (Traslación). Dado un $x \in A$ fijo, el operador $S_x : L^2(A) \rightarrow L^2(A)$ de traslación se define como

$$S_x f = f(a - x), \quad a \in A, \quad f \in L^2(A) \quad (5.1)$$

Este operador se conoce como la *traslación*, desplazando los puntos en los cuales se obtienen los valores de funciones $f \in L^2(A)$ sin alterar el resultado de estas.

Proposición 5.1. S_x es lineal

Demostración. Sean $c, d \in \mathbb{R}, f, g \in L^2(A)$

$$\begin{aligned} S_x(cf + dg)(a) &= (cf + dg)(a - x) \\ &= cf(a - x) + dg(a - x) = c \cdot S_x f(a) + d \cdot S_x g(a) \end{aligned} \quad (5.2)$$

□

Proposición 5.2. S_x es un operador isométrico.

Demostración. Para esta prueba se utilizará el producto interno, sean $f, g \in L^2(A)$, entonces

$$(S_x f, S_x g) = \sum_{a \in A} f(a - x) \overline{g(a - x)} = \sum_{a \in A} f(a) \overline{g(a)} = (f, g)$$

□

Definición 5.2 (Operador de multiplicación). El operador de multiplicación $M_{x^*} : L^2(A) \rightarrow L^2(A)$, definido para un $x^* \in A^*$ es

$$M_{x^*} f(a) = \langle a, x^* \rangle f(a), \quad a \in A \quad (5.3)$$

Este operador fija un carácter y multiplica el valor de la función f en un punto a por el resultado obtenido al evaluar el carácter $\langle a, x^* \rangle$, por lo que se puede ver como una multiplicación de f por el carácter x^* .

Proposición 5.3. M_{x^*} es un operador lineal

Demostración. Sean $c, d \in \mathbb{R}, f, g \in L^2(A)$

$$\begin{aligned} M_{x^*}(cf + dg)(a) &= \langle a, x^* \rangle (cf + dg)(a) \\ &= \langle a, x^* \rangle \cdot cf(a) + \langle a, x^* \rangle \cdot dg(a) \\ &= c \cdot M_{x^*} f(a) + d \cdot M_{x^*} g(a) \end{aligned}$$

□

Proposición 5.4. M_{x^*} es un operador isométrico.

Demostración. Sean $f, g \in L^2(A)$, entonces

$$\begin{aligned} (M_{x^*}f, M_{x^*}g) &= \sum_{a \in A} (\langle a, x^* \rangle f(a)) \cdot \overline{(\langle a, x^* \rangle g(a))} \\ &= \sum_{a \in A} \langle a, x^* \rangle \overline{\langle a, x^* \rangle} f(a)g(a) = \sum_{a \in A} f(a)g(a) = (f, g) \end{aligned}$$

□

Los operadores de traslación y multiplicación no conmutan, no obstante, es posible encontrar una relación entre estos que permite desplazar su orden. Para cualquier elemento $x \in A$ y carácter $y^* \in A^*$, siendo $f \in L^2(A)$ una función arbitraria, si se realiza una traslación seguida por el operador de multiplicación se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} M_{y^*}S_x f(a) &= M_{y^*}(S_x f(a)) = M_{y^*}f(a-x) \\ &= \langle a-x, y^* \rangle f(a-x) = \langle a, y^* \rangle \overline{\langle x, y^* \rangle} f(a-x) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Por otro lado, si se invierte el orden de los operadores se obtiene que

$$\begin{aligned} S_x M_{y^*} f(a) &= S_x(M_{y^*} f(a)) = S_x(\langle a, y^* \rangle f(a)) \\ &= \langle a, y^* \rangle S_x(f(a)) = \langle a, y^* \rangle f(a-x) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Por lo tanto, aunque estos operadores no conmuten, al igualar la ecuación 5.4 y 5.5, se obtiene la siguiente relación

$$M_{y^*}S_x = \overline{\langle x, y^* \rangle} S_x M_{y^*}. \quad (5.6)$$

La versión dual de estos operadores opera sobre las funciones en el espacio dual, tal que para $f \in L^2(A^*)$, $x^* \in A^*$, la traslación dual $S_{x^*} : L^2(A^*) \rightarrow L^2(A^*)$ es

$$S_{x^*} f(a^*) = f(a^* - x^*), \quad a^* \in A^*. \quad (5.7)$$

Asimismo, para cada $x \in A$ existe el operador de multiplicación dual $M_x : L^2(A^*) \rightarrow L^2(A^*)$, definido por

$$M_x f(a^*) = \overline{\langle x, a^* \rangle} f(a^*), \quad a^* \in A^*. \quad (5.8)$$

Proposición 5.5. Para todo $x \in A$, $x^* \in A^*$, la transformada de Fourier F_A cumple

$$F_A S_x = M_x F_A \quad (5.9)$$

$$S_{x^*} F_A = F_A M_{x^*} \quad (5.10)$$

Demostración. Primero, para $f \in L^2(A)$ y $a^* \in A$ se cumple que

$$\begin{aligned} (F_A S_x) f(a) &= \frac{1}{N} \sum_{a \in A} (S_x f(a)) \overline{\langle a, a^* \rangle} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a-x) \cdot \overline{\langle a, a^* \rangle} \end{aligned}$$

Se puede ver a $f(a-x)$ como un desplazamiento de la acción del carácter a^* de forma $\overline{\langle a+x, a^* \rangle}$, por lo que esa ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a) \overline{\langle a+x, a^* \rangle} &= \overline{\langle x, a^* \rangle} \cdot \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a) \overline{\langle a, a^* \rangle} \\ &= \overline{\langle x, a^* \rangle} F_A f(a^*) = M_x(F_A f(a^*)). \end{aligned}$$

Similarmente, para los operadores definidos sobre $x^* \in A^*$

$$\begin{aligned} (S_{x^*} F_A) f(a) &= S_{x^*}(F_A f(a)) = \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a) \overline{\langle a, a^* \cdot x^* \rangle} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a \in A} f(a) \overline{\langle a, a^* \rangle} \cdot \overline{\langle a, x^* \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{a \in A} \langle a, x^* \rangle f(a) \overline{\langle a, a^* \rangle} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a \in A} (M_{x^*} f(a)) \overline{\langle a, a^* \rangle} = F_A(M_{x^*} f(a)). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.1. Como se está trabajando sobre un espacio de Hilbert es posible escribir estos operadores de forma matricial, permitiendo diagonalizar al operador M_x , en particular, esta capacidad de ser diagonalizable y la utilidad de esto es aquella que le da al operador de multiplicación M_x su nombre.

$$F_A S_x = M_x F_A \rightarrow F_A S_x F_A^{-1} = F_A S_x F_{A^*} = M_x \quad (5.11)$$

Definición 5.3 (Operador de convolución). Dado $g \in L^2(A)$, se define el operador $T_g : L^2(A) \rightarrow L^2(A)$, donde

$$T_g(f) = \sum_{x \in A} g(x) S_x(f), \quad f \in L^2(A) \quad (5.12)$$

Una propiedad de la transformada de Fourier sobre grupos es su interacción con la convolución, de modo que sean $f, g \in L^2(A)$, la convolución de sus transformada de Fourier es equivalente a la transformada de Fourier de su multiplicación.

Teorema 5.1. Para dos funciones $f, g \in L^2(A)$, la transformada de Fourier de su convolución es igual al producto de las transformadas de Fourier de f y g . Esto se expresa de forma

$$F_A(T_g f) = (F_A \circ T_g) f = (F_A g)(F_A f) \quad (5.13)$$

Demostración. Sea $a^* \in A^*$

$$\begin{aligned} (F_A T_g) f(a^*) &= F_A(T_g f(a^*)) = F_A \sum_{x \in A} g(x) S_x f(a^*) \\ &= \sum_{x \in A} g(x) F_A S_x f(a^*) = \sum_{x \in A} g(x) M_x F_A f(a^*) \\ &= \sum_{a \in A} g(x) \overline{\langle x, a^* \rangle} \cdot F_A f(a^*) = (F_A g(a^*)) (F_A f(a^*)) \end{aligned}$$

□

5.2 Formula de suma de Poisson

Aparte de esos operadores, también se puede examinar la periodización, que permite convertir a toda función en una función periódica.

Definición 5.4 (Periodicidad). Sea A un grupo abeliano y finito de orden N , y sea B un subgrupo de A de orden M , una función $f \in L^2(A)$ se llama B -periódica si para todo $a \in A$ y todo b en el subgrupo B se cumple que

$$f(a+b) = f(a) \quad (5.14)$$

Definición 5.5 (Dual de un subgrupo). Sea A un grupo abeliano finito con dual A^* y B un subgrupo de A , el dual de B , denotado por B_* , es el subgrupo de A^* compuesto de los caracteres que cumplen la siguiente propiedad

$$B_* = \{a^* \in A^* : \langle b, a^* \rangle = 1, \forall b \in B\} \quad (5.15)$$

Es decir, B_* esta compuesto de los caracteres que actúan de forma neutral sobre todos los elementos del subgrupo B .

Definición 5.6 (Diezmado de un dual). Sea $f \in L^2(A)$ una función y $\alpha_f \in L^2(A^*)$ la función que contiene los coeficientes de Fourier de f , α_f se denomina B_* -diezmado si para todo $y \in B_*$, entonces $\alpha_f(y^*) = 0$, indicando que se están neutralizando los caracteres que se encuentran en B_* .

Un conjunto B_* -diezmado interactúa con la evaluación de los caracteres, tal que, para todo $a \in A$, $b \in B$ y $y \in B_*$, entonces

$$\langle a + b, y^* \rangle = \langle a, y^* \rangle \quad (5.16)$$

Existe una relación entre las funciones que son B -periódicas y que sus coeficientes de Fourier sean B_* -diezmados, la cual se puede formalizar.

Proposición 5.6. Sea $f \in L^2(A)$ y $\alpha_f \in L^2(A^*)$, f es B -periódica sii α_f es B_* -diezmado.

Demostración. Sea f una función B -periódica y $x^* \in A^*$, como $f \in L^2(A)$ se puede realizar su expansión de Fourier, que en conjunto con la periodicidad resulta en

$$\begin{aligned} f(a) &= \sum_{x^* \in A^*} \alpha(x^*) \cdot \langle a, x^* \rangle \\ &= f(a + b) = \sum_{x^* \in A^*} \alpha(x^*) \cdot \langle a + b, x^* \rangle \\ &= \sum_{x^* \in A^*} \alpha(x^*) \cdot \langle a, x^* \rangle \langle b, x^* \rangle \end{aligned}$$

Como la imagen de todo carácter $\langle b, x^* \rangle$ es distinta de 0, entonces

$$\alpha(x^*) = \alpha(x^*) \langle b, x^* \rangle$$

Esto solo se cumple si para todo $b \in B$, $\langle b, x^* \rangle = 1$. Comprobando ambos lados del si y solo si por la definición de B_* -diezmada. \square

Proposición 5.7. Sea A un grupo y B un subgrupo de este, existe un isomorfismo entre el dual de B y el grupo dual de A/B . Este isomorfismo le asigna un carácter único de A/B a cada elemento en B_* , y es definido por $\mu : B_* \rightarrow (A/B)^*$, el cual mapea los elementos $\chi^* \in B_*$ de forma

$$\mu(\chi^*) = \langle a + b, \mu(\chi^*) \rangle = \langle a, \chi^* \rangle, \quad a \in A, b \in B \quad (5.17)$$

Demostración. Primero, se obtendrá el núcleo de μ , nótese que si para algún $y^* \in B_*$, $\mu(y^*)$ es 1^* , entonces para todo $a \in A$ y $b \in B$

$$1 = \langle a + b, y^* \rangle = \langle a, y^* \rangle \langle b, y^* \rangle = \langle a, y^* \rangle \quad (5.18)$$

Esto significa que el núcleo de μ es únicamente el carácter 1^* , ya que de lo contrario existiría un $a \in A$ donde $\langle a, y^* \rangle \neq 1$. A partir de esto, como los caracteres son homomorfismos, para demostrar que μ es un isomorfismo solo es necesario mostrar que μ es inyectivo.

Se mostrara esta inyectividad a través de una composición de homomorfismos de grupos, primero, véase que existe un homomorfismo $\Psi : A \rightarrow (A/B)$ que mapea elementos en A a A/B .

En segundo lugar, sea $y^* \in B_*$, se realiza una composición $\mu = y^* \circ \Psi : A \rightarrow A/B \rightarrow U$, la cual genera un carácter, ya que $y^* \circ \Psi \in A^*$ le asigna un elemento en el círculo unitario a cada $a \in A$.

Luego, al realizar calcular el resultado proveniente de hacer la acción del carácter $y^* \circ \Psi$ sobre cualquier $b \in B$, como y^* es un carácter B_* -diezmado, entonces

$$(y^* \circ \Psi)(b) = y^*(\Psi(b)) = \langle b, y^* \rangle = 1. \quad (5.19)$$

Entonces, el carácter dado por $(y^* \circ \Psi)$ también es B_* -diezmado y se encuentra en B_* . Finalmente, como $\mu = (c^* \circ \Psi)$ fue definido de forma que para todo carácter $y^* \in B_*$, μ le asigna un carácter en $(A/B)^*$, μ es inyectivo y en virtud de ello, isomorfo. \square

Definición 5.7 (Periodización). Sea A un grupo abeliano finito y B un subgrupo de A , para una función $f \in L^2(A)$ se define a la periodización de esta función como

$$\text{Per}_B f(a) = \sum_{x \in B} f(a+x), \quad a \in A \quad (5.20)$$

La función $\text{Per}_B f(a) \in L^2(A)$ se llama la *periodización de f sobre B* , definida de tal forma que esta vuelve a la función f B -periódica.

Proposición 5.8. Sea A un grupo y B un subgrupo de este, entonces para todo $x^* \in A^*$

$$\sum_{b \in B_*} \langle b, x^* \rangle = \begin{cases} |B|, & \text{si } x^* \in B_* \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Véase que por el isomorfismo dado en 5.7, el dual doble $B_{**} = (B_*)_* \subset A$.

Tomando los caracteres $b^* \in B_*$ que están en el dual, estos actuarán de forma neutral sobre los elementos de B , tal que para todo $b \in B$, se tendrá que $\langle b, b^* \rangle = 1$. Esto significa que se realiza la suma $|B|$ veces, dando el resultado en el caso $x^* \in B_*$.

En cambio, en el caso $x^* \notin B_*$, existe una situación análoga al teorema 2.2, dado que B es un subconjunto de A , por lo que contiene las M raíces de la unidad, las cuales se cancelan al sumarse sobre caracteres que no se neutralizan en esos elementos. \square

A partir de lo anterior, es posible definir la fórmula de la suma de Poisson, esta fórmula demuestra la relación entre la periodización de una función $f \in L(A)$ y su expansión de Fourier.

Teorema 5.2 (Formula de la suma de Poisson). Sea A un grupo y B un subgrupo de orden M , la expansión de Fourier de f sobre B_* es

$$\text{Per}_B f = M \sum_{b^* \in B_*} \alpha_f(b^*) \cdot b^*. \quad (5.21)$$

Demostración. Para un $a \in A$

$$\begin{aligned} \text{Per}_B f(a) &= \text{Per}_B \sum_{x^* \in A^*} \alpha(x^*) \langle a, x^* \rangle = \sum_{y \in B} \sum_{x^* \in A^*} \alpha(x^*) \langle a+y, x^* \rangle \\ &= \sum_{y \in B} \sum_{x^* \in A^*} \alpha(x^*) \langle a, x^* \rangle \langle y, x^* \rangle = \sum_{x^* \in A^*} \alpha(x^*) \langle a, x^* \rangle \sum_{y \in B} \langle y, x^* \rangle \end{aligned}$$

La proposición 5.8 indica que la suma interior se cancela si un carácter $x^* \notin B_*$. Además, por esta misma proposición la suma de los caracteres $x^* \in B_*$ es igual a M , tal que

$$\sum_{x^* \in A^*} \alpha(x^*) \langle a, x^* \rangle \sum_{y \in B_*} \langle y, x^* \rangle = M \sum_{x^* \in A^*} \alpha(x^*) \langle a, x^* \rangle.$$

\square

Ejemplo 5.2. Nótese que la función $f : \mathbb{Z}_{16} \rightarrow \mathbb{R}$ que se da en el ejemplo 3.1 es $B = \langle 8 \rangle$ periódica, por ello, se puede utilizar la fórmula de la suma de Poisson para generar a f a partir de la expansión de los caracteres en B_* de la siguiente forma

$$f = \text{Per}_B f = M \sum_{b^* \in B_*} \alpha_f(b^*) \cdot b^* \quad (5.22)$$

Para encontrar los caracteres que pertenecen a B_* , es necesario calcular cuales son los caracteres que actúan de manera neutra en $B = \langle 8 \rangle = \{0, 8\}$. Este es un procedimiento sencillo, donde solo es necesario encontrar los χ_c^* tal que $\langle 8, \chi_c^* \rangle = 1$, ya que todos los caracteres actúan de manera neutra sobre 0. Para esto se utilizara la formula de los caracteres, donde un $\chi_c^* \in B_*$ si

$$\exp\left(-\frac{2\pi i \cdot 8 \cdot c}{16}\right) = \exp(-i\pi \cdot c) = 1, \quad c \in \mathbb{Z}_{16} \quad (5.23)$$

Es aparente que esto solo se cumple para los c múltiplos de 2, es decir, para realizar la expansión de Fourier de f usando la formula de la suma de Poisson, solo son necesarios los coeficientes de Fourier de

$$B_* = \{\chi_0^*, \chi_2^*, \chi_4^*, \chi_6^*, \chi_8^*, \chi_{10}^*, \chi_{12}^*, \chi_{14}^*\}. \quad (5.24)$$

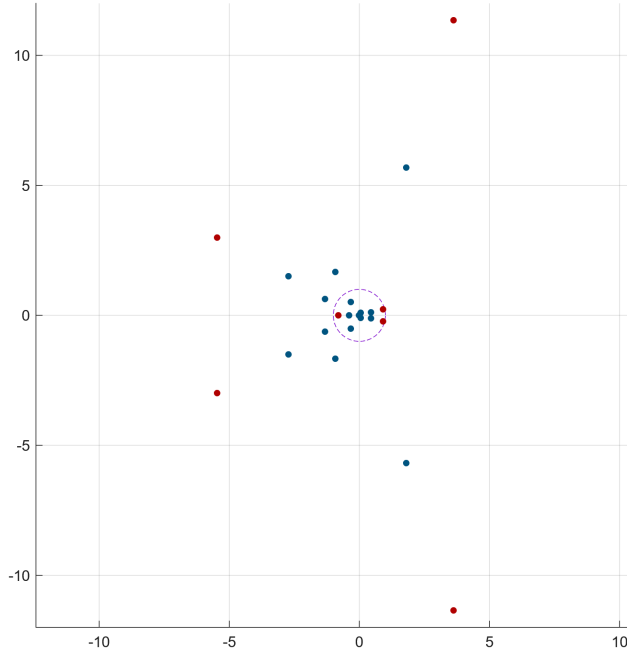


Figura 6: La formula de la suma de Poisson permite realizar la expansión de Fourier de f usando solamente los $\alpha_f(y^*)$ donde $y^* \in B_*$ (En rojo), sin necesidad de conocer los coeficientes de Fourier de todos los caracteres (En azul)

6 Conclusión

A través de este texto se desarrolló la teoría necesaria para realizar la transformada de Fourier sobre los grupos abelianos y finitos, donde se demostró que esta transformada replica las propiedades de la transformada de Fourier estándar sobre los números reales, como su linealidad, invertibilidad y capacidad de simplificar los cálculos de convoluciones, entre otras.

Sin embargo, esto no significa que únicamente se pueda realizar la transformada de Fourier sobre los grupos abelianos y finitos, ya que esta se puede generalizar a todo grupo abeliano localmente compacto, a través de la teoría de la dualidad de Pontryagin, la cual se realiza en textos como [7].

Agradecimientos

Agradezco a David Andrade y a Cristian Martínez por todo lo que aportaron al desarrollo de este texto, además de las experiencias y aprendizajes que conllevo la realización de este debido a su apoyo.

Referencias

- [1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3er. McGraw-Hill Education, ene. de 1979, ISBN: 0-07-000657-1.
- [2] W. E. Boyc, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 9^a. John Wiley y Sons, mar. de 2009, ISBN: 0-470-50981-3.
- [3] K. Conrad, *Characters of finite abelian groups*. dirección: <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/charthy.pdf>.
- [4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2.^a ed. Springer New York, 2007, ISBN: 978-1-4757-4383-8.
- [5] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, 2.^a ed. Chapman y Hall, 2015, ISBN: 978-0-429-15469-0.
- [6] C. C. Pinter, *A Book of Abstract Algebra*, 2.^a ed. Dover Publications, ene. de 2010, ISBN: 0-486-47417-8.
- [7] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*. Wiley-Interscience, ene. de 1990, ISBN: 978-0-470-74481-9.
- [8] R. Tolimieri y M. An, “Group Filters and Image Processing”, en *Computational noncommutative algebra and applications*, 1.^a ed. Springer Dordrecht, 2004, págs. 255-308, ISBN: 1-4020-2307-3.
- [9] R. Tolimieri y M. An, *Time-Frequency Representations*, 1.^a ed. Birkhäuser Boston, 1997, ISBN: 978-1-4612-8676-9.