

**TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAGISTER
EN ECONOMÍA**

**ESTRATEGIAS ÓPTIMAS DE INVERSIÓN Y
CONSUMO EN UN MERCADO CON SALTOS
ALTERNADOS DEPENDIENTES DE LOS TIEMPOS
INTER-ARRIBO**

DIRIGIDO POR : RAFAEL SERRANO

ANDRÉS FELIPE CÁRDENAS TORRES

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

FACULTAD DE ECONOMÍA

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

BOGOTÁ

2019

Abstract

In this paper we study optimal investment strategies that maximize expected utility from consumption and terminal wealth in a pure-jump market model where the dynamics of asset prices follow a switching process and the size of the jump and the trend are dependent on the waiting time between jumps, in addition, the trend is dependent on a dichotomous chain with values in the inter-arrival times. We show that the counting process associated to the arrival times has as compensator a Hazard function that is dependent on the inter-arrival times. This implies that the conditional expected value of the process solves a coupled system of Volterra equations of second kind. As an application, the GOP (growth-optimal portfolio) case is considered, where the Volterra system is solved by means of numerical methods in the particular cases in which the inter-arrival times are distributed as hyperexponential and Weibull.

Resumen

En este documento se estudian estrategias de inversión óptimas que maximizan el valor esperado de la utilidad del consumo y valor de portafolio terminal en un modelo de mercado de saltos puros donde la dinámica del activo riesgoso sigue un proceso telegráfico y el tamaño y la tendencia son dependientes de los tiempos de espera o tiempos inter-arribo, además, la tendencia depende de una cadena dicotómica con valores en los tiempos inter-arribo. Se muestra que el proceso de conteo asociado tiene como compensador a la función Hazard que a su vez depende de los tiempos inter-arribo. Esto implica que el valor esperado condicional resuelve un sistema de ecuaciones acopladas de Volterra de segundo tipo. Como una aplicación se considera el portafolio de crecimiento óptimo, donde el sistema de Volterra se resuelve por medio de métodos numéricos en los casos particulares en los que los tiempos inter-arribo se distribuyen hiperexponencial y Weibull.

Palabras clave: Tiempos inter-arribo, Ecuaciones de Volterra de segundo tipo, proceso telegráfico generalizado, procesos no Markovianos.

1 Introducción

En el siguiente trabajo se pretende modelar un inversionista el cual tiene como objetivo encontrar estrategias de inversión óptimas que maximizan la utilidad esperada de consumo y la riqueza final en un modelo de mercado de saltos puros en el que la dinámica de los precios del activo riesgoso se rige por un proceso telegráfico con saltos, donde el tamaño del salto y la tendencia dependen del tiempo de espera entre los saltos, y a su vez, dependen de una cadena dicotómica con valores en los tiempos entre llegadas.

En el trabajo de Scaillet, Treccani y Trevisan [24] se analizó el mercado de moneda electrónica (Bitcoin) haciendo un estudio empírico usando los datos de nivel de transacción para la Mt. Gox¹ en el período de junio 26 de 2011 a noviembre 29 de 2013, con datos de alta frecuencia. Los autores prueban la presencia de saltos en un modelo continuo en el que el log-retorno sigue un movimiento Browniano.

¹Mt. Gox fue una de las principales páginas de intercambio de Bitcoins en los años 2011-2014.

Además, testearon las suposiciones usuales en un modelo con saltos, es decir la suposición de distribución exponencial en los tiempos de espera entre saltos “tiempos inter-arribo” y la independencia de estos con la distribución de los saltos, rechazando fuertemente ambas suposiciones.

Lo anterior hace evidente la importancia de considerar modelos en los que estos dos supuestos no se tengan y así poder aproximarse a los hechos estilizados.

Haciendo uso del método de martingalas² y la técnica de dualidad convexa, ver por ejemplo Karatzas y Shreve [12], para la maximización de la utilidad, se pretende encontrar el portafolio de crecimiento óptimo en este mercado, tomando como ejemplo a un inversionista con preferencias logarítmicas. Además, caracterizar el valor esperado de la función de utilidad por medio de un sistema de ecuaciones integrales acopladas de Volterra de segundo tipo, lo cual llevaría a conocer el valor esperado del capital de reserva de una compañía aseguradora para el segundo modelo.

El estudio acerca del portafolio que maximiza la tasa de crecimiento, growth optimal portfolio (GOP) por sus siglas en inglés, fue estudiado por primera vez en el documento de Kelly [14], el estudio surge como una aplicación a la teoría de la información, donde se muestra una estrategia de apuesta óptima con un pago superior a otro tipo de estrategias. En el caso de un inversionista con preferencias representadas por una función de utilidad logarítmica se tiene una aplicación a GOP en la teoría de la utilidad. Esto se trata con el enfoque discreto en los trabajos de Bellman y Kalaba [1], Elton y Gruber [8], y Maier, Peterson y Vander [19]. El problema en tiempo continuo es resuelto en el trabajo de Merton [20], el cual tiene una gran relevancia que lo ha llevado a ser motivo de múltiples estudios. El presente documento está relacionado con el anterior, dado que el enfoque se sitúa en lo continuo. En el documento de López y Serrano [18] se encuentra el problema del inversionista, cuando existen diferentes estados de la naturaleza, con consumo. Los autores modelan un inversionista que decide en un portafolio cuya base son dos activos: un activo riesgoso con dinámica de precios de tipo telegráfico con saltos e independientes de los tiempos inter-arribo y otro sin riesgo. La técnica utilizada es el método de martingalas, enfoque que se utilizará en este documento con diferencia que en el activo riesgoso se modela por un proceso telegráfico generalizado.

Otra forma de abordar el problema de inversión óptima es el enfoque de programación dinámica, como puede verse (entre otros), el trabajo de Fei [9], Capponi y Figueroa [3], donde se modela el precio del activo riesgoso por medio de un proceso con difusión, o el enfoque de teoría de juegos abordado por Elliot y Siu [6], donde la solución es dada a través de un juego de suma cero entre el inversionista y el estado. Cabe resaltar que el siguiente trabajo se acerca más a el documento de Lopez y Serrano [18], a diferencia que se considera dependencia entre los parámetros del modelo y los tiempos inter-arribo, lo cual lleva a un modelo menos restringido que podría acercarse de una mejor manera a lo empírico. Además, dado que las distribuciones para los tiempos inter-arribo no se consideran necesariamente de tipo exponencial, el proceso no es Markoviano.

El proceso telegráfico generalizado, también conocido como Damped, fue expuesto por

²Se hace referencia a el método de martingalas a la técnica de replica del portafolio.

vez primera por Ratanov [21], como una generalización a el proceso telegráfico, ver por ejemplo Kolesnik y Ratanov [16], donde se considera dependencia entre los parámetros del proceso y los tiempos inter-arribo. En el trabajo de Ratanov [22] se considera que el log-retorno del precio se rige por medio de un proceso telegráfico generalizado donde se calcula el valor de una opción.

Haciendo uso del método de martingalas se encontró el portafolio de crecimiento óptimo. Además, se caracterizan los valores esperados de los procesos en cada modelo por medio de sistemas de ecuaciones integrales acopladas de Volterra de segundo tipo y se propone un método através de la transformada de Laplace para encontrar, bajo ciertas condiciones, soluciones de manera cerrada así como un método numérico para cuando no se cumplan tales condiciones.

A continuación se describe el contenido de este documento. En la Sección 2 se describe el modelo de mercado y se caracterizan la función generadora de momentos, los momentos y el valor esperado condicional mediante un sistema de ecuaciones de Volterra de segundo tipo. Se da una demostración explícita del compensador del proceso de conteo. En la Sección 3 se trata el problema de maximización de portafolio con consumo, tomando como ejemplo el portafolio de crecimiento óptimo, encontrando condiciones suficientes para la solución del problema. Se expone un algoritmo para la aproximación de la solución del sistema de ecuaciones de Volterra de segundo tipo. Se muestran ejemplos de diferentes tipos de distribuciones para los tiempos inter-arribo. En la Sección 4 se sintetiza el trabajo con los resultados relevantes.

2 Modelo de mercado

En esta sección se establece el modelo de mercado y la caracterización del valor esperado condicional a través de un sistema de ecuaciones integrales acopladas de Volterra de segundo tipo. También se expone el compensador para el proceso de conteo, los cuales se definirán más adelante.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio completo de probabilidad dotado con una filtración $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ y $T > 0$ fijo.

Sea $\varepsilon(\cdot) = \{\varepsilon(t)\}_{t \in [0, T]}$ un proceso \mathbf{F} -adaptado, continuo a derecha con valores en $\{0, 1\}$. Se denota por $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de puntos, estrictamente crecientes que representan los cambios de $\varepsilon(\cdot)$ donde $\tau_0 := 0$ y se definen los tiempos inter-arribo o tiempos de espera

$$T_n := \Delta\tau_n = \tau_n - \tau_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para cada $n = 1, 2, \dots$ se denota $\varepsilon_n := \varepsilon(\tau_n -) = \varepsilon(\tau_{n-1})$.

En adelante se asume que $\{T_n\}_{n \geq 1}$ son independientes y sus distribuciones alternan entre dos distribuciones F_0 y F_1 con soporte $[0, \infty)$.

De manera concreta, se asume que

$$F_i(t) = \mathbb{P}(T_n \leq t \mid \varepsilon(\tau_{n-1}) = i) \quad t > 0, \quad i \in \{0, 1\}.$$

Para cada $i \in \{0, 1\}$ se asocia su función de supervivencia

$$\bar{F}_i(t) := 1 - F_i(t), \quad t \geq 0$$

y la función Hazard

$$\Gamma_i(t) = -\ln \bar{F}_i(t), \quad t \geq 0.$$

Se asume que $F_i(t) < 1$ para todo t , por lo que $\Gamma_i(t)$ existe para todo t .

Se supone las funciones $\bar{F}_i(t)$ diferenciables, con derivada $\frac{d\bar{F}_i}{dt}(t) = -f_i(t)$, entonces las funciones Hazard $\Gamma_i(t)$ pueden ser escritas como

$$\Gamma_i(t) = \int_0^t \gamma_i(u) du$$

donde $f_i(t)$ son las funciones de densidad alternantes de los tiempos interarribo T_n y

$$\gamma_i(t) := \frac{f_i(t)}{\bar{F}_i(t)}, \quad t > 0.$$

Las funciones $\gamma_i(t)$ son conocidas como las funciones de riesgo. Dada la definición de $\gamma_i(t)$ se tiene que

$$\bar{F}_i = \exp\left(-\int_0^t \gamma_i(u) du\right) \quad \text{and} \quad f_i(t) = \gamma_i(t) \exp\left(-\int_0^t \gamma_i(u) du\right).$$

Nóte que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = \infty$, por lo que $\gamma_i(t)$ son funciones no negativas, Lebesgue integrables en cualquier intervalo acotado y cumplen la condición de no explosión

$$\int_0^\infty \gamma_i(u) du = +\infty, \quad i = 0, 1.$$

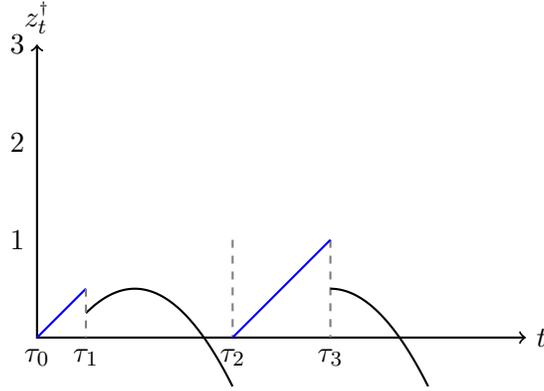
Siguiendo la notación usada en Di Crescenzo y Ratanov [5], para cada par de funciones medibles

$$z_0, z_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

se denota con z_t^\dagger a el proceso aleatorio, continuo a izquierda, determinístico a trozos, que resulta de combinar z_0 y z_1 de la siguiente forma

$$z_t^\dagger = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1}) \mathbf{1}_{\Delta_n}(t), \quad t > 0 \tag{2.1}$$

donde $\Delta_n := (\tau_{n-1}, \tau_n]$, $n \geq 1$. En la siguiente gráfica se muestra un ejemplo del proceso en el que $z_0(t) = t$ y $z_1(t) = -t^2 + \frac{1}{2}$.



Definición 2.1. Z_t se dice **F**-predecible si es un proceso adaptado continuo a izquierda.

Por definición si z_i son medibles entonces z_t^\dagger es un proceso **F**-predecible.

Sean $r_i : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $h_i : \mathbb{R} \rightarrow (-1, \infty)$, $i = \{0, 1\}$, funciones medibles, localmente acotadas, con $h_i(t) > -1$ para todo $t > 0$.

El mercado financiero consiste: una cuenta de mercado libre de riesgo con proceso de precios

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s^\dagger ds\right), \quad t \geq 0.$$

y un activo riesgoso con proceso de precios

$$S_t = S_0 \mathcal{E}_t(X + J)$$

donde $\mathcal{E}_t(\cdot)$ denota la exponencial de Doléans, la cual se define como la solución de la EDE dada por $dS_t = S_{t-} d(X_t + J_t)$, y $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ el proceso integral

$$X_t = \int_0^t \mu_s^\dagger ds, \quad t \geq 0,$$

$J = \{J_t\}_{t \geq 0}$ el proceso puro de saltos con saltos alternantes dependientes de los tiempos inter-arribo T_n ,

$$J_t = \sum_{\tau_n \leq t} h_{\varepsilon_n}(T_n), \quad t > 0, \quad J_0 = 0.$$

Sea $N_t := \max\{n \geq 0 : \tau_n \leq t\}$ el proceso de conteo asociado a los tiempos de cambio de $\varepsilon(\cdot)$.

Dado que $\varepsilon(\tau_{n-1}) = i$, se tiene que para $t \in \Delta_n(t)$

$$J_t = \int_0^t h_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1}) dN_s,$$

esta integral es respecto a el proceso de conteo.

Luego para todo t ,

$$\begin{aligned} J_t &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t h_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1}) \mathbf{1}_{\Delta_n}(t) dN_s \\ &= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} h_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1}) \mathbf{1}_{\Delta_n}(t) dN_s = \int_0^t h_s^\dagger dN_s, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

De manera alterna el proceso de precios en el modelo de mercado puede definirse como la solución de las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-}(\mu_t^\dagger dt + h_t^\dagger dN_t), \quad S_0 > 0 \\ dB_t &= B_t r_t^\dagger dt, \quad B_0 = 1. \end{aligned}$$

Como $h_i(t) > -1$, el proceso de precios S_t satisface

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s^\dagger ds\right) \prod_{n=1}^{N_t} (1 + h_{\varepsilon_n}(T_n)) \\ &= S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s^\dagger ds + \sum_{n=1}^{N_t} \ln(1 + h_{\varepsilon_n}(T_n))\right) \\ &= S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s^\dagger ds + \int_0^t \ln(1 + h_s^\dagger) dN_s\right), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Es decir, el log-retorno del precio del activo en el intervalo de tiempo $[0, t]$ es

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \int_0^t \mu_s^\dagger ds + \sum_{n=1}^{N_t} \ln(1 + h_{\varepsilon_n}(T_n)), \quad t \in [0, T].$$

En lo que sigue se considera $S_0 = 1$.

A continuación se analiza la función generadora de momentos, para caracterizar los valores esperados condicionales.

Teorema 2.2. *La función generadora de momentos condicional*

$$\chi_i(t, \zeta) := \mathbb{E}_i[\exp(\zeta(X_t + J_t))] = \mathbb{E}[\exp(\zeta(X_t + J_t)) | \varepsilon(0) = i]$$

de las variables aleatorias $X_t + J_t$ dado el estado inicial $\varepsilon(0) = i$ satisface el siguiente sistema de ecuaciones integrales

$$\chi_i(t, \zeta) = \bar{F}_i(t) \exp(\zeta l_i(t)) + \int_0^t \Lambda_i(s, \zeta) \chi_{1-i}(t - s, \zeta) ds, \quad (2.2)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \chi_i(t, \zeta)}{\partial \zeta} = & l_i^n(t) \exp(\zeta l_i(t)) \bar{F}_i(t) \\ & + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^t (l_i(s) + h_i(s))^{n-k} \Lambda(s, \zeta) \frac{\partial^k \chi_{i-1}(t, \zeta)}{\partial \zeta} ds \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde

$$\Lambda_i(t, \zeta) = f_i(t) \exp(\zeta(l_i(t) + h_i(t))) \quad y \quad l_i(t) = \int_0^t \mu_i(s) ds, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Demostración. Se define

$$p_i(t, x) := \frac{\mathbb{P}_i(X_t + J_t \in dx)}{dx},$$

condicionando a τ_1 se tiene que

$$p_i(t, x) = \delta(x - l_i(t)) \bar{F}_i(t) + \int_0^t p_{1-i}(t-s, x - l_i(s) - h_i(s)) f_i(s) ds, \quad (2.4)$$

donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac.

Por definición

$$\chi_i(t, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\zeta x) p_i(t, x) dx, \quad i = 0, 1.$$

Usando (2.4), se encuentra

$$\chi_i(t, \zeta) = \bar{F}_i(t) \exp(\zeta l_i(t)) + \int_0^t \exp(\zeta(l_i(s) + h_i(s))) f_i(s) \chi_{1-i}(t-s, \zeta) ds$$

siguiendo así (2.2).

Por otro lado,

$$\frac{\partial^n \chi_i(t, \zeta)}{\partial \zeta} = \frac{\partial^n \bar{F}_i(t) \exp(\zeta l_i(t))}{\partial \zeta} + \frac{\partial^n}{\partial \zeta} \int_0^t \Lambda_i(s, \zeta) \chi_{1-i}(t-s, \zeta) ds,$$

donde,

$$\frac{\partial^n \bar{F}_i(t) \exp(\zeta l_i(t))}{\partial \zeta} = l_i^n(t) \exp(\zeta l_i(t)) \bar{F}_i(t).$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^n}{\partial \zeta} \int_0^t \Lambda_i(s, \zeta) \chi_{1-i}(t-s, \zeta) ds \\
&= \int_0^t \frac{\partial^n}{\partial \zeta} \Lambda_i(s, \zeta) \chi_{1-i}(t-s, \zeta) ds \\
&= \int_0^t \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (l_i(s) + h_i(s))^{n-k} \Lambda(s, \zeta) \frac{\partial^k \chi_{i-1}(t, \zeta)}{\partial \zeta} ds \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^t (l_i(s) + h_i(s))^{n-k} \Lambda(s, \zeta) \frac{\partial^k \chi_{i-1}(t, \zeta)}{\partial \zeta} ds.
\end{aligned}$$

□

Colorario 2.1.

1. *Los momentos de orden n*

$$m_i^n(t) := \mathbb{E}_i[(X_t + J_t)^n] = \mathbb{E}[(X_t + J_t)^n | \varepsilon(0) = i]$$

de las variables aleatorias $X_t + J_t$ condicionales a el estado inicial $\varepsilon(0) = i$ satisface el siguiente sistema de ecuaciones integrales

$$m_i^n(t) = l_i^n(t) \bar{F}_i(t) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^t f_i(s) (l_i(s) + h_i(s))^{n-k} m_{1-i}^k(t-s) ds$$

2. *La esperanza condicional*

$$m_i(t) := \mathbb{E}_i[X_t + J_t] = \mathbb{E}[X_t + J_t | \varepsilon(0) = i]$$

de las variables aleatorias $X_t + J_t$ dado el estado inicial $\varepsilon(0) = i$ satisface el siguiente sistema de ecuaciones integrales

$$m_i(t) = a_i(t) + \int_0^t m_{1-i}(t-s) f_i(s) ds, \quad (2.5)$$

donde

$$a_i(t) = \int_0^t (\mu_i(s) \bar{F}_i(s) + h_i(s) f_i(s)) ds, \quad i \in \{0, 1\}.$$

Demostración. Haciendo $\zeta = 0$ en (2.3) se tiene 1. tomando $n = 1$ en 1. e integrando por partes

$$\int_0^t l_i(t) f_i(s) ds = -l_i(t) \bar{F}_i(t) + \int_0^t \mu_i(s) \bar{F}_i(s) ds$$

se obtiene 2.

□

Como las funciones a_i y f_i son continuas, el sistema tiene solución única, $m(t) = (m_0(t), m_1(t))$ en el intervalo $[0, T]$ para todo $T > 0$, ver p. ej. Teorema 3.11 en Linz [17].

Colorario 2.2. *El valor esperado condicional del proceso de log-retornos $\mathbb{E}_i[\ln S_t]$ satisface el sistema (2.5) con*

$$a_i(t) = \int_0^t (\mu_i(s)\bar{F}_i(s) + f_i(s)(\ln(1 + h_i(s))))ds, \quad i = \{0, 1\}.$$

Usando operador de Laplace se puede encontrar una solución semi analítica para el sistema (2.5), como se verá en el siguiente Teorema. Sea $\psi(t)$ una función, se define la transformada de Laplace como $\mathcal{L}(\psi(x))(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi x}\psi(x)dx$. La anterior integral existe si $\psi(x)$ es de orden exponencial $\kappa \in \mathbb{R}$, es decir, si $t \rightarrow \infty$ existen $M, t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|\psi(x)| \leq Me^{\kappa t} \quad \forall t \geq t_0.$$

Teorema 2.3. *Si $\mathcal{L}(f_i)$, $\mathcal{L}(a_i)$ existen y $\mathcal{L}(f_i)\mathcal{L}(f_{1-i}) \neq 1$ para todo $i \in \{0, 1\}$, entonces el sistema (2.5) tiene como solución*

$$m_i = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathcal{L}(a_i) + \mathcal{L}(f_i)\mathcal{L}(a_{1-i})}{1 - \mathcal{L}(f_i)\mathcal{L}(f_{1-i})} \right]. \quad (2.6)$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{G}_i(t) = \int_0^t m_{1-i}(t-s)f_i(s)ds,$$

con $i \in \{1, 0\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{G}_i(t))(\xi) &= \int_0^\infty e^{-\xi t} \left(\int_0^t m_{1-i}(t-s)f_i(s)ds \right) dt \\ &= \int_0^\infty f_i(s) \left(\int_s^\infty e^{-\xi t} m_{1-i}(t-s)f_i(s)dt \right) ds \\ &= \int_0^\infty f_i(s) \left(\int_0^\infty e^{-\xi(u+s)} m_{1-i}(u)du \right) ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\xi s} f_i(s) \left(\int_0^\infty e^{-\xi u} m_{1-i}(u)du \right) ds \\ &= \mathcal{L}(f_i)(\xi)\mathcal{L}(m_{1-i})(\xi). \end{aligned}$$

Luego, al aplicar la transformada de Laplace a las funciones m_i y utilizando lo anterior se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m_0) &= \mathcal{L}(a_0) + \mathcal{L}(f_0)\mathcal{L}(m_1) \\ \mathcal{L}(m_1) &= \mathcal{L}(a_1) + \mathcal{L}(f_1)\mathcal{L}(m_0). \end{aligned}$$

Luego, resolviendo para $i = \{1, 0\}$

$$m_i = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathcal{L}(a_i) + \mathcal{L}(f_i)\mathcal{L}(a_{1-i})}{1 - \mathcal{L}(f_i)\mathcal{L}(f_{1-i})} \right].$$

□

Ejemplo 1.

Aplicando el Teorema 2.3 y Colorario 2.2 se puede obtener una forma cerrada para los valores esperados $m_i = \mathbb{E}_i(\ln S_t)$, cuando los tiempos inter-arribo se distribuyen hipereexponencial con parámetros dependientes de los valores de $\epsilon(\cdot)$, es decir

$$f_0(t) = \frac{1}{2}(2e^{-2t} + e^{-t}) \quad y \quad f_1(t) = \frac{1}{2}(3e^{-3t} + e^{-t}),$$

además, se supone que $\mu_i(t) = \alpha_i$ y $h_i(t) = e^{\beta_i t} - 1$, donde α_i, β_i son constantes, para $i = \{0, 1\}$.

Lo anterior implica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_0(\xi)) &= \frac{1}{\xi+2} + \frac{1}{2(\xi+1)}, & \mathcal{L}(f_1(\xi)) &= \frac{3}{2(\xi+3)} + \frac{1}{2(\xi+1)}, \\ \mathcal{L}(a_0(\xi)) &= \frac{\alpha_0 + \beta_0}{\xi} - \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2(\xi+2)} - \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2(\xi+1)}, & \mathcal{L}(a_1(\xi)) &= \frac{5\alpha_1 + \beta_1}{6\xi} - \frac{\alpha_1 + 3\beta_0}{3(\xi+3)} - \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2(\xi+1)}. \end{aligned}$$

Para los parámetros $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 1.5$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0.5$ y $T = 1$ año, se tiene,

$$\mathcal{L}(a_0)(\xi) = \frac{9}{4\xi} - \frac{1}{2(\xi+2)^2} - \frac{3}{4(\xi+2)} - \frac{1}{2(\xi+1)^2} - \frac{3}{2(\xi+1)} \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}(a_1)(\xi) = \frac{4}{3\xi} - \frac{1}{4(\xi+3)^2} - \frac{1}{3(\xi+3)} - \frac{1}{4(\xi+1)^2} - \frac{1}{\xi+1} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}(f_0)(\xi) = \frac{1}{\xi+2} + \frac{1}{2(\xi+1)} \quad y \quad \mathcal{L}(f_1)(\xi) = \frac{3}{2(\xi+3)} + \frac{1}{2(\xi+1)} \quad (2.9)$$

Al reemplazar las anteriores en (2.6),

$$\begin{aligned} m_0(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{8\xi^6 + 107\xi^5 + 572\xi^4 + 1555\xi^3 + 2272\xi^2 + 1704\xi + 516}{4\xi^8 + 52\xi^7 + 268\xi^6 + 702\xi^5 + 988\xi^4 + 710\xi^3 + 204\xi^2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2.52}{\xi^2} - \frac{0.45}{\xi} + \frac{0.5}{\xi+1} + \frac{0.5}{\xi+2} + \frac{0.166}{\xi+3} - \frac{1.779}{\xi+1.684} - \frac{0.131}{\xi+4.078} + \frac{0.477}{\xi+1.237} \right\} \end{aligned}$$

entonces,

$$m_0(t) = 2.52t + 0.2e^{-t} + 0.5e^{-2t} + 0.166e^{-3t} - 1.779e^{-1.684t} - 0.131e^{-4.078t} + 0.477e^{-1.237t} - 0.45. \quad (2.10)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
m_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3\xi^6 + 43\xi^5 + 241\xi^4 + 684\xi^3 + 1043\xi^2 + 816\xi + 258}{2\xi^8 + 26\xi^7 + 134\xi^6 + 351\xi^5 + 494\xi^4 + 355\xi^3 + 102\xi^2}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2.52}{\xi^2} - \frac{0.80}{\xi} + \frac{1}{\xi + 1} + \frac{0.5}{\xi + 2} - \frac{0.133}{\xi + 3} - \frac{0.728}{\xi + 1.684} + \frac{0.203}{\xi + 4.078} - \frac{0.602}{\xi + 1.237}\right\}
\end{aligned}$$

entonces,

$$m_1(t) = 2.52t + e^{-t} + 0.5e^{-2t} + 0.133e^{-3t} - 0.728e^{-1.684t} + 0.203e^{-4.078t} - 0.602e^{-1.237t} - 0.80. \quad (2.11)$$

Los valores esperados representados por las ecuaciones (2.10) y (2.11) pueden observarse en la Figura 1.

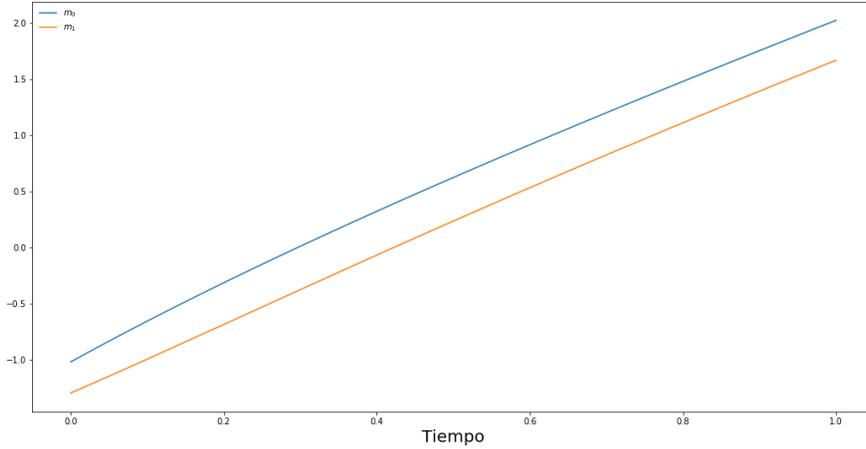


Figura 1

El ejemplo anterior nos muestra como en un ambiente donde la existencia de $\mathcal{L}(f_i)$ y $\mathcal{L}(a_i)$ y (2.6), implica soluciones cerradas para el sistema de ecuaciones integrales acopladas de Volterra de Segundo tipo. En una sección más adelante se expondrá un algoritmo para cuando alguna de las condiciones anteriores no se cumpla.

2.1 Martingala

A continuación se suministran algunas definiciones que nos ayudaran a comprender el Teorema 2.9, el cual muestra como es el compensador para el proceso de conteo, resultado principal de esta subsección y base para la solución al problema de crecimiento óptimo de portafolio.

Definición 2.4. Un proceso M_t adaptado a la filtración \mathbf{F} se dice martingala si para todo t , $\mathbb{E}|M_t| < \infty$, y para todo $0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \quad \text{casi seguro.}$$

Definición 2.5. Sea N_t un proceso adaptado. A_t es el único proceso predecible tal que $M_t = N_t - A_t$ es martingala.

El proceso A_t se conoce como compensador de N_t .

Definición 2.6. Se dice que un tiempo s es un tiempo de parada si para todo $t > 0$ el conjunto $\{s \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Lema 2.7. Sea $Z_t, t \geq 0$, tal que para todo tiempo de parada s , Z_s es integrable y $\mathbb{E}(Z_s) = \mathbb{E}(Z_0)$, entonces $Z_t, t \geq 0$ es una martingala.

Demostración. Una demostración de este Lema se encuentra p.ej. en Klebaner [15] Teorema 7.17. \square

Lema 2.8. Si s es un tiempo de parada entonces para cada n existe una variable aleatoria ξ_n la cual es \mathcal{F}_{τ_n} -medible tal que

$$s \wedge \tau_{n+1} = (\tau_n + \xi_n) \wedge \tau_{n+1} \quad \text{en} \quad \{\tau_n \leq s\}.$$

Demostración. Una demostración del anterior Lema puede encontrarse Karr [13] proposición 2-5. \square

El siguiente resultado nos indica como es el compensador para el proceso de conteo asociado a los tiempos inter-arribo.

Teorema 2.9. Sea N_t el proceso de conteo generado por la sucesión $\{\tau_n\}$ y $T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$, los tiempos inter-arribo, $T_0 = 0$. Sea $F_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t) = \mathbb{P}(T_n \leq t | \varepsilon(\tau_{n-1}))$. Entonces el compensador A_t de N_t dado $\varepsilon(0) = i$ es

$$A_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_{n-1}}^{t \wedge \tau_n} \frac{dF_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1})}{1 - F_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1})}.$$

Demostración. Note que dada la relación entre τ_n y $\varepsilon(\cdot)$, si se conoce el valor inicial $\varepsilon(\cdot)$ es también conocido $\varepsilon(\tau_n)$ y viceversa, es decir

$$\varepsilon(0) = i \quad \iff \quad \varepsilon(\tau_{n-1}) = \frac{1 + (-1)^{n+i}}{2}$$

donde $n \geq 1$.

Además, A_t es un proceso \mathcal{F}_t -medible, izquierdo-continuo y por tanto predecible. Se mostrará que $N_t - A_t$ es una martingala por lo que A_t sería el compensador de N_t .

Por Lemma 2.8 existen variables aleatorias ξ_{n-1} , $\mathcal{F}_{\tau_{n-1}}$ -medibles (casi seguramente constantes) tal que

$$\begin{aligned} \{s \geq \tau_n | \varepsilon(0) = i\} &= \{s \wedge \tau_n = \tau_n | \varepsilon(0) = i\} = \{(\tau_{n-1} + \xi_{n-1}) \wedge \tau_n = \tau_n | \varepsilon(0) = i\} \\ &= \{\tau_n \leq \tau_{n-1} + \xi_{n-1} | \varepsilon(0) = i\} \\ &= \{T_n = \tau_n - \tau_{n-1} \leq \xi_{n-1} | \varepsilon(0) = i\}. \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i N_s &= \mathbb{E}_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_n \leq s\}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(s \geq \tau_n | \varepsilon(0) = i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq \xi_{n-1} | \varepsilon(0) = i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\xi_{n-1}} dF_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\xi_{n-1}} \frac{\mathbb{P}(T_n \geq t | \varepsilon(0) = i)}{1 - F_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t^-)} dF_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_i \left(\int_0^{\xi_{n-1}} \frac{\mathbb{1}_{\{T_n \geq t\}}}{1 - F_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t^-)} dF_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_i \left(\int_0^{\xi_{n-1} \wedge T_n} \frac{dF_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t)}{1 - F_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t^-)} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_i \left(\int_{\tau_{n-1}}^{\xi_{n-1} + \tau_{n-1} \wedge \tau_n} \frac{dF_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1})}{1 - F_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t^- - \tau_{n-1})} \right) \\
&= \mathbb{E}_i \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_{n-1}}^{s \wedge \tau_n} \frac{dF_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1})}{1 - F_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t^- - \tau_{n-1})} \\
&= \mathbb{E}_i A_s.
\end{aligned}$$

Haciendo uso del Lema 2.7 se tiene que el proceso es martingala y por tanto el resultado. \square

Se puede reescribir el compensador de N_t en términos de la notación utilizada, es decir

$$A_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_{n-1}}^{t \wedge \tau_n} \frac{dF_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(s - \tau_{n-1})}{1 - F_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(s^- - \tau_{n-1})} = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(s - \tau_{n-1}) \mathbb{1}_{\Delta_n(s)} ds = \int_0^t \gamma_s^\dagger ds.$$

La anterior demostración es con base en el Teorema 9.6 de Klebaner [15].

3 Problema de optimización de portafolio con consumo

En lo que sigue se denotará por \tilde{N}_t el proceso de Poisson compensado $d\tilde{N}_t := dN_t - \gamma_t^\dagger dt$. Entonces S_t satisface

$$dS_t = S_{t-} [(\mu_t^\dagger + \gamma_t^\dagger h_t^\dagger) dt + h_t^\dagger d\tilde{N}_t], \quad S_0 > 0.$$

Por lo que la tasa media de retorno es $\mu_t^\dagger + \gamma_t^\dagger h_t^\dagger$.

Para un agente que desea invertir en los activos B_t y S_t , se denota π_t la fracción de capital invertido en el activo riesgoso S_t en el tiempo t , de tal forma que la fracción de portafolio invertido en la cuenta de dinero B_t es $1 - \pi_t$. Recuerde que un valor positivo para π_t hace referencia a una posición larga en el activo riesgoso, mientras que un valor negativo de π_t significa una posición corta.

Durante el intervalo de tiempo $[0, T]$, el inversionista decide consumir a una tasa instantánea denotada por c_t . Se considera la pareja inversión-consumo $(\pi, c) = \{(\pi_t, c_t)\}_{t \in [0, T]}$, \mathbb{F} -predecible, las cuales satisfacen la condición de integrabilidad

$$\int_0^T (\pi_t^2 + c_t) dt < +\infty, \text{ casi seguro.}$$

En adelante se consideran estrategias o parejas (π, c) que satisfacen la *condición de autofinanciamiento*, es decir, para una dotación inicial $x > 0$ y una dupla (π, c) , el portafolio V_t en el tiempo t del inversionista satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dV_{t-} = \pi_t \frac{V_{t-} dS_t}{S_{t-}} + (1 - \pi_t) \frac{V_{t-} dB_t}{B_t} - c_t dt$$

lo que implica,

$$\begin{aligned} dV_t &= (V_{t-} r_t^\dagger - c_t) dt + \pi_t V_{t-} \{(\mu_t^\dagger - r_t^\dagger) dt + h_t^\dagger dN_t\}, \\ V_0 &= x. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Se denota con $V^{x,\pi,c} = \{V_t^{x,\pi,c}\}_{t \in [0,T]}$ la solución a la ecuación (3.1). En particular si no existe consumo, esto es $c_t = 0$ para todo $t \in [0, T]$, la ecuación (3.1) es homogénea y su solución es dada por ³

$$\begin{aligned} V_t^{x,\pi,0} &= x \mathcal{E}_t \left(\int_0^\cdot [r_s^\dagger + \pi_s (\mu_s^\dagger - r_s^\dagger)] ds + \int_0^\cdot \pi_s h_s^\dagger dN_s \right) \\ &= x \exp \left(\int_0^t [\pi_s \mu_s^\dagger + (1 - \pi_s) r_s^\dagger] ds \right) \prod_{n=1}^{N_t} (1 + \pi_{\tau_n} h_{\varepsilon_n}(T_n)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dada la ecuación (3.2) se encuentra una expresión para el proceso de portafolio $V^{x,\pi,c}$ en términos de $V^{1,\pi,0} = \{V_t^{1,\pi,0}\}_{t \in [0,T]}$, con dotación inicial 1 y dupla inversión-consumo $(\pi, 0)$, como sigue: considere el proceso

$$\xi_t^{x,\pi,c} := x - \int_0^t \frac{c_s}{V_{s-}^{1,\pi,0}} ds, \quad t \in [0, T].$$

En forma diferencial, se tiene $V_{t-}^{1,\pi,0} d\xi_t^{x,\pi,c} = -c_t dt$. entonces

$$\begin{aligned} d \left(\xi_t^{x,\pi,c} V_t^{1,\pi,0} \right) &= \xi_t^{x,\pi,c} dV_t^{1,\pi,0} + V_{t-}^{1,\pi,0} d\xi_t^{x,\pi,c} \\ &= \xi_t^{x,\pi,c} V_{t-}^{1,\pi,0} ([r_t^\dagger + \pi_t (\mu_t^\dagger - r_t^\dagger)] dt + \pi_t h_t^\dagger dN_t) - c_t dt. \end{aligned}$$

Como $\xi_0^{x,\pi,c} V_0^{1,\pi,0} = x$, por unicidad de la solución a la ecuación (3.1), el proceso $V^{x,\pi,c}$ es una modificación de

$$\begin{aligned} \xi_t^{x,\pi,c} V_t^{1,\pi,0} &= \\ \left[x - \int_0^t \frac{c_s}{V_{s-}^{1,\pi,0}} ds \right] \exp \left(\int_0^t [\pi_s \mu_s^\dagger + (1 - \pi_s) r_s^\dagger] ds \right) \prod_{n=1}^{N_t} (1 + \pi_{\tau_n} h_{\varepsilon_n}(T_n)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

En particular, la dupla inversión-consumo (π, c) lleva a un valor de portafolio positivo en el tiempo $t \in [0, T]$, casi seguro, lo cual implica $\pi_t \in [0, 1]$ for all $t \in [0, T]$ y

³Para los detalles ver p.ej. Jeanblanc, Yor Marc and Chesney [11].

$$\int_0^t \frac{c_s}{V_{s-}^{1,\pi,0}} ds < x \quad \text{y} \quad \pi_{\tau_n} h_{\varepsilon_n}(T_n) > -1, \quad \forall \tau_n \leq t.$$

La clase $\mathcal{A}(x)$ de duplas admisibles, con dotación inicial $x > 0$ se define como el conjunto de parejas inversión-consumo (π, c) para las cuales la ecuación (3.1) tiene única solución $V^{x,\pi,c} = \{V_t^{x,\pi,c}\}_{t \in [0,T]}$ tal que $V_t^{x,\pi,c} \geq 0$, casi seguro, para todo $t \in [0, T]$. Se adopta el supuesto que si el proceso de portafolio alcanza el cero antes del tiempo T , permanece allí y no se realizan consumos o inversiones durante el resto del período de inversión.

Ahora se define el problema de maximización de utilidad para la elección óptima de los procesos de inversión y consumo.

Sean $U_1 : [0, T] \times [0, \infty) \rightarrow [-\infty, \infty)$ y $U_2 : [0, \infty) \rightarrow [-\infty, \infty)$ las cuales denotan funciones de utilidad de consumo e inversión respectivamente, que satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) $U_1(t, x) > -\infty$ y $U_2(x) > -\infty$ para todo $t \in [0, T]$ y $x \in (0, \infty)$
- (ii) Para cada $t \in [0, T]$ los mapeos $U_1(t, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $U_2(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son estrictamente crecientes, estrictamente concavos, de clase C^1 en $(0, \infty)$, tal que

$$\lim_{x \downarrow 0, x > 0} \frac{\partial U_1}{\partial x}(t, x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial U_1}{\partial x}(t, x) = 0, \quad \lim_{x \downarrow 0, x > 0} U_2'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U_2'(x) = 0.$$

- (iii) U_1 y $\frac{\partial U_1}{\partial x}$ son continuas en $[0, T] \times (0, \infty)$.

Dado el estado inicial del proceso $\varepsilon(0) \in \{0, 1\}$, sea $\tilde{\mathcal{A}}_i(x)$ la clase de estrategias admisibles inversión-consumo $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$ tal que

$$\mathbb{E}_i \left[\int_0^T U_1(t, c_t)^- dt + U_2(V_T^{x,\pi,c})^- \right] > -\infty,$$

donde $\mathbb{E}_i[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | \varepsilon(0) = i]$. Se define el funcional de utilidad

$$J_i(x; \pi, c) := \mathbb{E}_i \left[\int_0^T U_1(t, c_t) dt + U_2(V_T^{x,\pi,c}) \right], \quad (\pi, c) \in \tilde{\mathcal{A}}_i(x),$$

y se considera el siguiente problema de maximización por consumo y riqueza final.

$$\vartheta_i(x) := \sup_{(\pi, c) \in \tilde{\mathcal{A}}_i(x)} J_i(x; \pi, c), \quad x > 0, \quad i = 0, 1. \quad (3.4)$$

Una dupla inversión-consumo $(\hat{\pi}, \hat{c}) \in \tilde{\mathcal{A}}_i(x)$ se dice óptima para el estado inicial $\varepsilon(0) = i$ y portafolio inicial $x > 0$ si $\vartheta_i(x) = J_i(x; \hat{\pi}, \hat{c})$.

Suponga que si $t \in \Delta_n$ y $\varepsilon(\tau_{n-1}) = i$, con $i \in \{0, 1\}$, entonces

$$\frac{r_i(t) - \mu_i(t)}{h_i(t)} > 0,^4$$

por lo que $\forall t \geq 0$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1}) - \mu_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1})}{h_{\varepsilon(\tau_{n-1})}(t - \tau_{n-1})} \mathbf{1}_{\Delta_n}(t) = \frac{r_t^\dagger - \mu_t^\dagger}{h_t^\dagger} > 0.$$

⁴ Esta condición implica no arbitraje, ver p.ej. Kolesnik y Ratanov [16]

Bajo esta condición, el modelo de mercado es libre de arbitraje y completo. La única medida equivalente (neutral al riesgo) se define vía la densidad de Radon-Nikodym

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} := Z_t, \quad t \in [0, T],$$

donde $Z = \{Z_t\}_{t \in [0, T]}$ es la solución de la EDE lineal

$$dZ_t = Z_{t-}(\varphi_t - 1) d\tilde{N}_t, \quad Z_0 = 1 \quad (3.5)$$

con

$$\varphi_t := \frac{r_t^\dagger - \mu_t^\dagger}{h_t^\dagger \gamma_t^\dagger}, \quad t \geq 0.$$

Bajo \mathbb{Q} , el proceso N_t es un proceso no-homogéneo de Poisson con intensidad estocástica

$$\lambda_t^{\mathbb{Q}} = \varphi_t \gamma_t^\dagger = \frac{r_t^\dagger - \mu_t^\dagger}{h_t^\dagger} > 0, \quad t \geq 0.$$

Sea $H_t := B_t^{-1} Z_t$ el proceso *densidad precio estado*. Entonces,

$$dH_{t-} = H_{t-}[-r_t^\dagger + (\varphi_t - 1)d\tilde{N}_t]. \quad (3.6)$$

Teorema 3.1. *Para todo $(\pi, c) \in \mathcal{A}(x)$ se tiene*

$$\mathbb{E}_i \left[H_T V_T^{x, \pi, c} + \int_0^T H_s c_s ds \right] \leq x, \quad i = 0, 1. \quad (3.7)$$

Demostración. Haciendo uso de la regla del producto para procesos con saltos y la ecuación (3.5) se tiene

$$\begin{aligned} & d(H_t V_t) + H_t c_t dt \\ &= H_t dV_t + V_t dH_t + \pi_t V_t H_t h_t^\dagger (\varphi_t - 1) dN_t + H_t c_t dt \\ &= H_t V_t \pi_t (\mu_t^\dagger - r_t^\dagger + h_t^\dagger \gamma_t^\dagger \varphi_t) dt + H_t V_t [(\varphi_t - 1) + \pi_t h_t^\dagger \varphi_t] d\tilde{N}_t \\ &= H_t V_t [(\varphi_t - 1) + \pi_t h_t^\dagger \varphi_t] d\tilde{N}_t. \end{aligned}$$

Integrando,

$$H_t V_t + \int_0^t H_s c_s ds = x + \int_0^t [(\varphi_t - 1) + \pi_t h_t^\dagger \varphi_t] d\tilde{N}_t.$$

La integral del lado derecho de la igualdad es una \mathbf{F} -martingala local acotada inferiormente, por lema de Fatou (este puede verse p.ej (2.26) de Klebaner [15]) esta es \mathbf{F} -supermartingala, teniendo así (3.7). \square

Ahora se introduce un funcional auxiliar relacionado con el dual convexo de las funciones de utilidad. Sea U la cual denota $U_2(\cdot)$ o $U_1(t, \cdot)$ con $t \in [0, T]$ fijo. Sea I_j la inversa de U'_j , con $j \in \{1, 2\}$ tal que

$$I_j(U_j'(x)) = U_j'(I_j(x)) = x, \quad \forall x > 0.$$

Entonces, I satisfice

$$I_j(y) = \arg \max_{x>0} \{U_j(x) - yx\}, \quad y > 0.$$

En particular,

$$U_j(I_j(y)) - yI_j(y) \geq U_j(x) - yx, \quad \forall x, y > 0. \quad (3.8)$$

Note que $U_j(I_j(y)) - yI_j(y) = U_j^*(y)$, donde $U_j^*(y) := \sup_{x>0} \{U_j(x) - yx\}$ es la transformada de Legendre-Fenchel de $(-\infty, 0) \ni x \mapsto -U_j(-x) \in \mathbb{R}$. El mapeo U_j^* se conoce como el dual convexo de la función de utilidad U .

Para el resto de esta sección se fija el estado inicial $\varepsilon(0) = i \in \{0, 1\}$ y se define el mapeo

$$\mathcal{X}_i(y) := \mathbb{E}_i \left[\int_0^T H_t I_1(t, yH_t) dt + H_T I_2(yH_T) \right].$$

y $\mathcal{Y}_i := (\mathcal{X}_i)^{-1}$. Para cada dotación inicial $x > 0$ se define el proceso $c^x = \{c_t^x\}_{t \in [0, T]}$ y la variable aleatoria G^x como sigue

$$\begin{aligned} c_t^x &:= I_1(t, \mathcal{Y}_i(x)H_t), \quad t \in [0, T], \\ G^x &:= I_2(\mathcal{Y}_i(x)H_T). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Se introducen también los procesos

$$Y_t^x := \mathbb{E} \left[H_T G^x + \int_t^T H_s c_s^x ds \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T]$$

y

$$M_t^x := Y_t^x + \int_0^t H_s c_s^x ds, \quad t \in [0, T].$$

Observe que $Y_0^x = \mathcal{X}_i(\mathcal{Y}_i(x)) = x$ y $Y_t^x \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$. Además, M_t^x satisfice

$$M_t^x = \mathbb{E} \left[H_T G^x + \int_0^T H_s c_s^x ds \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T], \quad (3.10)$$

es decir, el proceso $M^x = \{M_t^x\}_{t \in [0, T]}$ es una \mathbb{F} -martingala. Por Teorema de representación de martingalas⁵ existe un proceso β_t^x , \mathbb{F} -predecible tal que

$$M_t^x = x + \int_0^t \beta_s^x d\tilde{N}_s, \quad t \in [0, T]. \quad (3.11)$$

Entonces, la pareja (Y^x, β^x) satisfice las EDE lineal hacia atrás

$$Y_t^x = H_T G^x + \int_t^T H_s c_s^x ds - \int_t^T \beta_s^x d\tilde{N}_s, \quad t \in [0, T] \quad (3.12)$$

con condición final $Y_T^x = H_T G^x$.

El siguiente es uno de los principales resultados de este trabajo.

⁵ Este resultado puede verse p.ej. en Klebaner [15].

Teorema 3.2. Sean $x > 0$ y $i \in \{0, 1\}$ fijos. La dupla inversión-consumo $(\hat{\pi}, \hat{c})$ definida como $\hat{c}_t := c_t^x$ y

$$\hat{\pi}_t := \frac{\gamma_t^\dagger}{r_t^\dagger - \mu_t^\dagger} \left[1 + \frac{\beta_t^x}{Y_t^x} \right] - \frac{1}{h_t^\dagger}, \quad t \in [0, T] \quad (3.13)$$

pertenecen a $\tilde{\mathcal{A}}_i(x)$ y resuelven el problema óptimo portafolio-consumo (3.4). Además, la función de valor óptimo para la maximización de utilidad (3.4) satisface $\vartheta_i = \mathcal{K}_i \circ \mathcal{Y}_i$ donde

$$\mathcal{K}_i(y) := \mathbb{E}_i \left[\int_0^T U_1(t, I_1(t, yH_t)) dt + U_2(I_2(yH_T)) \right], \quad y > 0.$$

Demostración. Usando (3.6) se tiene

$$d\left(\frac{1}{H_t}\right) = \frac{1}{H_t} \left[(r_t^\dagger + (\varphi_t - 1)\gamma_t^\dagger) dt + \left(\frac{1}{\varphi_t} - 1\right) dN_t \right].$$

Luego,

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t^x}{H_t}\right) &= Y_t^x d\left(\frac{1}{H_t}\right) + \frac{1}{H_t} dY_t^x + \frac{\beta_t^x}{H_t} \left(\frac{1}{\varphi_t} - 1\right) \\ &= \left[\frac{Y_t^x}{H_t} r_t^\dagger - c_t\right] dt + \frac{Y_t^x}{H_t} \left[((\varphi_t - 1) - \frac{\beta_t^x}{Y_t^x}) \gamma_t^\dagger \right] dt + \frac{Y_t^x}{H_t} \left[\left(\frac{1}{\varphi_t} - 1\right) + \frac{\beta_t^x}{\varphi_t Y_t^x} \right] dN_t. \end{aligned}$$

Por (3.13),

$$\left(\frac{1}{\varphi_t} - 1\right) + \frac{\beta_t^x}{\varphi_t Y_t^x} = \hat{\pi}_t h_t^\dagger.$$

Reemplazando β_t^x y usando 3.5 se tiene

$$\begin{aligned} & \left((\varphi_t - 1) - \frac{\beta_t^x}{Y_t^x} \right) \gamma_t^\dagger \\ &= [\varphi_t - 1 - (\pi_t h_t^\dagger \varphi_t - 1 + \varphi_t)] \gamma_t^\dagger \\ &= -\pi_t h_t^\dagger \varphi_t \gamma_t^\dagger \\ &= \pi_t (\mu_t^\dagger - r_t^\dagger) \end{aligned}$$

entonces, $V_T^{x, \hat{\pi}, \hat{c}} = \frac{Y_T^x}{H_T} = G^x$, casi seguro.

Por otro lado, se define un funcional auxiliar

$$L_i(x) = \mathbb{E}_i \left[\int_0^T U_1(t, c_t^x) + U_2(G^x) \right].$$

Usando (3.9) y (3.8) se tienen las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned} U_1(t, c_t) &\leq U_1(c_t^x) + \mathcal{Y}(x) H_t (c_t - c_t^x) \\ U_2(V_t^{x, \pi, c_t}) &\leq U_2(G^x) + \mathcal{Y}(x) H_t (V_t^{x, \pi, c_t} - G^*), \end{aligned}$$

entonces, sumando las anteriores desigualdades e integrando, usando (3.7) y la definición de \mathcal{X}_i se tiene

$$\begin{aligned} J_i(x, \pi, c) &\leq L_i(x) + \mathcal{Y}(x) \mathbb{E}_i \left[\int_0^T H_t(c_t - c_t^x) + H_t(V_t^{x, \pi, c_t} - G^*) \right] \\ &\leq L_i(x) + \mathcal{Y}(x) [x - \mathcal{X}_i(\mathcal{Y}_i(x))] \\ &\leq L_i(x) = J_i(x, \hat{\pi}, \hat{c}_t) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\hat{\pi}_t, \hat{c}_t)$ son óptimos. □

3.1 Ejemplo 1. Portafolio de crecimiento óptimo

Se considera el caso particular en el que el inversionista tiene preferencias representadas por una función de utilidad logarítmica para el consumo y valor de portafolio terminal $U_1(t, c) = \ln c$ and $U_2(x) = \ln x$. Este produce el portafolio con mejor log-retorno esperado sobre el horizonte de inversión $[0, T]$, también conocido como portafolio de crecimiento óptimo (GOP).

En este caso se tiene $I_1(t, y) = I_2(y) = 1/y$ and $\mathcal{X}(y) = (T + 1)/y$, for $y \in (0, \infty)$.

Entonces, $\mathcal{Y}(x) = (T + 1)/x$, para $x \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} c_t^x &= \frac{x}{(T + 1)H_t}, \quad t \in [0, T], \\ G^x &= \frac{x}{(T + 1)H_T}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Por lo que, $M_t^x = x$ para todo $t \in [0, T]$. Resulta que $\beta_t^x = 0$, casi seguro, para $t \in [0, T]$. El proceso óptimo de portafolio es

$$\hat{\pi}_t := \frac{\gamma_t^\dagger}{r_t^\dagger - \mu_t^\dagger} - \frac{1}{h_t^\dagger}, \quad t \in [0, T].$$

y el consumo óptimo es

$$\hat{c}_t := \frac{x B_t}{(T + 1) Z_t} = \frac{V_t^{x, \hat{\pi}, 0}}{T + 1}, \quad t \in [0, T].$$

Además, el proceso de portafolio óptimo $V^{x, \hat{\pi}, \hat{c}}$ satisface

$$V_t^{x, \hat{\pi}, \hat{c}} = V_t^{x, \hat{\pi}, 0} - t \hat{c}_t = V_t^{x, \hat{\pi}, 0} \left(1 - \frac{t}{T + 1} \right), \quad t \in [0, T],$$

y la función de valor óptima es dada por

$$\vartheta_i(x) = (T + 1) \ln x - (T + 1) \ln(T + 1) - \kappa_i(T) \quad x > 0, \quad i = 0, 1.$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_i(T) &= \mathbb{E}_i \left[\int_0^T \ln V_t^{1, \hat{\pi}, 0} dt + \ln V_T^{1, \hat{\pi}, 0} \right] \\ &= \int_0^T m_i(t) dt + m_i(T) \end{aligned}$$

con

$$m_i(t) := \mathbb{E}_i[\ln V_t^{1, \hat{\pi}, 0}]$$

Ahora, note que

$$\ln V_t^{1, \hat{\pi}, 0} = \int_0^t \left[r_s^\dagger - \gamma_s^\dagger - \frac{\mu_s^\dagger - r_s^\dagger}{h_s^\dagger} \right] ds + \sum_{n=1}^{N_t} \ln \left[\left(\frac{\gamma_{\varepsilon_n} h_{\varepsilon_n}}{r_{\varepsilon_n} - \mu_{\varepsilon_n}} \right) (T_n) \right], \quad t \in [0, T].$$

Entonces, por el Corolario 2.1 $m(t) = (m_0(t), m_1(t))$ es solución del sistema de ecuaciones integrales de Volterra de segundo tipo

$$\begin{aligned} m_0(t) &= a_0(t) + \int_0^t f_0(t-s) m_1(s) ds, \\ m_1(t) &= a_1(t) + \int_0^t f_1(t-s) m_0(s) ds, \end{aligned} \tag{3.15}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} a_i(t) &= \int_0^t \left\{ [r_i(s) - \gamma_i(s) + g_i(s)] \bar{F}_i(s) + f_i(s) \ln \left(\frac{\gamma_i(s)}{g_i(s)} \right) \right\} ds \\ &= \int_0^t \left\{ [r_i(s) - \gamma_i(s) + g_i(s)] \bar{F}_i(s) + f_i(s) [\ln \gamma_i(s) - \ln g_i(s)] \right\} ds \tag{*} \\ &= \int_0^t \left\{ [r_i(s) + g_i(s)] \bar{F}_i(s) + [(\ln \gamma_i(s) - \ln g_i(s)) - 1] f_i(s) \right\} ds \tag{**} \end{aligned}$$

con

$$\gamma_i(t) := \frac{f_i(t)}{\bar{F}_i(t)}, \quad t \in [0, T]$$

y

$$g_i(t) := \frac{r_i(t) - \mu_i(t)}{h_i(t)}, \quad t \in [0, T].$$

Recuerde que $h_i(t) \neq 0$ y $g_i(t) > 0$, es decir, los signos de $r_i(t) - \mu_i(t)$ y $h_i(t)$ coinciden.

3.2 Algoritmo y ejemplos

Dado que la solución del sistema de ecuaciones de Volterra de segundo tipo haciendo uso del Teorema 2.3 tiene como hipótesis la existencia de la transformada de Laplace para las funciones f_i y a_i , y en el contexto de GOP las funciones a_i no tienen dicha transformada, se recurre a implementar un algoritmo para la aproximación del sistema (3.15). Para esto, se implementó un algoritmo con base en la regla del trapecio simple para integrales, ya que este método aproxima funciones por medio de dos puntos del integrando, construyendo la función vía la solución de un sistema 2x2, resultado de aplicar el método a ambas ecuaciones integrales. Los otros métodos de aproximación de integrales se descartaron dado que utilizan más de dos puntos del integrando, lo cual nos lleva a un sistema con más variables que ecuaciones.

Para efectos de facilidad en los cálculos se hace un cambio de variables en (3.15) teniendo así

$$\begin{aligned}
m_0(t) &= a_0(t) + \int_0^t m_1(t-s)f_0(s)ds \\
m_1(t) &= a_1(t) + \int_0^t m_0(t-s)f_1(s)ds.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Supóngase que $m_i(t)$ es suave y $m_i(0) = a_i(0) = 0$. Por otro lado, sea $\{h_j\}_{j=1}^N$ una partición de $[0, T]$ tal que $h_j = jh$ con $j \in \mathbb{Z}^+$ y $h_N = T$.

Para el intervalo $[0, h]$ se tiene

$$\begin{aligned}
m_0(h) &= a_0(h) + \int_0^h m_1(h-s)f_0(s)ds \\
&= a_0(h) + \frac{hm_1(h)f_0(0)}{2},
\end{aligned}$$

entonces,

$$2m_0(h) - hm_1(h)f_0(0) = 2a_0(h).$$

De la misma manera se tiene para m_1 obteniendo así el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2m_0(h) - hm_1(h)f_0(0) = 2a_0(h) \\ 2m_1(h) - hm_0(h)f_1(0) = 2a_1(h), \end{cases} \tag{3.17}$$

con solución $m_0(h)$ y $m_1(h)$.

Para el segundo intervalo, $[0, 2h]$, se tiene

$$\begin{aligned}
m_0(2h) &= a_0(2h) + \int_0^{2h} m_1(2h-s)f_0(s)ds \\
&= a_0(2h) + \int_0^h m_1(2h-s)f_0(s)ds + \int_h^{2h} m_1(2h-s)f_0(s)ds \\
&= a_0(2h) + \frac{h}{2}[m_1(h)f_0(h) + m_1(2h)f_0(0) + m_1(h)f_0(h)]
\end{aligned}$$

Entonces,

$$2m_0(2h) - 2a_0(2h) - hm_1(2h)f_0(0) = 2hm_1(h)f_0(h).$$

De la misma forma se tiene para m_1 teniendo así el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2m_0(2h) - 2a_0(2h) - hm_1(2h)f_0(0) = 2hm_1(h)f_0(h) \\ 2m_1(2h) - 2a_1(2h) - hm_0(2h)f_1(0) = 2hm_0(h)f_1(h), \end{cases} \tag{3.18}$$

con solución $m_0(2h)$ y $m_1(2h)$.

En forma general, para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}
m_0(kh) &= a_0(kh) + \int_0^{kh} m_1(kh - s) f_0(s) ds \\
&= a_0(kh) + \sum_{i=1}^k \int_{h(i-1)}^{hi} m_1(kh - s) f_0(s) ds \\
&= a_0(kh) + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^k [m_1(h(k-i)) f_0(ih) + m_1(h(k+1-i)) f_0(h(i-1))]
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
&2m_0(kh) - 2a_0(kh) - hm_1(kh) f_0(0) \\
&= hm_1(h(k-1)) f_0(h) + \sum_{i=2}^k [m_1(h(k-i)) f_0(ih) + m_1(h(k+1-i)) f_0(h(i-1))].
\end{aligned}$$

De la misma forma se tiene para m_1 teniendo así el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
2m_0(kh) - 2a_0(kh) - hm_1(kh) f_0(0) \\
= hm_1(h(k-1)) f_0(h) + \sum_{i=2}^k [m_1(h(k-i)) f_0(ih) + m_1(h(k+1-i)) f_0(h(i-1))] \\
2m_1(kh) - 2a_1(kh) - hm_0(kh) f_1(0) \\
= hm_0(h(k-1)) f_1(h) + \sum_{i=2}^k [m_0(h(k-i)) f_1(ih) + m_0(h(k+1-i)) f_1(h(i-1))],
\end{array} \right.$$

donde $m_{i-1}(h(k-1)) \forall i \in 0, 1$ y $\forall k \in \mathbb{N}$ son conocidos.

A continuación se aplica el algoritmo anterior para encontrar $m_i(t) := \mathbb{E}_i[\ln V_t^{1, \hat{\pi}_i, 0}]$ en los casos en que las distribuciones de los tiempos inter-arribo son hiperexponencial, Weibull y logística. El lenguaje de programación en el que se implementó el algoritmo es Python. Cabe resaltar que los parámetros se escogieron de forma arbitraria teniendo solo en cuenta la condición de no arbitraje. En los ejemplos siguientes se toman g_i constantes, esto quiere decir que $r_i(t) - \mu_i(t)$ y $h_i(t)$ son de comportamientos similares. Además, se puede escribir

$$\hat{\pi}_i(t) = \frac{1}{\mu_i(t) - r_i(t)} [g_i - \gamma_i(t)],$$

donde $\hat{\pi}_i$ depende del comportamiento de $\mu_i(t) - r_i(t)$.

1. Ejemplo hiperexponencial

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= \frac{1}{2}(2e^{-2t} + e^{-t}) \quad \text{y} \quad f_1(t) = \frac{1}{2}(3e^{-3t} + e^{-t}) \\
\bar{F}_0(t) &= \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{-t}) \quad \text{y} \quad \bar{F}_1(t) = \frac{1}{2}(e^{-3t} + e^{-t}),
\end{aligned}$$

lo que implica

$$\gamma_0(t) = \frac{e^{-2t}}{e^{-2t} + e^{-t}} + 1 \quad \gamma_1(t) = \frac{2e^{-3t}}{e^{-3t} + e^{-t}} + 1,$$

con valores de $g_0 = 0.1, 0.7, 1.5, 2.0$ y $g_1 = 0.1, 0.5, 1.0, 2.5$. Las trayectorias de las funciones m_i con parámetros respectivos pueden verse en la Figura 2.

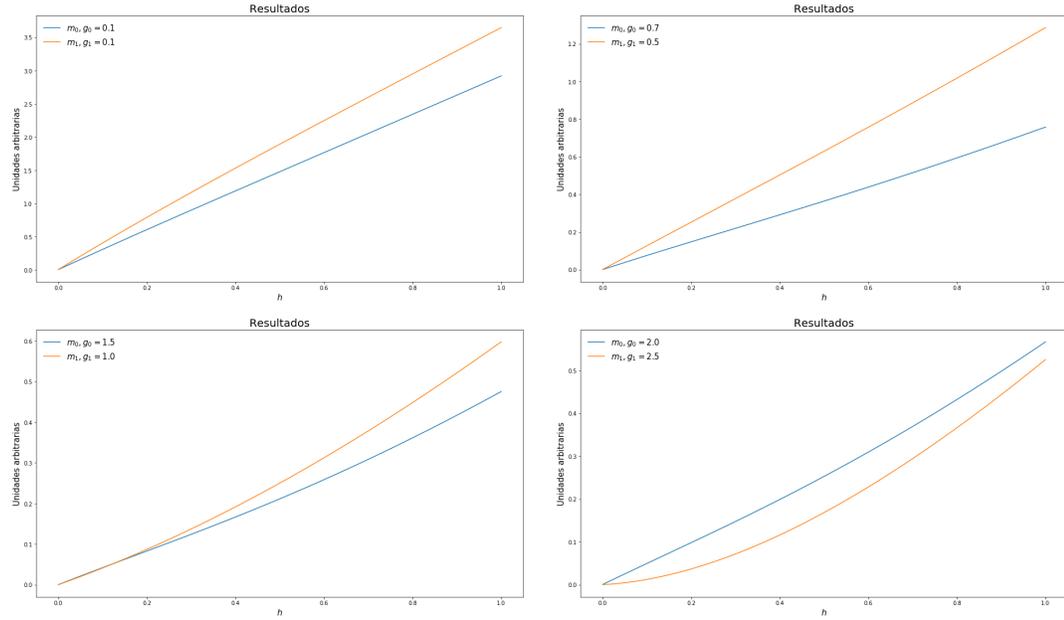


Figura 2

Si se supone que $\mu_0(t) - r_0(t) = \frac{1}{2(e^{-2t} + e^{-t})}$ y $\mu_1(t) - r_1(t) = \frac{1}{2(e^{-3t} + e^{-t})}$, se tienen los $\hat{\pi}_i(t)$ correspondientes a los valores de g . Las trayectorias se observan en la Figura 3.

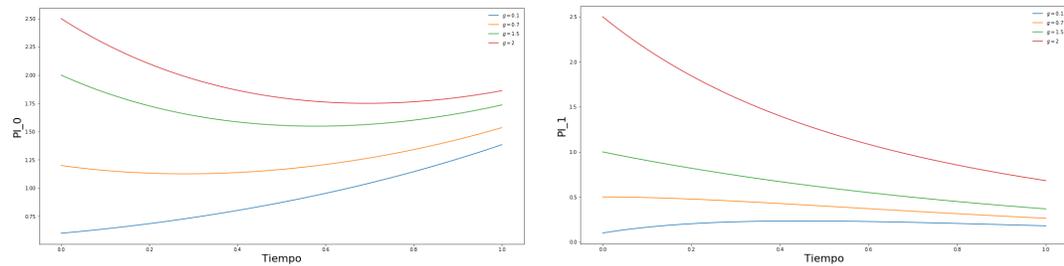


Figura 3

2. Ejemplo Weibull

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 2t \exp(-t^2) \quad \text{y} \quad f_1(t) = 3t^2 \exp(-t^3) \\ \bar{F}_0(t) &= \exp(-t^2) \quad \text{y} \quad \bar{F}_1(t) = \exp(-t^3). \end{aligned}$$

entonces,

$$\gamma_0(t) = 2t \quad \gamma_1(t) = 3t^2,$$

con valores de $g_0 = 0.1, 0.7, 1.5, 2.0$ y $g_1 = 0.1, 0.5, 1.0, 2.5$. Las trayectorias de m_i se pueden observar en la Figura 4.

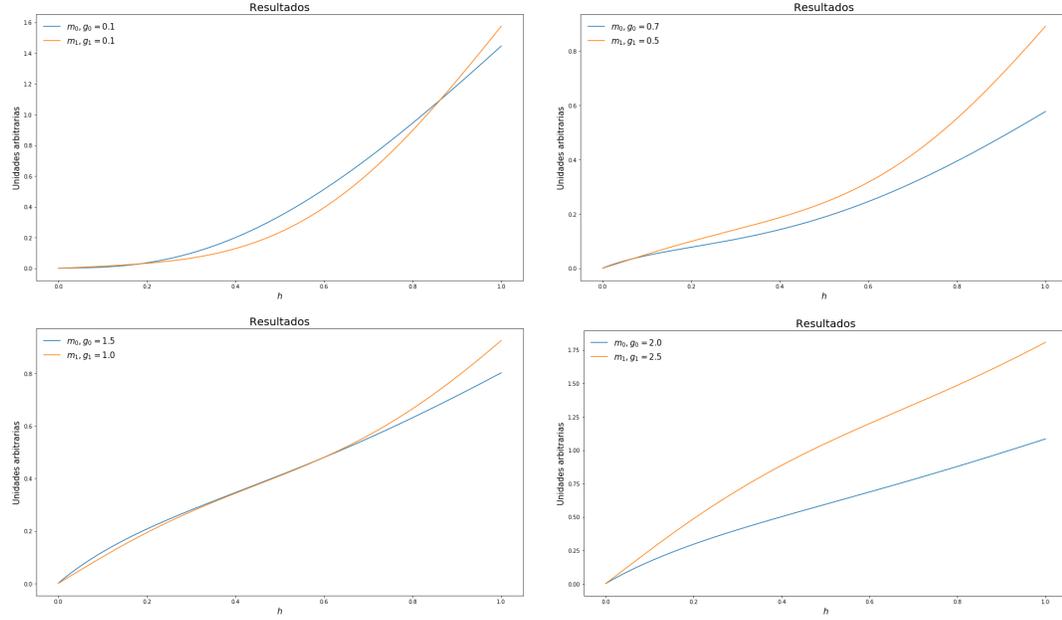


Figura 4

Si se supone que $\mu_0(t) - r_0(t) = e^{2t}$ y $\mu_1(t) - r_1(t) = e^{3t}$, se tienen los $\hat{\pi}_i(t)$ correspondientes a los valores de g . Las trayectorias se observan en la Figura 5.

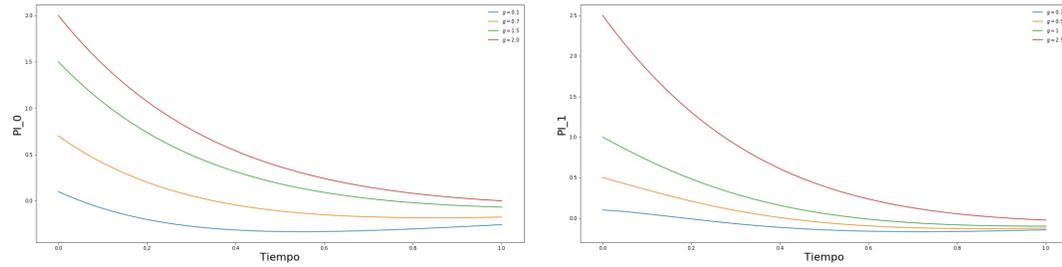


Figura 5

3. Ejemplo logística

$$f_0(t) = \frac{2 \exp(-2t)}{(1 + \exp(-2t))^2} \quad \text{y} \quad f_1(t) = \frac{3 \exp(-3t)}{(1 + \exp(-3t))^2}$$

$$\bar{F}_0(t) = \frac{\exp(-2t)}{1 + \exp(-2t)} \quad \text{y} \quad \bar{F}_1(t) = \frac{\exp(-3t)}{1 + \exp(-3t)}$$

entonces,

$$\gamma_0(t) = \frac{2}{1 + \exp(-2t)} \quad \gamma_1(t) = \frac{3}{1 + \exp(-3t)}.$$

Para este ejemplo se tiene que $g_0 = 0.2, 0.8, 1.0, 2.5$ y $g_1 = 0.3, 0.5, 1.5, 3.0$, obteniendo las funciones m_i las cuales se observan en la Figura 6.

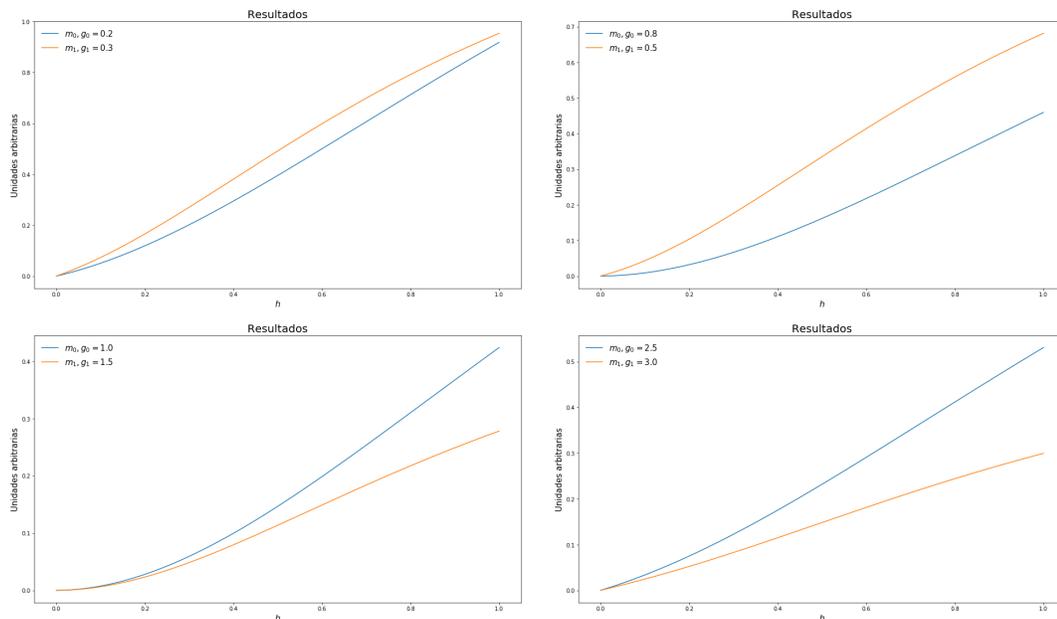


Figura 6

Si se supone que $\mu_0(t) - r_0(t) = \frac{e^{2t}}{100}$ y $\mu_1(t) - r_1(t) = \frac{e^{3t}}{100}$, se tienen los $\hat{\pi}_i(t)$ correspondientes a los valores de g . Las trayectorias se observan en la Figura 7.

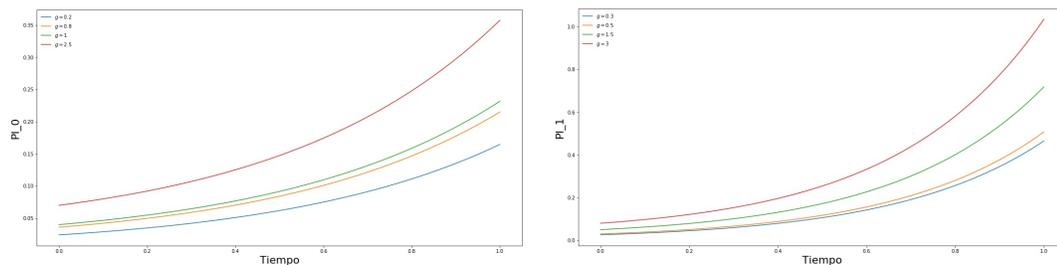


Figura 7

4 Conclusiones

Se caracterizó por medio de un sistema de ecuaciones acopladas de Volterra de segundo tipo la función generadora de momentos para el log-retorno del activo riesgoso, conociendo así su valor esperado para algunas funciones de distribución diferentes a la exponencial. También se encontró el compensador para el proceso de conteo en este contexto, lo cual permitió hacer uso del método de martinagala para la elección óptima del inversionista.

Se resolvió el problema de optimización de portafolio con consumo, teniendo como resultado, la dupla inversión-consumo en el caso no Markoviano, la cual depende de las funciones de riesgo, la volatilidad del activo (saltos), tasas de interés y tendencias, en el mismo sentido, a diferencia de

las funciones de riesgo, que en el trabajo de Lopez y Serrano [18]. Como ejemplo se consideró un inversionista con preferencias logarítmicas, teniendo de forma explícita las inversiones óptimas en escenarios con diferentes distribuciones en los tiempos inter-arribo.

Cabe resaltar que en el contexto no Markoviano no se tiene la conexión con las ecuaciones diferenciales parciales, ni con el método de la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman, por lo contrario, la relación en este contexto se tiene por medio de los sistemas de ecuaciones integrales de Volterra de segundo tipo.

References

- [1] Bellman Richard y Kalaba Robert, Dynamic programming and statistical communication theory, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, volume 43, number 8, 749, 1957, National Academy of Sciences.
- [2] Bensoussan Alain y Keppo Jussi y Sethi Suresh P, Optimal consumption and portfolio decisions with partially observed real prices, *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, volume 19, number 2, 215-236, 2004, Elsevier.
- [3] Capponi Agostino y Figueroa-Lopez Jose E, Dynamic Portfolio Optimization with a Defaultable Security and Regime-Switching, *Mathematical Finance*, volume 24, number 2, 2017-249, 2014, Wiley Online Library.
- [4] Ceci Claudia, Optimal Investment Problems with Marked Point Processes, *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI*, 385–412, 2011, Springer.
- [5] Di Crescenzo Antonio and Ratanov Nikita, On jump-diffusion processes with regime switching: martingale approach. *ALEA*, 12(2), 573-596.
- [6] Elliott Robert J y Siu Tak Kuen, Robust optimal portfolio choice under Markovian regime-switching model ,*Methodology and Computing in Applied Probability*, volume 11, number 2, 145-157, 2009, Springer.
- [7] Elliott Robert J y Siu Tak Kuen, Robust optimal portfolio choice under Markovian regime-switching model, *Methodology and Computing in Applied Probability*, volume 11, number 2, 145-157,2009, Springer.
- [8] Elton Edwin J y Gruber Martin J, On the Maximization of the Geometric Mean with Lognormal Return Distribution: Erratum, *Management Science*, volume 21, number 5, 610-610, 1975, Informs.
- [9] Fei Weiyin, Optimal consumption and portfolio under inflation and Markovian switching, *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, volume 85, number 2 , 272-285, 2013, Taylor & Francis.
- [10] Jeanblanc Monique and Rutkowski Marek, Default risk and hazard process, *Mathematical Finance Bachelier Congress 2000*,281–312, 2002, Springer.
- [11] Jeanblanc Monique, Yor Marc y Chesney Marc. *Mathematical methods for financial markets*. Springer Science and Business. 2009.
- [12] Karatzas, I., & Shreve, S. E. *Methods of mathematical finance (Vol. 39, pp. xvi+-407)*, (1998). New York: Springer.
- [13] Karr Alan, *Point processes and their statistical inference*, 2017, Routledge.

- [14] Kelly Jr John L, A new interpretation of information rate, The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and Practice, 24-34, 2011, World Scientific.
- [15] Klebaner Fima C, Introduction to stochastic calculus with applications, 2012, World Scientific Publishing Company.
- [16] Kolesnik Alexander D y Ratanov Nikita. Telegraph process and option pricing. Heidelberg: Springer, 2013
- [17] Linz Peter, Analytical and numerical methods for Volterra equations, volume 7, 1985, Siam.
- [18] Lopez Oscar y Serrano Rafael, Martingale approach to optimal portfolio-consumption problems in Markov-modulated pure-jump models, Stochastic Models, volume 31, number 2, 261-291, 2015, Taylor & Francis.
- [19] Maier Steven F y Peterson David W y Vander Weide James H, monte carlo investigation of characteristics of optimal geometric mean portfolios, journal of Financial and Quantitative Analysis, volume 12, number 2, 215.233, 1977, Cambridge University Press.
- [20] Merton Robert, Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case. Review of Economics and Statistics 51 (3), 247-257, 1969.
- [21] Ratanov Nikita, Damped jump-telegraph processes, Statistics & Probability Letters, volume 83, number 10, 2282-2290, 2013, Elsevier.
- [22] Ratanov Nikita, Option pricing under jump-diffusion processes with regime switching, Methodology and Computing in Applied Probability, volume 18, number 3, 829-845, 2016, Springer.
- [23] Ratanov Nikita, Telegraph processes with random jumps and complete market models, Methodology and Computing in Applied Probability, volume 17, number 3, 677-695, 2015, Springer.
- [24] Scaillet Olivier, Treccani Adrien y Trevisan Christopher, High-Frequency Jump Analysis of the Bitcoin Market, Swiss Finance Institute Research Paper No. 17-19. 2017.